Григорьева Е.Г., Клячин В.А.

Алгоритм автоматического определения параметров ориентации камеры в пространстве на основе характерных элементов фотоснимка

*Волгоградский государственный университет
(Россия, Волгоград)*

doi: 10.18411/lj-12-2018-125

idsp: ljjournal-12-2018-125

Аннотация

При получении фотоснимка не всегда удается позиционировать камеру, так, чтобы она была направлена вдоль нормали к плоскости самого объекта. Это приводит к дефектам изображений. Исправление такого рода погрешностей особенно актуально для фотоснимков текста, предназначенного для дальнейшего распознавания. В настоящей статье обсуждается алгоритм преобразования изображения, полученного при неортогональной ориентации камеры к изображению, которое могло быть получено при правильной съемке.

Ключевые слова: преобразование проекции, фотоснимок, ориентация камеры, 3D реконструкция.

Abstract

When taking a photograph, it is not always possible to position the camera so that it is directed along the normal to the plane of the object itself. This leads to image defects. Correction of such errors is especially important for photographs of text intended for further recognition. This article discusses the algorithm for converting an image obtained by non-orthogonal orientation of the camera to the image, which could be obtained with the correct shooting.

Keywords: project transformation, photograph, camera orientation, 3D reconstruction.

Введение

Одна из сложных задач 3D моделирования -- моделирование по плоскому изображению, различного рода фото и видео материалам реальных объектов. Это особенно актуально в задачах 3D реконструкции исторических архитектурных сооружений и целых комплексов, имеющих как историческую, так и культурную ценность. Созданная 3D модель может быть использована с самыми разнообразными целями: создание макетных копий на основе технологий 3D печати, создание иллюстративного, демонстрационного видео материала, создание видео фильмов с 3D эффектами и т.п. Задачи реконструкции культурного и исторического наследия с использованием 3D технологий предполагают, в частности, решения ряда задач нацеленных на развитие методов и технологий 3D моделирования по плоскому изображению объекта при отсутствии какой-либо возможности доступа к реальному объекту. Это требует решения ряда геометрических задач, связанных с особенностями и условиями подобных 3D реконструкций. Примерами таких задач могут быть: задачи определения характерных размеров реальных объектов и их составных частей, задачи определения их местоположения в пространстве (в терминах географических координат), задачи определения настроек камеры, с помощью которой было получено изображение, а также задачи моделирования параметрических прототипов объектов в виде геометрической 3D модели. Фундаментальная научно-техническая дисциплина, занимающаяся определением формы, размеров, положения и иных характеристик объектов по их фотоизображениям носит название фотограмметрия. Однако существенным отличием классических задач фотограмметрии от задач рассматриваемых нами является практически неизвестные характеристики элементов внутреннего и внешнего ориентирования снимков (настроек камеры). Частичное нахождение этих характеристик и составляет определенную задачу настоящей работы. В основе предлагаемой методики лежит поиск характерных наборов точек снимка, которые определяются существенно исходя из информации геометрического строения объекта съемки. Разработка новых методик расчета также объясняется тем, что использовать, например, формулы вычисления по снимкам, полученных на основе пары камер с заведомо известными характеристиками невозможно при практическом отсутствии таковых фотоматериалов. К сожалению в имеющейся литературе, например в курсе лекций [1], или в классической монографии [2] не удалось найти решение необходимых задач в требуемом виде. В частности, классические задачи фотограмметрии предполагают известными характеристики камеры (так называемые элементы внутреннего и внешнего ориентирования снимков), с помощью которой получено изображение. Тогда как в ситуации 3D реконструкции в задачах нашей работы это принципиально не известно и требует определения по характерным точкам и элементам на изображении, например таким как на рисунке 1. В плане задач определения тех или иных характеристик объектов по их снимкам имеется ряд публикаций, в которых решаются прикладные задачи в самых разнообразных отраслях науки и техники. Так в работах [3] – [5] исследуется совокупность характерных точек на изображении, образующая размытость. А в работах [6],[7] авторы применяют сверточные нейронные сети для реконструкции поверхности лица человека по фотографии.

В настоящей статье предпринята попытка решения ряда геометрических задач, возникающих из-за специфики условий и особенностей построения 3D моделей по их изображениям. Эти условия и особенности, связаны с возможностью использования исключительно видео и фотоматериалов реального объекта. При этом сам объект 3D моделирования в настоящее время не существует (не доступен) для выполнения измерений. Соответствующая задача требует определения параметров формы объекта и аффинного преобразования проекции по некоторым геометрическим характеристикам его образов и прообразов: углам, размерам, площадям фигур, распределения оттенков цвета на изображениях. Решение этой задачи позволит определить реальные размеры и

формы объектов по их изображениям или значения отношений характерных размеров этих объектов и их частей. Предполагается, что найденные решения могут быть использованы в задачах 3D реконструкции архитектурных комплексов довоенного Сталинграда. Описание соответствующей задачи было дано авторами в работе [8].

Рисунок 1. Характерные элементы на изображении

Поскольку в рассматриваемых задачах мы вычисляем параметры взаимного расположения камеры и объекта, то вместо определения параметров ориентации камеры в пространстве, мы будем определять параметры ориентации пространственных геометрических фигур, фиксируя положение камеры. Всюду в статье используется модель камеры, состоящая из трех уравнений центральной проекции

$$(x, y, z) \rightarrow (X, Y) = \left(\frac{x}{z} \delta, \frac{y}{z} \delta \right)$$

где (x, y, z) -- точка в пространстве, величины X, Y моделируют пиксельные координаты на изображении, которое располагается в плоскости $z = \delta, \delta > 0$.

Предельным случаем центральной проекции является ортогональная проекция, заданная формулами

$$(x, y, z) \rightarrow (X, Y) = (x, y).$$

Математическая модель

В начале мы рассмотрим случай, когда на входном изображении предполагается наличие изображения пространственного прямоугольника. Задача состоит в том, чтобы определить параметры плоскости этого прямоугольника.

Пусть в пространстве заданы четыре точки $p_i = (x_i, y_i, z_i), z_i > 0, i = 0, 1, 2, 3$ являющиеся вершинами прямоугольника, при этом, мы предполагаем, что нумерация соответствует некоторому обходу вдоль его сторон. Обозначим через Π -- плоскость этого прямоугольника. Рассмотрим так же плоскость Q , заданную уравнением $z = \delta, \delta > 0$. Построим точки $q_i, i = 0, 1, 2, 3$ как проекции точек p_i на плоскость Q при центральной проекции с центром в начале координат. Положим $q_i = (X_i, Y_i, Z_i)$. Несложно видеть, что

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{x_i \delta}{z_i} \\ Y_i &= \frac{y_i \delta}{z_i} \\ Z_i &= \delta \end{aligned}$$

Выразим условия того, что точки $p_i, i = 0, 1, 2, 3$ лежат в вершинах некоторого прямоугольника. В первую очередь это условия ортогональности векторов $p_1 - p_0 \perp p_3 - p_0$. Второе условие -- это условие того, что точка p_2 лежит в той же плоскости, что и точки p_0, p_1, p_3 причем

$$p_2 = p_0 + p_1 - p_0 + p_3 - p_0 = p_1 + p_3 - p_0.$$

Или, что то же самое

$$p_0 + p_2 = p_1 + p_3.$$

Заметим, что эти два условия необходимы и достаточны для того, что бы точки p_i лежали в вершинах некоторого прямоугольника. Перепишем перечисленные условия в виде системы уравнений

$$(x_1 - x_0)(x_3 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_3 - y_0) + (z_1 - z_0)(z_3 - z_0) = 0,$$

$$x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0,$$

$$y_0 - y_1 + y_2 - y_3 = 0,$$

$$z_0 - z_1 + z_2 - z_3 = 0,$$

$$X_1 = \frac{x_1 \delta}{z_1},$$

$$Y_1 = \frac{y_1 \delta}{z_1},$$

$$Z_1 = \delta, X_2 = \frac{x_2 \delta}{z_2}, \quad (1)$$

$$Y_2 = \frac{y_2 \delta}{z_2},$$

$$Z_2 = \delta,$$

$$X_3 = \frac{x_3 \delta}{z_3},$$

$$Y_3 = \frac{y_3 \delta}{z_3},$$

$$Z_3 = \delta$$

Неизвестными в этой системе уравнений являются 12 координат точек $p_i = (x_i, y_i, z_i), i = 0, 1, 2, 3$. Заметим, что система (1) является переопределенной. Это значит, что не любые четыре точки $q_i, i = 0, 1, 2, 3$ могут являться проекциями вершин пространственного прямоугольника. Наша задача -- получить соответствующие условия разрешимости. Сложность в решении этой системы состоит в ее нелинейности. Но, поскольку в системе нелинейны только одно уравнение, то исключив пока его из рассмотрения мы решим оставшуюся линейную систему. А нелинейное уравнение запишем в дальнейшем как условие разрешимости задачи.

Для решения системы (1) введем следующие обозначения

$$a_1 = x_1 - x_0,$$

$$a_2 = y_1 - y_0,$$

$$a_3 = z_1 - z_0,$$

$$b_1 = x_3 - x_0,$$

$$b_2 = y_3 - y_0,$$

$$b_3 = z_3 - z_0.$$

В новых обозначениях система (1) перепишется в виде

$$\begin{aligned}
a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0, \\
\delta(x_0 + a_1) &= X_1(z_0 + a_3), \\
\delta(y_0 + a_2) &= Y_1(z_0 + a_3), \\
\delta(x_0 + a_1 + b_1) &= X_2(z_0 + a_3 + b_3), \\
\delta(y_0 + a_2 + b_2) &= Y_2(z_0 + a_3 + b_3), \\
\delta(x_0 + b_1) &= X_3(z_0 + b_3), \\
\delta(y_0 + b_2) &= Y_3(z_0 + b_3), \\
\delta x_0 &= X_0 z_0, \\
\delta y_0 &= Y_0 z_0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Складывая второе уравнение с шестым и вычитая четвертое, а так же складывая третье уравнение с седьмым и вычитая пятое получи следующую систему

$$\begin{aligned}
(X_1 - X_2)a_3 + (X_3 - X_2)b_3 + (X_1 + X_3 - X_0 - X_2)z_0 &= 0, \\
(Y_1 - Y_2)a_3 + (Y_3 - Y_2)b_3 + (Y_1 + Y_3 - Y_0 - Y_2)z_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Откуда, получаем выражения

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{(X_1 + X_3 - X_0 - X_2)(Y_3 - Y_2) - (Y_1 + Y_3 - Y_0 - Y_2)(Y_1 - Y_2)}{(Y_1 - Y_2)(X_3 - X_2) - (X_1 - X_2)(Y_3 - Y_2)} z_0, \\
b_3 &= \frac{(X_1 + X_3 - X_0 - X_2)(Y_1 - Y_2) - (Y_1 + Y_3 - Y_0 - Y_2)(X_1 - X_2)}{(Y_1 - Y_2)(X_3 - X_2) - (X_1 - X_2)(Y_3 - Y_2)} z_0.
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения во второе, третье, шестое и седьмое уравнения системы (2) получим

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\delta} \left(X_1 \frac{B_3 A_2 - A_3 B_2}{A_1 B_2 - B_1 A_2} - A_0 \right) z_0 = \alpha_1 z_0, \\
a_2 &= \frac{1}{\delta} \left(Y_1 \frac{B_3 A_2 - A_3 B_2}{A_1 B_2 - B_1 A_2} - B_0 \right) z_0 = \alpha_2 z_0, \\
a_3 &= \frac{B_3 A_2 - A_3 B_2}{A_1 B_2 - B_1 A_2} z_0 = \alpha_3 z_0, \\
b_1 &= \frac{1}{\delta} \left(X_3 \frac{A_3 B_1 - A_1 B_3}{A_1 B_2 - B_1 A_2} - A_0 - A_1 + A_2 \right) z_0 = \beta_1 z_0, \\
b_2 &= \frac{1}{\delta} \left(Y_3 \frac{A_3 B_1 - A_1 B_3}{A_1 B_2 - B_1 A_2} - B_0 - B_1 + B_2 \right) z_0 = \beta_2 z_0, \\
b_3 &= \frac{A_3 B_1 - A_1 B_3}{A_1 B_2 - B_1 A_2} z_0 = \beta_3 z_0.
\end{aligned}$$

Здесь мы ввели обозначения

$$A_0 = X_0 - X_1, A_1 = X_1 - X_2, A_2 = X_3 - X_2, A_3 = X_1 + X_3 - X_0 - X_2$$

и

$$B_0 = Y_0 - Y_1, B_1 = Y_1 - Y_2, B_2 = Y_3 - Y_2, B_3 = Y_1 + Y_3 - Y_0 - Y_2.$$

Приведенные формулы для $a_i, b_i, i = 0, 1, 2$ дают значения координат направляющих векторов плоскости прямоугольника. При этом условие разрешимости получается из первого уравнения системы (2)

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0.$$

Заметим, что величины $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, 3$ представляют собой функции, зависящие от координат $X_i, Y_i, i = 0, 1, 2, 3$ проекций точек p_i , которые считаются известными по постановке задачи. Ясно, что для преобразования изображения в соответствии с найденными направляющими векторами плоскости прямоугольника нужно осуществить преобразование, обратное к преобразованию проекции. Уравнение прямоугольника может быть записано следующим образом

$$R(u, v) = p_0 + u(p_1 - p_0) + v(p_3 - p_0), u, v \in [0, 1].$$

Или в координатном виде

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + u a_1 + v b_1, \\
y &= y_0 + u a_2 + v b_2, \\
z &= z_0 + u a_3 + v b_3.
\end{aligned}$$

Используя уравнения прямого преобразования проекции, получим

$$\begin{aligned} u(a_1\delta - Xa_3) + v(b_1\delta - Xb_3) &= z_{0X} - x_0\delta, \\ u(a_2\delta - Ya_3) + v(b_2\delta - Yb_3) &= z_{0Y} - y_0\delta. \end{aligned}$$

Откуда, окончательно выводим формулы отображения обратного к отображению проекции

$$\begin{aligned} u &= \frac{(z_{0X} - x_0\delta)(b_2\delta - Yb_3) - (b_1\delta - Xb_3)(z_{0Y} - y_0\delta)}{(a_1\delta - Xa_3)(b_2\delta - Yb_3) - (a_2\delta - Ya_3)(b_1\delta - Xb_3)}, \\ v &= \frac{-(z_{0X} - x_0\delta)(a_2\delta - Ya_3) + (a_1\delta - Xa_3)(z_{0Y} - y_0\delta)}{(a_1\delta - Xa_3)(b_2\delta - Yb_3) - (a_2\delta - Ya_3)(b_1\delta - Xb_3)}. \end{aligned} \quad (3)$$

В этих формулах переменные X, Y задают координаты точек, лежащих внутри четырехугольника, образованного точками $q_i, i = 0, 1, 2, 3$.

Реализация алгоритма на базе библиотеки OpenCV

Используя полученные формулы реализуем алгоритм преобразования заданного изображения. Реализация будет основана на библиотеке OpenCV и будет выполнена на языке программирования Python. Для всех вычислений линейной алгебры мы воспользуемся пакетами NumPy и SciPy. Для преобразования входного изображения мы воспользуемся функцией OpenCV `warpPerspective()`, которая осуществляет проективное преобразование плоскости в виде (см. [9])

$$dst(x, y) = src \left(\frac{M_{11}x + M_{12}y + M_{13}}{M_{31}x + M_{32}y + M_{33}}, \frac{M_{21}x + M_{22}y + M_{23}}{M_{31}x + M_{32}y + M_{33}} \right).$$

Здесь $dst(x, y), src(x', y')$ – значения цвета пикселей $(x, y), (x', y')$ в выходном и входном изображениях соответственно. Матрица M может быть вычислена следующим образом. Во-первых, несложно заметить, что в формулах (3) числители и знаменатели представляют собой линейные функции от X, Y . Во-вторых, эти формулы задают соответствие между пикселями входного и выходного изображения. Таким образом, матрица M строится из соответствующих коэффициентов соотношений (3). Эта же матрица, как несложно заметить, может быть получена как обратная матрица к матрице прямого проективного преобразования, именно

$$M = \begin{pmatrix} a_1\delta & b_1\delta & x_0\delta \\ a_2\delta & b_2\delta & y_0\delta \\ a_3 & b_3 & z_0 \end{pmatrix}^{-1},$$

где мы воспользовались обозначениями предыдущего параграфа статьи. Функция `warpPerspective()` принимает входное изображение, матрицу M и вырабатывает выходное изображение, которое может быть выведено на экран с помощью функции `imshow()`.

Замечание. Следует отметить, что приведенный выше метод позволяет «развернуть» изображение, если на нем присутствует не только проекция прямоугольной области, но и проекция круга. Действительно, хорошо известно, что проекцией круга будет эллиптическая область. Для применения описанного в статье метода нужно найти какие-либо точки на его границе, являющиеся проекциями точек некоторого прямоугольника. Для этого подойдут вершины эллипса – точки экстремалей его кривизны. Эти четыре точки расположены на осях симметрии эллипса. Одна из этих осей направлена вдоль прямой соединяющей наиболее удаленные друг от друга точки эллипса. Другая ось, как хорошо известно, первой оси ортогональна. При этом точки пересечения границы эллиптической области с этими осями получаются как проекции вершин пространственного квадрата, вписанного в соответствующую окружность.

Результаты тестирования

В качестве тестового изображения было взято изображение, полученное с помощью пакета Blender. На этом изображении присутствует прямоугольная область и текст. При этом снимок делался камерой, которая расположена под определенным углом к плоскости этой области. Это изображение показано на рисунке 2.

Рисунок 2. Исходное изображение.

На рисунке 3 показан результат обработки входного изображения представленным выше алгоритмом.

Рисунок 3. Результат обработки.

Теперь рассмотрим применение метода для изображений с эллиптическими областями. На рисунке 4 показан фрагмент фотоснимка настенных часов. Наличие на этом фрагменте круглой области циферблата позволяет вышеуказанным методом вычислить параметры ориентации камеры по отношению к плоскости стены, на которой висят часы. Фрагмент результата вычисления показан на рисунке 5.

Рисунок 4. Входное изображение.

Рисунок 5. Результат обработки

Определение параметров ориентации камеры по ортонормированному базису

В задачах 3D реконструкции актуальной задачей является определение относительных размеров реальных объектов по их фотоснимкам. При реконструкции архитектурных сооружений частично задачу можно решить используя различные элементы на фотоснимках. К одним из таких элементов относятся углы зданий, попавших в снимок. С геометрической точки зрения на таком снимке присутствует проекция трех взаимно перпендикулярных прямых, выходящих из одной точки. Введем обозначения a, b, c для единичных направляющих векторов этих прямых

$$a = (a_1, a_2, a_3),$$

$$b = (b_1, b_2, b_3),$$

$$c = (c_1, c_2, c_3).$$

Тогда, если точки A, B, C являются концами векторов a, b, c соответственно, то

$$A = (a_1 + x_0, a_2 + y_0, a_3 + z_0),$$

$$B = (b_1 + x_0, b_2 + y_0, b_3 + z_0),$$

$$C = (c_1 + x_0, c_2 + y_0, c_3 + z_0).$$

При проектировании эти точки преобразуются в точки

$$A' = \left(\frac{a_1 + x_0}{a_3 + z_0} \delta, \frac{a_2 + y_0}{a_3 + z_0} \delta \right),$$

$$B' = \left(\frac{b_1 + x_0}{b_3 + z_0} \delta, \frac{b_2 + y_0}{b_3 + z_0} \delta \right),$$

$$C' = \left(\frac{c_1 + x_0}{c_3 + z_0} \delta, \frac{c_2 + y_0}{c_3 + z_0} \delta \right).$$

При этом точка p_0 проектируется в точку $p_0 = (x_0 \delta / z_0, y_0 \delta / z_0)$. Обозначим через a', b', c' векторы $p_0'A', p_0'B', p_0'C'$ соответственно. Тогда координатное представление этих векторов будет

$$a' = \left(\frac{a_1 z_0 - a_3 x_0}{z_0(z_0 + a_3)}, \frac{a_2 z_0 - a_3 y_0}{z_0(z_0 + a_3)} \right),$$

$$b' = \left(\frac{b_1 z_0 - b_3 x_0}{z_0(z_0 + b_3)}, \frac{b_2 z_0 - b_3 y_0}{z_0(z_0 + b_3)} \right),$$

$$c' = \left(\frac{c_1 z_0 - c_3 x_0}{z_0(z_0 + c_3)}, \frac{c_2 z_0 - c_3 y_0}{z_0(z_0 + c_3)} \right).$$

Обозначим через α, β, γ углы между этими векторами и осью Ox . Тогда

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \frac{a_2 z_0 - a_3 y_0}{a_1 z_0 - a_3 x_0}, \\ \tan\beta &= \frac{b_2 z_0 - b_3 y_0}{b_1 z_0 - b_3 x_0}, \\ \tan\gamma &= \frac{c_2 z_0 - c_3 y_0}{c_1 z_0 - c_3 x_0}.\end{aligned}$$

Добавляя к этим трем уравнениям еще три полученные из условия ортогональности и единичности векторов a, b, c , получим систему из девяти уравнений

$$\begin{aligned}a_2 z_0 - a_3 y_0 - \tan\alpha(a_1 z_0 - a_3 x_0) &= 0, \\ b_2 z_0 - b_3 y_0 - \tan\beta(b_1 z_0 - b_3 x_0) &= 0, \\ c_2 z_0 - c_3 y_0 - \tan\gamma(c_1 z_0 - c_3 x_0) &= 0, \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0, \\ c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 &= 0, \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 &= 0, \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1.\end{aligned}\tag{4}$$

Для решения этой системы введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{a_1}{a_3}, A_2 = \frac{a_2}{a_3}, \\ B_1 &= \frac{b_1}{b_3}, B_2 = \frac{b_2}{b_3}, \\ C_1 &= \frac{c_1}{c_3}, C_2 = \frac{c_2}{c_3}, \\ X_0 &= x_0/z_0, Y_0 = y_0/z_0.\end{aligned}$$

В новых обозначениях вышеприведенная система перепишется в виде

$$\begin{aligned}A_2 - Y_0 - \tan\alpha(A_1 - X_0) &= 0, \\ B_2 - Y_0 - \tan\beta(B_1 - X_0) &= 0, \\ C_2 - Y_0 - \tan\gamma(C_1 - X_0) &= 0, \\ A_1 B_1 + A_2 B_2 + 1 &= 0, \\ C_1 B_1 + C_2 B_2 + 1 &= 0, \\ A_1 C_1 + A_2 C_2 + 1 &= 0, \\ A_1^2 + A_2^2 + a_3^2 &= 1, \\ B_1^2 + B_2^2 + b_3^2 &= 1, \\ C_1^2 + C_2^2 + c_3^2 &= 1.\end{aligned}$$

Заметим, что первые шесть уравнений новой системы не содержат неизвестных a_3, b_3, c_3 . Поэтому, эти неизвестные легко могут быть вычислены из последних трех уравнений, при условии разрешимости системы из первых шести уравнений системы. Выражая из первых трех уравнений системы неизвестные A_2, B_2, C_2 и подставляя их в следующие три уравнения, получим систему из трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned}A_1 B_1(1 + \tan\alpha \tan\beta) + A_1 \tan\alpha(Y_0 - X_0 \tan\beta) + B_1 \tan\beta(Y_0 - X_0 \tan\alpha) \\ + (Y_0 - X_0 \tan\beta)(Y_0 - X_0 \tan\alpha) + 1 &= 0, \\ C_1 B_1(1 + \tan\gamma \tan\beta) + C_1 \tan\gamma(Y_0 - X_0 \tan\beta) + B_1 \tan\beta(Y_0 - X_0 \tan\gamma) \\ + (Y_0 - X_0 \tan\beta)(Y_0 - X_0 \tan\gamma) + 1 &= 0, \\ A_1 C_1(1 + \tan\alpha \tan\gamma) + A_1 \tan\alpha(Y_0 - X_0 \tan\gamma) + C_1 \tan\gamma(Y_0 - X_0 \tan\alpha) \\ + (Y_0 - X_0 \tan\gamma)(Y_0 - X_0 \tan\alpha) + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
u_1 &= (1 + \tan\alpha \tan\beta), \\
u_2 &= (1 + \tan\gamma \tan\beta), \\
u_3 &= (1 + \tan\alpha \tan\gamma), \\
v_1 &= (Y_0 - X_0 \tan\alpha) \tan\beta, \\
v_2 &= (Y_0 - X_0 \tan\gamma) \tan\beta, \\
v_3 &= (Y_0 - X_0 \tan\alpha) \tan\gamma, \\
w_1 &= (Y_0 - X_0 \tan\beta) \tan\alpha, \\
w_2 &= (Y_0 - X_0 \tan\beta) \tan\gamma, \\
w_3 &= (Y_0 - X_0 \tan\gamma) \tan\beta, \\
t_1 &= (Y_0 - X_0 \tan\alpha)(Y_0 - X_0 \tan\beta) + 1, \\
t_2 &= (Y_0 - X_0 \tan\gamma)(Y_0 - X_0 \tan\beta) + 1, \\
t_3 &= (Y_0 - X_0 \tan\alpha)(Y_0 - X_0 \tan\gamma) + 1.
\end{aligned} \tag{5}$$

Полученная выше система может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
A_1 B_1 u_1 + A_1 v_1 + B_1 w_1 + t_1 &= 0, \\
C_1 B_1 u_2 + C_1 v_2 + B_1 w_2 + t_2 &= 0, \\
A_1 C_1 u_3 + A_1 v_3 + C_1 w_3 + t_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Из двух последних уравнений получаем равенство

$$\frac{A_1 w_3 + t_3}{A_1 u_3 + v_3} = \frac{B_1 w_2 + t_2}{B_1 u_2 + v_2}.$$

Это равенство приводит к системе из двух уравнений

$$\begin{aligned}
A_1 B_1 u_1 + A_1 v_1 + B_1 w_1 + t_1 &= 0, \\
A_1 B_1 (w_3 u_2 - w_2 u_3) + A_1 (w_3 v_2 - u_3 t_2) + B_1 (u_2 t_3 - w_2 v_3) + (t_3 v_2 - t_2 v_3) &= 0.
\end{aligned}$$

Эта система сводится к решению квадратного уравнения

$$\begin{aligned}
&B_1^2 (w_1 (w_3 u_2 - w_2 u_3) - u_1 (u_2 t_3 - w_2 v_3)) + \\
&B_1 (v_1 (u_2 t_3 - w_2 v_3) + u_1 (t_3 v_2 - t_2 v_3) - w_1 (w_3 v_2 - u_3 t_2) - t_1 (w_3 u_2 - w_2 u_3)) + \\
&t_1 (w_3 v_2 - u_3 t_2) - v_1 (t_3 v_2 - t_2 v_3) = 0.
\end{aligned}$$

Величина A_1 тогда может быть найдена из первого линейного по A_1 уравнения системы (6). После чего C_1 так же легко вычисляется из второго или третьего уравнения системы (6). По найденным величинам A_1, B_1, C_1 находим A_2, B_2, C_2 . Ну и на последнем шаге, используя равенства (4), (5) окончательно находим векторы a, b, c .

Приведем формулы частных решений. Во-первых, рассмотрим случай, когда $x_0 = 0, y_0 = 0$. Тогда система (4) перепишется в виде

$$\begin{aligned}
a_2 z_0 - \tan\alpha (a_1 z_0) &= 0, \\
b_2 z_0 - \tan\beta (b_1 z_0) &= 0, \\
c_2 z_0 - \tan\gamma (c_1 z_0) &= 0, \\
a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0, \\
c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 &= 0, \\
a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 &= 0, \\
a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1, \\
b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1, \\
c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1.
\end{aligned}$$

В этом случае система (6) будет выглядеть так

$$\begin{aligned}
A_1 B_1 u_1 + 1 &= 0, \\
C_1 B_1 u_2 + 1 &= 0, \\
A_1 C_1 u_3 + 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Тогда получим

$$A_1 = \sqrt{\frac{-u_1 u_3}{u_2}}, B_1 = \sqrt{\frac{-u_1 u_2}{u_3}}, C_1 = \sqrt{\frac{-u_2 u_3}{u_1}}.$$

Вычислим тангенсы углов наклона заданных прямых по отношению к плоскости камеры (плоскости фотоснимка). Очевидно, что для восстановления этих прямых в пространстве вычисленных значений вполне достаточно.

Итак, если вектор $a = (a_1, a_2, a_3)$ имеет тангенс угла φ наклона по отношению к плоскости камеры, то

$$\begin{aligned} \tan\varphi &= \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = a_3 = \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{-u_1 u_3}{u_2} (1 + \tan\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{-(1 + \tan\alpha \tan\beta)(1 + \tan\alpha \tan\gamma)}{(1 + \tan\gamma \tan\beta)} (1 + \tan\alpha)}} \\ &= \sqrt{\frac{-(1 + \tan\gamma \tan\beta)}{(1 + \tan\alpha \tan\beta)(1 + \tan\alpha \tan\gamma)(1 + \tan\alpha)}}. \end{aligned}$$

Аналогично находим величины тангенсов углов наклона и для векторов b, c .

Теперь рассмотрим второй частный случай, в котором предполагается ортогональная проекция. В этом случае $a' = (a_1, a_2), b' = (b_1, b_2), c' = (c_1, c_2)$.

Так, что

$$\tan\alpha = \frac{a_2}{a_1}, \tan\beta = \frac{b_2}{b_1}, \tan\gamma = \frac{c_2}{c_1}.$$

Теперь из условия ортогональности векторов b, c получаем

$$A_1 B_1 (1 + \tan\alpha \tan\beta) + 1 = 0,$$

$$C_1 B_1 (1 + \tan\gamma \tan\beta) + 1 = 0,$$

$$A_1 C_1 (1 + \tan\alpha \tan\gamma) + 1 = 0.$$

Откуда, находим

$$A_1 = \sqrt{\frac{-(1 + \tan\gamma \tan\beta)}{(1 + \tan\alpha \tan\beta)(1 + \tan\alpha \tan\gamma)}},$$

$$B_1 = \sqrt{\frac{-(1 + \tan\gamma \tan\alpha)}{(1 + \tan\alpha \tan\beta)(1 + \tan\beta \tan\gamma)}},$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{-(1 + \tan\alpha \tan\beta)}{(1 + \tan\gamma \tan\beta)(1 + \tan\alpha \tan\gamma)}}.$$

Окончательно координаты векторов a, b, c могут быть найдены из условий их единичности и соотношений $A_2 = \tan\alpha A_1, B_2 = \tan\beta B_1, C_2 = \tan\gamma C_1$.

1. Михайлов А. П. Курс лекций по фотограмметрии / Михайлов А. П., Чибуничев А. Г. — МИИГАиК. Ракурс (26 марта 2013).
2. А. Н. Лобанов Фотограмметрия / Н. Т. Куприна, З. Н. Чумаченко. — М.: «Недра», 1984. — 552 с.
3. Локтев Д.А., Быков Ю.А., Коваленко Н.И. Использование метода анализа размытия изображения для определения внешних дефектов железнодорожного пути // Наука и техника транспорта. 2016. № 1. С. 69-75.,
4. Локтев А.А., Локтев Д.А. Метод определения расстояния до объекта путем анализа размытия его изображения // Вестник МГСУ. 2015. № 6. С. 140-151.,
5. Локтев А.А., Бахтин В.Ф., Черников И.Ю., Локтев Д.А. Методика определения внешних дефектов сооружений путем анализа серии его изображений в системе мониторинга // Вестник МГСУ. 2015. № 3. С. 7-16.
6. Jackson A. S. et al. Large pose 3D face reconstruction from a single image via direct volumetric CNN regression //2017 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). — IEEE, 2017. — С. 1031-1039.
7. Jackson A. S. et al. Large Pose 3D Face Reconstruction from a Single Image via Direct Volumetric CNN Regression //arXiv preprint arXiv:1703.07834. — 2017.
8. E. G. Grigorieva, V. A. Klyachin Mathematical model of 3D maps and design of information system for its control // Journal of Computational and Engineering Mathematics, 2016., №4 p. 51-58.
9. OpenCV: Geometric Image Transformations https://docs.opencv.org/3.4/da/d54/group__imgproc__transform.html