РАЗДЕЛ VI. МАТЕМАТИКА

Антоновская О.Г., Зайцева М.Н.

К исследованию синхронизации периодически возмущаемого квазигармонического осциллятора с полиномиальной нелинейностью*Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет**Нижегородский государственный автомеханический техникум**(Россия, Нижний Новгород)*

doi: 10.18411/lj-08-2020-22

ids: lj-08-2020-22

Аннотация

Известно, что аппарат теории дифференциальных уравнений является весьма эффективным средством исследования колебательных процессов в различных разделах физики и техники. Наиболее доступными для исследования являются колебательные системы с малым параметром при нелинейных членах. Причем до сих пор особый интерес представляет изучение систем, близких к гармоническому осциллятору (квазигармонический осциллятор). В настоящей работе приведен пример исследования квазигармонического осциллятора с полиномиальной нелинейностью методом приближенных точечных отображений. Вопрос о его синхронизации сводится к решению вопроса о существовании неподвижных точек точечного отображения, при построении которого применяется метод последовательных приближений. Обсуждается вопрос о локальной применимости результатов приближенного исследования.

Ключевые слова: колебательная система, система с малым параметром, квазигармонический осциллятор, метод точечных отображений.

Abstract

It is known that the apparatus of differential equations is effective when studying vibration processes in different regions of physics and technology. The most accessible for study are the systems with small parameter over nonlinear members. Besides so far some systems close to harmonic oscillator (quasi-harmonic oscillator) are of great interest. In current work the example of study by approximate point mappings method of quasi-harmonic oscillator with polynomial nonlinearity is represented. The problem of its synchronization is reduced to solving the question of fixed points of point mapping constructed by the method of consequent approximations. The question of application of the results of approximate study is discussed.

Key words: system with vibrations, system with small parameter, quasi-harmonic oscillator, point mappings method.

Изучение колебательных процессов имеет фундаментальное значение для различных разделов механики, физики техники. В трудах по теории колебаний мощным элементом исследования стали дифференциальные уравнения [1, 2, 3]. При этом, поскольку аппарат линейных дифференциальных уравнений разработан весьма детально, естественно, что на первом этапе развития теории колебаний исследователи стремились изучаемые ими колебательные процессы подводить под линейные схемы, отбрасывая нелинейные члены [1, С. 11-16]. Однако многочисленные исследования показали глубокое, принципиальное отличие механики нелинейных колебаний от механики линейных колебаний, которое сохраняется даже при слабо нелинейных колебаниях [1, С. 13-18].

Следует отметить, что до сих пор интерес представляет изучение систем, близких к гармоническому осциллятору (квазигармонический осциллятор) [1, С. 19–21; 2, С. 650–663]. Одним из важных достоинств такой системы является возможность использовать хорошо известные математические свойства процессов колебаний гармонического осциллятора с медленно меняющейся частотой в задачах различной физической природы [4, 5]. В настоящей работе приведен пример исследования квазигармонического осциллятора с полиномиальной нелинейностью (типа Ван-дер-Поля-Дуффинга) методом приближенных точечных отображений [6, 7]. Вопрос о его синхронизации сводится к решению вопроса о существовании неподвижных точек точечного отображения, при построении которого применяется метод последовательных приближений. Обсуждается вопрос о локальной применимости результатов приближенного исследования.

Известно [6–8], что при исследовании динамики синхронизируемого осциллятора

$$\ddot{x} + x = \mu \cdot f(x, \dot{x}, t/p), \quad (1)$$

в котором $0 < \mu \ll 1$, а $2p\pi$ – период внешней силы, методом точечных отображений [9], исследование поведения траекторий (1) может быть сведено к изучению точечного отображения T секущей поверхности $t = [t/(2p\pi)]2p\pi$ фазового пространства $x, y = \dot{x}, t$ в себя [6; 7] (или секущей поверхности $t = 0$ в секущую поверхность $t = 2p\pi$), порожденной траекториями системы. При этом с точностью до величин порядка μ^2 точечное отображение T может быть приближено точечным отображением $\tilde{T}$ с функциями последования

$$\tilde{x} = [x_0 - \mu F_1(x_0, y_0)] \cos 2p\pi + [y_0 + \mu F_1(x_0, y_0)] \sin 2p\pi, \quad (2)$$

$$\tilde{y} = -[x_0 - \mu F_1(x_0, y_0)] \sin 2p\pi + [y_0 + \mu F_1(x_0, y_0)] \cos 2p\pi, \quad (3)$$

где

$$F_1(x_0, y_0) = \int_0^{2p\pi} f(x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t, t/p) \sin t \, dt, \quad (4)$$

$$F_2(x_0, y_0) = \int_0^{2p\pi} f(x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t, t/p) \cos t \, dt. \quad (5)$$

Поскольку формулы (2)–(5) явные, изучение условий существования синхронного режима с периодом внешней силы может быть проведено с помощью изучения условий существования и устойчивости простой неподвижной точки $\tilde{x} = x_0 = x^*, \tilde{y} = y_0 = y^*$ приближенного точечного отображения $\tilde{T}$.

Особый интерес представляет изучение движений квазигармонического осциллятора вблизи главного резонанса ($p \approx 1 + \mu\xi$). Рассмотрим уравнение синхронизируемого осциллятора типа Ван-дер-Поля-Дуффинга

$$\ddot{x} + x = \mu[(1 - 4x^2)\dot{x} - \xi x - (4/3)\eta x^3 + A \cos t], \quad (6)$$

где $0 < \mu \ll 1$, $A > 0$, или, если ввести $y = \dot{x}$, систему двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -x + \mu[(1 - 4x^2)y - \xi x - (4/3)\eta x^3 + A \cos t]. \quad (7)$$

В последние годы интерес к такого типа системам вызван тем, что они дают адекватное описание целого ряда нелинейных эффектов, происходящих в различных областях естествознания, в частности явлений синхронизации и стохастизации колебаний

Правые части (7) не меняются при замене t на $t + 2\pi$. Поэтому исследование структуры ее фазового пространства x, y, t сводится к изучению точечного отображения T секущей поверхности $t = 0$ в секущую поверхность $t = 2\pi$. При этом точечное

отображение T , порождаемое траекториями системы (7), с точностью до членов порядка μ^2 может быть приближенно представлено точечным отображением $\tilde{T}$

$$\tilde{x} = x_0 + \mu\pi [x_0(1 - (x_0^2 + y_0^2)) + y_0(\xi + \eta(x_0^2 + y_0^2))], \quad (8)$$

$$\tilde{y} = y_0 + \mu\pi [-x_0(\xi + \eta(x_0^2 + y_0^2)) + y_0(1 - (x_0^2 + y_0^2)) + A]. \quad (9)$$

Условия $\tilde{x} = x_0 = x^*, \tilde{y} = y_0 = y^*$ существования неподвижной точки точечного отображения (8)-(9) дают соотношения

$$x^* = (1/A)\rho(\xi + \eta\rho), y^* = -(\rho/A)(1 - \rho), \quad (10)$$

где $\rho = (x^*)^2 + (y^*)^2 > 0$ находится из уравнения

$$\rho[(\xi + \eta\rho)^2 + (1 - \rho)^2] = A^2. \quad (11)$$

Т.е. факт существования неподвижных точек $\tilde{T}$ определяется фактом существования корней $\rho > 0$ у (11).

Детальный анализ уравнения (11) позволяет получить качественную картину резонансных кривых при различных значениях A , а именно: при малых значениях A следует ожидать существование двух ветвей резонансной кривой, одна из которых является замкнутой. С ростом A эти ветви сближаются, и после их касания при $A^2 = 4/27$ образуется одна незамкнутая ветвь резонансной кривой. При этом картина будет сдвинута в область $\xi\eta < 0$. Более того, при малых значениях A замкнутая ветвь резонансной кривой будет целиком лежать в полуплоскости $\xi\eta < 0$. Поскольку резонансная кривая (11) имеет горизонтальную касательную в точках прямых

$$\rho = 0, \xi + \eta\rho = 0, \quad (12)$$

а вертикальную касательную может иметь только при

$$(\xi + \eta\rho)^2 + (1 - \rho)^2 - (\eta^2 + 1)\rho = 0, \quad (13)$$

где кривая (13) есть эллипс при $\eta^2 < 3$, парабола при $\eta^2 = 3$ и гипербола при $\eta^2 > 3$, то деформация резонансных кривых тем больше, чем больше $|\eta|$ (рисунки 1,2).

Характер устойчивости неподвижных точек точечного отображения (8),(9) в случае их существования определяется корнями характеристического полинома

$$P(z) = (z - (1 + \mu\pi(1 - 2\rho)))^2 - (\mu\pi)^2 [(\xi + 2\eta\rho)^2 - (1 + \eta^2)\rho^2]. \quad (14)$$

Корни полинома $P(z)$ будут действительными если $\sqrt{1 + \eta^2}\rho \geq |\xi + 2\eta\rho|$, и комплексно-сопряженными при $0 < \sqrt{1 + \eta^2}\rho < |\xi + 2\eta\rho|$, т.е. граница N_ω , соответствующая уходу пары корней характеристического полинома с действительной оси в этом случае будет иметь вид двух полупрямых

$$(2\eta \pm \sqrt{1 + \eta^2})\rho + \xi = 0 \quad (\rho > 0). \quad (15)$$

Определим вид границ N_+, N_-, N_ϕ области устойчивости на плоскости ξ, ρ .

Уравнение границы $N_-(z = -1)$ имеет вид

$$(2 + \mu\pi(1 - 2\rho))^2 - (\mu\pi)^2 [(\xi + 2\eta\rho)^2 - (1 + \eta^2)\rho^2] = 0, \quad (16)$$

где $\sqrt{1 + \eta^2}\rho \geq |\xi + 2\eta\rho|$. При $\eta^2 < 3$ уравнение (16) определяет эллипс, при $\eta^2 = 3$ параболу, а при $\eta^2 > 3$ гиперболу. Можно показать, что кривая (16) целиком принадлежит области $\sqrt{1 + \eta^2}\rho \geq |\xi + 2\eta\rho|$, касаясь границ N_ω в точках

$\rho = (1/2)(1 + 2/(\mu\pi))$. При $\eta^2 > 3$ можно также найти асимптоты соответствующей гиперболы

$$\xi = (-2\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 3})\rho \pm 2/\sqrt{\eta^2 - 3}(1 + 2/(\mu\pi)). \quad (17)$$

С уменьшением μ граница N_- поднимается вверх вдоль прямых N_ω и при $\mu \rightarrow +0$ уходит в бесконечность.

Рисунок 1. Вид резонансных кривых при $\eta = -0,1$.

Рисунок 2. Вид резонансных кривых при $\eta = 2$.

Уравнение границы $N_+(z=1)$ в предположении, что $\mu \neq 0$, имеет вид (15), ее поведение не зависит от μ . N_+ касается N_ω в точке $\rho = 1/2$.

Уравнение границы N_ϕ есть

$$2(1 - 2\rho) + \mu\pi[(\xi + 2\eta\rho)^2 + (3 - \eta^2)\rho^2 - 4\rho + 1] = 0. \quad (18)$$

Это также уравнение эллипса при $\eta^2 < 3$ параболы при $\eta^2 = 3$ и гиперболы при $\eta^2 > 3$. При этом следует рассматривать только часть кривой, лежащую в области $0 < \sqrt{1 + \eta^2}\rho < |\xi + 2\eta\rho|$. Точкам пересечения кривой N_ϕ с прямыми N_ω соответствуют значения $\rho = 1/2$ и $\rho = (1/2)(1 + 2/(\mu\pi))$, т.е. точки касания кривых N_- и N_+ с прямыми N_ω .

При $\mu \rightarrow +0$ граница N_ϕ стремится к прямой $\rho = 1/2$.

Следует отметить тот факт, что каково бы ни было значение η , всегда существует такое значение μ_0 , что при $\mu \geq \mu_0$ границы N_- и N_+ имеют точки пересечения. Примерный вид границ D -разбиения при различных значениях η с соответствующей штриховкой в сторону выхода корней характеристического уравнения из единичного круга приведен на рисунках 3-6. Однократная штриховка соответствует бифуркации корней на действительной оси, двойная – бифуркации комплексно-сопряженных корней. Область $D=0$ есть область устойчивости.

Рисунок 3. Границы области устойчивости при $\eta^2 < 3$ $\mu = +0$.

Рисунок 4. Границы области устойчивости при $\eta^2 < 3$ и малых $\mu > 0$.

Рисунок 5. Границы области устойчивости при $\eta^2 > 3$ $\mu = +0$.

Рисунок 6. Границы области устойчивости при $\eta^2 > 3$ и малых $\mu > 0$.

Факт существования неподвижных точек точечного отображения $\tilde{T}$ с некоторым характером устойчивости при $A = \text{const}$ и различных ξ может быть установлен наложением картины границ областей существования неподвижных точек с различным характером устойчивости на плоскости ξ, ρ при заданном μ на плоскость с резонансной кривой при заданном A (рисунок 7).

Рисунок 7. Пример наложения картины границ областей существования неподвижных точек с различным характером устойчивости на плоскость резонансной кривой.

В заключение отметим, что предложенная методика исследования основана на применении приближенных методов. Поэтому, несомненно, актуальной является проблема получения адекватных результатов изучения системы с малым параметром по ее приближенному исследованию [1, С. 650-707; 9, С. 213-218]. Причем речь идет как о количественном, так и о качественном исследовании системы [6; 7, С. 81-88]. Одним из таких методов оценки достоверности сделанных выводов может быть метод, описанный в работе [7, С. 14-35], который и может быть применен в рассмотренном случае.

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959. – 916 с.

3. Пономарев В. М., Литвинов А. П. Основы автоматического регулирования и управления. – М.: Высшая школа, 1974. – 439 с.
4. Журавлев В. М., Мионов П. П., Дегуновский С. В. Построение огибающей и локальной частоты стохастического процесса на основе модели осциллятора с флуктуирующей частотой. // Изв. вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – №3(27). – С. 159–169.
5. Ивинская Е. Ю. Теоретические аспекты исследования неравновесных экономических систем на основе модели гармонического осциллятора. // Теория и практика общественного развития. Экономические науки. – 2015. – № 21. – С. 57–59.
6. Антоновская О. Г. О влиянии насыщения нелинейности на результаты исследования принудительной синхронизации методом приближенных точечных отображений. // Математическое моделирование и оптимальное управление: Вестник ННГУ, Нижний Новгород. – 1999. – № 2(21). – С. 198–208.
7. Антоновская О. Г., Горюнов В. И. Метод точечных отображений в задачах нелинейной динамики. – Гамбург: LAP (Lambert Academic Publishing), 2013. – 140 с.
8. Антоновская О. Г., Зайцева М. Н. Об одном случае исследования принудительной синхронизации методом приближенных точечных отображений. // Международный научно-исследовательский журнал. – 2018. – № 8(74). – С. 7–14.
9. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. – 336 с.

Огнегин К.Е., Польская П.С., Корчевская О.В.

Математическая модель зомби-апокалипсиса с программной реализацией

*Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика
М.Ф. Решетнева
(Россия, Красноярск)*

doi: 10.18411/lj-08-2020-23

idsp: lj-08-2020-23

Аннотация

В данной статье рассматривается математическая модель зомби-апокалипсиса с лечением, позволяющая получить оценивающую информацию о пандемии смертельного вируса, и программная реализация математической модели.

Ключевые слова: математическая модель, зомби, информационная система.

Abstract

This article discusses the mathematical model of the zombie Apocalypse with treatment, which allows you to get evaluating information about the pandemic of a deadly virus, and the software implementation of the mathematical model.

Keywords: mathematical model, zombie, information system.

Введение

Математическая модель – это абстрактная модель, которая использует математический язык для описания поведения системы [1].

Математические модели используются, в частности, в естественных и технических дисциплинах (таких как физика, биология и электротехника), но также и в социальных науках (таких как экономика, социология и политология); физики, инженеры, компьютерщики и экономисты используют математические модели наиболее широко.

Моделирование является универсальным методом получения и использования знаний об окружающем мире. Моделирование всегда используется человеком в целенаправленной деятельности, особенно в исследовательской. В современных условиях усиливается роль и значение математического моделирования, которое с развитием вычислительной техники стали называть компьютерным.

Целью выполнения исследовательской работы является:

— Описать предметную область;