РАЗДЕЛ VII. МАТЕМАТИКА

Козлов В.А., Оганян Л.А., Мурдасова А.А.
Заузленность пространственных n -угольников

Армавирский государственный педагогический университет
(Россия, Армавир)

doi: 10.18411/lj-08-2021-19

Аннотация

В статье решается задача о заузленности многоугольников с не более чем 5 вершинами. Доказано, что все n -угольники при $n \leq 5$ являются тривиальными полигональными узлами, а для каждого $n > 5$ существуют заузленные n -угольники.

Ключевые слова: узел, заузленность, незаузленность, тривиальный узел, полигональный узел, гомеоморфизм, многоугольник, звенное число, преобразование Рейдемейстера, изотопия.

Abstract

The article solves the problem of knotted polygons with no more than 5 vertices. It is proofed that all n -gons in $n \leq 5$ are trivial polygonal knots, and there are knotted n -gons for each $n > 5$.

Keywords: knot, trivial knot, polygonal knot, homeomorphism, polygon, number of vertices, Reidemeister moves, isotopic deformation.

Введение

Рассматриваемая задача относится к одной из главных задач теории узлов - задаче классификации. Известны таблицы простых узлов. Работа над продолжением этих таблиц ведется многими авторами. Для полигональных узлов о подобных таблицах ничего не известно. Хотя интерес к изучению полигональных узлов вполне оправдан, например, применением их полигональной топологии. Кроме того, постановка вопроса о заузленности пространственных многоугольников совершенно естественна и представляет самостоятельный (например, геометрический) интерес. В этом – актуальность задачи.

Вначале приведем необходимые определения и формулировки.

Узлом называется образ гомеоморфизма единичной окружности S^1 в трехмерное пространство R^3 .

Узлы K_1 и K_2 эквивалентны, если существует гомеоморфизм пространства R^3 на себя, отображающий K_1 на K_2 .

Узлы, эквивалентные незаузленной окружности называют тривиальными.

Полигональный узел - это такой узел, который является объединением конечного числа замкнутых прямолинейных отрезков, называемых сторонами.

Полигональная диаграмма узла, таким образом, есть объединение конечного числа замкнутых прямолинейных отрезков, называемых сторонами. Концы этих отрезков называются вершинами узла. Минимальное число отрезков ломанной называют звенным числом узла.

Два узла называются изотопными, если один из них может быть деформирован в другой посредством диффеоморфизма объемлющего пространства на себя, сохраняющего ориентацию.

Преобразования $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$:

$$\begin{aligned}\Omega_1^{\pm 1}: & \quad | \rightleftharpoons \text{нода} \\ \Omega_2^{\pm 1}: & \quad || \rightleftharpoons \text{перекресток} \\ \Omega_3^{\pm 1}: & \quad \text{три пересечения} \rightleftharpoons \text{три пересечения}\end{aligned}$$

называются преобразованиями Рейдемейстера. Будем называть их первым, вторым и третьим преобразованием Рейдемейстера соответственно.

Доказательство основной теоремы

Теорема. Пространственный n -угольник может быть заузлен только при $n > 5$.

Доказательство проведем индуктивно, последовательно увеличивая число вершин.

1. Пространственный треугольник

Рассмотрим все проекции пространственного треугольника на плоскость, три вершины которого и определяют эту плоскость. Очевидно, что это тривиальный полигональный узел, так как можно установить взаимно однозначное непрерывное отображение треугольника в окружность.

Рис.1.1

2. Пространственный четырехугольник

Переберем все проекции на плоскость пространственных четырехугольников, проектируя треугольники и добавляя четвертую вершину. Разобьем плоскость на три области α , β_1 и β_2 :

2.1. Пусть точка D принадлежит области α (рис.2.1). Применяя элементарную изотопию, заменим ломанную CDA на CA . Этот случай

эквивалентен описанному выше случаю, значит, четырехугольник тривиален.

Рис. 2.1

2.2. Точка D не принадлежит α , следовательно принадлежит или β_1 или β_2 . Пусть D принадлежит β_1 .

2.2.1. На проекции узла BA лежит поверх CD. Применим первое преобразование Рейдемейстера[2,с.14]. Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю изображенному на рис. 2.1.

2.2.2. На проекции узла CD лежит поверх BA. Применим первое преобразование Рейдемейстера. Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю изображенному на рис. 2.1.

2.3. Точка D не принадлежит α и β_1 , следовательно, D принадлежит β_2 .

2.3.1. На проекции узла BC лежит поверх DA. Применим первое преобразование Рейдемейстера. Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю изображенному на рис. 2.1.

2.3.2. На проекции узла DA лежит поверх BC . Применим первое преобразование Рейдемейстера. Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю изображенному на рис. 2.1.

2.4. Пусть точка D принадлежит лучу AM (рис.2.4), который разбивает β на множества β_1 и β_2 . Элементарной изотопией преобразуем ломаную CDB в CB . Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю 1.

Рис. 2.4

3. Пространственный пятиугольник

Здесь наша цель - доказать, что пространственный пятиугольник не может быть заузлен. Для этого переберем всевозможные проекции на плоскость пространственных четырехугольников, добавляя пятую вершину.

Вначале рассмотрим случай, изображенный на рис. 2.1; добавим все варианты расположения пятой вершины на множестве α . Получим случаи, изображенные на рис. 3.1.1, рис. 3.1.2, рис. 3.1.3. Все они элементарной изотопией преобразуются в случай, изображенный на рис. 2.1. Ломанная AED преобразуется в AD :

Рис. 3.1.1.1

Рис. 3.1.1.2

Рис. 3.1.1.3

Рассмотрим все расположения точки E на области β_2 . Получим случаи изображенные на рис. 3.2.1, рис. 3.2.2, рис. 3.2.3:

Рис. 3.2.1

Рис. 3.2.2

Рис. 3.2.3

Очевидно, приведенные полигональные узлы незаузелны, поскольку преобразования Рейдемейстера легко приводятся к тривиальным. Это можно показать также, изменив проекции.

Рассмотрим все расположения точки E в области β_1 . Получим случаи аналогичные изображенным на рис. 3.2.1, рис. 3.2.2, рис. 3.2.3. И новый случай (рис. 3.2.4). Он аналогичен 3.1.3.

Рис. 3.2.4

Теперь к четырехугольникам из пункта 2.2 будем добавлять пятую вершину. Вначале добавим вершину E в области α (случай 2.2.1). Он аналогичен случаю изображенному на рис. 3.1.3.

Следующая возможность - вершина E расположена в области β_1 .

Первый случай аналогичен изображенному на рис. 3.1.3. Второй случай аналогичен изображенному на рис. 3.2.2, а значит и все случаи с другими вариантами прохождения прямой DC также рассмотрены нами выше на рис. 3.2.1 и рис. 3.2.3.

Пусть теперь пятая вершина находится в области β_2 . Элементарной изотопией преобразуем ломаную DEA в DA . Случай аналогичен изображенному на рис. 2.3.1.

К четырехугольнику из п.2.4 (рис. 2.4), добавим все варианты расположения вершины E . Расположим пятую вершину E в области α . Получим аналогию случаю на рис. 3.1.3.

Осталось доказать, что полигональное изображение

узла 5_2 из таблицы классификации [2, с.466] не является пространственным пятиугольником.

Пусть точки ABC задают плоскость XOY . $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, тогда $z_1 = z_2 = z_3 = 0$. Добавим точку $D(x_4, y_4, z_4)$, так, чтобы DC не пересекала AB и

$$z_4 > z_1$$

Добавим точку $E(x_5, y_5, z_5)$, так, чтобы ED не пересекала AB, так как AB лежит в плоскости XOY и имеет координаты $z_2 = z_3 = 0$, точка общего перпендикуляра AB и ED принадлежащая ED должна иметь координату $z_6 < 0$, тогда и

$$z_5 < 0.$$

Но точка общего перпендикуляра AB и BC принадлежащая ED должна иметь координату $z_7 > 0$, тогда и

$$z_5 > 0.$$

Полученное противоречие подтверждает, что полигональный узел 5_2 не может быть построен в пространстве.

4. Пространственный n-угольник, $n > 5$

Рассмотрим табличный узел 6_2 [2, с.466], он нетривиален, построим его полигональный образ рис. 4.1. Звенное число узла 6_2 равно 6, значит, среди полигональных узлов с 6 вершинами есть нетривиальный.

Аналогично узлы 6_1 (рис. 4.2) и 6_3 (рис. 4.3) имеют 7 и 8 вершин соответственно и являются нетривиальными.

Звенное число 6

Рис. 4.1

Звенное число 7

Рис. 4.2

Звенное число 8

Рис. 4.3

Нетрудно понять, что с помощью данных узлов можно построить любой заузленный n -угольник при $n \geq 6$.

Доказательство завершено.

1. Кроуэлл, Р. Фокс, Р. Введение в теорию узлов. - М.: Мир, 1967.-348с.
2. Мантуров, В.О. Теория Узлов. - М.: Москва-Ижевск: ИКИ, 2005.-493с.
3. Прасолов, В.В. Наглядная топология, М.: МЦНМО, 1995. -111с.
4. Manturov V.O., Plyutko D.P. Virtual Knots. The State of the Art. Singapore: World Scientific Publishing Co. 2013.- С.
5. Мантуров В.О. Четность в теории узлов // Матем. сб. 2010. 201, № 5. –С. –

Митина Т.В.

Оценка регионов по эпидемиологической ситуации COVID-19 с использованием методов дискриминантного анализа

*ГБОУ ВПО «Государственный университет «Дубна»
(Россия, Дубна)*

doi: 10.18411/lj-08-2021-20

Аннотация

В рассматриваемой работе для оценки эпидемиологической ситуации по регионам нашей страны используются методы многомерного статистического анализа, такие как иерархический кластерный анализ и дискриминантный линейный анализ. С помощью иерархического кластерного анализа формируются две обучающие выборки,