Гацаева Р.С.-А.

О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения

Чеченский государственный университет
(Россия, Грозный)

doi: 10.18411/lj-12-2018-148

idsp: ljournal-12-2018-148

Аннотация

Краткое изложение доказательства следующей теоремы.

Ключевые слова: непрерывные действительные функции, абсолютная величина, функция, константа .

Abstract

A summary of the proof of the following theorem.

Keywords: continuous real functions, absolute value, function, constant.

Теорема. При любом целом $n \geq 2$ существуют такие определенные на единичном отрезке $E^1 = [0; 1]$ непрерывные действительные функции $\psi^{pq}(x)$, что каждая определенная на n -мерном единичном кубе E^n непрерывная действительная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{q=2n+1} \aleph_q \left[\sum_{p=1}^n \psi^{pq}(x_p) \right], \quad (1)$$

Где функция $\aleph_q(y)$ действительны и непрерывны. При $n = 3$, положив

$$\varphi_q(x_1, x_2) = \psi^{1q}(x_1) + \psi^{2q}(x_2), \quad h_q(y, x_3) = \aleph_q[y + \psi^{3q}(x_3)]$$

Получаем из (1)

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{q=1}^7 h_q[\varphi_q(x_1, x_2), x_3],$$

что является небольшим усилением результата В.И.Арнольда, который показал, что любая непрерывная функция трех переменных представима в виде суммы девяти слагаемых того же вида, как слагаемые, входящие в формулу (2) в числе семи. Результаты заметки (1) не вытекают из сообщаемой сейчас новой теоремы в их точных формулировках, но принципиальное их содержание в смысле возможности представления функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных и их приближения суперпозициями фиксированного вида из многочленов от одного переменного и сложения) очевидным образом содержится в новой теореме. Метод доказательства новой теоремы элементарнее методов работ (1,2), сводясь к прямым конструкциям и подсчетам. Исчезла, в частности, необходимость употребления деревьев из компонент линий уровня. Фактически, однако, конструкции, употребленные в этой заметке, были найдены путем анализа конструкций, употреблявшихся в (1,2), и отбрасывания в них деталей, излишних для получения конечного результата.

Построение функций ψ^{pq} . Индексы p, q, r, i всюду далее пробегают целые значения

$$1 \leq p \leq n, \quad 1 \leq q \leq 2n + 1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 1 \leq i \leq m_k = (9n)^k + 1.$$

При суммировании и перемножении в этих пределах пределы не обозначаются.

Рассмотрим сегменты

$$A_{k,i}^q = \left[\frac{1}{(9n)^k} \left(i - 1 - \frac{q}{3n} \right), \frac{1}{(9n)^k} \left(i - \frac{1}{3n} - \frac{q}{3n} \right) \right]$$

Сегменты

$$A_{k,i}^q$$

имеют длину

$$\frac{1}{(9n)^k} \left(1 - \frac{q}{3n} \right), \text{ а при фиксированных } k \text{ и } q$$

получаются один из другого при переходе от

i к $i' = i + 1$ с помощью сдвига вправо на расстояние

$$\frac{1}{(9n)^k}$$

т. е. расположены не только без перекрытий, но с промежутками длины

$$\frac{1}{3n(9n)^k}$$

с точностью же до наличия этих промежутков покрывают весь единичный отрезок E^1

В соответствии с этим кубики

$$S_{R,i_q, \dots, i_n}^q = \prod_p A_{R,i_p}^q$$

С ребрами длины

$$\frac{1}{(9n)^k}$$

при фиксированном k и q

покрывают единичный куб E^n с точностью до разделяющих их щелей ширины

$$\frac{1}{3n(9n)^k}$$

Легко проверяется следующая лемма

Лемма 1. Система всех кубиков $S_{k,i_q, \dots, i_n}^q$ с постоянным k и переменными

q и $i_1 \dots i_n$, покрывает единичный куб E^n так, что каждая точка

из E^n оказывается покрытой не менее $n + 1$ раз.

При помощи индукции по k может быть доказана следующая лемма.

Лемма 2. Можно подобрать константы $\lambda_{k,i}^{pq}$ и ε_k так, что будут выполнены условия

$$1) \lambda_{k,i}^{pq} < \lambda_{k,i+1}^{pq} \leq \lambda_{k,i}^{pq} + \frac{1}{2^k};$$

3) сегменты

$$\Delta_{k,i_1, \dots, i_n}^q = \left[\sum_p \lambda_{k,i}^{pq}; \sum_p \lambda_{k,i}^{pq} + n\varepsilon_k \right],$$

при фиксированном k и q попарно не пересекаются;

Легко заметить, что из 1) и 3) вытекает

$$4) \varepsilon_n \leq \frac{1}{2^k},$$

На основе указанных ранее свойств сегментов $A_{k,i}^q$ и свойств 1), 2) и 4) констант и

$$\lambda_{k,i}^{pq} \text{ и } \varepsilon_k$$

Лемма 3. При фиксированных p и q требования

$$\lambda_{k,i}^{pq} \leq \psi^{pq}(x) \leq \lambda_{k,i}^{pq} + \varepsilon_k \quad \text{при } x \in A_{k,i}^q$$

однозначно определяют на E^1 непрерывную функцию ψ^{pq}

Замечание. Легко видеть, что по построению функции ψ^{pq} оказываются монотонно возрастающими. Это их свойство могло бы быть включено в формулировку нашей теоремы. Из 5) и 3) вытекает

$$б) \sum_p \psi^{pq}((x_p) \in \Delta_{k,i_1 \dots i_n}^q \quad \text{при } (x_1, x_2, x_3) \in S_{ki_1 \dots i_n}^q$$

1. А. Н. Колмогоров, ДАН, 108, № 2 (2000).
 2. В. И. Арнольд, ДАН, \\4Г № 4 (1957).956
-