Вавилов В.А.

Исследование функционирующей в полумарковской среде RQ-системы с вызываемыми заявками

*Национальный исследовательский Томский государственный университет
(Россия, Томск)*

doi: 10.18411/lj-12-2018-173

idsp: ljournal-12-2018-173

Аннотация

В работе рассматривается RQ-система (retrial queue, система с повторными вызовами) с простейшим входящим потоком заявок, ожиданием на орбите и функционированием в случайной (полумарковской) среде. Методом асимптотического анализа исследуются средние характеристики, величины отклонения, плотность распределения вероятностей значений процесса изменения состояний системы.

Ключевые слова: система с повторными вызовами, орбита, случайная среда, полумарковский процесс, метод асимптотического анализа

1. Построение математической модели. Во многих современных системах обслуживания, таких как call-центры, в целях повышения эффективности функционирования и минимизации времени простоя операторы не только принимают входящие вызовы (заявки), но и, в случае отсутствия входящих, для продвижения услуг компании совершают исходящие звонки клиентам. Такого рода системы моделируются RQ-системами с вызываемыми заявками [1, 2]. Деятельность операторов зависит от ряда случайных факторов, которые непосредственно влияют на успешность дозвона и время работы с каждым конкретным клиентом. Совокупность таких факторов называют случайной средой. В качестве математических моделей случайной среды рассматривается цепь Маркова с непрерывным временем [3, 4], диффузионный процесс [5], полумарковский процесс [6, 7].

В данной работе рассмотрим RQ-систему, на вход которой поступает простейший с параметром λ поток заявок. Заявка, заставшая в момент поступления прибор свободным, начинает обслуживаться в течение экспоненциально распределённого промежутка времени с параметром μ_1 . По завершении обслуживания заявка покидает систему. Заявка, заставшая в момент поступления прибор занятым, мгновенно уходит на орбиту. Повторное обращение заявок к прибору из орбиты происходит после случайной задержки, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром γ . Число заявок на орбите обозначим i . Если прибор свободен, он вызывает для обслуживания дополнительные заявки из внешней среды с интенсивностью α . Вызываемая заявка занимает прибор для обслуживания, длительность которого имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_2 . Таким образом, прибор RQ-системы может находиться в одном из трёх состояний: $k = 0$, если он свободен; $k = 1$, если он занят обслуживанием заявки; $k = 2$, если на приборе реализуется обслуживание вызываемой заявки.

Сеть функционирует в случайной среде. В качестве математической модели случайной среды рассмотрим полумарковский процесс $s(t)$ с непрерывным временем t , то есть такой дискретный случайный процесс, который принимает значения из конечного множества состояний $s = 1, 2, \dots, S$ и для которого вложенная по моментам времени t_n изменения состояний цепь $s(t_n)$ является Марковской. Времена пребывания этого процесса в различных состояниях являются условно независимыми

случайными величинами, распределение вероятностей значений которых зависит лишь от номера состояния полумарковского процесса.

Для определения полумарковского процесса $s(t)$ зададим стохастическую матрицу одношаговых вероятностей $p_{s_1 s_2}$ переходов вложенной цепи Маркова $p_{s_1 s_2} = P(s(t_{n+1}) = s_2 | s(t_n) = s_1)$, будем полагать, что $p_{ss} = 0$. Понятно, что $\sum_{s_2=1}^S p_{s_1 s_2} = 1$, $s = 1, 2, \dots, S$. Также зададим набор функций распределения $G_s(x)$ значений времени пребывания полумарковского процесса в s -м состоянии.

Влияние случайной среды на функционирование RQ-системы определяется зависимостью интенсивностей μ_1 и μ_2 обслуживания заявок от состояний $s(t) = s$ случайной среды, то есть $\mu_1 = \mu_1(s)$, $\mu_2 = \mu_2(s)$. Вероятности окончания обслуживания заявки и вызываемой заявки на приборе за бесконечно малый промежуток времени Δt соответственно равны $\mu_1(s)\Delta t + o(\Delta t)$ и $\mu_2(s)\Delta t + o(\Delta t)$.

Трехмерный случайный вектор $\{k(t), i(t), s(t)\}$ является полумарковским процессом. Для исследования описанной модели марковизируем процесс $\{k(t), i(t), s(t)\}$ методом дополнительной переменной. Введем переменную $\zeta(t)$, имеющую смысл длины интервала времени от момента t до момента смены текущего состояния случайной среды, тогда процесс изменения значений вектора $\{k(t), i(t), s(t), \zeta(t)\}$ является марковским процессом.

Обозначим $P(k(t) = k, i(t) = i, s(t) = s, \zeta(t) < \zeta) = P_k(i, s, \zeta, t)$.

В любой момент времени должно выполняться условие нормировки

$$\sum_{k=0}^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=1}^S P_k(i, s, \infty, t) = 1.$$

Для распределения $P_k(i, s, \zeta, t)$ можно составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0(i, s, \zeta, t)}{\partial t} + (\alpha + \lambda + i\gamma) P_0(i, s, \zeta, t) &= \frac{\partial P_0(i, s, \zeta, t)}{\partial \zeta} - \frac{\partial P_0(i, s, 0, t)}{\partial \zeta} + \\ &+ \mu_1(s) P_1(i, s, \zeta, t) + \mu_2(s) P_2(i, s, \zeta, t) + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^S \frac{\partial P_0(i, s_1, 0, t)}{\partial \zeta} p_{s_1 s}, \\ \frac{\partial P_1(i, s, \zeta, t)}{\partial t} + (\lambda + \mu_1(s)) P_1(i, s, \zeta, t) &= \frac{\partial P_1(i, s, \zeta, t)}{\partial \zeta} - \frac{\partial P_1(i, s, 0, t)}{\partial \zeta} + \\ &+ \lambda P_0(i, s, \zeta, t) + (i+1)\gamma P_0(i+1, s, \zeta, t) + \lambda P_1(i-1, s, \zeta, t) + \\ &+ G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^S \frac{\partial P_1(i, s_1, 0, t)}{\partial \zeta} p_{s_1 s}, \\ \frac{\partial P_2(i, s, \zeta, t)}{\partial t} + (\lambda + \mu_2(s)) P_2(i, s, \zeta, t) &= \frac{\partial P_2(i, s, \zeta, t)}{\partial \zeta} - \frac{\partial P_2(i, s, 0, t)}{\partial \zeta} + \\ &+ \alpha P_0(i, s, \zeta, t) + \lambda P_2(i-1, s, \zeta, t) + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^S \frac{\partial P_2(i, s_1, 0, t)}{\partial \zeta} p_{s_1 s}. \end{aligned} \quad (1)$$

Систему (1) будем исследовать методом асимптотического анализа [8] в условиях большой задержки $\gamma \rightarrow 0$. Для этого в (1) выполним замены:

$$\gamma = \varepsilon^2, \quad \varepsilon^2 t = \tau, \quad \varepsilon^2 i = x + \varepsilon y, \quad P_k(i, s, t) / \varepsilon = H_k(y, s, \tau, \varepsilon), \quad (2)$$

тогда получим систему вида

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \frac{\partial H_0(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_0(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \\
& + (\alpha + \lambda + x + \varepsilon y) H_0(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) = \mu_1(s) H_1(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) + \\
& + \mu_2(s) H_2(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial H_0(y, s_1, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} p_{s_1 s}, \\
& \varepsilon^2 \frac{\partial H_1(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_1(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \\
& + (\lambda + \mu_1(s)) H_1(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) = \lambda H_1(y - \varepsilon, s, \zeta, \tau, \varepsilon) + \\
& + (x + \varepsilon(y + \varepsilon)) H_0(y + \varepsilon, s, \zeta, \tau, \varepsilon) + \lambda H_0(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) + \\
& + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial H_1(y, s_1, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} p_{s_1 s}, \\
& \varepsilon^2 \frac{\partial H_2(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_2(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \\
& + (\lambda + \mu_2(s)) H_2(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) = \alpha H_0(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) + \\
& + \lambda H_2(y - \varepsilon, s, \zeta, \tau, \varepsilon) + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial H_2(y, s_1, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} p_{s_1 s}. \quad (3)
\end{aligned}$$

2. Исследование асимптотических средних характеристик. Под асимптотическими средними характеристиками RQ-систем с вызываемыми заявками, будем понимать распределение вероятностей $R_k(x)$ состояний k канала и предельную функцию $x(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^2 i(\tau / \varepsilon^2))$, имеющую смысл асимптотического среднего нормированного числа заявок в системе.

В системе (3) положим $\varepsilon \rightarrow 0$ и, полагая, что существуют пределы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_k(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) = H_k(y, s, \zeta, \tau), \quad (4)$$

получим систему

$$\begin{aligned}
(\alpha + \lambda + x) H_0(y, s, \zeta, \tau) &= \frac{\partial H_0(y, s, \zeta, \tau)}{\partial \zeta} - \frac{\partial H_0(y, s, 0, \tau)}{\partial \zeta} + \\
&+ \mu_1(s) H_1(y, s, \zeta, \tau) + \mu_2(s) H_2(y, s, \zeta, \tau) + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial H_0(y, s_1, 0, \tau)}{\partial \zeta} p_{s_1 s}, \\
\mu_1(s) H_1(y, s, \zeta, \tau) &= \frac{\partial H_1(y, s, \zeta, \tau)}{\partial \zeta} - \frac{\partial H_1(y, s, 0, \tau)}{\partial \zeta} + \\
&+ (\lambda + x) H_0(y, s, \zeta, \tau) + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial H_1(y, s_1, 0, \tau)}{\partial \zeta} p_{s_1 s}, \\
\mu_2(s) H_2(y, s, \zeta, \tau) &= \frac{\partial H_2(y, s, \zeta, \tau)}{\partial \zeta} - \frac{\partial H_2(y, s, 0, \tau)}{\partial \zeta} + \\
&+ \alpha H_0(y, s, \zeta, \tau) + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial H_2(y, s_1, 0, \tau)}{\partial \zeta} p_{s_1 s}. \quad (5)
\end{aligned}$$

Решение $H_k(y, s, \zeta, \tau)$ системы (5) будем искать в виде

$$H_k(y, s, \zeta, \tau) = Q_k(x, s, \zeta) H(y, \tau). \quad (6)$$

Тогда $Q_k(x, s, \zeta)$, имеющая смысл условного совместного распределения вероятностей состояний k канала и s среды при условии $x(\tau) = x$, определяется системой вида

$$\begin{aligned}
 (\alpha + \lambda + x)Q_0(x, s, \zeta) &= \frac{\partial Q_0(x, s, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial Q_0(x, s, 0)}{\partial \zeta} + \\
 &+ \mu_1(s)Q_1(x, s, \zeta) + \mu_2(s)Q_2(x, s, \zeta) + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial Q_0(x, s_1, 0)}{\partial \zeta} p_{s_1 s}, \\
 \mu_1(s)Q_1(x, s, \zeta) &= \frac{\partial Q_1(x, s, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial Q_1(x, s, 0)}{\partial \zeta} + \\
 &+ (\lambda + x)Q_0(x, s, \zeta) + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial Q_1(x, s_1, 0)}{\partial \zeta} p_{s_1 s}, \\
 \mu_2(s)Q_2(x, s, \zeta) &= \frac{\partial Q_2(x, s, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial Q_2(x, s, 0)}{\partial \zeta} + \\
 &+ \alpha Q_0(x, s, \zeta) + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial Q_2(x, s_1, 0)}{\partial \zeta} p_{s_1 s} \quad (7)
 \end{aligned}$$

и условием нормировки

$$\sum_{k=0}^2 \sum_{s=1}^s Q_k(x, s, \infty) = 1. \quad (8)$$

Будем полагать, что $Q_k(x, s, \zeta)$ известны, если удастся каким либо образом решить систему (8).

Далее покажем, что $x = x(\tau)$ является детерминированной функцией.

В системе (3) функции $H_k(y \pm \varepsilon, s, \zeta, \tau, \varepsilon)$ разложим в ряд по приращениям аргумента y с точностью до $o(\varepsilon)$, получим

$$\begin{aligned}
 &- \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_0(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + (\alpha + \lambda + x + \varepsilon y) H_0(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) = \\
 &= \frac{\partial H_0(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} - \frac{\partial H_0(y, s, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} + \mu_1(s) H_1(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) + \\
 &+ \mu_2(s) H_2(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial H_0(y, s_1, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} p_{s_1 s}, \\
 &- \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_1(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \mu_1(s) H_1(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) = \\
 &= \frac{\partial H_1(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} - \frac{\partial H_1(y, s, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} - \varepsilon \lambda \frac{\partial H_1(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \\
 &+ (x + \varepsilon y) H_0(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) + \varepsilon x \frac{\partial H_0(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \\
 &+ G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial H_1(y, s_1, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} p_{s_1 s} + o(\varepsilon), \\
 &- \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_2(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \mu_2(s) H_2(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial H_2(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} - \frac{\partial H_2(y, s, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} + \alpha H_0(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) - \\
&- \varepsilon \lambda \frac{\partial H_2(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial H_2(y, s_1, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} p_{s_1 s} + o(\varepsilon). \quad (9)
\end{aligned}$$

Уравнения системы (9) просуммируем по k и по s , при $\zeta \rightarrow \infty$ поделим на ε обе части полученного уравнения, выполним предельный переход (4), учтём (6), получим

$$\begin{aligned}
-x'(\tau) \sum_{k=0}^2 \sum_{s=1}^s Q_k(x, s) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} = & \left\{ x \sum_{s=1}^s Q_0(x, s) - \lambda \sum_{s=1}^s Q_1(x, s) - \right. \\
& \left. - \lambda \sum_{s=1}^s Q_2(x, s) \right\} \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Учтем условие нормировки (8), обозначим

$$R_k(x) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^s Q_k(x, s, \zeta), \quad (10)$$

заметим, что $R_k(x)$ – распределение вероятностей состояний канала, получим

$$\{x'(\tau) + xR_0(x) - \lambda(R_1(x) + R_2(x))\} \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} = 0.$$

Поскольку производная плотности распределения $H(y, \tau)$ не может тождественно равняться нулю, следовательно, функция $x = x(\tau)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$x'(\tau) = -xR_0(x) + \lambda(R_1(x) + R_2(x)) = \lambda - (\lambda + x)R_0(x). \quad (11)$$

Получили, что $x = x(\tau)$ является детерминированной функцией.

3. Величины отклонения нормированного числа заявок от среднего.

Рассмотрим процесс $y(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ((\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2) - x(\tau))/\varepsilon)$, который характеризует изменение величин отклонения нормированного числа заявок в системе от их асимптотического среднего и покажем, что он является диффузионным процессом авторегрессии.

Обозначим

$$x'(\tau) = A(x) = \lambda - (\lambda + x)R_0(x). \quad (12)$$

Будем искать решение $H_k(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)$ системы (3) в виде разложения:

$$H_k(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) = Q_k(x, s, \zeta)H(y, \tau) + \varepsilon h_k(y, s, \zeta, \tau) + o(\varepsilon). \quad (13)$$

Подставим в систему (9) разложение (13), учтем (7) и запишем полученную систему, сократив на ε все уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& -(\alpha + \lambda + x)h_0(y, s, \zeta, \tau) + \mu_1(s)h_1(y, s, \zeta, \tau) + \mu_2(s)h_2(y, s, \zeta, \tau) + \\
& + \frac{\partial h_0(y, s, \zeta, \tau)}{\partial \zeta} - \frac{\partial h_0(y, s, 0, \tau)}{\partial \zeta} + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial h_0(y, s_1, 0, \tau)}{\partial \zeta} p_{s_1 s} = \\
& = Q_0(x, s, \zeta) y H(y, \tau) - x'(\tau) Q_0(x, s, \zeta) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y}, \\
& - \mu_1(s)h_1(y, s, \zeta, \tau) + (\lambda + x)h_0(y, s, \zeta, \tau) + \\
& + \frac{\partial h_1(y, s, \zeta, \tau)}{\partial \zeta} - \frac{\partial h_1(y, s, 0, \tau)}{\partial \zeta} + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial h_1(y, s_1, 0, \tau)}{\partial \zeta} p_{s_1 s} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -Q_0(x, s, \zeta) y H(y, \tau) - ((x'(\tau) - \lambda) Q_1(x, s, \zeta) + x Q_0(x, s, \zeta)) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y}, \\
&\quad - \mu_2(s) h_2(y, s, \zeta, \tau) + \alpha h_0(y, s, \zeta, \tau) + \\
&\quad + \frac{\partial h_2(y, s, \zeta, \tau)}{\partial \zeta} - \frac{\partial h_2(y, s, 0, \tau)}{\partial \zeta} + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial h_2(y, s_1, 0, \tau)}{\partial \zeta} p_{s_1 s} = \\
&= -(x'(\tau) - \lambda) Q_2(x, s, \zeta) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y}. \tag{14}
\end{aligned}$$

Будем искать решение системы (14) в следующем виде

$$h_k(y, s, \zeta, \tau) = h_k^{(1)}(x, s, \zeta) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} + h_k^{(2)}(x, s, \zeta) y H(y, \tau). \tag{15}$$

Подставим (15) в (14) и представим систему в виде двух систем

$$\begin{aligned}
&-(\alpha + \lambda + x) h_0^{(1)}(x, s, \zeta) + \mu_1(s) h_1^{(1)}(x, s, \zeta) + \\
&+ \mu_2(s) h_2^{(1)}(x, s, \zeta) + \frac{\partial h_0^{(1)}(x, s, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial h_0^{(1)}(x, s, 0)}{\partial \zeta} + \\
&+ G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial h_0^{(1)}(x, s_1, 0)}{\partial \zeta} p_{s_1 s} = -x'(\tau) Q_0(x, s, \zeta), \\
&\quad - \mu_1(s) h_1^{(1)}(x, s, \zeta) + (\lambda + x) h_0^{(1)}(x, s, \zeta) + \\
&\quad + \frac{\partial h_1^{(1)}(x, s, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial h_1^{(1)}(x, s, 0)}{\partial \zeta} + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial h_1^{(1)}(x, s_1, 0)}{\partial \zeta} p_{s_1 s} = \\
&\quad = -(x'(\tau) - \lambda) Q_1(x, s, \zeta) - x Q_0(x, s, \zeta), \\
&\quad - \mu_2(s) h_2^{(1)}(x, s, \zeta) + \alpha h_1^{(1)}(x, s, \zeta) + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial h_2^{(1)}(x, s_1, 0)}{\partial \zeta} p_{s_1 s} = \\
&\quad = -(x'(\tau) - \lambda) Q_2(x, s, \zeta) \tag{16}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&-(\alpha + \lambda + x) h_0^{(2)}(x, s, \zeta) + \mu_1(s) h_1^{(2)}(x, s, \zeta) + \mu_2(s) h_2^{(2)}(x, s, \zeta) + \\
&+ \frac{\partial h_0^{(2)}(x, s, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial h_0^{(2)}(x, s, 0)}{\partial \zeta} + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial h_0^{(2)}(x, s_1, 0)}{\partial \zeta} p_{s_1 s} = Q_0(x, s, \zeta), \\
&\quad - \mu_1(s) h_1^{(2)}(x, s, \zeta) + (\lambda + x) h_0^{(2)}(x, s, \zeta) + \\
&\quad + \frac{\partial h_1^{(2)}(x, s, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial h_1^{(2)}(x, s, 0)}{\partial \zeta} + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial h_1^{(2)}(x, s_1, 0)}{\partial \zeta} p_{s_1 s} = -Q_0(x, s, \zeta), \\
&\quad - \mu_2(s) h_2^{(2)}(x, s, \zeta) + \alpha h_0^{(2)}(x, s, \zeta) + \\
&\quad + \frac{\partial h_2^{(2)}(x, s, \zeta)}{\partial \zeta} - \frac{\partial h_2^{(2)}(x, s, 0)}{\partial \zeta} + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial h_2^{(2)}(x, s_1, 0)}{\partial \zeta} p_{s_1 s} = 0. \tag{17}
\end{aligned}$$

Продифференцируем систему (7) по x и полученный результат сопоставим с (17). Тогда можно сделать вывод, что

$$h_k^{(2)}(x, s, \zeta) = \frac{\partial Q_k(x, s, \zeta)}{\partial x}. \tag{18}$$

С учётом (18) и (15) разложение (13) примет вид

$$H_k(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) = Q_k(x, s, \zeta)H(y, \tau) + \varepsilon h_k^{(1)}(x, s, \zeta) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} + \varepsilon y H(y, \tau) \frac{\partial Q_k(x, s, \zeta)}{\partial x} + o(\varepsilon). \quad (19)$$

Найдём вид функции $H(y, \tau)$. Для этого функции в правой части системы (3) разложим в ряд по приращениям аргумента y с точностью до $o(\varepsilon^2)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial H_0(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_0(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + (\alpha + \lambda + x + \varepsilon y) H_0(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) = \\ = \frac{\partial H_0(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} - \frac{\partial H_0(y, s, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} + \mu_1(s) H_1(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) + \\ + \mu_2(s) H_2(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial H_0(y, s_1, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} p_{s_1 s}, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial H_1(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_1(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \mu_1(s) H_1(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) = \\ = \frac{\partial H_1(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} - \frac{\partial H_1(y, s, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} - \\ - \varepsilon \lambda \frac{\partial H_1(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \lambda \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 H_1(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial y^2} + \\ + (\lambda + x + \varepsilon y) H_0(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \{ (x + \varepsilon y) H_0(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) \} + \\ + x \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 H_0(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial y^2} + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial H_1(y, s_1, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} p_{s_1 s} + o(\varepsilon^2), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial H_2(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H_2(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + (\lambda + \mu_2(s)) H_2(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) = \\ = \frac{\partial H_2(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} - \frac{\partial H_2(y, s, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} + \alpha H_0(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) + \\ + \lambda H_2(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) - \lambda \varepsilon \frac{\partial H_2(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial y} + \\ + \lambda \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 H_2(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon)}{\partial y^2} + G_s(\zeta) \sum_{s_1=1}^s \frac{\partial H_2(y, s_1, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} p_{s_1 s} + o(\varepsilon^2). \quad (20) \end{aligned}$$

Сложим уравнения системы (20) по k , подставим в полученную систему разложение функций $H_k(y, s, \tau, \varepsilon)$ в виде (19), учтем обозначение (10), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left(\sum_{k=0}^2 Q_k(x, s, \zeta) \right) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \left(\sum_{k=0}^2 Q_k(x, s, \zeta) \right) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} - \\ - \varepsilon^2 x'(\tau) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sum_{k=0}^2 Q_k(x, s, \zeta) \right\} \frac{\partial \{ y H(y, \tau) \}}{\partial y} - \varepsilon^2 x'(\tau) \left(\sum_{k=0}^2 h_k^{(1)}(x, s, \zeta) \right) \frac{\partial^2 H(y, \tau)}{\partial y^2} = \\ = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \sum_{k=0}^2 H_k(y, s, \zeta, \tau, \varepsilon) \right\} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \sum_{k=0}^2 H_k(y, s, 0, \tau, \varepsilon) \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon(-xQ_0(x, \zeta, s) + \lambda Q_1(x, \zeta, s) + \lambda Q_2(x, \zeta, s)) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} - \\
& -\varepsilon^2 \left(-Q_0(x, s, \zeta) - x \frac{\partial Q_0(x, s, \zeta)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \{Q_1(x, s, \zeta) + Q_2(x, s, \zeta)\} \right) \frac{\partial \{yH(y, \tau)\}}{\partial y} + \\
& + \frac{\varepsilon^2}{2} [xQ_0(x, s, \zeta) + \lambda Q_1(x, s, \zeta) + \lambda Q_2(x, s, \zeta) + \\
& + 2(xh_0^{(1)}(x, s, \zeta) - \lambda h_1^{(1)}(x, s, \zeta) - \lambda h_2^{(1)}(x, s, \zeta))] \frac{\partial^2 H(y, \tau)}{\partial y^2} + \\
& + G_s(\zeta) \sum_{k=0}^2 \sum_{s_1=1}^S \frac{\partial H_k(y, s_1, 0, \tau, \varepsilon)}{\partial \zeta} p_{s_1 s} + o(\varepsilon^2). \quad (21)
\end{aligned}$$

Просуммируем уравнения системы (21) по s , выполним предельный переход при $\zeta \rightarrow \infty$, воспользуемся условием нормировки (8), обозначением (10), также обозначим

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^S h_k^{(1)}(x, s, \zeta) = h_k^{(1)}(x), \quad \sum_{k=1}^2 h_k^{(1)}(x) = h^{(1)}(x), \quad (22)$$

учтём, что $\sum_{s_2=1}^S p_{s_1 s_2} = 1$, $s = 1, 2, \dots, S$, получим

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} - \varepsilon^2 x'(\tau) h^{(1)}(x) \frac{\partial^2 H(y, \tau)}{\partial y^2} = \\
& = -\varepsilon(-xR_0(x) + \lambda R_1(x) + \lambda R_2(x)) \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial y} - \\
& - \varepsilon^2 \left(-R_0(x) - x \frac{\partial R_0(x)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \{R_1(x) + R_2(x)\} \right) \frac{\partial \{yH(y, \tau)\}}{\partial y} + \\
& + \frac{\varepsilon^2}{2} [xR_0(x) + \lambda R_1(x) + \lambda R_2(x) + \\
& + 2(xh_0^{(1)}(x) - \lambda h_1^{(1)}(x) - \lambda h_2^{(1)}(x))] \frac{\partial^2 H(y, \tau)}{\partial y^2} + o(\varepsilon^2). \quad (23)
\end{aligned}$$

В силу дифференциального уравнения (11) уничтожим в (23) слагаемые порядка $o(\varepsilon)$, поделим обе части полученного уравнения на ε^2 , выполним преобразования, будем иметь

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial H(y, \tau)}{\partial \tau} = - \left(-R_0(x) - x \frac{\partial R_0(x)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \{R_1(x) + R_2(x)\} \right) \frac{\partial \{yH(y, \tau)\}}{\partial y} + \\
& + \frac{1}{2} [xR_0(x) + \lambda R_1(x) + \lambda R_2(x) + 2(xh_0^{(1)}(x) - (\lambda + x)R_0(x)h^{(1)}(x))] \frac{\partial^2 H(y, \tau)}{\partial y^2}. \quad (24)
\end{aligned}$$

Получили уравнение Фоккера – Планка для плотности распределения вероятностей $H(y, \tau)$ значений диффузионного процесса авторегрессии $y(\tau)$. Заметим, что коэффициент переноса уравнения (24) есть производная по x от правой части дифференциального уравнения (11). В силу обозначения (12):

$$A'_x(x) = -R_0(x) - x \frac{\partial R_0(x)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \{R_1(x) + R_2(x)\} = \frac{\partial}{\partial x} \{\lambda - (\lambda + x)R_0(x)\}. \quad (25)$$

Коэффициент диффузии обозначим следующим образом:

$$B^2(x) = \lambda - (\lambda - x)R_0(x) + 2xh_0^{(1)}(x) - 2(\lambda + x)R_0(x)h^{(1)}(x). \quad (26)$$

Из (24) следует, что $H(y, \tau)$ является плотностью распределения вероятностей диффузионного процесса $y(\tau)$, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dy(\tau) = A'_x(x)y(\tau)d\tau + B(x)dw(\tau), \quad (27)$$

где $w(\tau)$ является стандартным процессом Винера, то есть процесс $y(\tau)$ является процессом авторегрессии.

4. Плотность распределения вероятностей процесса изменения состояний RQ-системы. Используя предельные процессы $x(\tau)$ и $y(\tau)$ для достаточно малых значений параметра ε , рассмотрим процесс $z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y$, который аппроксимирует процесс изменения числа заявок в системе $\varepsilon^2 i(\tau/\varepsilon^2)$ и покажем, что он является однородным диффузионным процессом.

Дифференцируя $z(\tau)$ по τ получаем $dz(\tau) = x'(\tau)d\tau + \varepsilon dy$.

В силу (11) и (12) имеем:

$$dz(\tau) = [-xR_0(x) + \lambda(R_1(x) + R_2(x))]d\tau + \varepsilon y \frac{\partial}{\partial x} \{-xR_0(x) + \lambda(R_1(x) + R_2(x))\}d\tau + \varepsilon B(x)dw(\tau).$$

Так как правая часть содержит разложение в ряд по приращениям εy аргумента x , то можно записать

$$dz(\tau) = [-(x + \varepsilon y)R_0(x + \varepsilon y) + \lambda(R_1(x + \varepsilon y) + R_2(x + \varepsilon y))]d\tau + \varepsilon B(z - \varepsilon y)dw(\tau).$$

С точностью до $o(\varepsilon)$ и с учетом (12) имеем:

$$dz(\tau) = A(z)d\tau + \varepsilon B(z)dw(\tau) + o(\varepsilon). \quad (28)$$

То есть, $z(\tau)$ действительно является однородным диффузионным процессом с коэффициентом переноса $A(z)$ и коэффициентом диффузии $\varepsilon^2 B^2(z)$ и определяется с точностью до $o(\varepsilon)$ стохастическим дифференциальным уравнением вида (28).

Обозначим $F(z, \tau)$ плотность распределения вероятностей значений процесса $z(\tau)$, тогда можно записать уравнение Фоккера – Планка:

$$\frac{\partial F(z, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial z} \{A(z)F(z, \tau)\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{B^2(z)F(z, \tau)\}.$$

Рассмотрим функционирование процесса $z(\tau)$ в стационарном режиме, то есть $F(z, \tau) \equiv F(z)$, тогда стабильное распределение можно найти из уравнения Фоккера – Планка

$$0 = -\frac{\partial}{\partial z} \{A(z)F(z)\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{B^2(z)F(z)\}. \quad (29)$$

Уравнение (29) является однородным дифференциальным уравнением второго порядка и имеет решение:

$$F(z) = \frac{1}{B^2(z)} e^{\frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)} du} \left/ \int_0^\infty \frac{1}{B^2(z)} e^{\frac{2}{\varepsilon^2} \int_0^z \frac{A(u)}{B^2(u)} du} dz \right. \quad (30)$$

Закключение. Таким образом, в данной работе предложена математическая модель функционирующей в полумарковской среде RQ-системы с вызываемыми заявками. Методом асимптотического анализа [8] получено обыкновенное дифференциальное уравнение (11), определяющее асимптотическое среднее $x = x(\tau)$ нормированного числа заявок в системе. Представлено распределение $R_k(x)$, $k = 0, 1, 2$, вероятностей состояний прибора в виде (10), где величины $Q_k(x, s, \zeta)$, $k = 0, 1, 2$, имеющие смысл условного совместного распределения вероятностей состояний k канала и состояний s полумарковской среды, определяются системой уравнений вида (7). Показано, что процесс $y(\tau)$, характеризующий изменение величин отклонения нормированного числа заявок в системе от их асимптотического среднего, является диффузионным процессом авторегрессии и определяется стохастическим дифференциальным уравнением вида (27). Показано, что для достаточно малых значений параметра ε процесс $z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y$, является однородным диффузионным процессом. Найдена важнейшая вероятностно-временная характеристика процесса $z(\tau)$ – плотность распределения вероятностей его значений в виде (30).

1. Artalejo J. R., Gomez-Corral A.: Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Springer, Heidelberg, 2008.
2. Вавилов В. А. Исследование одноканальной системы с повторными вызовами // Методы прогнозирования в технике и технологиях: сборник статей Международной научно-практической конференции (г. Тюмень, 20 февраля 2018 г.). В 2 ч. Ч. 2. – Уфа: Аэтерна, 2018. – С. 6-13.
3. Вавилов В. А. Исследование немарковских RQ-систем, функционирующих в случайной среде // Современные концепции научных исследований: ежемесячный научный журнал. – М.: ЕСУ, 2014. – № 5 (13). – С. 56-59.
4. Вавилов В. А. Исследование RQ-систем в условиях возрастающего количества абонентских станций // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2012): Материалы XI Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (23-24 ноября 2012 г.) – Кемерово, 2012. – Ч. 2. – С. 80-85.
5. Вавилов В. А. Математическое моделирование неустойчивых сетей случайного доступа в диффузионной среде при дважды стохастическом входящем потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. Научный журнал. – Томск: Изд-во НТЛ, 2009. – № 2 (7). – С. 31-5
6. Вавилов В. А. Исследование RQ-систем, функционирующих в полумарковской среде // Вестник Кемеровского государственного университета. – Кемерово: КемГУ, 2014. – № 3 (59) Т.3. – С. 99-106.
7. Вавилов В. А., Назаров А. А. Исследование RQ-систем в полумарковской среде // Международная конференция "Теория вероятностей и ее приложения", посвященная 100-летию со дня рождения Б. В. Гнеденко. Москва: Ленанд, 2012. – С. 180-183.
8. Назаров А. А., Моисеева С. П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.