специальности 31.02.05 «Стоматология ортопедическая» в вопросах электронного обучения и дистанционных образовательных технологий.

1. Есауленко, И.Э., Чиркова, Н.В., Морозов, А.Н., Вечеркина, Ж.В. Симуляционное обучение в системе подготовки врача-стоматолога для улучшения качества стоматологической помощи // Системный анализ и управление в биомедицинских системах. – 2015. – Т.14, №2. – С. 334-337.
2. Попова, Т.А., Вечеркина, Ж.В., Пшеничников, И.А., Урусова, Г.Г., Клемшов, В.С. Современные тенденции организации воспитательного процесса с обучающимися медицинского вуза // Тенденции развития науки и образования. 2019. № 49-10. С. 26-28.
3. Попова, Т.А., Чиркова, Н.В., Вечеркина, Ж.В., Пшеничников, И.А., Крючков М.А. Современные аспекты проведения воспитательной работы со студентами медицинского вуза // Тенденции развития науки и образования. 2017. № 31-3. С. 39-41.
4. Попова, Т.А., Чиркова, Н.В., Морозов, А.Н., Пшеничников, И.А., Картавецца, Н.Г., Вечеркина, Ж.В. Исследование факторов учебно-профессиональной мотивации у студентов стоматологического факультета // Системный анализ и управление в биомедицинских системах, 2018. - Т.17. - № 1. - С. 271-276.

Гарминович Н.А.

Обучение студентов решению задач по аналитической геометрии при изучении математики

*Мичуринский государственный аграрный университет
(Россия, Мичуринск)*

doi: 10.18411/lj-11-2020-100

idsp: ljjournal-11-2020-100

Аннотация

В статье приводятся материалы практического занятия по аналитической геометрии со студентами-нематематиками. На занятии решаются типовые задачи, охватывающие темы раздела. Предлагаются задания для самостоятельного решения.

Ключевые слова: Математика, геометрия, точка, прямая, линия, преобразование, плоскость.

Abstract

The article provides materials for a practical lesson on analytical geometry with non-mathematics students. In the lesson, typical tasks are solved covering the topics of the section. Proposed tasks for independent solution.

Key words: Mathematics, geometry, point, straight, line, transformation, plane.

Изучая аналитическую геометрию, студенты учатся связывать положение точки на плоскости с парой чисел – ее координат, а линию – с уравнением с двумя неизвестными. Традиционно теория и практика по геометрии воспринимается студентами-нематематиками легче, ее изучение не сопровождается сопротивлением, как при изучении более сухих разделов математики: алгебры или математического анализа. Т.е., использование визуальных приемов при решении задач помогает и пониманию условия, и ее решению.

Теоретическая часть программы включает изучение следующих вопросов: метод координат на плоскости, уравнение линии первого порядка на плоскости; кривые второго порядка, предполагает самостоятельное знакомство с прямой и плоскостью в пространстве, заданием уравнения плоскости и исследованием взаимного расположения плоскостей. Очевидно, что рассмотрение основных вопросов за планируемые два часа лекции возможно только в режиме справочника с небольшими комментариями. Из школьного курса студенты могут принести знания о методе координат и представления об уравнениях некоторых функций. Понимание и

представление о расположении линий пригодятся им при изображении разного рода изучаемых зависимостей и анализе последних. Методами исследования функций занимается другой раздел математики – математический анализ.

Предлагаем конспект практического занятия по аналитической геометрии. На занятии решаются типовые задачи, охватывающие изученные темы раздела. В конце конспекта предлагаются задания для самостоятельного решения.

Задача 1. Составить уравнение прямой, перпендикулярной к прямой $2x - y + 5 = 0$ и проходящей через середину ее отрезка, содержащегося между осями координат.

Решение любой задачи по геометрии правильнее начинать с построения рисунка на плоскости.

■ Построим прямую $2x - y + 5 = 0$ на плоскости XOY . Для этого определим координаты двух ее точек. Пусть это будут точки пересечения прямой с осями координат. С осью OX прямая пересекается в точке с координатами $y = 0, x = -2,5$. Обозначим эту точку $A(-2,5; 0)$. С осью OY прямая пересекается в точке с координатами $x = 0, y = 5$. Обозначим эту точку $B(0, 5)$.

Пусть C – середина отрезка AB . Координаты точки C найдем по формулам:

$$x_c = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_c = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Значит, $x_c = \frac{-2,5 + 0}{2} = -1,25$, $y_c = \frac{5 + 0}{2} = 2,5$, и координаты точки $C(-1.25; 2.5)$.

В распоряжении студентов несколько формул, описывающих прямую на плоскости. Задача состоит в выборе нужного уравнения. Из условия задачи известны положение точки, через которую проходит искомая прямая (середина отрезка AB) и направление (перпендикулярно данной прямой).

По условию задачи через точку C проходит прямая, перпендикулярная к данной. Угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны отношением $k \cdot k_1 = -1$. Найдем k – угловой коэффициент прямой $2x - y + 5 = 0$. Для этого разрешим данное уравнение относительно переменной y : $y = 2x + 5$, значит $k = 2$. Тогда $k_1 = -\frac{1}{k}$,

$k_1 = -\frac{1}{2}$ – угловой коэффициент искомой прямой.

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку в данном направлении: $y - y_1 = k_1 \cdot (x - x_1)$.

Прямая проходит через точку C , т.е. в этом уравнении $x_1 = -1,25$; $y_1 = 2,5$, а $k_1 = -0,5$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид

$$y - 2,5 = -0,5 \cdot (x + 1,25) \text{ или, после преобразования, } y + 4x - 15 = 0.$$

Ответ: уравнение прямой $y + 4x - 15 = 0$.

Задача 2. Поворотом осей координат на угол 45° преобразовать уравнение $x^2 - 4xy + y^2 + 3 = 0$.

Использование преобразований системы координат позволяет упростить уравнение линии. По условию задачи имеем уравнение кривой второго порядка неканонического вида. Остается открытым вопрос, какую линию описывает это уравнение.

■ Если новая система координат $OX'Y'$ получена из старой системы OXY поворотом координатных осей вокруг общего начала на угол 45° , то зависимость между старыми координатами (x, y) и новыми (x', y') определяется по формулам:

$$\begin{cases} x = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ \\ y = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ \end{cases}$$

Так как $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') \end{cases}.$$

Преобразуем данное уравнение, подставляя в него выражения для переменных x и y :

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') \right]^2 - 4 \cdot \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') \right] + \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') \right]^2 + 3 = 0,$$

$$\frac{1}{2} (x'^2 - 2x'y' + y'^2) - 2(x' - y')(x' + y') + \frac{1}{2} (x'^2 + 2x'y' + y'^2) + 3 = 0,$$

$$-x'^2 + 3y'^2 + 3 = 0,$$

или $3y'^2 - x'^2 + 3 = 0$ – уравнение в новой системе координат $OX'Y'$.

Ответ: уравнение линии $3y'^2 - x'^2 + 3 = 0$.

Заметим, что преобразованное уравнение выглядит проще исходного и позволяет без труда определить, что является уравнением гиперболы.

Задача 3. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(1,2)$ и $B(-1,-1)$ с центром на прямой $x + y - 2 = 0$.

Чтобы составить уравнение окружности, требуется определить координаты ее центра и радиус, т.е. найти три неизвестных. Для этого нужно составить три уравнения и решить их.

■ Построим на плоскости XOY точки A и B и прямую $x + y - 2 = 0$.

Находим для прямой координаты двух ее точек:

$$x = 0, y = 2;$$

$$x = 2, y = 0$$

Обозначим $C(x_c, y_c)$ – центр окружности, r – радиус окружности. Тогда уравнение окружности имеет вид

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2.$$

По условию точки A и B лежат на окружности, значит, их координаты удовлетворяют уравнению окружности и $CA = CB$.

По формуле расстояния между точками получаем:

$$|CA| = \sqrt{(1 - x_c)^2 + (2 - y_c)^2}$$

$$|CB| = \sqrt{(-1 - x_c)^2 + (-1 - y_c)^2}$$

Следовательно, имеем уравнение

$$(1 - x_c)^2 + (2 - y_c)^2 = (-1 - x_c)^2 + (-1 - y_c)^2$$

или, после преобразования $4x_c + 3y_c - 3 = 0$.

Известно, что центр окружности лежит на прямой: $x + y - 2 = 0$,

значит его координаты связаны выражением: $x_c = 2 - y_c$.

Подставим выражение для x_c в уравнение:

$$(1 - x_c)^2 + (2 - y_c)^2 = (-1 - x_c)^2 + (-1 - y_c)^2, \text{ получим } 4(2 - y_c) + 3y_c - 3 = 0,$$

решая последнее, найдем: $y_c = 5$.

Значит, $x_c = -3$ и координаты центра окружности $C(-3, 5)$.

Радиус окружности равен расстоянию CA или CB . Имеем

$$|CA| = R = \sqrt{(1 - (-3))^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Подставим найденные координаты центра окружности и значение радиуса в уравнение окружности, получим:

$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 25 \text{ или } x^2 + y^2 + 6x - 10y + 9 = 0$$

Ответ: уравнение окружности $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 9 = 0$.

Задача 4. Составить уравнение параболы, если точка $F(7, 0)$ является фокусом, а прямая $x = 1$ – директриса.

Чтобы правильно составить уравнение, требуется узнать положение вершины параболы и направление ее ветвей.

■ Построим на плоскости XOY точку F и прямую $x = 1$.

Вершина параболы лежит на середине перпендикуляра, опущенного из фокуса F на прямую $x = 1$. Ее координаты равны $C(4,0)$.

Ветви параболы вытянуты вдоль положительного направления оси OX , так что точка $F(7,0)$ лежит «внутри» параболы. Значит, будем использовать уравнение параболы с вершиной в точке (a,b) , ветви которой направлены вдоль положительного направления оси OX : $(y-b)^2 = 2p(x-a)$, где p – параметр параболы, равный расстоянию от ее фокуса до директрисы.

По условию $p = 7 - 1 = 6$, значит, уравнение параболы имеет вид

$$(y-0)^2 = 2 \cdot 6(x-4) \text{ или } y^2 - 12x + 48 = 0.$$

Ответ: уравнение параболы $y^2 - 12x + 48 = 0$.

Предлагаем задания для самостоятельного решения:

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1,-1)$ и параллельной прямой, проходящей через точки $B(-2,6)$ и $C(2,1)$.
2. Поворотом осей координат на угол $\varphi = \arctg \frac{1}{2}$ преобразовать уравнение $3x^2 + 8xy - 3y^2 = 20$.
3. Составить уравнение окружности, касающейся оси OY в начале координат и проходящей через точку $A(-6,0)$.
4. Составить уравнение параболы с вершиной $B(2,3)$, проходящей через начало координат, ось симметрии которой параллельна оси OX .

Изучение геометрического материала играет большую роль в развитии абстрактного мышления и пространственного воображения студентов, в формирование тех аспектов их математической культуры, которые определяются наглядностью геометрических понятий и дедуктивной строгостью выводов геометрии.

1. Гарминович Н.А. Проблемные ситуации в обучении: теория и технологии / Н.А. Гарминович // Актуальные проблемы образования и воспитания: интеграция теории и практики: материалы Национальной контент-платформы (г. Мичуринск, 12 декабря 2019 г.). – Мичуринск: Изд.-во Мичуринского ГАУ, 2019. – С. 258-261.
2. Гарминович Н.А. Интеграционный аспект формирования терминосистемы при обучении алгебре / Н.А. Гарминович, А.В. Логинов // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы LXX международной конференции «Герценовские чтения – 2017», 10-14 апреля 2017 г. – СПб.: Изд. РГПУ им. А.И. Герцена, 2017. – С. 167-172.
3. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии: Учебное пособие / Н.В. Ефремов. – М.: Физматлит, 2005. – 240 с.