РАЗДЕЛ XIV. МАТЕМАТИКА

Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В.

Численное решение задачи об изгибе трехслойной пластины с идеально упруго-пластическим заполнителем с несущими слоями разной толщины*Казанский (Приволжский) федеральный университет
(Россия, Казань)*

doi: 10.18411/lj-11-2019-277

idsp: lj-11-2019-277

Аннотация

Рассмотрена физически нелинейная задача об изгибе жестко закрепленной трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем идеально упруго-пластическим заполнителем с несущими слоями разной толщины. Обобщенная постановка сформулирована в виде седловой задачи. Для численного решения задачи использовался итерационный процесс, каждый шаг которого сводится к нахождению проекции на выпуклое замкнутое множество и решению задачи линейной теории упругости. Проведен анализ результатов численных экспериментов.

Ключевые слова: Трехслойная пластина, идеально упруго-пластический заполнитель, седловая задача, итерационный метод, численный эксперимент.

Abstract

The physically nonlinear problem of bending a rigidly fixed sandwich plate with a transversally soft and an ideally elastic-plastic core with carrier layers of different thicknesses is considered. The generalized statement is formulated as a saddle problem. For a numerical solution of the problem, an iterative process was used, each step of which reduces to finding the projection onto a convex closed set and solving a linear elasticity theory problem. The results of numerical experiments are analyzed.

Keywords: Sandwich plate, ideally elastic-plastic core, iterative method, saddle problem, numerical experiment.

Введение.

Многослойные конструкции весьма широко распространены в технике. Применение таких конструкций диктуется стремлением сочетать легкость с достаточной прочностью и жесткостью, например, трехслойные пластины и оболочки с мягким заполнителем, применяемые в инженерных сооружениях, в строительстве, машиностроении, судостроении, в авиационной промышленности и ракетной технике [1–9]. Трехслойная конструкция представляет собой систему, которая состоит из двух внешних сравнительно тонких слоев и среднего, более толстого слоя. Внешние слои изготавливаются из более прочных материалов (стали, сплавов легких материалов, дерева, пластмасс и др.). Внутренний слой – заполнитель – изготавливают из относительно малопрочных материалов с малой плотностью (из пробки, резины, древесины, пластмассы, вспененного полимерного материала). Настоящая работа посвящена исследованию задачи об изгибе трехслойной пластины для физически нелинейного случая, соответствующего упруго-пластической модели для заполнителя, в одномерной по пространственным координатам постановке. Считается, что в отличие от работ [10–13], несущие слои имеют разную толщину. Математическая модель данной задачи была построена в [14–16] в виде задачи об отыскании седловой точки некоторого функционала, исследована корректность обобщенной постановки и предложен итерационный метод для ее численной реализации. Разработан комплекс программ для реализации итерационного метода. Проведены численные эксперименты и проведен их анализ. Обобщенные постановки физически нелинейных и

геометрически линейных задач рассмотрены в [17–27]. Нелинейные задачи теории мягких сетчатых оболочек изучены в [28–34].

1. Постановка задачи.

Пусть a – длина пластины, $2t$, $2t_{(k)}$ – толщины заполнителя и k -го несущего слоя (всюду в дальнейшем предполагаем, что $k=1,2$), $X_{(k)}^1$, $X_{(k)}^3$ – компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности k -го слоя, $M_{(k)}^1$ – поверхностный момент внешних сил, приведенный к срединной поверхности k -го слоя, $w_{(k)}^{(k)}$ и $u_{(k)}^{(k)}$ – прогибы и осевые перемещения точек срединной поверхности k -го слоя, $T_{(k)}^{11}$, $M_{(k)}^{11}$ – мембранные усилия и внутренние изгибающие моменты в k -м слое, $H_{(k)} = t + t_{(k)}$. Считаем края пластины закрепленными, так что при $x = 0$, $x = a$ выполнены условия $u_{(k)}^{(k)}(x) = 0$, $w_{(k)}^{(k)}(x) = 0$, $d w_{(k)}^{(k)}(x) / dx = 0$. Рассматривается геометрически линейная постановка $M_{(k)}^{11} = -D_{(k)} d^2 w_{(k)}^{(k)} / dx^2$, $T_{(k)}^{11} = B_{(k)} du_{(k)}^{(k)} / dx$, $B_{(k)} = 2t_{(k)} E^{(k)} / (1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)})$ – жесткость k -го слоя на растяжение–сжатие, $E^{(k)}$ и $\nu_{12}^{(k)}$, $\nu_{21}^{(k)}$ – модуль упругости первого рода и коэффициенты Пуассона материала k -го слоя, $D_{(k)} = B_{(k)} t_{(k)}^2 / 3$ – изгибная жесткость k -го слоя. Пусть q^1 – контактные реактивные усилия взаимодействия (касательные напряжения в заполнителе), постоянные по его толщине, удовлетворяющие граничным условиям $q^1(0) = q^1(a) = 0$, $U = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, w^{(2)})$ – вектор перемещений точек срединных поверхностей несущих слоев. В соответствии с [35, 36] рассмотрим функционал $L = P - A - A_q$, $P(U, q^1) = \frac{1}{2} \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 \left[B_{(k)} \left(\frac{du_{(k)}^{(k)}}{dx} \right)^2 + D_{(k)} \left(\frac{d^2 w_{(k)}^{(k)}}{dx^2} \right)^2 \right] + c_1 (q^1)^2 + c_2 \left(\frac{dq^1}{dx} \right)^2 + c_3 (w^{(2)} - w^{(1)})^2 \right\} dx$ – потенциальная энергия деформации, $c_1 = 2t / G_{13}$, $c_2 = t^3 / (3E_3)$, $c_3 = E_3 / (2t)$, G_{13} и E_3 – модули поперечного сдвига и обжатия заполнителя, $A(U) = \int_0^a \sum_{k=1}^2 [X_{(k)}^1 u_{(k)}^{(k)} + X_{(k)}^3 w_{(k)}^{(k)} + M_{(k)}^1 dw_{(k)}^{(k)} / dx] dx$ – работа внешних сил и моментов, $A_q(U, q^1) = \int_0^a \left[(u^{(1)} - u^{(2)}) - \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dw_{(k)}^{(k)}}{dx} + c_1 q^1 - c_2 \frac{d^2 q^1}{dx^2} \right] q^1 dx$ – работа неизвестных контактных касательных напряжений на соответствующих перемещениях. Считая, что зависимость между касательным напряжением и деформацией поперечного сдвига соответствует идеальной упруго-пластической модели, задачу рассмотрим при ограничении $|q^1| \leq q^1_*$, где q^1_* – заданное предельное значение напряжения в заполнителе. Это условие означает недопущение разрушения конструкции и соответствует физической нелинейности.

2. Обобщенная постановка задачи

Преобразуем функционал L . Обозначим

$$\Phi_0(U) = \frac{1}{2} \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 B_{(k)} (du^{(k)} / dx)^2 + D_{(k)} (d^2 w^{(k)} / dx^2)^2 + c_3 (w^{(2)} - w^{(1)})^2 \right\} dx,$$

$$\Phi_1(U, q^1) = \int_0^a \left[- \sum_{k=1}^2 H_{(k)} dw^{(k)} / dx + (u^{(1)} - u^{(2)}) \right] q^1 dx,$$

$$\Phi_2(q^1) = \frac{1}{2} \int_0^a \left\{ c_1 (q^1)^2 + c_2 (dq^1 / dx)^2 \right\} dx.$$

Тогда с учетом граничных условий имеем, что $L(U, q^1) = \Phi_0(U) - \Phi_1(U, q^1) - \Phi_2(q^1)$. Обозначим $V = V_2 \times V_2 \times V_1 \times V_1$, где $V_m = W_2^{(m)}(0, a)$ – пространство Соболева [37] со скалярным произведением $(u, \eta)_m = \int_0^a d^m u / dx^m d^m \eta / dx^m dx$, $K = \{y \in V_1 : |y(x)| \leq q_*^1, 0 \leq x \leq a\}$. Под решением задачи понимаем функцию $(\hat{U}, \hat{q}^1) \in V \times K$, являющуюся решением задачи

$$L(\hat{U}, \hat{q}^1) = \inf_{U \in V} \sup_{q^1 \in K} L(U, q^1). \quad (1)$$

В [14, 15] были доказаны следующие результаты.

Теорема 1. Задача (1) имеет единственное решение.

Лемма 1. Функционал Φ_0 дифференцируем по Гато [38], градиент Φ'_0 является сильно монотонным оператором с постоянной $\alpha > 0$, зависящей от входных параметров задачи.

Лемма 2. Функционал Φ_1 линеен и непрерывен по обоим аргументам. Оператор $C : V \rightarrow V_1$, определяемый по формуле $(CU, q^1) = \Phi_1(U, q^1)$ для всех $U \in V$, $q^1 \in V_1$, липшиц-непрерывен с постоянной $\gamma > 0$, зависящей от входных параметров задачи.

3. Итерационный метод и численные эксперименты

Для решения задачи (1) рассмотрим следующий итерационный процесс [39–50]. Пусть $q_0^1 \in K$ – произвольный элемент. Для $n = 0, 1, \dots$ найдем U_n как решение линейной задачи теории упругости $\Phi'_0(U_n) + C^* q_n^1 = 0$, $C^* : V_1 \rightarrow V$ – сопряженный к C^* оператор. Полагаем затем $q_{n+1}^1 = P_K(q_n^1 - \tau(q_n^1 - CU_n))$, где P_K – оператор проектирования на выпуклое замкнутое множество K , $\tau > 0$ – итерационный параметр. Таким образом, каждый шаг метода сводится к решению линейной задачи теории упругости и нахождению проекции на выпуклое, замкнутое множество K .

Теорема 2. Пусть $0 < \tau < 2\alpha / (2\alpha + \gamma)$. Тогда U_n сходится сильно к $\hat{U}$ при $n \rightarrow +\infty$.

Предложенный метод решения задачи был реализован численно. Предварительно построены ее конечно-разностные аппроксимации [51, 52]. Разработан комплекс программ в среде Matlab, проведены расчеты для модельных задач (в физически линейном и нелинейном случаях) при следующих данных: $a = 1$ см, $2t_1 = 0.015$ см, $2t_2 = 0.005$ см, $2t = 0.1$ см, $G_{13} = 15$ МПа, $E_3 = 25$ МПа,

$X_{(1)}^3 = 1$ МПа, $X_{(2)}^3 = 0$, $E^{(k)} = 70 \cdot 10^3$ МПа, $\nu_{12}^{(k)} = \nu_{21}^{(k)} = 0.3$, $X_{(k)}^1 = 0$, $M_{(k)}^1 = 0$, $k = 1, 2$, $q_*^1 = 1.5$ МПа. Число точек сетки $N = 100$.

В качестве иллюстраций на рисунке приведены графики изменения касательных напряжений в заполнителе q^1 , осевых перемещений $u^{(k)}$ и прогибов $w^{(k)}$ по длине пластины с неподвижно зацементированными в торцевых сечениях внешними слоями. Считается, что пластина подвержена действию равномерно распределенной

поперечной нагрузки $X_{(1)}^3$, приложенной к первому слою. На рис. 1, 3, 5 приведены графики для физически линейной задачи, на рис. 2, 4, 6 – для физически нелинейной. Штриховая линия на рис. 2 соответствует идеальной упругой модели, а сплошная - идеальной упруго-пластической модели заполнителя.

Рис. 1. Касательные напряжения в заполнителе, линейный случай,

Рис. 2. Касательные напряжения в заполнителе, нелинейный случай

Рис. 3. Осевые перемещения в несущих слоях, линейный случай,

Рис. 4. Осевые перемещения в несущих слоях, нелинейный случай

Рис. 5. Прогибы в несущих слоях, линейный случай

Рис. 6. Прогибы в несущих слоях, нелинейный случай

Из полученных результатов следует, что при использовании идеально упруго-пластической модели деформирования заполнителя, в виде ограничения максимальных касательных напряжений, пластина подвержена большим прогибам при меньших осевых перемещениях (см. рис. 3 и 6). В случае дальнейшего увеличения поперечной нагрузки пластическая зона в заполнителе будет распространяться на большую длину.

4. Заключение.

Рассмотрена задача о докритическом поведении трехслойной пластины в физически нелинейной одномерной постановке. Приближенный метод решения задачи основан на конечномерной аппроксимации задачи с последующим применением для численной реализации разностной схемы итерационного метода. Разработан комплекс программ, с помощью которого проведены численные эксперименты. Эта задача будет использована в дальнейшем для исследования форм потери устойчивости пластины и нахождения критической нагрузки, при которой наступает потеря устойчивости пластины. Будут разработаны приближенные методы решения указанной задачи на основе разработанных в [53–60] подходов. В частности, при исследовании вопросов устойчивости будут применены результаты [61–65].

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 18-41-160014, 18-41-160029, 19-08-00073).

1. Иванов В.А., Паймушин В.Н., Полякова Т.В. Уточненная теория устойчивости трехслойных конструкций (линеаризованные уравнения нейтрального равновесия и простейшие одномерные задачи) // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1995. – № 3. – С. 15–24.
2. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Численное исследование физически нелинейной задачи о продольном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 1. – С. 39–51.
3. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Геометрически нелинейная задача о продольно-поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158, № 4. – С. 453–468.
4. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Численное решение задачи о равновесии трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем в геометрически нелинейной постановке // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – Т. 17, № 23. – С. 393–396.
5. Макаров М.В., Бадриев И.Б., Паймушин В.Н. Определение критических точек бифуркации для задачи о геометрически нелинейном поведении трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2016. Материалы международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 292–294.
6. Badriev I.B., Paimushin V.N. Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – V. 38, № 5. – P. 779–793.
7. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А. Математическое моделирование процессов изгиба многослойных конструкций // Цифровые средства производства инженерного анализа. Сборник материалов Первой всероссийской конференции с международным участием. – Тула, 2017. – С. 12–17.
8. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Обобщенная постановка задачи об изгибе трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. Материалы международной научной конференции. – Самара, 2017. – С. 184–185.
9. Paimushin V.N., Badriev I.B., Kholmogorov S.A. Consistent equations of nonlinear multilayer shells theory in the quadratic approximation // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – V. 40, № 3. – P. 349–363.
10. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В. Численное исследование физически нелинейных задач об изгибе трехслойных пластин // Материалы XI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016), Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – М: Изд-во МАИ, 2016. – С. 475–477.

11. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В. Сеточные аппроксимации физически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // В сборнике: Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна.–2016. Материалы международной конференции.. – Воронеж; 2016. – С. 70–72.
12. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Исследование задачи об изгибе трехслойной пластины в физически нелинейной постановке // Математическое моделирование и краевые задачи Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах.. – Самара, 2016. – С. 19–24.
13. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В. О приближенных методах решения задачи об изгибе трехслойной пластины с идеально упруго-пластичным заполнителем // Проблемы химмотологии: от эксперимента к математическим моделям высокого уровня Сборник избранных докладов VI Международной научно-технической конференции. - М: ООО «Издательство «Граница», 2016. - С. 21-26.
14. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Гарипова Г.З., Макаров М.В. О разрешимости нелинейной задачи о равновесии трехслойной пластины // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки.. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1034–1037.
15. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В., Паймушин В.Н., Хабибуллин Р.Ф. О решении физически нелинейных задач о равновесии трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157, № 1. – С. 15–24.
16. Badriev I.B., Banderov V.V., Garipova G.Z., Makarov M.V., Shagidullin R.R. On the solvability of geometrically nonlinear problem of sandwich plate theory // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – V. 9, № 81–84. – P. 4095–4102.
17. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Geometrically nonlinear problem of longitudinal and transverse bending of a sandwich plate with transversally soft core // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – V. 39, № 3. – P. 448–457.
18. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П. Постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 16-1. – С. 5–11.
19. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П. Операторная формулировка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 18-3. – С. 5–13.
20. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Обобщенная постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 23-1. – С. 4–10.
21. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. О псевдомонотонности оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 24-2. – С. 5–14.
22. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. О свойстве типа ограниченной липшиц-непрерывности оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 25-3. – С. 5–12.
23. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. О квазипотенциальности оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 26-1. – С. 5–12.
24. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 8-2 (34-2). – С. 11–14.
25. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Исследование свойств оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. – 2017. – Т. 10. – С. 7–10.
26. Бадриев И.Б. Исследование математических моделей процессов изгиба трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем и методов их численной реализации // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 7-2 (33-2). – С. 83–88.
27. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. О решении геометрически нелинейных задач об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 7-2 (33-2). – С. 95–98.
28. Бадриев И.Б. Решение вариационных задач нелинейных процессов механики сплошной среды // Теория управления и математическое моделирование Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В.Азбелева и профессора Е.Л.Тонкова.. – Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2015. – С. 234–235.

29. Badriev I.B., Banderov V.V. Iterative methods for solving variational inequalities of the theory of soft shells // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2014. – V. 35, № 4. – P. 371–383.
30. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование разрешимости осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения // *Известия высших учебных заведений. Математика*. – 2005. – № 1. – С. 25–30.
31. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Калачева Н.В. Численное исследование вариационных и квазивариационных неравенств теории мягких сетчатых оболочек // *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1037–1041.
32. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Численное решение задач о равновесии осесимметричных мягких оболочек // *Вестник Тамбовского государственного технического университета*. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 29–35.
33. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Итерационные методы решения вариационных неравенств теории мягких оболочек // *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. – 2013. – Т. 155, № 2. – С. 19–33.
34. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. О решении задачи равновесия мягкой сетчатой оболочки при наличии нагрузки, сосредоточенной в точке // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. – 2013. – № 3. – С. 16–34.
35. Паймушин В.Н. К вариационным методам решения нелинейных пространственных задач сопряжения деформируемых тел // *Доклады Академии наук СССР*. – 1983. – Т. 273, № 5. – С. 1083–1086.
36. Паймушин В.Н. Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефектами в виде участков непрочности // *Прикладная механика*. – 1987. – Т. 23, № 11. – С. 32–38.
37. Adams R.A. *Sobolev Spaces*. – New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975. – 286 p.
38. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: 1972. – 416 с.
39. Badriev I.B., Banderov V.V. Numerical solution of the equilibrium of axisymmetric soft shells // *Математические методы в технике и технологиях-ММТТ*. – 2014. – № 5 (64). – С. 16–20.
40. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами // *Известия высших учебных заведений. Математика*. – 2003. – № 1. – С. 20–28.
41. Бадриев И.Б. О решении вариационных неравенств второго рода // *Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Девятой Всероссийской конференции*. – Казань: Отечество, 2012. – С. 32–35.
42. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Численное моделирование деформирования биокomпозитов // *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXI международного симпозиума имени А.Г. Горшкова*. – М: ООО "ТРП", 2015. – С. 7–9.
43. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. О решении некоторых нелинейных краевых и начально-краевых задач // *Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова*. – Москва: ООО "ТРП", 2016. – С. 31–33.
44. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Решение нелинейных задач теории многослойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем // *Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Десятой Международной конференции*. – Казань, 2014. – С. 103–107.
45. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. О сходимости итерационного метода двойственного типа решения смешанных вариационных неравенств // *Дифференциальные уравнения*. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 1115–1122.
46. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование стационарной задачи фильтрации с многозначным законом при наличии точечного источника // *Дифференциальные уравнения*. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 874–880.
47. Бадриев И.Б., Ляшко А.Д., Панкратова О.В. Исследование сходимости итерационных методов решения нелинейных задач теории фильтрации // *Известия высших учебных заведений. Математика*. – 1998. – № 11. – С. 8–13.
48. Бадриев И.Б., Фанюк Б.Я. Итерационные методы решения задач фильтрации в многослойных пластах при наличии точечного источника // *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. – 2010. – Т. 152, № 4. – С. 39–55.
49. Badriev I.B., Fanyuk B.Y. Iterative methods for solving seepage problems in multilayer beds in the presence of a point source // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2012. – V. 33, № 4. – P. 386–399.
50. Бадриев И.Б., Чебакова В.Ю. Математическое моделирование низкотемпературной ВЧЕ-плазмы в аргоне // *Математическое моделирование и краевые задачи. Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах*. – Саратов, 2016. – С. 17–21.
51. Samarskii A.A. *The theory of difference schemes*. – New York–Basel: Marcel Dekker, 2001. – 761 p.

52. Карчевский М.М., Ляшко А.Д. Разностные схемы для нелинейных задач математической физики. – Казань: Изд-во Казанского университета, 1976. – 156 с.
53. Чебакова В.Ю. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при атмосферном давлении в аргоне // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158, № 3. – С. 404–423.
54. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при больших межэлектродных расстояниях. I. Постановка задачи // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 2.. – С. 123–130.
55. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Продольно-поперечный изгиб по цилиндрической форме трехслойной пластины, подкрепленной в торцевых сечениях абсолютно твердыми телами // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2017. – Т. 159, № 2.. – С. 174–190.
56. Badriev I.B., Ju Chebakova V., Zheltukhin V.S. Numerical solution of the initial boundary value problems of radio-frequency capacitive coupled discharge // Journal of Physics: Conference Series. - 2017. - V 927, № 012008.
57. Badriev I.B., Banderov V.V., Singatullin M.T. Numerical solution of non-linear filtration issues for high viscous fluids at the presence of wells // Research Journal of Applied Sciences. – 2015. – V. 10, № 8. – P. 343–346.
58. Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Бадриев И.Б., Макаров М.В. Геометрически и физически нелинейная задача о трехточечном изгибе композитных тест-образцов // Материалы XXII Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" им. А.Г.Горшкова. Т. 2. – М: ООО «ТР-принт», 2016. – С. 197–202.
59. Badriev I.B., Banderov V.V., Singatullin M.T. Numerical solution of non-linear filtration issues for high viscous fluids at the presence of wells // Research Journal of Applied Sciences. – 2015. – V. 10. № 8. – P. 343–346..
60. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Badriev I.B. Theoretical and experimental investigations of the formation mechanisms of residual deformations of fibrous layered structure composites // MATEC Web of Conferences. – 2017. – Vol. 129, art. no 02042.
61. Solov'ev S.I. The error of the Bubnov-Galerkin method with perturbations for symmetric spectral problems with a non-linearly occurring parameter // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1992. – V. 32., № 5. – P. 579–593.
62. Solov'ev S.I. Finite element approximation with numerical integration for differential eigenvalue problems // Applied Numerical Mathematics. – 2015. – V. 93. – P. 206–214.
63. Solov'ev S.I. Eigenvibrations of a beam with elastically attached load // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2016. – V. 37, № 5. – P. 597–609.
64. Solov'ev S.I. Eigenvibrations of a bar with elastically attached load // Differential Equations. – 2017. – V. 53, № 3. – P. 409–423.
65. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Численное исследование геометрически нелинейной задачи об устойчивости шарнирно закрепленной трехслойной оболочки с трансверсально-мягким наполнителем // Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций. Международная конференция. Сборник материалов. – Екатеринбург: ИМАШ УрО РАН, 2018. – С. 361–362.

Бийсултанова М.А.¹, Визирова Х.Р.¹, Газиева И.И.¹, Даудов И.М.²

Использование математических моделей и методов маркетинга для определения оптимального набора параметров будущего продукта

¹ФГБОУ «Грозненский государственный нефтяной технический университет имени академика М. Д. Миллионщикова»

²ФГБОУ «Чеченский государственный университет»
(Россия, Грозный)

doi: 10.18411/lj-11-2019-278

idsp: ljjournal-11-2019-278

Сегодня, когда многие отрасли отечественного производства товаров и услуг поделены между различными предприятиями, стремящимися завоевать максимальную долю занимаемого ими рынка, наиболее остро встает задача повышения конкурентоспособности фирмы и выпускаемой ею продукции. Поскольку конкурентоспособность любого предприятия напрямую определяется объемом продаж его продукции, а объем продаж, в свою очередь, зависит от потребительского спроса,