РАЗДЕЛ XVI. МАТЕМАТИКА

Бадриев И.Б., Буянов В.Ю., Макаров М.В.

Свойства производной Фреше оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины и постановка нелинейной спектральной задачи*Казанский (Приволжский) федеральный университет
(Россия, Казань)*

doi: 10.18411/lj-07-2019-71

idsp: ljjournal-07-2019-71

Аннотация

Рассмотрена геометрически нелинейная задача об изгибе трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем в одномерной постановке. Математически задача сформулирована в виде интегрального тождества, порождающего операторное уравнение в пространстве Соболева. Исследованы свойства производной Фреше оператора, дана постановка спектральной задачи с нелинейным вхождением параметра, которая может быть использована для нахождения точек бифуркации решения.

Ключевые слова: трехслойная пластина, трансверсально-мягкий заполнитель, геометрическая нелинейность, производная Фреше, спектральная задача.

Abstract

The geometrically nonlinear problem of the sandwich plates bending with a transversally soft core in a one-dimensional formulation is considered. Mathematically, the problem is formulated as an integral identity generating an operator equation in the Sobolev space. The properties of the Fréchet derivative of the operator are investigated, a statement of the spectral problem with a nonlinear parameter occurrence is given. This spectral problem can be used to find the bifurcation points of the solution.

Keywords: sandwich plate, transversally soft core, geometric nonlinearity, Fréchet derivative, spectral problem.

Введение

Слоистые (многослойные) конструкции – пластины и оболочки являются одним из наиболее эффективных типов конструкций, в которых требование наименьшей материалоемкости успешно сочетается с требованием повышенной прочности и жесткости. Прогресс в области разработки новых эффективных конструкционных материалов и совершенствование современных технологий предопределяют дальнейший перспективный путь развития исследований как в области разработки новых конструктивных решений слоистых конструкций, так и в области совершенствования теории и методов их расчета [1–9].

Данная работа является продолжением [10–20] и посвящена исследованию свойств производной Фреше [21] оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем, сформулированной в виде операторного уравнения в пространстве Соболева. Ранее в [22] была найдена производная Гато оператора. В [23] доказано, что она является непрерывным оператором, а значит, совпадает с производной Фреше. Обобщенные постановки физически нелинейных и геометрически линейных задач рассмотрены в [24–30]. Нелинейные задачи теории мягких сетчатых оболочек изучены в [31–44]. Численное решение геометрически нелинейных задач проведено в [45–53].

1. Постановка задачи.

Изучаются задачи определения напряженно-деформированного состояния бесконечно широких трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем.

Длина пластины равна a , толщина заполнителя $2t$, толщины несущих слоев есть $2t_{(k)}$,

$k=1,2$, – номер слоя. Пусть $V_k = \overset{o}{W}_2^{(k)}(0,a)$ – пространства Соболева [54] со скалярными произведениями

$$(u, \eta)_k = \int_0^a \frac{d^k u}{dx^k} \frac{d^k \eta}{dx^k} dx, \quad k=1, 2, \quad V = V_2 \times V_2 \times V_1 \times V_1 \times V_1.$$

Будем обозначать скалярное произведение в V через $(\cdot, \cdot)_V$. Обозначим $U = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)}, q)$, где $w^{(k)}$ и $u^{(k)}$ – прогибы и осевые перемещения точек срединной поверхности k -го слоя, q – касательные напряжения в заполнителе. Считаем, что края пластины жестко закреплены, адгезионное соединение заполнителя с диафрагмами на концах пластины отсутствует, так что выполняются граничные условия $u^{(k)}(x) = 0$, $w^{(k)}(x) = 0$, $dw^{(k)}/dx = 0$, $q(x) = 0$ при $x = 0$, $x = a$. Следуя [12, 16, 20], под решением геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем будем понимать функцию $U \in V$, удовлетворяющую при произвольной функции $Z = (z^{(1)}, z^{(2)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}, y) \in V$ интегральному тождеству

$$b(U, Z) = f(Z) \quad \forall Z \in V, \quad (1)$$

где форма $b(\cdot, \cdot)$ и функционал f , заданные на $V \times V$ и V , определяются по формулам

$$\begin{aligned} b(U, Z) = & \int_0^a \sum_{k=1}^2 T_{(k)}^{11} \left(\frac{d\eta^{(k)}}{dx} + \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} \right) dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 M_{(k)}^{11} \frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} dx + \\ & + c_3 \int_0^a (w^{(2)} - w^{(1)})(z^{(2)} - z^{(1)}) dx + \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dz^{(k)}}{dx} + (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) \right\} q dx + \\ & + \int_0^a \left[\sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} + (u^{(2)} - u^{(1)}) \right] y dx + \int_0^a [c_1 q y - c_2 \frac{dq}{dx} \frac{dy}{dx}] dx, \\ f(Z) = & \int_0^a \sum_{k=1}^2 [X_{(k)}^1 \eta^{(k)} + M_{(k)}^1 \frac{dz^{(k)}}{dx} + X_{(k)}^3 z^{(k)}] dx \end{aligned}$$

где $X_{(k)}^1$, $X_{(k)}^3$ – компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности k -го слоя, $T_{(k)}^{11} = B_{(k)} (du^{(k)}/dx + 0.5(dw^{(k)}/dx)^2)$, $M_{(k)}^{11} = D_{(k)} d^2 u^{(k)}/dx^2$ – мембранные усилия и внутренние изгибающие моменты в k -м слое соответственно. $B_{(k)} = 2t_{(k)} E^{(k)} / (1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)})$ – жесткость k -го слоя на растяжение–сжатие, $E^{(k)}$ и $\nu_{12}^{(k)}$, $\nu_{21}^{(k)}$ – модуль упругости 1-го рода и коэффициенты Пуассона материала k -го слоя, $D_{(k)} = B_{(k)} h_{(k)}^2 / 3$ – изгибная жесткость k -го слоя, G_{13} , E_3 – модули поперечного сдвига и обжатия заполнителя, $c_1 = 2t / G_{13}$, $c_2 = t^3 / (3E_3)$, $c_3 = E_3 / (2t)$, $M_{(k)}^1$ – поверхностный момент внешних сил, приведенный к срединной поверхности k -го слоя.

В [11, 12] установлено, что форма $b(\cdot, \cdot)$ порождает оператор $A: V \rightarrow V$, а функционал f – элемент $F \in V$, определяемые формулами $b(U, Z) = (AU, Z)_V$, $f(Z) = (F, Z)_V$, так что (1) эквивалентно операторному уравнению

$$AU = F. \quad (2)$$

2. Производные Гато и Фреше оператора уравнения и свойства производных.

Обозначим $\hat{U} = (\hat{w}^{(1)}, \hat{w}^{(2)}, \hat{u}^{(1)}, \hat{u}^{(2)}, \hat{q})$. В [22] доказано, что оператор A дифференцируем по Гато, его производная Гато A' в точке U определяется соотношением

$$\begin{aligned} (A'(U)\hat{U}, Z)_V = & \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left(\frac{d\hat{u}^{(k)}}{dx} + \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right) \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left\{ \left[\frac{du^{(k)}}{dx} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right] \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} + \left(\frac{d\hat{u}^{(k)}}{dx} + \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right) \frac{dw^{(k)}}{dx} \right\} \frac{dz^{(k)}}{dx} dx + \\ & + \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \frac{d^2 \hat{w}^{(k)}}{dx^2} \frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} dx + c_3 \int_0^a (\hat{w}^{(2)} - \hat{w}^{(1)})(z^{(2)} - z^{(1)}) dx + \\ & + \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dz^{(k)}}{dx} + (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) \right\} \hat{q} dx + \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} + (\hat{u}^{(2)} - \hat{u}^{(1)}) \right\} y dx + \\ & + \int_0^a [c_1 \hat{q} y - c_2 \frac{d\hat{q}}{dx} \frac{dy}{dx}] dx = \sum_{j=1}^7 I_j. \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку производная Гато $A'(U)$ является непрерывным оператором в любой точке U [23], то она совпадает с производной Фреше (теорема 2.1 [21]).

Теорема 1. Оператор $A'(U)$ является самосопряженным в любой точке U , т.е.

$$(A'(U)\hat{U}, Z)_V = (A'(U)Z, \hat{U})_V \quad \forall \hat{U}, Z \in V.$$

Доказательство. Из (3), меняя местами $\hat{U}$ и Z , имеем

$$\begin{aligned} (A'(U)Z, \hat{U})_V = & \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left(\frac{d\eta^{(k)}}{dx} + \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} \right) \frac{d\hat{u}^{(k)}}{dx} dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left\{ \left[\frac{du^{(k)}}{dx} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right] \frac{dz^{(k)}}{dx} + \left(\frac{d\eta^{(k)}}{dx} + \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} \right) \frac{dw^{(k)}}{dx} \right\} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} dx + \\ & + \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} \frac{d^2 \hat{w}^{(k)}}{dx^2} dx + c_3 \int_0^a (z^{(2)} - z^{(1)}) (\hat{w}^{(2)} - \hat{w}^{(1)}) dx + \\ & + \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} + (\hat{u}^{(2)} - \hat{u}^{(1)}) \right\} y dx + \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dz^{(k)}}{dx} + (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) \right\} \hat{q} dx + \\ & + \int_0^a [c_1 y \hat{q} - c_2 \frac{dy}{dx} \frac{d\hat{q}}{dx}] dx = \sum_{j=1}^7 I_j^*. \end{aligned} \quad (4)$$

Сравнивая (3) и (4), видим, что $I_j = I_j^*$, $j = 3, 4, 7$, $I_5 = I_6^*$, $I_6 = I_5^*$. Поэтому достаточно проверить, что $I_1 + I_2 = I_1^* + I_2^*$. Раскрывая скобки, получаем

$$I_1 + I_2 = \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left[\frac{d\eta^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{u}^{(k)}}{dx} + \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \frac{d\eta^{(k)}}{dx} + \frac{du^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} + \frac{d\hat{u}^{(k)}}{dx} \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} + \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} \right] dx$$

и

$$I_1^* + I_2^* = \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left[\frac{d\hat{u}^{(k)}}{dx} \frac{d\eta^{(k)}}{dx} + \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{u}^{(k)}}{dx} + \frac{du^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \frac{dz^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} + \frac{d\eta^{(k)}}{dx} \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} + \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \frac{dz^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right] dx.$$

Сравнивая полученные соотношения, имеем, что $I_1 + I_2 = I_1^* + I_2^*$. Теорема доказана.

3. Построение спектральной задачи с нелинейным вхождением параметра.

В дальнейшем будем предполагать, что $X_{(k)}^1 = M_{(k)}^1 = 0$, $k = 1, 2$, $X_{(2)}^3 = 0$, $X_{(1)}^3 \equiv p$ (поперечный изгиб).

Для нахождения точки бифуркации решения задачи (2) получим условия существования, наряду с U , другой формы равновесия, задаваемой элементом $U + \Delta U$: $A(U + \Delta U) = F$. По определению производной Фреше имеем, что $\lim_{\Delta U \rightarrow 0} R(U + \Delta U) / \|\Delta U\|_V = 0$, где $A(U + \Delta U) - A(U) = A'(U)\Delta U + R(U, \Delta U)$.

Таким образом, получаем следующую аппроксимирующую задачу: $A'(U)\Delta U = 0$. Рассмотрим, наряду с ней, вспомогательную задачу, заменив U на $\lambda U / p$: Здесь λ – некоторый параметр. Для любых $\hat{U}, Z \in V$ имеем, что

$$(A'(\lambda U / p)\hat{U}, Z)_V = \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left(\frac{d\hat{u}^{(k)}}{dx} + \frac{\lambda}{p} \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right) \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx + \\ + \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left\{ \left[\frac{\lambda}{p} \frac{du^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{p^2} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \right] \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} + \frac{\lambda}{p} \left(\frac{d\hat{u}^{(k)}}{dx} + \frac{\lambda}{p} \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{dw^{(k)}}{dx} \right\} \frac{dz^{(k)}}{dx} dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \frac{d^2 \hat{w}^{(k)}}{dx^2} \frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} dx + c_3 \int_0^a (\hat{w}^{(2)} - \hat{w}^{(1)})(z^{(2)} - z^{(1)}) dx + \\ + \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dz^{(k)}}{dx} + (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) \right\} \hat{q} dx + \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} + (\hat{u}^{(2)} - \hat{u}^{(1)}) \right\} y dx + \\ + \int_0^a [c_1 \hat{q} y - c_2 \frac{d\hat{q}}{dx} \frac{dy}{dx}] dx = \frac{\lambda^2}{p^2} \frac{3}{2} \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \right)^2 \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda}{p} \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \left(\frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \frac{d\eta^{(k)}}{dx} + \frac{du^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} + \frac{du^{(k)}}{dx} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} \right) dx + \\
& + \int_0^a \sum_{k=1}^2 B_{(k)} \frac{d\hat{u}^{(k)}}{dx} \frac{d\eta^{(k)}}{dx} dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 D_{(k)} \frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} \frac{d^2 \hat{w}^{(k)}}{dx^2} dx + c_3 \int_0^a (z^{(2)} - z^{(1)}) (\hat{w}^{(2)} - \hat{w}^{(1)}) dx + \\
& + \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{d\hat{w}^{(k)}}{dx} + (\hat{u}^{(2)} - \hat{u}^{(1)}) \right\} y dx + \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dz^{(k)}}{dx} + (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) \right\} \hat{q} dx + \\
& + \int_0^a \left[c_1 y \hat{q} - c_2 \frac{dy}{dx} \frac{d\hat{q}}{dx} \right] dx = \frac{\lambda^2}{p^2} (A_2(U) \hat{U}, Z)_V + \frac{\lambda}{p} (A_1(U) \hat{U}, Z)_V + (A_0(U) \hat{U}, Z)_V
\end{aligned}$$

Таким образом, необходимо найти решение λ , $\hat{U} = \Delta U$ спектральной задачи

$$\frac{\lambda^2}{p^2} (A_2(U) \hat{U}, Z)_V + \frac{\lambda}{p} (A_1(U) \hat{U}, Z)_V + (A_0(U) \hat{U}, Z)_V = 0$$

4. Заключение.

Доказано, что производная Фреше оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины является самосопряженным оператором, сформулирована спектральная задача с нелинейным вхождением параметра. Эта задача будет использована в дальнейшем для исследования форм потери устойчивости пластины и нахождения критической нагрузки, при которой наступает потеря устойчивости оболочки. Будут разработаны приближенные методы решения указанной задачи на основе разработанных в [55–70] подходов. При этом для нахождения критических нагрузок будут использованы спектральные задачи с нелинейным вхождением параметра [71–76], а также методы исследования форм потери устойчивости многослойных конструкций. [77, 78].

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 17-08-01279, 18-41-160029, 19-08-01184).

1. Васильев В.В., Добряков А.А., Дудченко А. А. Основы проектирования и изготовления конструкций летательных аппаратов из композиционных материалов. – М.: МАИ, 1985. – 218 с.
2. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Численное исследование физически нелинейной задачи о продольном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 1. – С. 39–51.
3. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Геометрически нелинейная задача о продольно-поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158, № 4. – С. 453–468.
4. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Численное решение задачи о равновесии трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем в геометрически нелинейной постановке // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – Т.17, № 23. – С. 393–396.
5. Паймушин В.Н. Проблемы геометрической нелинейности и устойчивости в механике тонких оболочек и стержней с прямолинейной осью // Прикладная математика и механика. – 2007. – Т. 71, № 5. – С. 855–893.
6. Paimushin V.N., Shalashilin V.I. Geometrically non-linear equations in the theory of momentless shells with applications to problems on the non-classical forms of loss of stability of a cylinder // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2006. – V. 70, № 1. – P. 91–101.
7. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В. Численное исследование физически нелинейных задач об изгибе трехслойных пластин // Материалы XI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016), Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – М: Изд-во МАИ, 2016. – С. 475–477.
8. Макаров М.В., Бадриев И.Б., Паймушин В.Н. Определение критических точек бифуркации для задачи о геометрически нелинейном поведении трехслойной пластины с трансверсально-мягким

- заполнителем // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2016. Материалы международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 292-294.
9. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Исследование задачи об изгибе трехслойной пластины в физически нелинейной постановке // Математическое моделирование и краевые задачи Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах.. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара, 2016. – С. 19–24.
 10. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П. Постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 16-1. – С. 5–11.
 11. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П. Операторная формулировка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 18-3. – С. 5–13.
 12. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Обобщенная постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 23-1. – С. 4-10.
 13. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. О псевдомонотонности оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 24-2. – С. 5–14.
 14. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. О свойстве типа ограниченной липшиц-непрерывности оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 25-3. – С. 5–12.
 15. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. О квазипотенциальности оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 26-1. – С. 5–12.
 16. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 8-2 (34-2). – С. 11–14.
 17. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Исследование свойств оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. – 2017. – Т. 10. – С. 7–10.
 18. Бадриев И.Б. Исследование математических моделей процессов изгиба трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем и методов их численной реализации // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 7-2 (33-2). – С. 83–88.
 19. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. О решении геометрически нелинейных задач об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 7-2 (33-2). – С. 95–98.
 20. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Исследование геометрически нелинейных задач об изгибе трехслойных пластин в одномерной постановке // Материалы XII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018). – М: Изд-во МАИ, 2018. – С. 322–324.
 21. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М., 1972. – 416 с.
 22. Бадриев И.Б., Буянов В.Ю., Макаров М.В. Производная Гато оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 30-2. – С. 5–12.
 23. Бадриев И.Б., Буянов В.Ю., Макаров М.В. Производная Фреше оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции развития науки и образования. – 2018. – № 36-1. – С. 5–12.
 24. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В. Сеточные аппроксимации физически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2016. Материалы международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 70–72.
 25. Бадриев И.Б. Решение вариационных задач нелинейных процессов механики сплошной среды // Теория управления и математическое моделирование Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В.Азбелева и профессора Е.Л.Тонкова.. – Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2015. – С. 234–235.
 26. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Гарипова Г.З. О решении физически нелинейных задач о равновесии трехслойных пластин // Теория управления и математическое моделирование. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В.Азбелева и профессора Е.Л.Тонкова.. - Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2015. - С. 235-237.
 27. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В. Приближенные методы решения задачи об изгибе трехслойной пластины с идеально упруго-пластическим заполнителем // Материалы XXII

- Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" им. А.Г. Горшкова. – М: ООО "ТРИП", 2016. – С. 31-33.
28. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Гарипова Г.З., Макаров М.В. Исследование физически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов. – Казань, 2015. – С. 276.
29. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В. О приближенных методах решения задачи об изгибе трехслойной пластины с идеально упруго-пластичным заполнителем // Проблемы химмотологии: от эксперимента к математическим моделям высокого уровня. Сборник избранных докладов VI Международной научно-технической конференции. – М. ООО Издательство «Граница», 2016. – С. 21-26.
30. Бадриев И.Б. Математические модели нелинейных процессов изгиба трехслойных пластин // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: материалы международной научной конференции, 8-13 октября 2017 г., Самара. – Самара: СГПУ, 2017. – С. 180–181.
31. Badriev I.B., Banderov V.V. Numerical solution of the equilibrium of axisymmetric soft shells // Математические методы в технике и технологиях-ММТТ. – 2014. – № 5 (64). – С. 16–20.
32. Badriev I.B., Banderov V.V., Gnedenkova V.L., Kalacheva N.V., Korablev A.I., Tagirov R.R. On the finite dimensional approximations of some mixed variational inequalities // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – V. 9, № 113-116. – P. 5697–5705.
33. Бадриев И.Б. О решении вариационных неравенств второго рода // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Девятой Всероссийской конференции. – Казань: Отечество, 2012. – С. 32–35.
34. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Численное моделирование деформирования биокмполитов // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXI международного симпозиума имени А.Г. Горшкова.. – М: ООО "ТРИП", 2015. – С. 7–9.
35. Badriev I.B., Banderov V.V. Iterative methods for solving variational inequalities of the theory of soft shells // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2014. – V. 35, № 4. – P. 371–383.
36. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование разрешимости осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2005. – № 1. – С. 25–30.
37. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Калачева Н.В. Численное исследование вариационных и квазивариационных неравенств теории мягких сетчатых оболочек // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1037–1041.
38. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Численное решение задач о равновесии осесимметричных мягких оболочек // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 29–35.
39. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Итерационные методы решения вариационных неравенств теории мягких оболочек // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 2. – С. 19–33.
40. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. О решении задачи равновесия мягкой сетчатой оболочки при наличии нагрузки, сосредоточенной в точке // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 3. – С. 16–34.
41. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. О решении некоторых нелинейных краевых и начально-краевых задач // Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – Москва: ООО "ТРИП", 2016. – С. 31–33.
42. Бадриев И.Б. Математическое моделирование процессов механики сплошной среды при наличии точечных источников и нагрузок // Материалы XXII Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" им. А.Г. Горшкова. – М: ООО "ТРИП", 2016. – С. 28–31.
43. Badriev I.B. Mathematical modeling of continuum mechanics problems with the point sources // Проблемы химмотологии: от эксперимента к математическим моделям высокого уровня Сборник избранных докладов VI Международной научно-технической конференции. – М. ООО «Издательство «Граница», 2016. С. 19–21.
44. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. О конечно-элементных аппроксимациях вариационных неравенств теории мягких сетчатых оболочек // Тезисы докладов V международного научного семинара "Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы". – М: ООО "ТРИП", 2016. – С. 28–31.
45. Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V. Mathematical simulation of the problem of the pre-critical sandwich plate bending in geometrically nonlinear one dimensional formulation // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2017. - V. 208, № 012002.
46. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П. Математическое моделирование процессов изгиба трехслойных пластин в геометрически нелинейной постановке // Тезисы докладов V международного научного семинара "Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных

- конструкций при воздействии полей различной физической природы". – М: ООО "ТРП", 2016. – С. 32-35.
47. Макаров М.В. Численное исследование геометрически нелинейной задачи о поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 17-2. – С. 26–35.
 48. Макаров М.В. О решении геометрически нелинейных и линейных задач о поперечном изгибе жестко закрепленной трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 19-2. – С. 23-29.
 49. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Longitudinal and transverse bending by a cylindrical shape of the sandwich plate stiffened in the end sections by rigid bodies // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2016. – V. 958, № 012011.
 50. Бадриев И.Б., Буянов В.Ю., Макаров М.В. Исследование задачи о потере устойчивости трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 7-2 (33-2). – С. 92–94.
 51. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Буянов В.Ю. Геометрически нелинейная задача о потере устойчивости трехслойной пластины // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 8-2 (34-2). – С. 7–10.
 52. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Численное исследование процессов изгиба трехслойных пластин в геометрически нелинейной и линейной постановках // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXIII международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. – М: ООО "ТРП", 2017. С. 21-24.
 53. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Численное моделирование поперечного изгиба трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем с шарнирным закреплением // Математическое и компьютерное моделирование сборник материалов IV Международной научной конференции. – Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2016. – 2016. – С. 52–54.
 54. Adams R.A. Sobolev Spaces. – New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975. – 286 p.
 55. Badriev I.B., Zadornov O.A. Analysis of the stationary filtration problem with a multivalued law in the presence of a point source // Differential Equations. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 915–922.
 56. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2003. – № 1. – С. 20-28.
 57. Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Исмагилов Л.Н., Скворцов Э.В. Решение плоских задач фильтрации при многозначном законе фильтрации и наличии точечного источника // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т. 73, № 4. – С. 604–614.
 58. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. О сходимости итерационного метода двойственного типа решения смешанных вариационных неравенств // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 1115–1122.
 59. Badriev I.B., Shagidullin R.R. A study of the convergence of a recursive process for solving a stationary problem of the theory of soft shells // Journal of Mathematical Sciences. – 1995. – V. 73, № 5. – P. 519–525.
 60. Бадриев И.Б., Ляшко А.Д., Панкратова О.В. Исследование сходимости итерационных методов решения нелинейных задач теории фильтрации // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1998. – № 11. – С. 8–13.
 61. Бадриев И.Б., Фанюк Б.Я. Итерационные методы решения задач фильтрации в многослойных пластах при наличии точечного источника // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2010. – Т. 152, № 4. – С. 39–55.
 62. Badriev I.B., Fanyuk B.Y. Iterative methods for solving seepage problems in multilayer beds in the presence of a point source // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2012. – V. 33, № 4. – P. 386–399.
 63. Бадриев И.Б., Чебакова В.Ю. Математическое моделирование низкотемпературной ВЧЕ-плазмы в аргоне // Математическое моделирование и краевые задачи Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах. – Саратов, 2016. – С. 17–21.
 64. Чебакова В.Ю. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при атмосферном давлении в аргоне // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158, № 3. – С. 404–423.
 65. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при больших межэлектродных расстояниях. I. Постановка задачи // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 2. – С. 123–130.
 66. Badriev I.B., Paimushin V.N. Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – V. 38, № 5. – P. 779–793.
 67. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Продольно-поперечный изгиб по цилиндрической форме трехслойной пластины, подкрепленной в торцевых сечениях абсолютно твердыми телами // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2017. – Т. 159, № 2. – С. 174–190.

68. Badriev I.B., Ju Chebakova V., Zheltukhin V.S. Numerical solution of the initial boundary value problems of radio-frequency capacitive coupled discharge // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – V 927, № 012008.
69. Badriev I.B., Karchevskii M.M. Convergence of the iterative Uzawa method for the solution of the stationary problem of seepage theory with a limit gradient // Journal of Soviet Mathematics. – 1989. – V. 45, № 4. – P. 1302–1309.
70. Badriev I.B., Banderov V.V., Singatullin M.T. Numerical solution of non-linear filtration issues for high viscous fluids at the presence of wells // Research Journal of Applied Sciences. – 2015. – V. 10, № 8. – P. 343–346.
71. Solov'ev S.I. Superconvergence of finite element approximations to eigenspaces // Differential Equations. – 2002. – V. 38, № 5. – P. 752–753.
72. Solov'ev S.I. The error of the Bubnov-Galerkin method with perturbations for symmetric spectral problems with a non-linearly occurring parameter // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1992. – V. 32., № 5. – P. 579–593.
73. Solov'ev S.I. Finite element approximation with numerical integration for differential eigenvalue problems // Applied Numerical Mathematics. – 2015. – V. 93. – P. 206–214.
74. Solov'ev S.I. Superconvergence of finite element approximations of eigenfunctions // Differential Equations. – 1994. – V. 30, № 7. – P. 1138–1146.
75. Solov'ev S.I. Eigenvibrations of a beam with elastically attached load // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2016. – V. 37, № 5. – P. 597–609.
76. Solov'ev S.I. Eigenvibrations of a bar with elastically attached load // Differential Equations. – 2017. – V. 53, № 3. – P. 409–423.
77. Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Бадриев И.Б., Макаров М.В. Геометрически и физически нелинейная задача о трехточечном изгибе композитных тест-образцов // Материалы XXII Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" им. А.Г.Горшкова. Т. 2. – М: ООО «ТР-принт», 2016. – С. 197–202.
78. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimuhin V.N. Longitudinal and transverse bending by a cylindrical shape of the sandwich plate stiffened in the end sections by rigid bodies // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2016. – V. 158, № 012011.

Федотов А.И.¹, Лисин С.К.²

Статистические модели оценки точности вероятных и равновероятных величин

¹*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*

²*Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»
(Россия, Санкт-Петербург)*

doi: 10.18411/lj-07-2019-72

idsp: lj-07-2019-72

Аннотация

Статья посвящена рассмотрению статистических моделей оценки точности вероятных и равновероятных результатов измерений при сравнительном анализе массивов дискретных опытов. Исследованы модели оценки исходов дискретной величины на основе распределения Бернулли. Определены зависимости равновероятных появлений равномерно распределенной величины. Предложен способ вычисления отклонений опыта дискретной величины. Приведены зависимости оценок среднего $\bar{p}$ и аналога среднего квадратичного отклонения u_p вероятностей исходов.

Ключевые слова: ситуационная математическая модель, дискретная величина, неопределенность типа В, вероятность исхода.

Abstract

The article is devoted to the consideration of statistical models for estimating the accuracy of probable and equally probable measurement results in the comparative analysis of arrays of discrete experiments. The models of estimation of discrete quantity outcomes on the basis of Bernoulli distribution are investigated. The dependence of occurrences of equally likely uniformly distributed values. A method for calculating the deviations of the discrete quantity experiment is proposed. The dependences of the estimates of the mean $\bar{p}$ and the analogue of the mean square deviation of the probabilities u_p of outcomes are given.