РАЗДЕЛ III. МАТЕМАТИКА

Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В.

Численное решение задачи об изгибе шарнирно закрепленной трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем*Казанский (Приволжский) федеральный университет
(Россия, Казань)*

doi: 10.18411/lj-10-2019-30

idsp: ljjournal-10-2019-30

Аннотация

Рассмотрена геометрически нелинейная задача об изгибе шарнирно закрепленной трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем. Для численного решения задачи использовался двухслойный итерационный процесс. Проведен анализ результатов численных экспериментов. Полученные результаты свидетельствуют об эффективности предложенного метода.

Ключевые слова: Трехслойная пластина, трансверсально-мягкий заполнитель, итерационный метод, численный эксперимент.

Abstract

The geometrically nonlinear problem of the hinged sandwich plate with a transversally soft core bending is considered. For the numerical solution of the problem, a two-layer iterative process was used. The results of numerical experiments are analyzed. The results obtained indicate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: Sandwich plate, transversally soft core, iterative method, numerical experiment.

Введение

Создание изделий авиационной и космической техники, судостроения, строительства в настоящее время неразрывно связано с применением новых конструкционных материалов и элементов конструкций из них, обладающих высокими прочностными и жесткостными характеристиками. Таким требованиям отвечают слоистые элементы конструкций, в частности, трехслойные [1-9]. В данной работе рассматривается задача о продольном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем (см. рис. 1а), схема нагружения и закрепления которой показана на рис. 1б. Кинематические соотношения для заполнителя выводятся путем последовательного интегрирования по поперечной координате исходных трехмерных уравнений теории упругости [10-12].

Рис. 1. Трехслойная пластина с трансверсально-мягким заполнителем (1 – подкрепляющая несущие слои диафрагма; 2 – жесткий опорный элемент; 3 – заполнитель; 4 – внешние несущие слои)

Данная работа является продолжением [13–24]. Сформулирована обобщенная постановка задачи в виде интегральных тождеств относительно функций из пространств Соболева. Для приближенного решения задачи построена конечно-разностная аппроксимация задачи. Численное решение осуществляется с помощью двухслойного итерационного метода с предобуславливателем, являющимся линейной частью оператора построенной разностной схемы. На основе разработанного комплекса программ в среде Matlab проведены численные эксперименты для модельной задачи. Приведены результаты численных экспериментов. Проведен анализ полученных результатов. Отметим, что в [25–36] построены обобщенные постановки задач теории мягких сетчатых оболочек, так же, как и методы их решения. В работах [37–39] изучены задачи определения напряженно-деформированного состояния трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем в геометрически линейной и физически нелинейной постановке. Обобщенные постановки физически нелинейных и геометрически линейных задач рассмотрены в [40–48]. Численное решение геометрически нелинейных задач проведено в [49–55].

1. Постановка задачи.

Задача о равновесии трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем в одномерной геометрически нелинейной постановке описывается следующей системой дифференциальных уравнений, основанных на использовании модели Кирхгофа–Лява к несущим слоям и модели трансверсально-мягкого слоя к наполнителю [10–12]:

$$\begin{cases} \frac{dT_{(k)}^{11}}{dx} + X_{(k)}^1 + (3-2k)q^1 = 0, & 0 < x < a, \\ \frac{dS_{(k)}^1}{dx} + c_3(3-2k)(w^{(2)} - w^{(1)}) + X_{(k)}^3 = 0, & 0 < x < a, \\ u^{(1)} - u^{(2)} - H_{(1)} \frac{dw^{(1)}}{dx} - H_{(2)} \frac{dw^{(2)}}{dx} + \frac{2t}{G_{13}} q^1 - \frac{2t^3}{3E_3} \frac{d^2 q^1}{dx^2} = 0, & 0 < x < a, \end{cases} \quad (1)$$

где (ниже считаем, что $k=1,2$) $H_{(k)} = t_{(k)} + t$, a – длина пластины, $2t$ – толщина наполнителя, $2t_{(k)}$ – толщина k -го слоя, $X_{(k)}^1$, $X_{(k)}^3$ – компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности k -го слоя, $w^{(k)}$ и $u^{(k)}$ – прогибы и осевые перемещения точек срединной поверхности k -го слоя, q^1 – касательные напряжения в наполнителе, $M_{(k)}^{11} = -D_{(k)} d^2 w^{(k)} / dx^2$ – внутренние изгибающие моменты, $S_{(k)}^1 = Q_{(k)}^1 + H_{(k)} q^1$ – обобщенные перерезывающие силы в k -м слое, $Q_{(k)}^1 = dM_{(k)}^{11} / dx + T_{(k)}^{11} dw^{(k)} / dx + M_{(k)}^1$ – перерезывающие силы в k -м несущем слое, $c_3 = E_3 / (2h)$, $T_{(k)}^{11} = B_{(k)} (du^{(k)} / dx + 1/2 \cdot (dw^{(k)} / dx)^2)$ – мембранные усилия в k -м слое, $M_{(k)}^1$ – компоненты вектора поверхностных моментов k -го слоя, $B_{(k)} = 2t_{(k)} E^{(k)} / (1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)})$ и $D_{(k)} = B_{(k)} h_{(k)}^2 / 3$ – жесткость на растяжение-сжатие и изгибная жесткость k -го слоя, $E^{(k)}$ и $\nu_{12}^{(k)}$, $\nu_{21}^{(k)}$ – модуль упругости первого рода и коэффициенты Пуассона материала k -го несущего слоя.

Предполагаем, что в правом торцевом сечении края несущих слоев жестко зашпелены и отсутствует адгезионное соединение заполнителя с опорным элементом, на левом торцевом сечении края несущих слоев пластины шарнирно оперты на абсолютно жесткие в поперечном направлении диафрагмы, склеенной с торцевым сечением заполнителя. При таких условиях закрепления уравнения (1) дополняются граничными условиями

$$T_{(k)}^{11}(0) = 0, w^{(k)}(0) = d^2 w^{(k)}(0) / dx^2 = 0, k = 1, 2, dq^1(0) / dx = 0, \quad (2)$$

$$u^{(k)}(a) = 0, w^{(k)}(a) = dw^{(k)}(a) / dx = 0, k = 1, 2, q^1(a) = 0. \quad (3)$$

Сформулируем обобщенную постановку задачи. Введем пространства Соболева [56]

$$V_2 = \{w \in W_2^{(2)}(0, a) : w(0) = dw(0) / dx = 0, w(a) = 0\},$$

$$V_1 = \{u \in W_2^{(1)}(0, a) : u(0) = 0\}, W_m = V_m \times V_m, m = 1, 2.$$

Обозначим $W = W_2 \times W_1 \times V_1$, $U = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)}, q^1)$, $Z = (z^{(1)}, z^{(2)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}, y)$. Под обобщенным решением рассматриваемой задачи (1)–(3) будем понимать функции $u = (u^{(1)}, u^{(2)}) \in W_1$, $w = (w^{(1)}, w^{(2)}) \in W_2$, $q^1 \in V_1$, удовлетворяющие при всех $\eta = (\eta^{(1)}, \eta^{(2)}) \in W_1$, $z = (z^{(1)}, z^{(2)}) \in W_2$, $y \in V_1$ интегральным тождествам

$$b_1(U, Z) = \int_0^a \left[-D_{(k)} \frac{d^2 w^{(k)}}{dx^2} \frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} - B_{(k)} \left(\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right) \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} - \right. \\ \left. - H_{(k)} q^1 \frac{dz^{(k)}}{dx} + ((3 - 2k)c_3(w^{(2)} - w^{(1)})) z^{(k)} \right] dx = - \int_0^a \left[\frac{dM_{(k)}^1}{dx} + X_k^{(3)} \right] z^{(k)} dx,$$

$$b_2(U, Z) = \int_0^a \left[-B_{(k)} \left(\frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right) \frac{d\eta^{(k)}}{dx} + \right. \\ \left. + ((3 - 2k)q^1) \eta^{(k)} \right] dx = - \int_0^a X_k^{(1)} \eta^{(k)} dx,$$

$$b(U, Z) = \int_0^a \left[(u^{(2)} - u^{(1)}) - H_{(1)} \frac{dw^{(1)}}{dx} - H_{(2)} \frac{dw^{(2)}}{dx} + \frac{2t}{3E} \frac{dq^1}{dx} \frac{dy}{dx} \right] dx = 0.$$

2. Итерационный метод и численные эксперименты

Для приближенного решения задачи (1)–(3) предварительно построены ее конечно-разностные аппроксимации [57, 58]

$$(A_1 + A_2)U = F, \quad (4)$$

где A_1 , – линейный оператор, A_2 – нелинейный. Для решения разностной схемы (4) будем использовать следующий двухслойный итерационный процесс с опусканием нелинейности на нижний слой [59-68]:

$$A_1 (U^{(n+1)} - U^{(n)}) / \tau + (A_1 + A_2) U^{(n)} = F, \quad (5)$$

где $U^{(0)}$ – заданное начальное приближение, $\tau > 0$ – итерационный параметр.

В среде Matlab для численной реализации итерационного метода (5) был разработан комплекс программ. Для модельной задачи проведены численные эксперименты. Итерационный параметр подбирался эмпирически. Расчеты проводились для следующих характеристик: $a = 20$ см, $t_1 = t_2 = 0.05$ см, $t = 1$ см, $G_{13} = 25$ МПа, $E_3 = 50$ МПа, $X_{(1)}^3 = 0.1$ МПа, $X_{(2)}^3 = 0$, $E^{(k)} = 133 \cdot 10^3$ МПа, $\nu_{12}^{(k)} = \nu_{21}^{(k)} = 0.3$, $X_{(k)}^1 = 0$, $M_{(k)}^1 = 0$, $k = 1, 2$. Число точек сетки $N = 500$. Начальное приближение $U^{(0)}$ задавалось нулевым. Вычисления согласно (5) проводились до тех пор, пока норма невязки $\|F - (A_1 + A_2)U^{(n)}\|$ оставалась больше заданной точности $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-8}$. В качестве нормы вектора $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ выбиралась величина $\|g\| = \max\{|g_1|, |g_2|, \dots, |g_m|\}$. Оптимальное (по числу итераций) значение итерационного параметра составило $\tau = 1$, число итераций при этом равнялось 18. Результаты численных экспериментов приведены на рис. 2–7.

Рис. 2. Осевые перемещения несущих слоев

Рис. 3. Касательные напряжения в заполнителе

Рис. 4. Прогибы в несущих слоях

Рис. 5. Мембранные усилия в несущих слоях

Рис. 6. Обобщенные перерезывающие силы

Рис. 7. Перерезывающие силы в несущих слоях

Как и следовало ожидать, поскольку $q^1(0) = 0$ (отсутствует адгезионное соединение заполнителя с опорным элементом), то вся реакция в правом торцевом сечении воспринимается внешними несущими слоями что и приводит к концентрации перерезывающих сил $Q_{(k)}^1$ в этом сечении (рис. 7). Близость значений прогибов свидетельствует о несущественном обжатии заполнителя в поперечном направлении по всей длине пластины. Сравнивая результаты, приведенные на рис. 3 и 7, можно видеть, что наиболее слабым звеном в рассматриваемой пластине является заполнитель в правом сечении, разрушение которого (расслоение) приводит к смещению влево наибольшего значения q^1 и резкому возрастанию $Q_{(k)}^1$. Начало реализации такой смешанной формы потери устойчивости возможно в окрестности середины пластины (сечение $x = a/2$) при достижении максимального значения $T_{(2)}^{11}$ сжатого слоя некоторой критической величины (рис. 5). Поведение осевых перемещений и обобщенных перерезывающих сил (рис. 2, 6) соответствует физической картине деформации. Кроме того, нетрудно проверить, что из первых двух уравнений системы (1) следует равенство $T_{(1)}^{11} + T_{(2)}^{11} = \text{const}$, в выполнении которого можно убедиться на основе рис. 5.

4. Заключение.

Рассмотрена задача о докритическом поведении трехслойной пластины в геометрически нелинейной одномерной постановке. Приближенный метод решения задачи основан на конечномерной аппроксимации задачи с последующим применением для численной реализации разностной схемы двухслойного итерационного метода с опусканием нелинейности на нижний слой. Разработан комплекс программ, с помощью которого проведены численные эксперименты. Эта задача будет использована в дальнейшем для исследования форм потери устойчивости пластины и нахождения критической нагрузки, при которой наступает потеря устойчивости пластины. Будут разработаны приближенные методы решения указанной задачи на основе разработанных в [69–72] подходов. При этом для нахождения критических нагрузок будут использованы спектральные задачи с нелинейным вхождением параметра [73–77], а также методы исследования форм потери устойчивости многослойных конструкций. [78].

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 17-08-01279, 18-41-160029, 19-08-01184).

1. Hohe J., Librescu L. A Nonlinear Sandwich Shell Theory Accounting for Transverse Core Compressibility // PAMM, the Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. – 2003. № 2. – P. 158–159.

2. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Численное исследование физически нелинейной задачи о продольном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 1. – С. 39–51.
3. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Геометрически нелинейная задача о продольно-поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158, № 4. – С. 453–468.
4. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Численное решение задачи о равновесии трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем в геометрически нелинейной постановке // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – Т. 17, № 23. – С. 393–396.
5. Паймушин В.Н. Проблемы геометрической нелинейности и устойчивости в механике тонких оболочек и стержней с прямолинейной осью // Прикладная математика и механика. – 2007. – Т. 71, № 5. – С. 855–893.
6. Paimushin V.N., Shalashilin V.I. Geometrically non-linear equations in the theory of momentless shells with applications to problems on the non-classical forms of loss of stability of a cylinder // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2006. – V. 70, № 1. – P. 91–101.
7. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В. Численное исследование физически нелинейных задач об изгибе трехслойных пластин // Материалы XI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016), Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – М: Изд-во МАИ, 2016. – С. 475–477.
8. Макаров М.В., Бадриев И.Б., Паймушин В.Н. Определение критических точек бифуркации для задачи о геометрически нелинейном поведении трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2016. Материалы международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 292–294.
9. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Исследование задачи об изгибе трехслойной пластины в физически нелинейной постановке // Математическое моделирование и краевые задачи Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах. – Самара, 2016. – С. 19–24.
10. Paimushin V.N., Bobrov S.N. Refined geometric nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core of medium thickness for investigation of mixed buckling forms // Mechanics of composite materials. – 2000. – V. 36, № 1. – P. 59–66.
11. Paimushin V.N. Nonlinear theory of the central bending of three-layer shells with defects in the form of sections of bonding failure // Soviet Applied Mechanics. – 1987. – V. 23, № 11. – 1038–1043.
12. Paimushin V.N. Refined nonlinear theory of moderate bending of three-layer shells with transversely soft filler under thermal loads. // Soviet Aeronautics. – 1989. – V. 32, № 4. – P. 8–11.
13. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П. Постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 16-1. – С. 5–11.
14. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П. Операторная формулировка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 18-3. – С. 5–13.
15. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Обобщенная постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 23-1. – С. 4–10.
16. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. О псевдомонотонности оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 24-2. – С. 5–14.
17. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. О свойстве типа ограниченной липшиц-непрерывности оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 25-3. – С. 5–12.
18. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. О квазипотенциальности оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 26-1. – С. 5–12.
19. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 8-2 (34-2). – С. 11–14.
20. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Исследование свойств оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. – 2017. – Т. 10. – С. 7–10.

21. Бадриев И.Б. Исследование математических моделей процессов изгиба трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем и методов их численной реализации // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 7-2 (33-2). – С. 83–88.
22. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. О решении геометрически нелинейных задач об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 7-2 (33-2). – С. 95–98.
23. Бадриев И.Б., Буянов В.Ю., Макаров М.В. Свойства производной Фреше оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины и постановка нелинейной спектральной задачи // Тенденции развития науки и образования. – 2019. – № 52-4. – С. 5–13.
24. Бадриев И.Б., Буянов В.Ю., Макаров М.В. Производная Гато оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 30-2. – С. 5–12.
25. Бадриев И.Б. Решение вариационных задач нелинейных процессов механики сплошной среды // Теория управления и математическое моделирование Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В.Азбелева и профессора Е.Л.Тонкова.. – Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2015. – С. 234–235.
26. Badriev I.B., Banderov V.V. Iterative methods for solving variational inequalities of the theory of soft shells // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2014. – V. 35, № 4. – P. 371–383.
27. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование разрешимости осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2005. – № 1. – С. 25–30.
28. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Калачева Н.В. Численное исследование вариационных и квазивариационных неравенств теории мягких сетчатых оболочек // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1037–1041.
29. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Численное решение задач о равновесии осесимметричных мягких оболочек // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 29–35.
30. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Итерационные методы решения вариационных неравенств теории мягких оболочек // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 2. – С. 19–33.
31. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. О решении задачи равновесия мягкой сетчатой оболочки при наличии нагрузки, сосредоточенной в точке // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 3. – С. 16–34.
32. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В. Сеточные аппроксимации физически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2016. Материалы международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 70–72.
33. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Мартынова О.П., Семеньева М.А. Исследование разностных схем для физически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Современные проблемы математического моделирования. Сборник трудов XVI Всероссийской конференции-школы молодых исследователей. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2015. – С. 22-24.
34. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Калачева Н.В., Тагиров Р.Р. О численном решении вариационных неравенств теории мягких сетчатых оболочек // Тезисы докладов IV Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – Москва: ООО "ТРИП", 2016. С. – 22–25.
35. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Шишова Е.В. Численные методы решения вариационных и квазивариационных неравенств теории мягких оболочек // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 7-2 (33-2). – С. 88–91.
36. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Шишова Е.В. Задача об определении положения равновесия мягкой биологической оболочки // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 8-1 (34-1). – С. 28–31.
37. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Гарипова Г.З. О решении физически нелинейных задач о равновесии трехслойных пластин // Теория управления и математическое моделирование. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В.Азбелева и профессора Е.Л.Тонкова.. – Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2015. - С. 235-237.
38. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В. Приближенные методы решения задачи об изгибе трехслойной пластины с идеально упруго-пластическим заполнителем // Материалы XXII

- Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" им. А.Г. Горшкова. – М: ООО "ТРП", 2016. – С. 31-33.
39. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Гарипова Г.З., Макаров М.В. Исследование физически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов. – Казань, 2015. – С. 276.
40. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В. О приближенных методах решения задачи об изгибе трехслойной пластины с идеально упруго-пластичным заполнителем // Проблемы химмотологии: от эксперимента к математическим моделям высокого уровня. Сборник избранных докладов VI Международной научно-технической конференции. – М. ООО Издательство «Граница», 2016. – С. 21-26.
41. Бадриев И.Б. Математические модели нелинейных процессов изгиба трехслойных пластин // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: материалы международной научной конференции, 8-13 октября 2017 г., Самара. – Самара: СГПУ, 2017. – С. 180–181.
42. Badriev I.B., Banderov V.V. Numerical solution of the equilibrium of axisymmetric soft shells // Математические методы в технике и технологиях-ММТТ. – 2014. – № 5 (64). – С. 16–20.
43. Badriev I.B., Banderov V.V., Gnedenkova V.L., Kalacheva N.V., Korablev A.I., Tagirov R.R. On the finite dimensional approximations of some mixed variational inequalities // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – V. 9, № 113-116. – P. 5697–5705.
44. Бадриев И.Б. О решении вариационных неравенств второго рода // Сеточные методы для краевых задач и приложения Материалы Девятой Всероссийской конференции. – Казань: Отечество, 2012. – С. 32–35.
45. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Численное моделирование деформирования биокomпозитов // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXI международного симпозиума имени А.Г. Горшкова.. – М: ООО "ТРП", 2015. – С. 7–9.
46. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. О решении некоторых нелинейных краевых и начально-краевых задач // Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – Москва: ООО "ТРП", 2016. – С. 31–33.
47. Badriev I.B. Mathematical modeling of continuum mechanics problems with the point sources // Проблемы химмотологии: от эксперимента к математическим моделям высокого уровня Сборник избранных докладов VI Международной научно-технической конференции. – М. ООО «Издательство «Граница», 2016. С. 19–21.
48. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. О конечно-элементных аппроксимациях вариационных неравенств теории мягких сетчатых оболочек // Тезисы докладов V международного научного семинара "Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы". – М: ООО "ТРП", 2016. – С. 28–31.
49. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П. Математическое моделирование процессов изгиба трехслойных пластин в геометрически нелинейной постановке // Тезисы докладов V международного научного семинара "Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы". – М: ООО "ТРП", 2016. – С. 32-35.
50. Макаров М.В. Численное исследование геометрически нелинейной задачи о поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 17-2. – С. 26–35.
51. Макаров М.В. О решении геометрически нелинейных и линейных задач о поперечном изгибе жестко закрепленной трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 19-2. – С. 23-29.
52. Бадриев И.Б., Буянов В.Ю., Макаров М.В. Исследование задачи о потере устойчивости трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 7-2 (33-2). – С. 92–94.
53. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Буянов В.Ю. Геометрически нелинейная задача о потере устойчивости трехслойной пластины // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 8-2 (34-2). – С. 7–10.
54. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Численное исследование процессов изгиба трехслойных пластин в геометрически нелинейной и линейной постановках // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXIII международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. – М: ООО "ТРП", 2017. С. 21-24.
55. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Численное моделирование поперечного изгиба трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем с шарнирным закреплением //

- Математическое и компьютерное моделирование сборник материалов IV Международной научной конференции. – Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2016. – 2016. – С. 52–54.
56. Adams R.A. Sobolev Spaces. – New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975. – 286 p.
57. Samarskii A.A. The theory of difference schemes. – New York–Basel: Marcel Dekker, 2001. – 761 p.
58. Карчевский М.М., Ляшко А.Д. Разностные схемы для нелинейных задач математической физики. – Казань: Изд-во Казанского университета, 1976. – 156 с.
59. Badriev I.B., Zadvornov O.A. Analysis of the stationary filtration problem with a multivalued law in the presence of a point source // *Differential Equations*. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 915–922.
60. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами // *Известия высших учебных заведений. Математика*. – 2003. – № 1. – С. 20–28.
61. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. О сходимости итерационного метода двойственного типа решения смешанных вариационных неравенств // *Дифференциальные уравнения*. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 1115–1122.
62. Бадриев И.Б., Ляшко А.Д., Панкратова О.В. Исследование сходимости итерационных методов решения нелинейных задач теории фильтрации // *Известия высших учебных заведений. Математика*. – 1998. – № 11. – С. 8–13.
63. Бадриев И.Б., Фанюк Б.Я. Итерационные методы решения задач фильтрации в многослойных пластах при наличии точечного источника // *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. – 2010. – Т. 152, № 4. – С. 39–55.
64. Badriev I.B., Fanyuk B.Y. Iterative methods for solving seepage problems in multilayer beds in the presence of a point source // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2012. – V. 33, № 4. – P. 386–399.
65. Бадриев И.Б., Чебакова В.Ю. Математическое моделирование низкотемпературной ВЧЕ-плазмы в аргоне // *Математическое моделирование и краевые задачи Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах*. – Саратов, 2016. – С. 17–21.
66. Чебакова В.Ю. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при атмосферном давлении в аргоне // *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. – 2016. – Т. 158, № 3. – С. 404–423.
67. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при больших межэлектродных расстояниях. I. Постановка задачи // *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. – 2013. – Т. 155, № 2.. – С. 123–130.
68. Badriev I.B., Paimushin V.N. Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2017. – V. 38, № 5. – P. 779–793.
69. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Продольно-поперечный изгиб по цилиндрической форме трехслойной пластины, подкрепленной в торцевых сечениях абсолютно твердыми телами // *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. – 2017. – Т. 159, № 2.. – С. 174–190.
70. Badriev I.B., Ju Chebakova V., Zheltukhin V.S. Numerical solution of the initial boundary value problems of radio-frequency capacitive coupled discharge // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2017. – V 927, № 012008.
71. Badriev I.B., Banderov V.V., Singatullin M.T. Numerical solution of non-linear filtration issues for high viscous fluids at the presence of wells // *Research Journal of Applied Sciences*. – 2015. – V. 10, № 8. – P. 343–346.
72. Solov'ev S.I. Superconvergence of finite element approximations to eigenspaces // *Differential Equations*. – 2002. – V. 38, № 5. – P. 752–753.
73. Solov'ev S.I. The error of the Bubnov-Galerkin method with perturbations for symmetric spectral problems with a non-linearly occurring parameter // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. – 1992. – V. 32., № 5. – P. 579–593.
74. Solov'ev S.I. Finite element approximation with numerical integration for differential eigenvalue problems // *Applied Numerical Mathematics*. – 2015. – V. 93. – P. 206–214.
75. Solov'ev S.I. Eigenvibrations of a beam with elastically attached load // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2016. – V. 37, № 5. – P. 597–609.
76. Solov'ev S.I. Eigenvibrations of a bar with elastically attached load // *Differential Equations*. – 2017. – V. 53, № 3. – P. 409–423.
77. Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Бадриев И.Б., Макаров М.В. Геометрически и физически нелинейная задача о трехточечном изгибе композитных тест-образцов // *Материалы XXII Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" им. А.Г.Горшкова*. Т. 2. – М: ООО «ТР-принт», 2016. – С. 197–202.