показывает соотношение выживших людей (инфицированных), вылечившихся (принявших вакцину), зомби и умерших людей.

Путем варьирования параметров мы можем сделать вывод, что человечество будет сосуществовать с зомби продолжительное время, до тех пор, пока, все человечество не истребит зомби и пока каждый человек на планете не получит вакцину.

1. Свободная энциклопедия Википедия [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/>
2. Robert Smith – Mathematical Modelling of Zombies, University of Ottawa [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://mysite.science.uottawa.ca/rsmith43/Zombies.pdf>

Пашаева Х.Т.г.

**Численное решение систем дифференциальных уравнений комплексной модели
влагообмена замкнутого аппарата и анализ результатов**

*Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности
(Азербайджан, Баку)*

doi: 10.18411/lj-08-2020-24

idsp: ljjournal-08-2020-24

Аннотация

В работе исследуются процессы влагообмена, происходящие в системах замкнутых аппаратов. Предполагается, что рассматриваемая сеть заполнена влагоносителем (жидкостью, газом, воздухом и т. д.) и состоит из линии тока, элементов конструкций и объемов. Разработан алгоритм автоматического построения математических моделей влагообмена в подобных сетях, описываемых системами дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных), а также численные схемы. Разработаны методика и алгоритм для решения задачи.

Ключевые слова: влагообмен, граничные условия, гиперболическое уравнение, метод сеток, разностные схемы, метод прямых, линии тока, элемент конструкций, объем.

Abstract

In the paper, the processes of moisture exchange occurring in closed-loop systems are studied. It is assumed that the network under consideration is filled with a moisture carrier (liquid, gas, air, etc.) and consists of a streamline, structural elements and volumes. An algorithm for automatic construction of mathematical models of moisture exchange in such networks, described by systems of differential equations (ordinary and in partial derivatives), as well as numerical schemes is developed. The methodology and algorithm for solving the problem are developed.

Keywords: moisture exchange, boundary conditions, hyperbolic equation, grid method, difference schemes, direct method, streamlines, structural elements, volume

Введение.

Изучение процессов влагообмена всегда играло важную роль в развитии техники и естествознания. За последние десятилетия сфера интенсивного исследования и применения явлений влагообмена чрезвычайно расширилась и включает такие ведущие направления техники, как химическая технология, металлургия, строительное дело, нефтепереработка, машиностроение, физика атмосферы, исследования космических аппаратов, а также биология, геология и т.д.

При проведении различных замкнутых аппаратов (ЗА), системы достаточно больших размеров, в которых следует поддерживать определенные влажностные режимы, обеспечивающие работоспособность находящихся внутри людей, агрегатов и т.п.

Построение математической модели. В схеме участвуют следующие элементы линии тока, объем и элементы конструкции и элементы автоматики [2,3].

На рис.1 показана одна часть замкнутого аппарата (ЗА). В этом процессе участвуют разные элементы. На каждом из этих элементов изменение влагообмена описывается математическими моделями.

Все элементы и их взаимодействия показаны на рис.1 в виде некоторой влагообменной сети. В сеть входят следующие элементы:

12 – линия тока; 1 – элемент конструкции; 1 – объем; 1 – регулятор; 3 – смеситель-разделитель; 1 – датчик.

Рис. 1 Влагообменная сеть

Поскольку в задаче рассматриваются изменения влаги в стационарном режиме ЗА, в каждом элементарном объеме изменения влаги в одной точке. Говоря об изменении влаги по объему, будем иметь в виду ее изменение по длине.

Решение задачи. Конкретный выбор метода существенно зависит от типа решаемой задачи. В свою очередь эти задачи подразделяются на одноточечные и многоточечные.

Можно построить таблицу связей отдельно для объекта.

Таблица связей для смесителей-разделителей состоит из 30 столбцов. Каждый смеситель или разделитель может иметь: 1) два выхода; 2) один вход и один выход; 3) два входа. Для каждого входного элемента линии тока выделены 5 столбцов. В этой таблице четыре столбца выделены для условий работы регулятора. Кроме того, в таблице есть столбец, в котором приводится признак полученной строки. В таблице для каждого элемента выделены 3 строки. Помечаются те строки, которые удовлетворяют условию регулярности. На следующем шаге этот столбец обнуляется. При повторном заходе проверяются условия работы, то в предыдущей строке значение признака обнуляется и в новый столбец вместо нуля заносится единица. После этого данная

строка используется для определения влаги смесителя-разделителя. В сети участвуют элементы, которые могут работать в режиме смесителя-разделителя.

Метод прямых. В отличие от метода сеток в методе прямых частные производные аппроксимируют не по всем, а только по некоторым избранным переменным, тем самым дифференциальные уравнения приближенно заменяют дифференциально-разностными с меньшим числом непрерывных независимых переменных. Этот метод можно рассматривать как предельный случай метода сеток, когда шаги разбиения по части независимых переменных стремятся к нулю. Метод прямых, таким образом, позволяет понизить размерность задачи и заменить исходную систему граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим участок тепловой сети, приведенной на рисунке и задачу о влагообмене в k -ой линии тока. Обозначим: V_k - текущая координата k -ой линии тока, $|V_k|$ - длина k -ой линии тока; d^k - искомая влага k -ой линии тока ($d^k = d^k(V_k, t)$), причем $0 \leq |V_k| \leq L_k$, L_k - задано.

Пусть $d^{k-1}(L_{k-1}, t)$ - влага выхода $(k-1)$ -ой линии тока в любой момент времени, т.е. $d^{k-1} = d^{k-1}(L_{k-1}, t)$, которая подается на вход k -ой линии тока. Пусть V_f и d_f соответственно t -ой линии тока, через которую осуществляется внешнее влажное воздействие на k линию тока с коэффициентом влагопередачи $F_{(f,k)}$. Тогда задача о влагообмене в k -ой линии тока будет иметь вид:

$$\frac{dd^k}{dt} = -U_k \cdot \frac{dd^k}{dt} + \frac{1}{\rho_k c_k} \cdot q_k \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} k \in \Omega, \quad q_k &= F_{(f,k)}(d^f - d^{k_{\text{вх}}}) \cdot V_k^{-1}, \\ 0 < |V_k| &\leq L_k \end{aligned} \quad (2)$$

Начальные и краевые условия:

$$d^k(V_k, 0) = c \quad (3)$$

$$d^k(0, t) = d^{k-1}(L_{k-1}, t) \quad \text{при } V_k = 0, \quad d^{k_{\text{вх}}} = d^{(k-1)k_{\text{вх}}}$$

При построении вычислительных схем методом прямых операция дифференцирования аппроксимируется по прямой V_k . Для этого предварительно в исходной области $(V_{k,t})$ проводятся прямые

$$V_k^j = j \cdot h, \quad j = \overline{0, N_k}, \quad N_k \cdot h = L_k$$

на каждой из внутренних прямых $V_k = V_k^j$, ($j = \overline{1, N_{k-1}}$) производные на соседних прямых:

$$\frac{\partial d_j^k}{\partial V_k} = \frac{d_{j+1}^k(t) - d_j^k(t)}{2h}, \quad j = \overline{1, N_{k-1}} \quad (4)$$

Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{dd_j^k(t)}{dt} = -U_k \cdot \frac{d_{j+1}^k(t) - d_{j-1}^k(t)}{2h} + \frac{1}{\rho_k c_k} \cdot q_k. \quad (5)$$

Начальные условия:

$$d^k(V_k^j, 0) = c, \quad j = \overline{1, N_k} \quad (6)$$

причем

$$d^k(0, t) = d^{k-1}(0, t) = c, \quad \text{при } V_k = 0 \quad (7)$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений в частных производных окажется сведенной к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями, т. е к задаче Коши.

Комплексная математическая модель влагообмена при применении метода прямых сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

1) для линии тока

$$\frac{dd_j^k(t)}{dt} = -U_k \cdot \frac{d_{j+1}^k(t) - d_{j-1}^k(t)}{2h} + \frac{1}{\rho_k c_k} \cdot V_k^{-1} q_k. \quad (8)$$

$$0 < |V_k| \leq L_k$$

Начальные условия имеют вид:

$$d^k(V_k^j, 0) = c, \quad j = \overline{1, N_k}$$

2) для объемов первой группы имеет вид:

$$\rho_k V_k \cdot \frac{dd_1^k}{dt} = \sum_{j_{\text{вх}}} (\rho_k v_{j_{\text{вх}}} \cdot d_1^k) - d_1^k \sum_{j_{\text{вх}}} (\rho_k v_{j_{\text{вх}}}) + \sum J_{\text{кв.о}} \quad (9)$$

где: $\sum_{j_{\text{вх}}} (\rho_k v_{j_{\text{вх}}} \cdot d_1^k)$ - количество влаги, забираемое из объекта в единицу времени;

$d_1^k \sum_{j_{\text{вх}}} (\rho_k v_{j_{\text{вх}}})$ - количество влаги, поступающей в объем в единицу времени;

$\sum J_{\text{кв.о}}$ - количество влаги, забираемое из объекта в единицу времени.

Начальные условия:

$$d_1^k(t)|_{t=0} = c \quad (c = \text{const})$$

В качестве примера решим задачу, реализующую влажную сеть приведенную на рисунке 1, состоящую из линии тока, объема, а также из элементов автоматики. Сеть состоит из одного контура, пяти линий тока, одного объема.

Приведем математические модели этих элементов для линии тока,

$$\rho_k \left(\frac{\partial d^k}{\partial t} + U_k \cdot \frac{\partial d^k}{\partial V_k} \right) = \frac{J_k}{L_k \cdot v_k / U_k}, \quad (k = \overline{1, 5}) \quad (10)$$

для объема.

$$\rho_{12} V_{12} \cdot \frac{dd^{12}}{dt} = \rho_{12} v_{6\text{вх}} \cdot d^{12} - d^{12} \cdot \rho_{12} v_{6\text{вых}} + J_{6\text{в.о.з}} \quad (11)$$

Начальные и граничные условия имеют вид:

$$d^{12}(t)|_{t=0} = c \quad (c = \text{const}) \quad d_k(0, t) = d_{k-1}(L_{k-1}, t) \quad (12)$$

где (k-1) предыдущий элемент k - ой линии тока. Для элемента (5) линии тока, который является соседним с объемом (6) граничное условие имеет вид $d^5(0, t) = T_{12}(0)$, $d^{12}(t)$ - влага объема, $d_i(V, t)$ - температура i - ой линии тока.

Для данной задачи был реализован метод прямых, решалась система обыкновенных дифференциальных уравнений (4)-(6), модифицированный методом Эйлера. Результаты решения приводятся в таблице 2. Эти результаты будут в дальнейшем использованы для анализа численных результатов.

Таблица 1.

№ эл.	Начальное состояние влаги	Значение объемного расхода	Значение плотности	Номер предыдущего элемента	Тип предыдущего элемента	Значение парообразования	Значение температуры
1	2	3	4	5	6	7	8
$c_{k,1}$	$c_{k,2}$	$c_{k,3}$	$c_{k,4}$	$c_{k,5}$	$c_{k,6}$	$c_{k,7}$	$c_{k,8}$

Решим эту же задачу методом сеток. Для этого введем равномерную сетку по V и t .

$$\Omega_h = \left\{ V_k^j = i \cdot h, \quad j = 0, N_k; \quad h = \frac{L_k}{N_k} \right\}$$

$$\Omega_n = \{ t_j = i \cdot l, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Применим для аппроксимации неявную схему. В результате получена следующая система конечно-разностных уравнений

$$\frac{d_{i+1,j}^k - d_{i,j}^k}{l} + U_k \frac{d_{i+1,j+1}^k - d_{i+1,j}^k}{h} = F(t, \rho_k, V_k, d^k, d^{k+1}, F_k) \quad (13)$$

$$\left(\frac{1}{l} - \frac{U_k}{h} \right) \cdot d_{i+1,j}^k + \frac{U_k}{h} \cdot d_{i+1,j+1}^k = F(t, \rho_k, V_k, d^k, d^{k+1}, F_k) + \frac{1}{l} d_{i,j}^k, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, \quad j = \overline{1, N}) \quad (14)$$

$$F(t, \rho_k, V_k, d^k, d^{k+1}, F_k) = \frac{J_k}{L_k \cdot \rho_k \cdot \frac{v_k}{U_k}}, \quad k \in \Omega$$

J_k - влаговыделение на единицу длины линии тока, начальные и граничные условия таковы:

$$d_{i,0}^k = c, \quad (c = const) \quad i = \overline{1, N_k};$$

$$d_{0,j}^k = d_{N_{k-1},j}^{(k-1)}; \quad j = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Система, полученная с помощью неявной схемы аппроксимации (14)-(15), решалась методом Гаусса и модифицированным методом прогонки, разработанным для решения систем дифференциальных уравнений первого порядка.

В качестве примера рассмотрен задача которого показан в рис.1. В процессе участвует 5 элементов линия тока, 1-элемент объема.

$$\rho_6 V_6 \cdot \frac{dd1^6}{dt} = \rho_6 v_{6ex} \cdot d^6 - d1^5 \cdot \rho_6 v_{6ex} + J_{6ex}$$

$$\rho_k \left(\frac{\partial d^i}{\partial t} + U_i \cdot \frac{\partial di}{\partial V_i} \right) = \frac{J_i}{L_k \cdot v_i / U_i}, \quad (i = \overline{1, 11})$$

Начальные и граничные условия:

$$d_{i,0}^k = c, \quad (c = \text{const}) \quad i = \overline{1,5};$$

$$d_{0,j}^k = d_{N,j}^{(k-1)}; \quad j = 1, 2, \dots$$

$$c_1 = 0.532$$

$$c = 0.52 \text{ г} / \text{м}^3$$

$$d_{12} = 0.52 \text{ г} / \text{м}^3$$

$$V_1 = 0.465 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \quad J_{\text{воз}} = 30.6 \text{ м}$$

$$V_2 = 0.55 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \quad \rho_1 = 691 \text{ кг} / \text{м}^3$$

$$V_3 = 0.405 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \quad \rho_2 = 1071 \text{ кг} / \text{м}^3$$

$$V_4 = 0.394 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \quad \rho_3 = 855 \text{ кг} / \text{м}^3$$

$$V_5 = 0.55 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \quad \rho_4 = 1.205 \text{ кг} / \text{м}^3$$

$$V_{12} = 0.37 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \quad \rho_{12} = 0.37 \text{ кг} / \text{м}^3$$

Таблица 2

Неявная схема "левый угол"

№	Время вычисления (1мин)	Начальное состояние элемента	Значение влаги в начале элемента	Значение влаги в середине элемента	Значение влаги в конце элемента	Смеси- тель- разде- литель	Регуля- тор	Темпе- ратура датчи- ка
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	60	0.509	0.510	0.512	0.513	0.516	1	275.5
2.	60	0.513	0.514	0.515	0.516	“___”	“___”	“___”
3.	60	0.516	0.517	0.517	0.517	“___”	“___”	“___”
4.	60	0.517	0.5172	0.5173	0.5174	“___”	“___”	“___”
5.	60	0.5175	0.5176	0.5177	0.5178	“___”	“___”	“___”
6.	60	0.5178	0.5179	0.5179	0.518	“___”	“___”	“___”
7.	60	0.518	0.519	0.520	0.521	“___”	“___”	“___”
8.	60	0.5214	0.5215	0.5216	0.5217	“___”	“___”	“___”
9.	60	0.5217	0.5218	0.5219	0.522	“___”	“___”	“___”
10.	60	0.5223	0.5224	0.5225	0.5226	“___”	“___”	“___”

Таблица 3

Метод прямых

№	Время вычисления (1мин)	Начальное состояние элемента	Значение влаги в начале элемента	Значение влаги в середине элемента	Значение влаги в конце элемента	Смеси- тель- разде- литель	Регуля- тор	Темпе- ратура датчика
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	60	0.508	0.509	0.510	0.512	0.516	1	275.5
2.	60	0.512	0.5124	0.5125	0.5126	“___”	“___”	“___”
3.	60	0.513	0.5134	0.5136	0.514	“___”	“___”	“___”
4.	60	0.514	0.5145	0.5151	0.5156	“___”	“___”	“___”
5.	60	0.516	0.517	0.518	0.519	“___”	“___”	“___”
6.	60	0.519	0.5195	0.5196	0.5197	“___”	“___”	“___”
7.	60	0.5197	0.5198	0.520	0.521	“___”	“___”	“___”
8.	60	0.521	0.5215	0.5216	0.5217	“___”	“___”	“___”
9.	60	0.5217	0.5218	0.5219	0.522	“___”	“___”	“___”
10.	60	0.522	0.5225	0.5226	0.5227	“___”	“___”	“___”

Результаты численных расчетов. Результаты задачи теплообмена для сети, указанной на рис. 1 приведены в таб.2 и таб.3. Как следовало ожидать, наиболее хорошие результаты получены методом сеток с шаблоном аппроксимации «левый уголок» (явная схема). Однако для устойчивости метода требуется выполнения условия Куранта:

$$U_k \frac{\Delta t}{\Delta V} \leq 1$$

т.е. выбор шага по времени зависит от шага по объему и при малом шаге задача решалась достаточно долго. Известно, что при использовании неявной схемы условие устойчивости имеет вид: $U_k \frac{\Delta t}{\Delta V} \leq 1$, что означает возможность выбора шагов по объему независимо друг от друга.

Выводы. На основе данных строятся таблицы связей, которые и являются основной информационной базой для автоматической генерации конечно-разностных схем для моделей.

Если в сети существуют линии тока, на которые внешние влаговые воздействия отсутствуют, такда их можна принять за точку, или вовсе не рассматривать, или считать частью смежной линии тока, на которой имеется внешнее воздействие. При этом подходе появляется возможность укрупнить шаги и по времени и по объему.

Для учета различных тепловых связей в комплексной математической модели, в алгоритме предусмотрена специальная система кодировки, которая позволяет идентифицировать типы элементов и их взаимное расположение (смежность между собой).

1. Gasimov G.G., Karimov V.A., Hadjiyev F.H. One Of The Approaches To The Calculation Of Humidity Changes In A Complex Closed System. American Journal of Engineering Research (AJER). -2018. - Volume-7
2. В.М.Пасконов, В.И.Полежаев, Л.А. Чудов Численное Моделирование Процесов тепло и массообмена. Издательство “Наука” стр.284- 1984.
3. А.А. Самарский. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1983, 616 с.
4. Степаненко В.М., Лыкосов В.Н. Численное моделирование процессов тепловлагообмена в системе водоем-грунт. Метеорология и гидрология., 2005, №3, с. 95-104.
5. Степаненко В.М., Численная модель процессов тепловлагообмена в системе атмосфера – водоем – почва. Вычислительные технологии, 2004, т.9, часть 1. с.112-122.

Пашаева Х.Т.г.

Изменения влажности в сложной замкнутой системе

*Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности
(Азербайджан, Баку)*

doi: 10.18411/lj-08-2020-25

idsp: ljjournal-08-2020-25

Аннотация

В статье рассматриваются процессы влагообмена, происходящие в системах замкнутых аппаратов. Предполагается, что рассматриваемая сеть заполнена влагоносителем и состоит из линии тока, элементов конструкций и объемов. С использованием системы дифференциальных уравнений построена математическая модель влагообмена в таких сетях, разработан алгоритм решения и численная схема.

Ключевые слова: разностные схемы, влагообмен, линии тока, граничные условия, гиперболическое уравнение, метод сеток, метод прямых, элемент конструкций.