Майрансаев З.Р., Чернышев А.Б.

Использование функции Грина в импульсных системах управления

*ФГБОУ ВО «Северо-Кавказский горно-металлургический институт (государственный технологический университет)»
(Россия, Владикавказ)*

*ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет», институт сервиса, туризма и дизайна (филиал)
(Россия, Пятигорск)*

doi: 10.18411/lj-12-2018-179

idsp: ljjournal-12-2018-179

Аннотация

В работе рассмотрен процесс формирования импульса в результате мгновенного точечного воздействия. Воздействие представлено в виде функции Грина для отрезка, представленной в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям. Показан процесс изменения формы импульса с течением времени.

Ключевые слова: функция Грина, импульсные системы, распределенные системы, точечный источник, ряд Фурье.

Во многих технических устройствах применяется метод импульсного управления. Этот метод позволяет экономить энергоресурсы. Также применение импульсного управления требуют некоторые технологические процессы [1,2]. Рассмотрим применение этого метода для систем с распределенными параметрами. Системы с распределенными параметрами – это системы математическая модель, которых описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных. Использование таких математических моделей связано с необходимостью учитывать в процессе управления не только временной параметр, но и пространственные координаты объекта [3,4].

Пусть объект с распределенными параметрами имеет только одну пространственную координату, предположим это тонкий однородный стержень. Рассмотрим процесс распространения тепла в стержне. Предполагаем, что боковая поверхность стержня теплоизолированная и на его концах поддерживается условно нулевая температура. В начальный момент времени температура внутри стержня также равна нулю во всех его точках. Пусть в некоторый момент времени τ в некоторой точке ξ на стержень оказывается мгновенное импульсное воздействие [5]. Значение температуры в любой точке x в любой момент времени t , вызванной действием мгновенного точечного источника, действующего в момент τ в точке ξ , определяется с помощью функции Грина, представляющей собой бесконечный ряд Фурье [6,7]:

$$G(x, t, \xi, \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 (t - \tau) \right] \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi. \quad (1)$$

В начале процесса при $t=0$ и $\tau=0$:

$$\exp \left[- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 (t - \tau) \right] = 1;$$

Формула (1) примет вид:

$$T(x, \xi) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi;$$

Предположим, что импульсный источник оказывает воздействие в точке

$$\xi = \frac{l}{4},$$

где l – длина стержня.

Тогда:

$$T(x, \xi) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{4} \sin \frac{\pi n}{l} x;$$

Для первых шести гармоник ряда Фурье, получим:

$$T_1(x) = \frac{2}{l} \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{l} x = \frac{\sqrt{2}}{l} \sin \frac{\pi}{l} x; A_1 = \frac{\sqrt{2}}{l}; T_1\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{1}{l};$$

$$T_2(x) = \frac{2}{l} \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{2\pi}{l} x = \frac{2}{l} \sin \frac{2\pi}{l} x; A_2 = \frac{2}{l}; T_2\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{2}{l};$$

$$T_3(x) = \frac{2}{l} \sin \frac{3\pi}{4} \sin \frac{3\pi}{l} x = \frac{\sqrt{2}}{l} \sin \frac{3\pi}{l} x; A_3 = \frac{\sqrt{2}}{l}; T_3\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{1}{l};$$

$$T_4(x) = \frac{2}{l} \sin \pi \sin \frac{4\pi}{l} x = 0; A_4 = 0; T_4\left(\frac{l}{4}\right) = 0;$$

$$T_5(x) = \frac{2}{l} \sin \frac{5\pi}{4} \sin \frac{5\pi}{l} x = -\frac{\sqrt{2}}{l} \sin \frac{5\pi}{l} x; A_5 = \frac{\sqrt{2}}{l}; T_5\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{1}{l};$$

$$T_6(x) = \frac{2}{l} \sin \frac{3\pi}{2} \sin \frac{6\pi}{l} x = -\frac{2}{l} \sin \frac{6\pi}{l} x; A_6 = \frac{2}{l}; T_6\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{2}{l};$$

$$A_n = \left| \frac{2}{l} \sin \frac{\pi n}{4} \xi \exp \left[- \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 t \right] \right|.$$

A_n – амплитуда сигнала n -й гармоники ряда.

В результате совместного воздействия бесконечного числа гармоник ряда в начальный момент времени в точке приложения воздействия будет формироваться сигнал, показанный на рисунке 1.

Рис. 1. Процесс формирования сигнала (при $n=6$ и при $n \rightarrow \infty$)

Таким образом, полагая, что на вход рассматриваемого объекта поступило единичное импульсное возмущение, приложенное в точке ξ_0 в момент времени τ_0 , на выходе получим:

$$T(x, t) = \int_0^l \int_0^t G(x, t, \xi, \tau) \delta(\xi - \xi_0) \delta(\tau - \tau_0) d\xi d\tau = G(x, t, \xi_0, \tau_0).$$

Зависимость распределения температуры в стержне от времени, в результате действия источника в точке $\xi=l/4$, можно представить в виде графика (рис. 2). ($t_1 < t_2 < \dots < t_5$). Импульс, вызванный воздействием мгновенного точечного источника, с течением времени убывает и принимает симметричное положение относительно середины отрезка.

Рис. 2. Пространственно-временная зависимость распределения температуры

Если точечных источников несколько, то очевидно, что импульсы, создаваемые ими, будут оказывать взаимное воздействие друг на друга. Необходимо также учитывать, что в процессе формирования температурного поля, включение источников подразумевается в различные моменты времени.

1. Дровосекова Т.И., Рудакова Т.А., Цаплева В.В. Моделирование обогрева тепличных помещений с использованием геотермальных вод // Современная наука и инновации. – 2018. – № 1(21). – С. 8-14.
2. Ляшенко А.Л. Решение задач моделирования. – Пятигорск: ПГТУ, 2005. – 103 с.

3. Рапопорт Э.Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2003. – 299 с.
 4. Martirosyan A.A., Martirosyan K.V., Chernyshev A.B. Methods of distributed system's structured modelling//В сборнике: Proceedings of the 2016 IEEE North West Russia Section Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conference, EIConRusNW 2016. С. 283-289.
 5. Чернышев А.Б., Козлов В.А., Багдамян В.Е. Оценка интервалов времени включения управляющих воздействий в процессе стабилизации температурного поля //Научное обозрение. – 2013. – № 5. – С. 98-104.
 6. Chernyshev A.B., Martirosyan K.V., Martirosyan A.V. Analysis of the nonlinear distributed control system's sustainability // Journal of Mathematics and Statistics. –2014. –Т. 10. № 3. – С. 316-321.
 7. Чернышев А.Б., Антонов В.Ф., Ильюшин Ю.В. Моделирование релейно-импульсных распределенных систем – Пятигорск: изд-во ППТТУ, 2012. – 248 с.
-