в силу свойства функции $\bar{g}$ производные $D^k S_\alpha(x)$ можно вычислить дифференцированием под знаком интеграла в (6).

Докажем оценки для модулей г. с. и. (1) и (3) на функциях классов S , которые понадобятся в дальнейшем.

1. Самко С.Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Ростов н/д: изд-во Рост. Ун-та, 1984. 208 с.
2. Бесов О.В., Лизоркин Д.П. Сингулярные интегральные операторы и последовательности сверток в пространстве L_p // Матем. сб. 1967. Т. 73(115). С. 65–88.
3. Давтян А.А. Анизотропные потенциалы, их обращения и некоторые приложения // Тр. Мат. Ин-та АН СССР. 1986. Т. 173. С. 113–124.
4. Емгушева Г.П., Ногин В.А. Об анизотропных пространствах дифференцируемых функций / Ростов н/д, 1988. 55 с. Деп. в ВИНТИ 11.02.88, №1173-В.

Гацаева Р.С.-А.

Определение интегродифференциальных операторов. Операторы типа $\{\alpha, \beta\}$.

Простейшие свойства

Чеченский государственный университет
(Россия, Грозный)

doi: 10.18411/lj-06-2021-313

Аннотация

Изучаются интегродифференциальные свойства операторов дробного порядка.

Ключевые слова: оператор, функция, множество, дробный порядок, интеграл, дифференциальные операторы, интегральные операторы.

Abstract

The integro-differential properties of operators of fractional order are studied.

Keywords: operator, function, set, fractional order, integral, differential operators, integral operators.

Через A обозначим множества всех функций, аналитических в открытом единичном круге

$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Пусть $f \in A$, $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$, где f_k – теيلоровы коэффициенты.

Определение 1. Официальным оператором дробного порядка $\alpha > -1$ с поправкой дробного порядка $\beta \geq -1$ называем оператор $D_{\alpha, \beta}$, заданный соотношением

$$D_{\alpha, \beta} f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2 + \alpha + \beta + k)}{\Gamma(2 + \beta + k)} f_k z^k, \quad \text{где } f \in A. \quad (1)$$

Определение 2. Интегральным оператором дробного порядка $\alpha > -1$ с поправкой дробного порядка $\beta \geq -1$ называют оператор $D_{\alpha, \beta}^{-1}$ заданным соотношением

$$D_{\alpha, \beta}^{-1} f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2 + \beta + k)}{\Gamma(2 + \alpha + \beta + k)} f_k z^k, \quad \text{где } f \in A. \quad (2)$$

В дальнейшем операторы $D_{\alpha, \beta}$ и $D_{\alpha, \beta}^{-1}$ будем называть соответственно дифференциальным и интегральным операторами типа $\{\alpha, \beta\}$ (кратко – операторами типа $\{\alpha, \beta\}$), а множество операторов типа $\{\alpha, \beta\}$ интегродифференциальными операторами.

Посредством (2) введены интегродифференциальные операторы специального вида, которым отводится вспомогательная роль при исследовании функционального свойства ряда пространства, рассматриваемых ниже. Приведем некоторые простейшие свойства оператора типа $\{\alpha, \beta\}$. Тожественный оператор в A обозначим через D_0 . Из (2) следует

$$D_0 = D_{0,\beta} = D_{0,\beta}^{-1} = D_{0,\beta}(D_{0,\beta}^{-1}). \quad (3)$$

Заметен, что правые части (2) не теряет смысла, если порядок α и поправка удовлетворяют условиям $\alpha + \beta > -2$; $\beta > -2$. Как убедимся в дальнейшем, для наших целей во многих случаях достаточно ограничиться условиями, наложенными на α и β в (2).

Из (2) $\Gamma(2 + \beta + k) = \Gamma(2 - \alpha + (\beta + \alpha) + k)$, $\Gamma(2 + \alpha + \beta + k) = \Gamma(2 + (\beta + \alpha) + k)$, сразу следует формула

$$D_{0,\beta}^{-1} = D_{-\alpha,\alpha+\beta},$$

как только $-1 < \alpha < 1$, $\alpha + \beta \geq -1$,

Для сокращения записи удобно применять и обозначения:

$$f^{\{\alpha,\beta\}} = D_{\alpha,\beta} f, f_{\{\alpha,\beta\}} = D_{\alpha,\beta}^{-1} f.$$

Лемма 1. Операторы типа $\{\alpha, \beta\}$ переводят классы A на A . Имеют место следующие формулы перехода:

$$f^{\{\alpha,\beta\}}(z) = f^{\{\alpha,\beta-1\}}(z) + \alpha \int_0^1 \rho^\beta f^{\{\alpha,\beta-1\}}(\rho z) d\rho, \quad (5)$$

как только $\alpha > -2, \beta > -1; \alpha + \beta \geq -2$,

$$f_{\{\alpha,\beta\}}(z) = f_{\{\alpha,\beta-1\}}(z) - \alpha \int_0^1 \rho^{\alpha+\beta} f_{\{\alpha,\beta-1\}}(\rho z) d\rho, \quad (6)$$

как только $\alpha > -2, \beta > -1; \alpha + \beta \geq -1$,

$$(z^m f)^{\{\alpha,\beta\}} = z^m f^{\{\alpha,\beta+m\}} \quad (7)$$

для $\beta > -1, m = 1, 2, \dots$;

$$f_{\{1,0\}} = \int_0^1 \rho f(\rho z) d\rho; \quad (8)$$

$$f_{\{z\}} = \int_0^1 \rho f^{\{1,0\}}(\rho z) d\rho. \quad (9)$$

Доказательство. Аналитичность операторов типа $\{\alpha, \beta\}$ вытекает из сходимости внутри Δ степенных рядов из правых части (2). Формулы выводятся элементарными преобразованиями степенных рядов, которыми задаются соответствующие операторы. Например, в соответствии с (2)

$$\Gamma(1 + \gamma) = \gamma \Gamma(\gamma), \gamma > 0,$$

$$\begin{aligned} f_{\{\alpha,\beta\}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2 + \beta + k)}{\Gamma(2 + \alpha + \beta + k)} f_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1 + \beta + k}{1 + \alpha + \beta + k} \right) \frac{\Gamma(1 + \beta + k)}{\Gamma(1 + \alpha + \beta + k)} f_k z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta + k)}{\Gamma(1 + \beta + k)} f_k z^k - \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \alpha + \beta + k} \right) \frac{\Gamma(2 + (\beta - 1) + k)}{\Gamma(2 + \alpha + (\beta - 1) + k)} f_k z^k = \\ &= f_{\{\alpha,\beta-1\}}(z) = -\alpha \int_0^1 \rho^{\alpha+\beta} f_{\{\alpha,\beta-1\}}(\rho z) d\rho, \end{aligned}$$

т.е. имеет место формула (6). Аналогично, из $f^{\{\alpha,\beta\}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2+\alpha+\beta+k)}{\Gamma(2+\beta+k)} f_k z^k =$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+\alpha+\beta+k}{1+\beta+k} \right) \frac{\Gamma(1+\alpha+\beta+k)}{\Gamma(1+\beta+k)} f_k z^k = f^{\{\alpha,\beta-1\}} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\beta+k} \right) \frac{\Gamma(1+\alpha+\beta+k)}{\Gamma(1+\beta+k)} f_k z^k$$

вытекает формула (5). Следуя определению, имеем

$$\begin{aligned} (z^m f)^{\{\alpha,\beta\}} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_{k+m} z^{k+m} \right)^{\{\alpha,\beta\}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2+\alpha+\beta+k+m)}{\Gamma(2+\beta+k+m)} f_{k+m} z^{k+m} = \\ &= z^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2+\alpha+(\beta+m)+k)}{\Gamma(2+(\beta+m)+k)} f_k z^k \quad \text{т.е. имеет место формула (7).} \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Отметим что формулы позволяют изменить порядок поправки на целые числа.

Относительно поправки дробного порядка имеет место

Лемма 2. Справедливы следующие формулы перехода:

$$f_{\{1,\beta\}}(z) = f_{\{1,0\}}(z) - \beta \int_0^1 \rho^{1+\beta} f_{\{1,0\}}(\rho z) d\rho, \quad (10)$$

как только $\beta > -2$

$$f^{\{1,0\}} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2) f_k z^k \quad (11)$$

$$f^{\{1,\beta\}} = f^{\{1,0\}} + \beta f = z f' + (2 + \beta) f, \quad (12)$$

как только $\beta > -2$

$$f_{\{1,0\}} = f_{\{1,-1\}}(z) - \int_0^1 f_{\{1,-1\}}(\rho z) d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k z^k}{k+2} \quad (13)$$

$$f^{\{1,0\}} = z f'(z) + 2f(z) = z f'(z) + 2 \int_0^1 f'(\tau) d\tau + 2f(0) \quad (14)$$

Доказательство проводится по аналогии с доказательством леммы (1). В частности $(\Gamma(3 + \beta + k) = (2 + \beta + k) \Gamma(2 + \beta + k))$,

$$\begin{aligned} f_{\{1,\beta\}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2+\beta+k)}{\Gamma(3+\beta+k)} f_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2+\beta+k} f_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+k}{2+\beta+k} \left(\frac{1}{2+k} \right) f_k z^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2+k} f_k z^k - \beta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2+\beta+k} \right) \frac{1}{2+k} f_k z^k. \end{aligned} \quad (15)$$

Согласно (2)

$\Gamma(3 + k) = \Gamma(2 + k)$, интеграл

$$f_{\{1,0\}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2+k)}{\Gamma(3+k)} f_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2+k} f_k z^k$$

откуда и из (15) получаем формулу (10). Аналогично выводится формула (14)

$$f^{\{1,0\}} = \sum_{k=0}^{\infty} (2+k) f_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1+k) f_k z^k + f(z) = (zf)' + f = zf' + 2f.$$

Лемма доказана.

Так как операторы типа $\{\alpha, \beta\}$ действуют из A в A , то можно рассматривать операции сложения этих операторов, умножения на комплексные числа, а также суперпозиции операторов.

Теорема -1. Множество операторов типа $\{\alpha, \beta\}$ образует коммутативное кольцо с единицей D_0 .

При этом выполняются следующие соотношения:

$$D_0 = D_{\alpha,\beta} D_{\alpha,\beta}^{-1} \quad (16)$$

Для всех $\alpha > -1, \beta \geq -1$,

$$D_{\alpha+\beta,\delta} = D_{\alpha,\beta+\delta} D_{\beta,\delta} = D_{\beta\alpha+\delta} D_{\alpha,\delta},$$

$$\alpha, \beta > -1, \delta \geq -1, \alpha + \beta \geq -1, \beta + \delta \geq -1, \alpha + \delta \geq -1,$$

т.е. при указанных ограничениях на числа α, β, δ интегродифференциальные операторы типа $\{\alpha, \beta\}$ обладают полугрупповым свойством относительно своих порядков с отклонениями относительно поправок;

$$D_{m,v} = (D_{1,0+\delta+v} D_0) \dots (D_{1,0+(m-1+v)} D_0)$$

при $m = 1, 2, \dots, v \geq -1$.

Доказательство. Умножение операторов типа $\{\alpha, \beta\}$ на комплексные числа и их суммы определяем как обычные арифметические операции. Умножение операторов, как повторное воздействие данных операторов. При указанном задании и операции над интегродифференциальными операторами получаем коммутативное кольцо. При этом оператор D_0 , заданный посредством (16) является единицей этого кольца. Следуя определению, имеем

$$\begin{aligned} D_{\alpha+\beta,\delta} f &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2+\alpha+\beta+\delta+k)}{\Gamma(2+\delta+k)} f_k z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2+\alpha+\beta+\delta+k)}{\Gamma(2+\beta+\delta+k)} \cdot \frac{\Gamma(2+\beta+\delta+k)}{\Gamma(2+\delta+k)} f_k z^k = D_{\alpha,\beta+\delta} (D_{\beta,\delta} f), \end{aligned}$$

т. е. выполняется первое соотношение (17). Второе соотношение в (17) следует симметричности оператора $D_{\alpha,\beta+\delta}$ относительно α и β .

Для $m = 1$ представление (18) вытекает из формулы (12). Пусть (18) выполняется для $m = n, n \geq 2$ тогда из (17), $\alpha = 1, \beta = n, \delta = v$ и первого соотношения в (12) следует

$$D_{n+1,v} = D_{1,n+v} D_{n,v} = (D_{1,0} + (n+v) D_0) D_{n,v}$$

Откуда по индукции получаем. **Теорема доказана.**

Следствие-1. Имеют место следующие соотношения

$$D_{\alpha+\beta,0} = (D_{\alpha,0} D_{\beta,\alpha} = D_{\beta,0} D_{\alpha,\beta}$$

Как только $\alpha, \beta > -2, \alpha + \beta > -2$.

Действительно, (19) является частным случаем (17) $\delta = 0$.

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Наука и техника. 1987.
2. Пожарский Д.А. Интегральные операторы в пространствах аналитических функций и близких к ним / Д. А. Пожарский, В. Г. Рябых, Г. Ю. Рябых ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Дон. гос. техн. ун-т. - Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2011. - 183 с.; 21 см. - Библиогр.: с. 178-183.

Жилинкова Л.А.

Актуальные проблемы преподавания математики в высшей школе

*Курская академия государственной и муниципальной службы
(Россия, Курск)*

doi: 10.18411/lj-06-2021-314

Аннотация

В данной статье рассмотрены актуальные вопросы преподавания математики в современной школе. Описаны факторы, которые приводят к снижению качества математического образования. Обоснована необходимость повышения уровня математического образования. Рассмотрены Федеральные программы направленные на повышения уровня образования. Приведена статистика снижения показателей остротенности профессорско-преподавательский состав РФ.

Ключевые слова: Математическое образование, подготовка педагогических кадров, сокращение аудиторных часов, федеральные программы.

Abstract

In this article we have observed actual issues connected with teaching mathematics in contemporary schools. We have described factors leading to decreasing the quality of mathematics education and the need to improve the process of the education. The federal programs for improving the education have been observed. There is the statistical data about teachers having doctors degrees.

Keywords: mathematics education, training teachers, reduction of audit hours, federal programs.

Говоря о математике, можно сказать, что ее можно отнести к одной из главных и определяющих составляющих научно-технического прогресса, не только в России, но и во все Мире. Она занимает особое, значимое место, как в науке, так и в общественной жизни. Вклад математики в повседневную жизнь человека трудно оценить. Мы сталкиваемся с ней в различных отраслях народного хозяйства. На сегодняшний день одним из первостепенных факторов, который определяет развитие экономического и общественно-политического потенциала страны, можно так же назвать математическое образование. Только обладая высоким его уровнем, мы можем гарантировать развитие