68. Badriev I.B., Ju Chebakova V., Zheltukhin V.S. Numerical solution of the initial boundary value problems of radio-frequency capacitive coupled discharge // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – V 927, № 012008.
69. Badriev I.B., Karchevskii M.M. Convergence of the iterative Uzawa method for the solution of the stationary problem of seepage theory with a limit gradient // Journal of Soviet Mathematics. – 1989. – V. 45, № 4. – P. 1302–1309.
70. Badriev I.B., Banderov V.V., Singatullin M.T. Numerical solution of non-linear filtration issues for high viscous fluids at the presence of wells // Research Journal of Applied Sciences. – 2015. – V. 10, № 8. – P. 343–346.
71. Solov'ev S.I. Superconvergence of finite element approximations to eigenspaces // Differential Equations. – 2002. – V. 38, № 5. – P. 752–753.
72. Solov'ev S.I. The error of the Bubnov-Galerkin method with perturbations for symmetric spectral problems with a non-linearly occurring parameter // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1992. – V. 32., № 5. – P. 579–593.
73. Solov'ev S.I. Finite element approximation with numerical integration for differential eigenvalue problems // Applied Numerical Mathematics. – 2015. – V. 93. – P. 206–214.
74. Solov'ev S.I. Superconvergence of finite element approximations of eigenfunctions // Differential Equations. – 1994. – V. 30, № 7. – P. 1138–1146.
75. Solov'ev S.I. Eigenvibrations of a beam with elastically attached load // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2016. – V. 37, № 5. – P. 597–609.
76. Solov'ev S.I. Eigenvibrations of a bar with elastically attached load // Differential Equations. – 2017. – V. 53, № 3. – P. 409–423.
77. Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Бадриев И.Б., Макаров М.В. Геометрически и физически нелинейная задача о трехточечном изгибе композитных тест-образцов // Материалы XXII Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" им. А.Г.Горшкова. Т. 2. – М: ООО «ТР-принт», 2016. – С. 197–202.
78. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimuhin V.N. Longitudinal and transverse bending by a cylindrical shape of the sandwich plate stiffened in the end sections by rigid bodies // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2016. – V. 158, № 012011.

Федотов А.И.¹, Лисин С.К.²

Статистические модели оценки точности вероятных и равновероятных величин

¹*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*

²*Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»
(Россия, Санкт-Петербург)*

doi: 10.18411/lj-07-2019-72

idsp: ljjournal-07-2019-72

Аннотация

Статья посвящена рассмотрению статистических моделей оценки точности вероятных и равновероятных результатов измерений при сравнительном анализе массивов дискретных опытов. Исследованы модели оценки исходов дискретной величины на основе распределения Бернулли. Определены зависимости равновероятных появлений равномерно распределенной величины. Предложен способ вычисления отклонений опыта дискретной величины. Приведены зависимости оценок среднего $\bar{p}$ и аналога среднего квадратичного отклонения u_p вероятностей исходов.

Ключевые слова: ситуационная математическая модель, дискретная величина, неопределенность типа В, вероятность исхода.

Abstract

The article is devoted to the consideration of statistical models for estimating the accuracy of probable and equally probable measurement results in the comparative analysis of arrays of discrete experiments. The models of estimation of discrete quantity outcomes on the basis of Bernoulli distribution are investigated. The dependence of occurrences of equally likely uniformly distributed values. A method for calculating the deviations of the discrete quantity experiment is proposed. The dependences of the estimates of the mean $\bar{p}$ and the analogue of the mean square deviation of the probabilities u_p of outcomes are given.

Keywords: situational mathematical model, a discrete value, the uncertainty of type B, the probability of an outcome.

Измерение есть процедура сравнения неизвестной величины с известной величиной и выражение первой через вторую в частях или в кратном отношении. Процедура измерения сопровождается появлением погрешностей (отклонений), искажающих действительные значения свойств измеряемых объектов. В связи с тем, что повторяемые и однократные результаты измерений содержат случайную и систематическую погрешности появилась необходимость рассмотрения их статистических эквивалентов – вероятного или равновероятного. При этом проблема повышения ресурса точности обусловила необходимость обработки результатов измерений с использованием теории вероятностей и математической статистики. Введение в практику вероятностных оценок отклонений результатов и исходов измерений связано с применением дифференциальных, интегральных и других законов распределения случайных величин. При этом использование вероятностного подхода при оценке отклонений результатов измерений предполагает знание соответствующей аналитической модели закона распределения. Известно, что аналитическая форма представления неопределенности типа А осуществляется на основе анализа случайных величин, в данном случае на основе анализа результатов многократных измерений. Апостериорная информация в виде массива экспериментальных данных n , полученного при повторении процедуры измерения, представляется в виде гистограммы в координатах $Q, p(Q)$. Результаты многократных измерений используют не только для определения закона распределения вероятности, но и для определения неопределенности. В качестве меры неопределенности типа А принято использовать оценку среднего квадратичного отклонения – стандартное отклонение s_Q , определяемое из выражения:

$$s_Q = \sqrt{\hat{\bar{Q}}^2 - \bar{\hat{Q}}^2}.$$

Здесь $\hat{\bar{Q}}$ – среднее арифметическое значение результата измерения;

$\bar{\hat{Q}}^2$ – среднее арифметическое значение квадратов результатов измерения.

Стандартное отклонение является мерой неопределенности типа А, обусловленной рассеянием результата измерения, а способ её нахождения заключается в использовании математической статистики для количественной оценки этой неопределенности.

Равновероятный статистический эквивалент распространяется на класс задач, в которых при дефиците априорной информации результат измерения величины представляется некоторым интервалом значений. Если значения измеряемой величины в интервале от Q_1 до Q_2 равновероятны и среди них нет доминантного значения, то такую ситуацию принято представлять моделью равномерного закона распределения вероятности этой величины. Данная математическая модель является аксиоматической идеализацией описания (представления) измеряемой случайной величины в интервале равновозможных значений. Такая идеализация позволяет получить количественную оценку неопределенности типа В равномерно распределенной случайной величины в

интервале $p(x) = \frac{1}{Q_2 - Q_1}$. Мерой неопределенности принятой ситуационной модели является аналог дисперсии равномерного закона распределения вероятности случайной величины, обозначаемый через u_Q^2 определяется интегралом.

$$u_Q^2 = \frac{1}{Q_2 - Q_1} \int_{Q_1}^{Q_2} (x - \bar{Q})^2 dx.$$

$$v = x - \frac{Q_1 + Q_2}{2}, \quad dx = dv.$$

Примем обозначения
Таким образом, аналог среднего квадратичного отклонения равномерного закона распределения вероятности u_Q (стандартная неопределенность типа В) определяется из выражения

$$u_Q = \frac{Q_2 - Q_1}{2\sqrt{3}}.$$

Аналогичным образом, определяется аналог среднего квадратичного отклонения централизованного равномерного закона распределения вероятности случайной равновероятной величины, например, в интервале $-Q \leq 0 \leq Q$. При этом аналог дисперсии случайной величины в интервале

$$u_Q^2 = \frac{1}{2Q} \int_{-Q}^Q Q^2 dQ = \frac{Q^2}{3}.$$

Аналог среднего квадратичного отклонения

$$u_Q = \frac{Q}{\sqrt{3}}.$$

Аналог среднего квадратичного отклонения случайной величины, моделируемый «законом распределения её вероятности», является мерой неопределенности типа В этой величины и позволяет использовать ситуационную модель для количественной оценки этой неопределенности.

Таким образом, мерой неопределённости служит среднее квадратичное отклонение, вместо которого на практике вычисляются либо его оценка - способом "А", либо его аналог - способом "В".

Наряду с вероятными, равновероятными результатами измерений представляются необходимыми исследования вероятных исходов и их повторяемость в массивах дискретных величин. Положения теории вероятностей дают ответ на проявление объективных закономерностей случайных событий, которые могут наступить или не наступить. Вероятностные законы служат теоретической базой математической статистики, которая реализует методы описания и обработки результатов наблюдений. В развитии теории вероятностей дискретных событий важная роль принадлежит Я. Бернулли. В соответствии с теоремой Я. Бернулли выполнение вероятностной задачи осуществляется при соблюдении независимости случайных исходов, которые при одинаковых условиях могут быть повторены n раз. Если, например, при подбрасывании монеты исход «решетка» зафиксирован m раз из n опытов, то неизвестной является вероятность его появления $P(x = m)$.

Рассмотрим схему построения модели исследования дискретной случайной величины. Распределение Бернулли в теории вероятностей и в математической статистике представляет собой дискретное распределение вероятностей случайного эксперимента при известных значениях вероятностей успеха или неудачи (событий «годный» или «брак» и др.). Случайная величина x относится к распределению Бернулли, если она принимает всего два значения 1 (успех) и 0 (неудача) с вероятностями p и $q = 1 - p$.

Теорема Бернулли. Если вероятность p появления события, например «успех», в каждом опыте постоянна, то вероятность P_n^m того, что это событие наступит m раз в n независимых испытаниях, равна

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Рассмотрим числовую и вероятностную составляющие формулы Бернулли. Можно точно подсчитать число (полезных) комбинаций исходов испытаний, для которых (полезное) событие $\{A\}$ наступает k раз в n

n независимых и несовместимых испытаниях через количество сочетаний C_n^m из n по m . Поскольку по условию теоремы все испытания независимы и их исходы несовместимы (событие или $\{\displaystyle A\}$ есть, или нет), то вероятность появления (полезной) комбинации равна $P^m q^{n-m} \{\displaystyle p^k q^{n-k}\}$.

Пример. Вероятность успешного выполнения персонального задания титульного проекта $p = 0,8$ группой сотрудников из $n = 50$ человек. Необходимо определить вероятность того, что в группе m сотрудников справятся со своими заданиями. Задачу рассчитать для исходов $m = 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50$. По условию задачи нас интересует количество сотрудников, которые успешно выполняют персональное задание и это событие повторится m раз. Событию «выполнил» с $p = 0,8$ противоположно событие «не выполнил» с $q = 0,2$. Необходимо определить вероятность того, что группы сотрудников ($m = 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50$) справятся с заданиями. Результаты выполнения задания, рассчитанные по формуле Бернулли, сведены в таблице.

Таблица

m	20	25	30	35	40	45	50
p	5.83e-10	1.60e-6	6.12e-4	0.03	0.14	0.03	1.43e-5
$\bar{P}$	0,07						
u_p	0,04						

Графическую интерпретацию закона распределения дискретной случайной величины целесообразно представить в виде гистограммы распределения в координатах числа исходов m_i и вероятностей p_i . При этом определение вероятностей исходов дискретной случайной величины p_i осуществляется по схеме Бернулли. Особенность применения теоремы Бернулли заключается в том, что испытание осуществляется при неизменных условиях проведения n опытов независимого события, которое возникает с известной вероятностью p в рамках данной задачи и не наступает с вероятностью q . Известно, что дискретное равномерное распределение характеризуется массивами равновероятных опытов. Обусловленная совокупность пространства Бернулли рассматриваемой задачи характеризует количественные соотношения вероятности исходов при неизменных условиях опыта. Естественной является необходимость количественной оценки равномерно распределенной случайной величины. Исходя из ситуационной модели неопределенности типа В, с этой целью можно использовать её оценки математического ожидания $\bar{P}$ и аналога среднего квадратичного отклонения u_p . Практическая необходимость использования указанных оценок становится полезной при сравнительном анализе масштабных конструкций опытов.

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения (т.2).- М.: Изд-во «Мир», 1967. – 752 с.
2. Федотов, А.И. Теория измерений /А.И. Федотов, С.К. Лисин, Г.С. Морокина. – СПб.: Изд-во Политех. ун-та, 2013. – 325 с.
3. Шишкин, И.Ф. Теоретическая метрология. Ч.1. Общая теория измерений: учеб-метод. комплекс: учебное пособие /И.Ф. Шишкин (3-е изд., перераб. и доп.). – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2008. – 189 с.