РАЗДЕЛ IX. МАТЕМАТИКА

Бадин П.С.

Сети, ассоциированные с элементарной матричной сетью

Сибирский федеральный университет
(Россия, Красноярск)

doi:10.18411/lj-09-2018-65

idsp: 000001:lj-09-2018-65

Аннотация

По элементарной сети σ аддитивных подгрупп коммутативного кольца K строятся две новые элементарные дополняемые сети ω и Ω , удовлетворяющие включению

$$\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega \quad (1)$$

Эти сети впервые были построены В. А. Койбаевым (Владикавказский мат. журнал, 2010 [1]). Они нашли свое применение в статье В. А. Койбаева и Я.Н. Нужина (Сибирский мат. журнал, 2017 [2]). В данной статье рассматриваются примеры сетей, ассоциированные с элементарной сетью σ .

Ключевые слова: коммутативное кольцо, элементарная сеть аддитивных подгрупп, сетевая подгруппа, производная сеть, дополняемая сеть.

Обозначения и определения. Нам потребуются следующие стандартные обозначения и определения. Далее K — коммутативное кольцо с единицей, $GL_n(K)$ — общая линейная группа (множество матриц с определителем, не равным нулю), $SL_n(K)$ — специальная линейная группа (множество матриц с определителем единица). Через

$$t_{ij}(u) = e + ue_{ij}, i \neq j$$

обозначается элементарная трансвекция, где e — единичная матрица, e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных позициях нули, элементарная подгруппа $E_n(K)$ — это подгруппа, порождённая трансвекциями

$$t_{ij}(u), u \in K, 1 \leq i \neq j \leq n$$

Определение 1. Набор $\sigma = \{\sigma_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\}$ называется *полной сетью*, если:

$$\sigma_{ik} \sigma_{kj} \subseteq \sigma_{ij}, 1 \leq i, j, k \leq n \quad (2)$$

Множество

$$M_n(\sigma) = \{(a_{ij}) | a_{ij} \in \sigma_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\},$$

является кольцом, относительно обычных матричных операций сложения, умножения и называется *сетевым кольцом*. Мультипликативная система

$$S_n(\sigma) = E_n + M_n(\sigma),$$

есть полугруппа с единицей. Максимальная подгруппа из $S_n(\sigma)$ называется общей сетевой подгруппой и обозначается через $GL_n(\sigma)$, а её подгруппа матриц $SL_n(\sigma)$ с определителем единица называется *специальной сетевой подгруппой*.

Определение 2. *Элементарная сеть* — это набор $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i \neq j \leq n$, аддитивных подгрупп кольца K таких, что

$$\sigma_{ik} \sigma_{kj} \subseteq \sigma_{ij}, i \neq j \neq k, i, j, k = 1, \dots, n \quad (3)$$

для любой тройки попарно различных чисел i, j, k . Элементарную сеть удобно изображать следующей таблицей:

$$\sigma = \begin{pmatrix} * & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & * & \sigma_{2n} \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & * \end{pmatrix} \quad (4)$$

Определение 3. Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i \neq j \leq n$, называется *дополняемой*, если для некоторых аддитивных подгрупп σ_{ii} кольца R таблица (4) с диагональю $\sigma_{ii}, 1 \leq i \leq n$ является полной сетью.

Лемма 1. (Критерий дополняемости [3]). Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ дополняема тогда и только тогда, когда

$$\sigma_{ij} \sigma_{ji} \sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}, \quad i \neq j, 1 \leq i, j \leq n \quad (5)$$

Это дополнение можно получить, положив

$$\sigma_{ii} = \sum_{k \neq j} \sigma_{ki} \sigma_{ik}. \quad (6)$$

Определение 4. Элементарная сеть σ называется *замкнутой* (в статье В.М. Левчук допустимой [4]), если её сетевая подгруппа не имеет новых корневых элементов, то есть $\sigma = \bar{\sigma}$.

Производная сеть $\omega = (\omega_{ij})$. Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ - элементарная сеть порядка $n \geq 3$ над кольцом K . Рассмотрим набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца K , определенных для любых $i \neq j$ следующим образом:

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^n \sigma_{ik} \sigma_{kj}, \quad (7)$$

где, суммирование берется по всем k , отличным от i и j . В силу сетевого условия (2), для любой тройки попарно различных чисел i, j, k , мы имеем

$$\omega_{ir} \omega_{rj} \subseteq \sigma_{ir} \sigma_{rj} \subseteq \omega_{ij} \quad (8)$$

Таким образом, набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп $\omega_{ij}, i \neq j$, кольца K является элементарной сетью.

Определение 5. Элементарную сеть $\omega = (\omega_{ij})$ мы называем *производной элементарной сетью* для σ .

При $n=2$ производная сеть не определяется.

Укажем явно производную элементарную сеть ω при $n=3$. Пусть,

$$\sigma = \begin{pmatrix} * & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & * & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & * \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \sigma_{13} \sigma_{32}, \omega_{13} = \sigma_{12} \sigma_{23}, \omega_{21} = \sigma_{23} \sigma_{31}, \omega_{23} = \sigma_{21} \sigma_{13}, \omega_{31} = \sigma_{32} \sigma_{21}, \omega_{32} \\ &= \sigma_{31} \sigma_{12}. \end{aligned}$$

и производная сеть $\omega = (\omega_{ij})$ представляется таблицей

$$\omega = \begin{pmatrix} * & \sigma_{13} \sigma_{32} & \sigma_{12} \sigma_{23} \\ \sigma_{23} \sigma_{31} & * & \sigma_{21} \sigma_{13} \\ \sigma_{32} \sigma_{21} & \sigma_{31} \sigma_{12} & * \end{pmatrix}.$$

Определение 6. Будем говорить, что последовательность производных сетей $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots$ стабилизируется, когда существует такое k , что $\sigma^{(k+1)} = \sigma^{(k)}$.

Пример 1. Найти производные сети $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots$ от элементарной сети σ

$$\sigma = \begin{pmatrix} * & 2Z & 2Z \\ 2Z & * & 2Z \\ 2Z & 2Z & * \end{pmatrix}.$$

По определению,

$$\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} * & 4Z & 4Z \\ 4Z & * & 4Z \\ 4Z & 4Z & * \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} * & 16Z & 16Z \\ 16Z & * & 16Z \\ 16Z & 16Z & * \end{pmatrix}$$

....

...

$$\sigma^{(k)} = \begin{pmatrix} * & 2^{2^n} & 2^{2^n} \\ 2^{2^n} & * & 12^{2^n} \\ 2^{2^n} & 2^{2^n} & * \end{pmatrix}$$

....

...

Пример 2. Найти производные сети $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots$ от элементарной сети σ

$$\sigma = \begin{pmatrix} * & 4Z & 4Z \\ 2Z & * & 4Z \\ Z & 2Z & * \end{pmatrix}.$$

По определению,

$$\sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} * & 8Z & 16Z \\ 4Z & * & 8Z \\ 4Z & 4Z & * \end{pmatrix}$$

....

...

$$\sigma^{(k)} = \begin{pmatrix} * & 2^{n+1} & 4^n \\ 2^n & * & 2^{n+1} \\ 4^n & 2^n & * \end{pmatrix}$$

....

...

В связи с примерами 1 и 2 возникает гипотеза 1.

Гипотеза 1. Если последовательность производных сетей $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots$ над полем стабилизируется, то она стабилизируется на первом шаге.

Определение 7. Назовем элементарную или полную сеть константной, если все ее аддитивные подгруппы σ_{ij} совпадают с некоторым подкольцом R основного кольца K .

Элементарную константную сеть можно изобразить следующей таблицей

$$\sigma = \begin{pmatrix} * & R & R \\ R & * & R \\ R & R & * \end{pmatrix}.$$

Следующая гипотеза является более сильным утверждением, чем гипотеза 1.

Гипотеза 2. Последовательность производных сетей $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \dots$ стабилизируется тогда и только тогда, когда все σ_{ij} совпадают с некоторым фиксированным подкольцом с единицей основного кольца, в частности, когда исходная элементарная сеть σ является константной.

1. Койбаев, В. А. Сети, ассоциированные с элементарными сетями. / В. А. Койбаев // — Владикавказ: Владикавказский матем. журн. — 2010 — Т. 12, № 4. — С. 39—43.
2. Койбаев, В. А., Нужин, Я. Н. k -инвариантные сети над алгебраическим расширением поля k . / В. А. Койбаев, Нужин Я.Н. // Сибирский матем. журн. — 2017 — Т. 58, № 1. — С. 143—147
3. Койбаев, В. А. Элементарные сети в линейных группах / В. А. Койбаев. // Труды ИММ УрО РАН. — Ижевск — 2011. — Т. 17, № 4. — С. 134—141.
4. Левчук, В. М. Параболические подгруппы некоторых АВА-групп. / В. М. Левчук // Матем. заметки. — Красноярск — 1982. — Т. 31, № 4. — С. 509—525.

Литвиненкова З.Н., Оснюк Е.А.

Локальная потеря устойчивости в зоне дефектов в обшивке самолета

*Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации
(Россия, Санкт-Петербург)*

doi:10.18411/lj-09-2018-66

idsp: 000001:lj-09-2018-66

Аннотация

Принцип безопасного повреждения [1], применяемый наряду с принципом безопасного ресурса, допускает наличие в тонкостенных конструкциях самолета дефектов типа остроконечных надрезов, трещин и иных концентраторов напряжений.

При этом перед конструкторами встает задача учитывать их влияние на разрушающую нагрузку при расчете прочностного ресурса воздушного судна.

В работе дается решение задачи о растянутой нормальными напряжениями пластине с трещиной–разрезом с учетом деформации (выпучивания) в зоне трещины. При расчете напряженно-деформированного состояния используются соотношения двумерной теории упругости в комплексной форме. Для оценки влияния выпучивания пластины на ее прочность применяется обобщенный метод Бубнова-Галеркина и энергетический подход Гриффитса.

Установлено, что в момент потери устойчивости предельная нагрузка резко снижается (на 25%), а при дальнейшем росте зоны выпучивания меняется незначительно. Этот эффект существенно сказывается на прочности пластинчатых элементов конструкций летательных аппаратов и должен учитываться на этапе проектирования конструкций.

Ключевые слова: прочность, обшивка самолета, пластина, трещина-разрез, концентрация напряжений, выпучивание (деформация), разрушающая нагрузка, безопасное повреждение.

Abstract

The paper gives a refined solution of the problem concerning extended by the normal strain plate that has a crack – cut with consideration of warping (buckling) in the crack zone. When calculating strain-deformed state the ratio of the two-dimensional theory of elasticity is used. To evaluate the influence of buckling of the plate on its strength the generalized method of Bubnov-Galerkin and Griffith energy approach is applied.

Keywords: strength, aircraft covering, plate, crack - the cut, the concentration of stress, buckling (warping), breaking load, safe damage.