Поленов В.С., Ницак Д.А.

Сферически – симметричные волны в однородных двухкомпонентных средах

ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и
Ю.А.Гагарина»
(Россия, Воронеж)

doi: 10.18411/lj-10-2019-49

ids: lj-10-2019-49

Аннотация

При решении некоторых динамических задач двухкомпонентных сред в сферически – симметричных координатах, удобно пользоваться уравнениями не относительно векторов перемещений, а относительно скалярных потенциалов. Ниже вводятся некоторые скалярные потенциалы при помощи, которых получены волновые уравнения и напряжения в потенциалах для двухкомпонентной пористой среды в случае гармонических сферически – симметричных волн, когда одна компонента среды является упругая, а вторая – сжимаемая жидкость.

Ключевые слова: упругость, жидкость, тензор напряжений, сила, деформация, перемещение, сферическая волна, потенциал.

Abstract

When solving some dynamic problems of two-component media in spherically symmetric coordinates, it is convenient to use equations not with respect to displacement vectors, but with respect to scalar potentials. Below we introduce some scalar potentials with the help of which the wave equations and stresses in the potentials for a two-component porous medium are obtained in the case of harmonic spherically symmetric waves, when one component of the medium is elastic and the second is a compressible fluid.

Keywords: elasticity, fluid, stress tensor, force, deformation, displacement, spherical wave, potential.

Рассматривается математическая модель динамического деформирования упругих, насыщенных жидкостью двухкомпонентных сред, заданных модулями упругости и коэффициентами, характеризующие пористость и сжимаемость жидкости.

Распространению упругих волн в двухкомпонентных средах посвящено ряд работ [1-4]. Среди этих работ следует отметить Био М.А. [1,2], Френкеля Я.И. [4]. Динамическому деформированию двухкомпонентной среды, насыщенной вязкой жидкостью и вязкоупругой неоднородной двухкомпонентной пористой среды, посвящены работы [5,6]. Работа [7] посвящена математическому моделированию акустической эмиссии в насыщенных жидкостью двухкомпонентных средах.

Цилиндрическим волнам в насыщенной жидкостью пористой среде посвящены работы [8,9].

Пусть тензоры напряжений T_r и T_ϕ и сила N , действующая на жидкость, отнесенная к единице площади поперечного сечения пористой среды, в случае сферической симметрии ($\varepsilon_\phi^{(1)} = \varepsilon_\theta^{(1)}, \varepsilon_\phi^{(2)} = \varepsilon_\theta^{(2)}$), связаны с тензором деформации скелета и относительным изменением объема жидкости следующими соотношениями

$$\begin{aligned} T_r &= (A + 2N)\varepsilon_r^{(1)} + 2A\varepsilon_\phi^{(1)} + (1 - m)R_0(\varepsilon_r^{(2)} + 2\varepsilon_\phi^{(2)}) \\ T_\phi &= A\varepsilon_r^{(1)} + 2(A + N)\varepsilon_\phi^{(1)} + (1 - m)R_0(\varepsilon_r^{(2)} + 2\varepsilon_\phi^{(2)}) \\ Q &= (1 - m)R_0(\varepsilon_r^{(1)} + 2\varepsilon_\phi^{(1)}) + mR_0(\varepsilon_r^{(2)} + 2\varepsilon_\phi^{(2)}) \end{aligned} \quad (1)$$

где A , N – коэффициенты Ламе; R_0 – модуль сжимаемости жидкости; m – пористость. Индексы, стоящие сверху: 1 – относится к упругой компоненте, 2 – к жидкости.

Компоненты деформации для упругого скелета $\varepsilon^{(1)}$ и жидкости $\varepsilon^{(2)}$ выражаются через соответствующие перемещения компонент по формулам

$$\varepsilon_r^{(1)} = \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{u_r^{(1)}}{r}, \quad \varepsilon_r^{(2)} = \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{u_r^{(2)}}{r} \quad (2)$$

С учетом (2) соотношения (1) принимают вид

$$\begin{aligned} T_r &= A\left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + \frac{2}{r}u_r^{(1)}\right) + 2N\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + \Gamma_1\left(\frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r} + \frac{2}{r}u_r^{(2)}\right) \\ T_\varphi &= A\left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + \frac{2}{r}u_r^{(1)}\right) + 2N\frac{u_r^{(1)}}{r} + \Gamma_1\left(\frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r} + \frac{2}{r}u_r^{(2)}\right) \\ Q &= \Gamma_1\left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + \frac{2}{r}u_r^{(1)}\right) + \Gamma_2\left(\frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r} + \frac{2}{r}u_r^{(2)}\right), \quad \Gamma_1 = (1-m)R_0, \Gamma_2 = mR_0 \end{aligned} \quad (3)$$

В сферически-симметричных пористых средах из симметрии следует, что в такой среде существуют только продольные волны.

Компоненты полного тензора напряжений пористой среды, сила, действующая на жидкость, отнесенная к единице площади поперечного сечения пористой среды и перемещения сред в случае сферической симметрии, должны удовлетворять уравнениям движения [10]

$$\begin{aligned} (A + 2N)\Delta u_r^{(1)} + \Gamma_1\Delta u_r^{(2)} &= \rho_{11}\frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2 u_r^{(2)}}{\partial t^2} \\ \Gamma_1\Delta u_r^{(1)} + \Gamma_2\Delta u_r^{(2)} &= \rho_{12}\frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2 u_r^{(2)}}{\partial t^2} \\ \Delta u_r^{(i)} &= \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r} + \frac{2}{r}u_r^{(i)}, \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (4)$$

где ρ_{11}, ρ_{22} – эффективные плотности твердого скелета и жидкости; ρ_{12} – коэффициент динамической связи твердого скелета и жидкости.

В случае монохроматической волны $e^{i\omega t}$ частоты ω получим

$$\begin{aligned} (A + 2N)\Delta u_r^{(1)} + \Gamma_1\Delta u_r^{(2)} + \rho_{11}\omega^2 u_r^{(1)} + \rho_{12}\omega^2 u_r^{(2)} &= 0 \\ \Gamma_1\Delta u_r^{(1)} + \Gamma_2\Delta u_r^{(2)} + \rho_{12}\omega^2 u_r^{(1)} + \rho_{22}\omega^2 u_r^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Систему уравнений (5) запишем в безразмерной форме

$$\sigma_{11}\Delta u_r^{(1)} + \sigma_{12}\Delta u_r^{(2)} + \gamma_{11}\frac{\omega^2}{c^2}u_r^{(1)} + \gamma_{12}\frac{\omega^2}{c^2}u_r^{(2)} = 0 \quad (6)$$

$$\sigma_{12}\Delta u_r^{(1)} + \sigma_{22}\Delta u_r^{(2)} + \gamma_{12}\frac{\omega^2}{c^2}u_r^{(1)} + \gamma_{22}\frac{\omega^2}{c^2}u_r^{(2)} = 0$$

где

$$\sigma_{11} = \frac{A+2N}{H}, \quad \sigma_{12} = \frac{\Gamma_1}{H}, \quad \sigma_{22} = \frac{\Gamma_2}{H}, \quad H = A + 2N + 2\Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (7)$$

$$\gamma_{11} = \frac{\rho_{11}}{\rho}, \quad \gamma_{12} = \frac{\rho_{12}}{\rho}, \quad \gamma_{22} = \frac{\rho_{22}}{\rho}, \quad \rho = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}, \quad c = \sqrt{\frac{H}{\rho}}$$

c – скорость продольных волн двухкомпонентной среды.

Система уравнений (6) при помощи линейного преобразования

$$u_r^{(1)} = u_1 + u_2, \quad u_r^{(2)} = M_1 u_1 + M_2 u_2 \quad (8)$$

и коэффициентов преобразования

$$M_1 = \frac{-\gamma_{12} + z_1 \sigma_{12}}{\gamma_{22} - z_1 \sigma_{22}}, \quad M_2 = \frac{-\gamma_{12} + z_2 \sigma_{12}}{\gamma_{22} - z_2 \sigma_{22}} \quad (9)$$

приводится к двум волновым уравнениям для продольных волн I и II типов

$$\Delta u_1 + k_1^2 u_1 = 0, \quad \Delta u_2 + k_2^2 u_2 = 0$$

$$k_1^2 = z_1 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2, \quad k_2^2 = z_2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2, \quad c = \sqrt{\frac{H}{\rho}} \quad (10)$$

где k_1, k_2 – волновые числа продольных волн.

Корни квадратного уравнения системы (6): z_1, z_2 – находим по формуле

$$z_{1,2} = \frac{\delta \pm \sqrt{b_1^2 + 4b_2 b_3}}{2d} \quad (11)$$

$$\delta = \sigma_{11}\gamma_{22} + \sigma_{22}\gamma_{11} - 2\sigma_{12}\gamma_{12}, \quad d = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2$$

$$b_1 = \sigma_{11}\gamma_{22} - \sigma_{22}\gamma_{11}, \quad b_2 = (\sigma_{12}\gamma_{11} - \sigma_{11}\gamma_{12}), \quad b_3 = \sigma_{12}\gamma_{22} - \sigma_{22}\gamma_{12}$$

Для рассматриваемого движения сферически-симметричных волн, компоненты перемещений $u_r^{(1)}, u_r^{(2)}$ запишем через потенциалы [11,12] в виде

$$u_r^{(1)} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}, \quad u_r^{(2)} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}, \quad (12)$$

Из соотношений (4) с учетом (12), для сферически-симметричного случая будем иметь

$$\Delta\varphi_i = \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\varphi_i}{\partial r} \quad (i = 1, 2) \quad (13)$$

Получим формулы, выражающие напряжения через скалярные потенциалы. Так для напряжений T_{rr} $T_{\varphi\varphi}$ с учетом (12) и (13) имеем

$$\begin{aligned} T_r &= A\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right) + 2N\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2} + \Gamma_1\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right) = \\ &= (A + 2N)\Delta\varphi_1 + \Gamma_1\Delta\varphi_2 - 4N\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} T_\varphi &= A\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right) + 2N\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + \Gamma_1\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right) = \\ &= (A + N)\Delta\varphi_1 + \Gamma_1\Delta\varphi_2 - N\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогично из соотношения (3) с учетом (12) и (13) найдем силу, действующую на жидкость, выраженную через потенциалы φ_1 и φ_2

$$Q = \Gamma_1\left[\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right] + \Gamma_2\left[\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right] = \Gamma_1\Delta\varphi_1 + \Gamma_2\Delta\varphi_2 \quad (16)$$

Волновые уравнения (10), с учетом (12) запишем через потенциалы

$$\Delta\varphi_1 + k_1^2\varphi_1 = 0, \quad \Delta\varphi_2 + k_2^2\varphi_2 = 0 \quad (17)$$

Тогда запишем напряжения T_r, T_φ и силу N через потенциалы в виде

$$\begin{aligned} T_r &= (A + 2N)\Delta\varphi_1 + \Gamma_1\Delta\varphi_2 - 4N\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \\ &= -[(A + 2N)k_1^2\varphi_1 + \Gamma_1k_2^2\varphi_2 + 4N\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi_1}{\partial r}] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} T_\varphi &= (A + N)\Delta\varphi_1 + \Gamma_1\Delta\varphi_2 - N\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2} = \\ &= -[(A + N)k_1^2\varphi_1 + \Gamma_1k_2^2\varphi_2 + N\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2}] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} Q &= \Gamma_1\Delta\varphi_1 + \Gamma_2\Delta\varphi_2 = \\ &= -[\Gamma_1k_1^2\varphi_1 + \Gamma_2k_2^2\varphi_2] \end{aligned} \quad (20)$$

В качестве примера рассмотрим сферу радиуса a , помещенную в пористую среду. Граничными условиями на поверхности сферы являются обращения в нуль нормальных напряжений $T_r(a) = 0$ и силы $Q(a) = 0$.

Потенциалы смещения зададим в виде [11,12]

$$\varphi_1 = C_1 \frac{\sin(k_1 r)}{r}, \quad \varphi_2 = C_2 \frac{\sin(k_2 r)}{r} \quad (21)$$

где C_1 и C_2 - амплитуды волн.

Подставляя выражения (21) в (18) и (20), получим уравнения частот

$$[\sigma_{11} k_1^2 \sin(k_1 a) + 4\sigma'_{11}(k_1 \cos(k_1 a) - \frac{1}{a} \sin(k_1 a))]C_1 + \sigma_{12} k_2^2 \sin(k_2 a)C_2 = 0 \quad (22)$$

$$\sigma_{12} k_1^2 \sin(k_1 a)C_1 + \sigma_{22} k_2^2 \sin(k_2 a)C_2 = 0$$

Чтобы система (22) относительно C_1 и C_2 имела ненулевое решение, ее определитель должен быть равен нулю

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} k_1^2 \sin(k_1 a) + 4\sigma'_{11}[k_1 \cos(k_1 a) - \frac{1}{a} \sin(k_1 a)] & \sigma_{12} k_2^2 \sin(k_2 a) \\ \sigma_{12} k_1^2 \sin(k_1 a) & \sigma_{22} k_2^2 \sin(k_2 a) \end{vmatrix} = 0 \quad (23)$$

Раскроем определитель по правилу Саррюса [13]. После преобразования, получим уравнение частот в виде

$$\sigma_{11} \sigma_{22} k_1^2 k_2^2 \sin(k_1 a) \sin(k_2 a) + 4\sigma'_{11} \sigma_{22} k_1 k_2^2 \cos(k_1 a) \sin(k_2 a) - \quad (24)$$

$$- 4\sigma'_{11} \sigma_{22} \frac{1}{a} k_2^2 \sin(k_1 a) \sin(k_2 a) - \sigma_{12}^2 k_1^2 k_2^2 \sin(k_1 a) \sin(k_2 a) = 0$$

Из уравнения (24) следует уравнение частот для первой продольной волны в двухкомпонентной пористой среде

$$tg(k_1 a) = \frac{a \sqrt{z_1} \left(\frac{\omega}{c}\right)}{1 - \frac{d a z_1 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2}{4 \sigma'_{11} \sigma_{22}}} \quad (25)$$

Уравнение частот (25) удобно решать, если его преобразовать к виду

$$(k_1 a) = \arctg \frac{a \cdot \sqrt{z_1} \left(\frac{\omega}{c}\right)}{1 - \frac{1}{4} \frac{d \cdot a z_1}{\sigma'_{11} \sigma_{22}} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} \quad (26)$$

Для второй продольной волны

$$k_2 a = a \cdot \sqrt{z_2} \left(\frac{\omega}{c}\right) \quad (27)$$

Тогда уравнение частот в двухкомпонентной среде для первой и второй продольных волн определим формулой

$$ka = k_1 a + k_2 a = \arctg \frac{a \cdot \sqrt{z_1} \left(\frac{\omega}{c} \right)}{1 - \frac{1}{4} \frac{d \cdot a z_1}{\sigma'_{11} \sigma_{22}} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2} + a \cdot \sqrt{z_2} \left(\frac{\omega}{c} \right), \quad c = \sqrt{\frac{H}{\rho}} \quad (28)$$

Из формулы (28) следует, что в точке разрыва знаменатель обращается в нуль.

Этому соответствует значение $\frac{4\sigma'_{11}\sigma_{22}}{d \cdot a z_1} \left(\frac{c}{\omega} \right)^2$. Тогда уравнение частот в двухкомпонентной среде совпадает с уравнением частот второй продольной волны.

Выводы:

1. В сферически – симметричных координатах, основные уравнения динамического деформирования двухкомпонентных сред записаны относительно скалярных потенциалов в случае гармонических волн.

2. В качестве примера рассмотрена сфера радиуса a , помещенная в неограниченную двухкомпонентную среду.

1. Biot M.A. Theory propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid I. Low-Frequency Range // J. Acoust. Soc. America. - 1956. -V. 28.- № 2. - P. 168-178.
2. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher Frequency Range // J. Acoust. Soc. America. - 1956. V. 28. № 2. P. 179-191
3. Масликова Т.И., Поленов В.С. О распространении нестационарных упругих волн в однородных пористых средах // Изв. РАН. МТТ. – 2005.- № 1.- С. 104-108.
4. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмoeлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. геогр. геофиз. - 1944. Т.8. № 4. С.133-150.
5. Поленов В.С. Распространение упругих волн в насыщенной вязкой жидкостью пористой среде// ПММ. – 2014. Т. 78. Вып. 4. С. 501 – 507.
6. Polenov V.S., Chigarev A.V. Mathematical modeling of shock waves in inhomogeneous viscoelastic two component media// Journal of Applied Mathematics and Physics, - 2018. 6. (5) .P. 997-1005.
7. Поленов В.С., Ницак Д.А. Математическое моделирование акустической эмиссии в насыщенных жидкостью двухкомпонентных средах//Наука России: цели и задачи. Сб. научных трудов по материалам XI МНК, Екатеринбург. ч. 2. - 2018. С. 52-58.
8. Ibrahim A. Abbas and Abo-El-nour N. Abd-alla. A Two-dimensional wave Propagation in a Proelastic Infinite Circular Cylinder//Journal of Physics. Vol. 1. №3. - 2012. P. 32 - 38.
9. Киселев Г.К., Гусев А.П. и др. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах// Новосибирск. ВО «Наука». Сибирская издательская фирма. - 1992. 261 с.
10. Косачевский Л.Я. О распространении упругих волн в двухкомпо-нентных средах // ПММ.-1959. - Т. 23. Вып. 6.- С. 1115-1123.
11. Маркузе Д. Оптические волноводы: пер. с англ. под ред. В.В. Шевченко. М.: Мир. - 1974. 576. с.
12. Исакович М.А. Общая акустика// М.: Наука. - 1973. 495 с.
13. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра// М.: - 1984. 204 с.