На втором этапе исследования определяются параметры продукта, не упомянутые потребителями в ходе первого опроса, однако являющиеся, с точки зрения производителя, неотъемлемыми компонентами качественного товара. Эти характеристики участвуют в новом опросе потребителей.

Построение рейтинга дополнительных параметров и расчет их мерных величин производится по формулам, используемым на первом этапе исследования.

3. Определение качественно-ценового облика будущего продукта.

После проведения всех исследований можно приступить к разработке проекта по созданию продукта, обладающего свойствами из базового и дополнительного наборов. На заключительном этапе производится отбор характеристик и утверждение их мерных величин с учетом выявленных предпочтений потребителей, а также материальных ресурсов производителя, его финансовых возможностей и представлений о качестве и стоимости целевого продукта.

После того, как товар или услуга будут выпущены на рынок, следует использовать существующие математические модели и методы для мониторинга отношения потребителей к разработанному продукту с целью определения необходимости его доработки.

К преимуществам рассмотренного подхода можно отнести:

- учет предпочтений потребителей касательно состава свойств будущего продукта, оценивание значимости и желательных мерных величин его характеристик;
- учет дополнительных параметров, влияющих, по мнению производителя, на качество будущего продукта, а также оценивание степени их значимости и желательных мерных величин со стороны потребителей;
- возможность выбора производителем комбинации и величины наиболее предпочтительных свойств разрабатываемого товара (услуги), являющихся значимыми для потребителя, а также включение в будущий продукт дополнительных параметров;
- возможность производителя влиять на отношение потребителей к его продукции путем модификации набора характеристик и изменения соотношения между качеством и стоимостью предлагаемых товаров и услуг.

1. Коротков А.В. Маркетинговые исследования / А.В. Коротков. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2015. – 304 с.
2. Коротков А.В. Некоторые аспекты методологии маркетинговых исследований // Маркетинг / А.В. Коротков. – 2013. – № 4. – С. 39-48.
3. Коротков А.В. Статистическая характеристика продукта // Вопросы статистики / А.В. Коротков. – 2010. – № 6. – С. 85-87.
4. Котлер Ф. Основы маркетинга / Ф. Котлер. – М.: Вильямс, 2007. – 656 с.

Булатникова М.Е.

Методика решения дифференциальных уравнений первого порядка

*Российский университет транспорта (МИИТ)
(Россия, Москва)*

doi: 10.18411/lj-11-2019-279

idsp: ljournal-11-2019-279

Аннотация

В статье описывается методика изучения темы «Дифференциальные уравнения», в частности, дифференциальные уравнения первого порядка. Приводятся примеры решения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, дифференциальные однородные уравнения, линейное дифференциальное уравнение, уравнение Бернулли.

Abstract

The article describes the methodology for studying the topic "Differential equations", in particular, first-order differential equations. Examples of solutions are provided.

Keywords: differential equations, differential equations with separable variables, differential homogeneous equations, linear differential equation, Bernoulli equation.

Тему «Дифференциальные уравнения» изучают студенты второго курса технических специальностей. Изучение темы происходит в первом семестре. Помимо этой темы в этом же семестре рассматриваются еще два крупных раздела, такие как «Кратные и криволинейные интегралы» и «Ряды». На этот семестр выделяется 28 часов лекций и 14 часов практических занятий. Таким образом, очевидно, что число часов, отведенное на тему «Дифференциальные уравнения» небольшое. В связи с этим не удастся рассмотреть на лекционных и практических занятиях достаточное количество примеров. Осложняет освоение курса то, что идет высокий темп при изложении материала и значительная часть часов вынесена на самостоятельное изучение. Методика решения дифференциальных уравнений состоит в том, что надо определить тип дифференциального уравнения, а зная тип уравнения использовать алгоритм его решения. При решении дифференциального уравнения студенты должны выделить тип дифференциального уравнения, а зная тип уравнения уже знать метод его решения.

В этой статье мы поговорим о методике решения дифференциальных уравнений первого порядка. Мы рассматриваем следующие типы уравнений: дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, однородные дифференциальные уравнения, линейные дифференциальные уравнения, уравнения Бернулли. В помощь студентам нами издано учебное пособие «Дифференциальные уравнения. Часть 1», где представлена краткая теория, примеры решения дифференциальных уравнений, задания для самостоятельной работы, а так же типовой расчет.

При решении дифференциальных уравнений мы рекомендуем следующий алгоритм: проверить, можно ли разделить переменные (если да, то это уравнение с разделяющимися переменными); попробовать привести уравнение к виду $y' + P(x)y = Q(x)$, если удалось, то это линейное уравнение, попробовать привести уравнение к виду $y' + P(x)y = Q(x)y^m$, если удалось, то это уравнение Бернулли, если

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

нет, то привести уравнение к виду

После того, как определили тип уравнения, использовать алгоритм решения.

Рассмотрим методику решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Пример 1. Найти частное решение уравнения $x^2 y^2 y' + 1 = y$, если $y(1) = 2$.

Решение. Приведем уравнение к виду $y' = M_1(x) \cdot M_2(y)$: $x^2 y^2 y' = y - 1$, $y' = \frac{y-1}{y^2} \cdot \frac{1}{x^2}$. Далее $y' = \frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{y^2} \cdot \frac{1}{x^2}$. По правилу пропорции получаем

$\frac{y^2}{y-1} dy = \frac{dx}{x^2}$. Переменные разделились. Интегрируем левую и правую части уравнения:

$$\int \frac{y^2}{y-1} dy = \int \frac{dx}{x^2}, \quad \int \frac{y^2 dy}{y-1} = \int \frac{(y^2-1)+1}{y-1} dy = \int \left(y+1 + \frac{1}{y-1} \right) dy = \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1|,$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c.$$

Общим интегралом уравнения будет выражение

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + c.$$

Следует отметить, что в результате последовательного деления обеих частей уравнения на x^2 и на $(y-1)$ (при разделении переменных) могли быть потеряны решения, соответствующие действительным корням сомножителей, а именно: $x=0$; $y=1$. Подставив их в исходное уравнение, убеждаемся, что только $y=1$ является его решением. Это решение необходимо дополнительно включить в состав интеграла. Отметим, также, что $y=1$ не получается из общего решения ни при каких значениях c .

Найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Полагая в общем интеграле $x_0=1$ и $y_0=2$, находим c

$$\frac{4}{2} + 2 + \ln|2-1| = -\frac{1}{1} + c, \quad c=5.$$

Искомый частный интеграл имеет вид

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + 5.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения: $x(y+1)dx - (x^2+1)dy = 0$.

Решение. Разделяя переменные, после деления на $(y+1)(x^2+1) \neq 0$ приведем уравнение к виду $\frac{x dx}{x^2+1} = \frac{y dy}{y+1}$.

Интегрируя, получим

$$\int \frac{x dx}{x^2+1} = \int \frac{(y+1)-1}{y+1} dy, \quad \frac{1}{2} \ln|x^2+1| = \int \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy; \quad \frac{1}{2} \ln|x^2+1| = y - \ln|y+1| + c$$

общее решение уравнения.

Проверим потерю частных решений: $x^2+1 \neq 0$ в области действительных значений, но $y+1=0$, т.е. $y=-1$ - частное решение, которое нужно рассматривать в совокупности с общим решением.

Рассмотрим методику решения однородных дифференциальных уравнений.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $(x^2+y^2)dx - 2xydy = 0$.

Решение. Убедимся, что данное уравнение является однородным. Признаком данного типа уравнения является наличие одинаковой степени "x" и "y" во всех слагаемых. Разрешим данное уравнение относительно производной $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}$.

Поделим числитель и знаменатель правой части на x^2 . Получаем $y' = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 \frac{y}{x}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ и

устанавливаем, что она является функцией только отношения переменных $\frac{y}{x}$, т.е.

устанавливаем, что данное уравнение является однородным. Далее вводим новую функцию u , полагая $y=ux$; при этом $y' = u'x + u$ и после подстановки данное

уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными $u'x + u = \frac{1+u^2}{2u}$

или $xdu = \frac{1-u^2}{2u} dx$.

Разделим переменные: $\frac{2udu}{1-u^2} = \frac{dx}{x}$ и, интегрируя, найдем $-\ln|1-u^2| = \ln|x| - \ln c$

или $x(1-u^2) = \pm c = c_1$. Исключая вспомогательную функцию $u \left(u = \frac{y}{x} \right)$, окончательно получим $y^2 = x^2 - c_1x$.

Пример 4. Найти частное решение уравнения $xdy - ydx = ydy$ при условии $y(-1) = 1$.

Решение. Выяснив, что уравнение однородное: $y' = \frac{y}{x-y}$, $y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, и

полагая $y = ux$, получим уравнение $u'x + u = \frac{u}{1-u}$ или $x \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{1-u}$. Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{1-u}{u^2} du = \frac{dx}{x}, \quad -\frac{1}{u} - \ln|u| = \ln|x| - c \quad \text{или} \quad \frac{1}{u} + \ln|xu| = c.$$

Возвращаясь к переменной y , находим общий интеграл $x = y(c - \ln|y|)$.

Подставив заданные значения переменных: $y = 1$ при $x = -1$, находим, что $c = -1$. Следовательно, искомый частный интеграл уравнения будет $x = -y(1 + \ln|y|)$.

Рассмотрим методику решения линейного дифференциального уравнения.

Пример 5. Найти частное решение уравнения $ydx - (3x + 1 + \ln y)dy = 0$ при условии $y\left(-\frac{1}{3}\right) = 1$.

Решение. Данное уравнение является линейным, если рассматривать x как функцию от y и привести его к виду $\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$, то есть $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = \frac{1 + \ln y}{y}$.

Далее, заменяя функцию x по формуле $x = uv$, где u и v функции от y , имеем $\frac{dx}{dy} = v \frac{du}{dy} + u \frac{dv}{dy}$ и $v \frac{du}{dy} + u \frac{dv}{dy} - \frac{3uv}{y} = \frac{1 + \ln y}{y}$ или $v \frac{du}{dy} + u \left(\frac{dv}{dy} - \frac{3v}{y} \right) = \frac{1 + \ln y}{y}$.

Отсюда для нахождения u и v имеем два уравнения:

$$1) \quad \frac{dv}{dy} - \frac{3v}{y} = 0 \quad \text{и} \quad 2) \quad v \frac{du}{dy} = \frac{1 + \ln y}{y}.$$

Из первого уравнения находим v :

$\frac{dv}{v} = \frac{3dy}{y}$; $\ln v = 3 \ln y$; $v = y^3$. Подставляем v во второе уравнение и, решая его,

находим u : $y^3 \frac{du}{dy} = \frac{1 + \ln y}{y}$; $du = \frac{1 + \ln y}{y^4} dy$; $u = \int y^{-4} dy + \int y^{-4} \ln y dy + C = \frac{y^{-3}}{-3} + I + C$.

Второй интеграл, обозначенный I , находим отдельно по формуле интегрирования по частям. Полагая $u_1 = \ln y$, $dv_1 = y^{-4} dy$, получим $du_1 = \frac{dy}{y}$, $v_1 = \frac{y^{-3}}{-3}$ и

$$I = \int u_1 dv_1 = u_1 v_1 - \int v_1 du_1 = -\frac{\ln y}{3y^3} + \frac{1}{3} \int y^{-4} dy = -\frac{\ln y}{3y^3} - \frac{1}{9y^3}.$$

$$\text{Следовательно, } u = -\frac{1}{3y^3} - \frac{\ln y}{3y^3} - \frac{1}{9y^3} + C.$$

Умножая u на v , получим общий интеграл данного уравнения: $x = Cy^3 - \frac{4}{9} - \frac{1}{3} \ln y$. Подставляя сюда заданные значения переменных $x = -\frac{1}{3}$, $y = 1$, находим значение произвольной постоянной $c = \frac{1}{9}$.

$$\text{Следовательно, частное решение имеет вид } x = \frac{y^3 - 4}{9} - \frac{1}{3} \ln y.$$

Рассмотрим методику решения дифференциального уравнения Бернулли.

Пример 6. Найти общее решение уравнения $y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y}$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $y' - \frac{1}{x}y = x^2 y^{-1}$, здесь $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = x^2$, $m = -1$. Положим: $y = u(x) \cdot v(x)$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставим в исходное уравнение и сгруппируем слагаемые: $u'v + uv' - \frac{uv}{x} = \frac{x^2}{uv}$, $u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = \frac{x^2}{uv}$ (1).

Приравняем скобку к нулю: $v' - \frac{v}{x} = 0$, тогда $u'v - \frac{x^2}{uv} = 0$.

Решаем уравнение относительно v : $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$, $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$, $\ln|v| = \ln|x| + \ln|c_1|$, $\ln|v| = \ln|c_1 x|$, $v = c_1 x$. Выбираем в качестве функции v одну, например, $v_1 = x$ (при $c_1 = 1$). Подставив v_1 в уравнение (1), получаем $u'x - \frac{x^2}{ux} = 0$, $u' - \frac{1}{u} = 0$ или $\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}$.

Интегрируем обе части $\int u du = \int dx$, $\frac{u^2}{2} = x + c$ или $u = \sqrt{2(x+c)}$.

Перемножая v_1 и u , найдем общее решение исходного уравнения: $y = uv_1 = x\sqrt{2(x+c)}$.

Таким образом, нами приведена методика решения дифференциальных уравнений первого порядка.

1. Булатникова М.Е., Дмитрусенко Н.С. Дифференциальные уравнения. Часть 1: Учебное пособие. – М.: РУТ(МИИТ), 2019. – 80с.
2. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие. 10-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 240 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).