Гипотеза 2. Последовательность производных сетей $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots$ стабилизируется тогда и только тогда, когда все σ_{ij} совпадают с некоторым фиксированным подкольцом с единицей основного кольца, в частности, когда исходная элементарная сеть σ является константной.

1. Койбаев, В. А. Сети, ассоциированные с элементарными сетями. / В. А. Койбаев // — Владикавказ: Владикавказский матем. журн. — 2010 — Т. 12, № 4. — С. 39—43.
2. Койбаев, В. А., Нужин, Я. Н. k -инвариантные сети над алгебраическим расширением поля k . / В. А. Койбаев, Нужин Я.Н. // Сибирский матем. журн. — 2017 — Т. 58, № 1. — С. 143—147
3. Койбаев, В. А. Элементарные сети в линейных группах / В. А. Койбаев. // Труды ИММ УрО РАН. — Ижевск — 2011. — Т. 17, № 4. — С. 134—141.
4. Левчук, В. М. Параболические подгруппы некоторых АВА-групп. / В. М. Левчук // Матем. заметки. — Красноярск — 1982. — Т. 31, № 4. — С. 509—525.

Литвиненкова З.Н., Оснюк Е.А.

Локальная потеря устойчивости в зоне дефектов в обшивке самолета

*Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации
(Россия, Санкт-Петербург)*

doi:10.18411/lj-09-2018-66

idsp: 000001:lj-09-2018-66

Аннотация

Принцип безопасного повреждения [1], применяемый наряду с принципом безопасного ресурса, допускает наличие в тонкостенных конструкциях самолета дефектов типа остроконечных надрезов, трещин и иных концентраторов напряжений.

При этом перед конструкторами встает задача учитывать их влияние на разрушающую нагрузку при расчете прочностного ресурса воздушного судна.

В работе дается решение задачи о растянутой нормальными напряжениями пластине с трещиной–разрезом с учетом деформации (выпучивания) в зоне трещины. При расчете напряженно-деформированного состояния используются соотношения двумерной теории упругости в комплексной форме. Для оценки влияния выпучивания пластины на ее прочность применяется обобщенный метод Бубнова-Галеркина и энергетический подход Гриффитса.

Установлено, что в момент потери устойчивости предельная нагрузка резко снижается (на 25%), а при дальнейшем росте зоны выпучивания меняется незначительно. Этот эффект существенно сказывается на прочности пластинчатых элементов конструкций летательных аппаратов и должен учитываться на этапе проектирования конструкций.

Ключевые слова: прочность, обшивка самолета, пластина, трещина-разрез, концентрация напряжений, выпучивание (деформация), разрушающая нагрузка, безопасное повреждение.

Abstract

The paper gives a refined solution of the problem concerning extended by the normal strain plate that has a crack – cut with consideration of warping (buckling) in the crack zone. When calculating strain-deformed state the ratio of the two-dimensional theory of elasticity is used. To evaluate the influence of buckling of the plate on its strength the generalized method of Bubnov-Galerkin and Griffith energy approach is applied.

Keywords: strength, aircraft covering, plate, crack - the cut, the concentration of stress, buckling (warping), breaking load, safe damage.

Введение

Опыт эксплуатации и ремонта летательных аппаратов показывает, что задолго до разрушения всей конструкции под воздействием внешних нагрузок появляются дефекты ее элементов, такие как трещины обшивки, сопровождаемые местной потерей устойчивости.

Возникает необходимость учесть данные дефекты на этапе проектирования и тем самым минимизировать возможность выхода летательного аппарата из строя.

Оценка напряженно – деформированного состояния элементов конструкций, содержащих концентраторы напряжений типа трещин, является наиболее ответственным и сложным этапом расчетов на прочность. Однако в данных расчетах долгое время не учитывался тот факт, что рост трещины в тонколистовом материале сопровождается локальным выпучиванием в зоне трещины, оказывающем влияние на предельную разрушающую нагрузку [2, 3, 4]. По этой причине актуальным представляется изучение распределения напряжений в окрестности одиночных дефектов в пластинах с использованием разрешающих уравнений уточненных классических теорий и последующее построение критериев предельного равновесия с позиций теории разрушения.

Постановка и решение задачи

В данной работе в качестве базовой рассматривается задача о растяжении нормальными напряжениями $\sigma_y^\infty = P$ плоскости с прямолинейной трещиной – разрезом длины $2a$:

$$-a \leq x_1^0 \leq a$$

$$x_2^0 \geq 0,$$

с берегами, свободными от напряжений (рис.1). Все величины, относящиеся к докритическому состоянию пластины, т.е. до потери устойчивости, будут помечены верхним индексом (x_1^0 и др.).

Местное выпучивание возникает в растянутой нормальными напряжениями $\sigma_y^\infty = P$ пластине в связи с наличием зоны сжимающих напряжений в области трещины, величина которых устанавливается при исследовании докритического состояния пластины по методу Вестергард.

Уравнения Вестергард имеют вид [5]:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z' \\ \sigma_{22} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z' \\ \tau_{12} = -y \operatorname{Re} Z' \end{cases} \quad (1)$$

где

$$Z = \frac{Pz}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad z = x_1^0 + ix_2^0$$

Отметим, что функция Вестергард Z связана с комплексными потенциалами Колосова-Мусхелишвили [6] следующим образом:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}Z, \quad \Psi(z) = -\frac{1}{2}zZ'$$

При введении локальной полярной системы координат с полюсом в конце разреза (ρ^0, φ^0) получена стандартная асимптотика напряжений и смещений:

$$\begin{cases} \sigma_{\zeta}^0 = \frac{\rho^0}{\sqrt{r^0}} \cos\left(\varphi^0 - \frac{\psi^0}{2}\right) - \frac{\eta}{\sqrt{(r^0)^3}} \sin \frac{3}{2}\psi^0 - 1 \\ \sigma_{\eta}^0 = \frac{\rho^0}{\sqrt{r^0}} \cos\left(\varphi^0 - \frac{\psi^0}{2}\right) + \frac{\eta}{\sqrt{(r^0)^3}} \sin \frac{3}{2}\psi^0 \\ \tau_{\zeta\eta}^0 = \frac{\eta}{\sqrt{(r^0)^3}} \cos \frac{3}{2}\psi^0 \end{cases} \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{x_1^0}{a}; \quad \eta = \frac{x_2^0}{a}; \quad \rho^0 = \sqrt{\zeta^2 + \eta^2}; \\ r^0 &= \sqrt{(\zeta^2 - \eta^2 - 1)^2 + 4\zeta^2\eta^2}; \quad \varphi^0 = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\zeta} \\ \psi^0 &= \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{2\zeta\eta}{\zeta^2 - \eta^2 - 1} + \pi, & \zeta < 1 \\ \operatorname{arctg} \frac{2\zeta\eta}{\zeta^2 - \eta^2 - 1}, & \zeta \geq 1 \end{cases} \\ \sigma_{\zeta}^0 &= \frac{\sigma_{11}}{P}; \quad \sigma_{\eta}^0 = \frac{\sigma_{22}}{P}; \quad \tau_{\zeta\eta}^0 = \frac{\tau_{12}}{P} \end{aligned}$$

Напряжения σ_{ζ}^0 , σ_{η}^0 , $\tau_{\zeta\eta}^0$ были подсчитаны на ЭВМ на прямых $x = \pm a$ при различных значениях η от 0,01 до 2,5. Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что сжимающие напряжения на кромках $x = \pm a$ максимальны при $0 \leq \eta < 0,5$ и близки к 0 при $\eta \geq 1,1$.

Эти сжимающие напряжения вызывают выпучивание пластины в зоне трещины. Для оценки влияния потери устойчивости на разрушающую нагрузку зона локального выпучивания моделируется полосой L (рис. 1), шириной $2a$, нагруженной по длинным кромкам напряжениями, полученными по формулам (2). Граничные условия задачи формулируются из следующих соображений: на длинных кромках полосы приняты условия упругого защемления с коэффициентом упругой заделки β . Это связано с тем, что при небольшом прогибе пластина (полоса) работает в условиях жесткого защемления длинных сторон ее контура, а при прогибе, соизмеримом с толщиной пластины, ее края можно считать с достаточной степенью точности шарнирно опертыми.

В дальнейшем проводится численный эксперимент для двух крайних случаев:

а) жесткой заделки (при $\beta = \infty$) и

б) шарнирного опирания (при $\beta = 0$)

краев полосы, то есть при $\zeta = \pm 1$ выполняются граничные условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{а) } \omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} = 0 \text{ при } \zeta = \pm 1 \\ \text{б) } \omega = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} = 0 \text{ при } \zeta = \pm 1 \\ \text{При } \eta = 0 \text{ (берег трещины – разреза) граничные условия таковы:} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \omega}{\partial \eta^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial \eta \partial \zeta^2} = 0 \\ \text{При } \eta \rightarrow \infty, \quad \omega \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

Критические (эйлеровы) напряжения определяются из дифференциального уравнения задачи:

$$D \nabla^4 \omega - P h a^2 \left(\sigma_{\zeta}^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} + \sigma_{\eta}^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + 2 \tau_{\zeta \eta}^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta \partial \eta} \right) = 0 \quad (4)$$

Здесь

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

– цилиндрическая жесткость пластины, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, h – толщина пластины, ω – прогиб пластины в поперечном направлении (перпендикулярно плоскости x_1^0, x_2^0).

Краевая задача (3)–(4) решается вариационным методом (обобщенный метод Бубнова-Галеркина) [7].

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_0^\infty \left\{ \nabla^4 \omega - \lambda \left[\sigma_{\zeta}^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} + \sigma_{\eta}^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + 2 \tau_{\zeta \eta}^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta \partial \eta} \right] \right\} \delta \omega d\zeta d\eta - \\ & - \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \delta \omega d\zeta \Big|_{\eta=0} - \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial \eta^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial \eta \partial \zeta^2} \right] \delta \omega d\zeta \Big|_{\eta=0} = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

Здесь

$$\lambda = \frac{P h a^2}{D} \quad (6)$$

Форма выпученной поверхности задается в виде:

$$\omega(\zeta, \eta) = \sum_{m=2}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} \omega_{mn}, \quad (7)$$

где $\omega_{mn} = \cos \frac{m\zeta}{2} e^{-n\eta}$

Подставляя (7) в (5), получим квадратичную форму с коэффициентами A_{mn} . Минимизируя ее, находим r значений параметра λ , наименьшее из которых позволяет определить из выражения (6) критическое значение растягивающей нагрузки.

$$P_{кр} = \frac{D \lambda_{\min}}{h a^2} = K \frac{\pi^2 D}{a^2 h} = K_1 E \left(\frac{h}{a} \right)^2 \quad (8)$$

Численная реализация указанного метода осуществляется на ЭВМ. Были получены следующие значения коэффициента K_1 в формуле (8):

$$1,08 \leq K_1 \leq 1,2$$

При сравнении полученной в соответствии с формулой (8) зависимости критической нагрузки от толщины для образцов из стали и из алюминиевых сплавов с экспериментальными данными усматривается их хорошее согласование [2,4].

Потеря устойчивости плоской пластины приводит к изменению напряженного состояния у вершины трещины и, следовательно, влияет на процесс разрушения.

Далее в работе оценивается прочность пластины с выпучиванием в зоне трещины с использованием энергетического критерия Гриффитса [8]. При этом предполагается, что линии главных напряжений обтекают выпученную область таким же образом, как если бы на ее месте в пластине имелось сквозное эллиптическое отверстие с полуосями $\max|x_1^0| = a$ и $\max|x_2^0| = b$, $b = 1,1a$.

Основное уравнение теории Гриффитса имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial a} [T(a) - W(a, b, P)] = 0,$$

где $T(a) = 4\gamma_0 a$ – поверхностная энергия трещины,

γ_0 – плотность поверхностной энергии материала,

$W(a, b, P)$ – энергия упругого деформирования, обусловленная раскрытием трещины и увеличением протяженности выпученной зоны при возрастании напряжений P .

Для $W(a, b, P)$ имеем:

$$W(a, b, P) = \frac{\pi P^2}{2E} (2a^2 + ab)$$

Подставляя выражения для T и W в уравнение Гриффитса, находим разрушающую нагрузку P^* (с учетом выпучивания):

$$P^* = \sqrt{\frac{8\gamma E}{\pi(4a + b)}}$$

Обозначим разрушающую нагрузку невыпученной пластины с трещиной через P_0^* . Эта величина может быть получена по формуле для P^* при $b = 0$.

$$P_0^* = \sqrt{\frac{2\gamma E}{a\pi}},$$

которая совпадает с известной формулой Ирвина [9].

Рассмотрим отношение

$$s = \frac{P^*}{P_0^*} = \frac{2}{\sqrt{4 + b/a}}$$

Предположим, что нагрузка, приложенная к бесконечной пластине, превышает критическую:

$$P = KE \left(\frac{h}{a} \right)^2,$$

где $K > 1,08$.

Оценим влияние выпучивания на разрушающую нагрузку, установив зависимость параметра s от коэффициента внешней нагрузки K :

$$s = f(K)$$

Анализ этой зависимости приводит к выводу, что в момент потери устойчивости предельная нагрузка резко падает ($\approx$ на 25%), а при дальнейшем росте зоны выпучивания меняется незначительно. Критическая длина трещины при этом уменьшается.

Заключение

Исследование задач деформации и разрушения плоских высоконапряженных элементов обшивки летательных аппаратов является крайне необходимым для того, чтобы корректировать методики расчета их прочности. В данной работе дано развитие и уточнение полученных ранее результатов (выявлено более существенное падение разрушающей нагрузки, что согласуется с экспериментальными данными [2,4]). Кроме того, установлено, что появление выпучины вызывает уменьшение значения критической длины трещины при неизменной внешней нагрузке.

Выявленный в работе факт существенного снижения предельной разрушающей нагрузки вследствие выпучивания берегов трещины должен приниматься во внимание конструкторами при расчетах на прочность для обеспечения безопасности полетов.

1. Нестеренко Г.И. Требования по усталости и живучести конструкций гражданских самолетов. // Научный вестник МГТУГА № 163, 2011
2. Гольцев В.Ю. и др. Заводская лаборатория № 1, 1961
3. Литвиненкова З.Н. Об устойчивости растянутой пластины с внутренней трещиной. // Известия АН СССР, Механика твердого тела № 5, 1973
4. Литвиненкова З.Н. Разрушающая нагрузка растянутых плоских элементов конструкций самолета (обшивки) у мест выточек. // Вестник СПбГУГА, выпуск 2, 2011
5. Вестергард Г.М. Несущие давления и трещины. // Журнал прикладной механики, том 6, с. А 49-53, 1939
6. Мухелишвили И.Н. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966
7. Галеркин Б.Г. Собрание сочинений. Т. 1.// Изд-во АН СССР, 1952
8. Griffith A.A. The theory of rupture.// Proc. First. Inter. Congress Appl. Mech. Delft., p. 55-63, 1924
9. Irvin G.R. Relation of stresses near a crack to the crack extension force.// Proc.9-th Inter. Congr. Appl. Mech, vol.8, Brussels, 1957

Поленов В.С.

Математическое моделирование плоских волн в двухкомпонентных волноводах

Автомобильно-транспортный институт
(Россия, Воронеж)

doi:10.18411/lj-09-2018-67

idsp: 000001:lj-09-2018-67

Аннотация

При решении некоторых задач двухкомпонентных сред удобно пользоваться уравнениями не относительно векторов перемещений, а относительно скалярных потенциалов.

Ниже вводятся некоторые скалярные потенциалы при помощи которых получены волновые уравнения и напряжения в потенциалах для двухкомпонентной пористой среды в случае гармонических волн и исследуются плоские волны в двухкомпонентных волноводах.

Ключевые слова: волна, потенциал, волновод, среда, перемещение, жидкость, упругость.