имеющихся на чертеже прямых, можно было провести по - разному (например, через M параллельную BC), но способ решения был бы аналогичным, с той только разницей, что в рассмотренном способе решения мы использовали дополнительное построение, относящееся к виду «дополнение фигур», а в предлагаемом – «разбиение фигур»

Второй способ решения основан на использовании теоремы о пропорциональных отрезках. В рассмотренном примере этот способ безусловно является более рациональным, но практика показывает, что учащиеся редко вспоминают об этой теореме.

Таким образом, мы видим, что использование различных дополнительных построений для решения одной задачи даёт возможность не привязывать дополнительные построения к какой - то конкретной фигуре, а понять, с какой целью используется то или иное дополнительное построение, и показать преимущество каждого из них.

Проблема обучения учащихся проведению доказательства математических утверждений является одной из важнейших в курсе методики преподавания математики средней школы.

Успех в формировании у учащихся умений доказывать во многом зависит от готовности школьников уже в начале изучения курса геометрии к выполнению различных видов деятельности, связанной с проведением доказательных рассуждений. Практика свидетельствует о том, что многие учащиеся недостаточно подготовлены к такой деятельности. Поэтому важным этапом обучения учащихся проведению математических доказательств считается работа по пропедевтике доказательств, которую необходимо проводить не только в средних, но и в начальных классах.

1. Бежану Т.В. К вопросу о геометрических решениях геометрических задач // Альманах современной науки и образования. – Тамбов: издательство «Грамота». – №3(46)– 2009.
2. Готман Э.Г., Скопец З.А. Задача одна – решения разные. М.: Просвещение, 2000. 224 с.
3. Зеленьяк О. П. Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач - теорем. Моделирование в среде TurboPascal. Киев, М.: ДиаСофтЮП, ДМК Пресс, 2008. 336 с.
4. Мостовой А. И. Различные способы доказательств в курсе геометрии средней школы. М.: Просвещение, 1965. 104 с.

Гацаева Р.С.-А.

Регуляризация операторов типа потенциалов с непрерывной характеристикой

*Чеченский государственный университет
(Россия, Грозный)*

doi: 10.18411/lj-06-2021-312

Аннотация

В данной статье исследуются анизотропные гиперсингулярные интегралы (г.с.и.) и потенциал $K^\alpha f = K_\alpha * f$ с ядром $K_\alpha(x)$, удовлетворяющим условию однородности $K_\alpha(t^A x) = t^{\alpha-tzA} K_\alpha(x), t > 0, x \neq 0$.

Ключевые слова: Анизотропные гиперсингулярные интегралы, дифференцирование, функция, евклидово пространство.

Abstract

In this article, we study anisotropic hypersingular integrals (h.i.) and the potential $K^\alpha f = K_\alpha * f$ with kernel $K_\alpha(x)$, satisfying the homogeneity condition $K_\alpha(t^A x) = t^{\alpha-tzA} K_\alpha(x), t > 0, x \neq 0$.

Keywords: Anisotropic hypersingular integrals, differentiation, function, Euclidean space.

Вспомогательные сведения.

Обозначения: R^n – n – мерное евклидово пространство точек

$$x = (x_1, \dots, x_n); \quad xy = x_1y_1 + \dots + x_ny_n, \quad x, y \in R^n;$$

$$L_\rho = L_\rho(R^n), \|f\|_\rho = \|f\|_{L_\rho}; \quad dx = dx_1 \dots dx_n;$$

$j = (j_1, \dots, j_n)$ – мультииндекс, $|j| = j_1 + \dots + j_n$ – длина мультииндекса;

$$\mathcal{D}_k^{j_k} \varphi = \frac{\partial^{j_k} \varphi}{\partial x_k^{j_k}}; \quad \mathcal{D}^j f = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^j f = \frac{\partial^{|j|} f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}};$$

Σ_{n-1} – единичная сфера в R^n , B – единичный шар в R^n ;

$$a * \varphi = \int_{R^n} a(y) \varphi(x - y) dy; \quad (f, \omega) = \int_{R^n} \bar{f}(x) \omega(x) dx;$$

$(\Delta_y^\ell f)(x) = \sum_{k=0}^\ell (-1)^k C_\ell^k f\left(x + \left(\frac{\ell}{2} - k\right)y\right)$ – центрированная разность функции f порядка ℓ с шагом y ;

$$(\tilde{\Delta}_y^\ell f)(x) = \sum_{k=0}^\ell (-1)^k C_\ell^k f(x - ky) \text{ – нецентрированная разность;}$$

$$\widehat{f}(x) = (Ff)(x) = \int_{R^n} e^{ixy} f(y) dy \text{ – преобразование Фурье,}$$

$$\widetilde{f}(x) = (F^{-1}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} e^{-ixy} f(y) dy \text{ – обратное преобразование Фурье;}$$

$X \rightarrow Y$ – непрерывное вложение нормированного пространства X в нормированное пространство Y : $L_\rho(X, R^n)$ – пространство функций f , таких что $\|f\|_X \in L_\rho(R^n)$;

$C^\infty = C^\infty(R^n)$ – класс бесконечно дифференцируемых функций;

$C_0^\infty = C_0^\infty(R^n)$ – класс финитных бесконечно дифференцируемых функций;

S – пространство Шварца быстро убывающих гладких функций; S' – класс обобщенных функций медленного роста; ψ – пространство шварцевых функций, исчезающих вместе со всеми производными в начале координат;

Φ – пространство преобразов Фурье функций из ψ ; Φ', ψ – пространства обобщенных функций на Φ и ψ .

Пусть A – линейное преобразование в R^n , удовлетворяющее условиям

$$t^\theta |x| \leq |t^A x| \leq t^\delta |x|, \quad t \geq 1, \quad (1)$$

Для любых $x \in R^n$, $t^A = e^{A \ln t}$, θ и δ – постоянные числа, $1 \leq \theta \leq \delta$ (при $0 < t \leq 1$ тогда выполняются обратные неравенства). Например, при

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad a_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

условия (1) выполняются с $\theta = \min_i a_i$, $\delta = \max_i a_i$.

Следуя [9] определим функцию $\rho(x)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} |t^A x| &= 1, \quad \frac{1}{t} = \rho(x), \quad t > 0; \\ \rho(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Из определения и (1). вытекает следующие свойства функции

$\rho(x)$ (ρ – расстояния):

- 1) $\rho(x) \in C^\infty(R^n \setminus \{0\})$;
- 2) $\rho(x) \leq 1$ тогда и только тогда, когда $|x| \leq 1$;
- 3) $\rho(t^A x) = t \rho(x)$, $t > 0$, $x \in R^n$;
- 4) $\rho(x + y) \leq c (\rho(x) + \rho(y))$;
- 5) $|x|^{1/\delta} \leq \rho(x) \leq |x|^{1/\theta}$, $|x| \geq 1$,
 $|x|^{1/\theta} \leq \rho(x) \leq |x|^{1/\delta}$, $|x| \leq 1$.

Заметим, что если $\theta \geq 1$, то $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ для любых $x, y \in R^n$ (см. [11]).

Аналогично $\rho(x)$ определяется сопряженное ρ – расстояние $\rho^*(x)$, с сопряженной матрицей t^{-A^*} вместо t^{-A} в (3). Перечисленные выше свойства 1 и 5 выполняются и для $\rho^*(x)$.

На основании определения ρ – расстояния вводятся сферические координаты (ρ, x') , где $\rho = \rho(x)$, $x' = \rho^{-A}(x)$, $x \in \Sigma_{n-1}$. При замене $x = \rho^A x'$ имеем $dx = \rho^{trA-1} d\rho d\sigma_A$; здесь $d\sigma_A = H(\sigma)d\sigma$, где $d\sigma$ – обычный элемент площади на Σ_{n-1} и

$$\int_{\Sigma_{n-1}} H(\sigma)d\sigma = \frac{|\Sigma_{n-1}|}{n} trA, \quad (4)$$

где trA – след матрицы A , $|\Sigma_{n-1}|$ – площадь единичной сферы в R^n .

С учетом (5) можно получить формулу для вычисления объема ρ – шара радиуса r :

$$\int_{\rho(x) < r} dx = \frac{|\Sigma_{n-1}|}{n} r^{trA} \quad (5)$$

Назовем функцию $f(x)$ A – однородной (A^* – однородной) степени γ , если $f(t^A x) = t^\gamma f(x)$ (соответственно $f(t^{A^*} x) = t^\gamma f(x)$), $t > 0$, $x \in R^n$.

Лемма 1. Пусть $\theta(x)$ – бесконечно дифференцируемая вне начала координат, A – однородная степени γ функция, $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Справедливы следующие оценки

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k \theta(x) \right| \leq c \rho^{\gamma - \theta|k|}(x), \quad \rho(x) \geq 1, \\ \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k \theta(x) \right| \leq c \rho^{\gamma - \delta|k|}(x), \quad \rho(x) \leq 1, \quad (5)$$

где θ и δ – константы из (1).

Лемма 2. Пусть функция $\theta(x) \in C^\infty(R^n \setminus \{0\})$ и A – однородна степени $\gamma - \nu < \gamma < 0$. Тогда

а) преобразование Фурье функции $\theta(x)$ в смысле S' есть функция $\hat{\theta}(\xi) \in C^\infty(R^n \setminus \{0\}) \cap S'$, удовлетворяющая следующему условию однородности:

$$\widehat{\theta}(t^{A^*} \xi) = t^{-\nu - \gamma} \widehat{\theta}(\xi), \quad t > 0, \quad \xi \neq 0,$$

т. е.

$$\int_{R^n} \theta(x) \varphi(x) dx = \int_{R^n} \widehat{\theta}(\xi) \tilde{\varphi}(\xi) d\xi, \quad \varphi \in S;$$

б) если $\theta(x) \neq 0$ при $x \in \Sigma_{n-1}$, то $\widehat{\theta}(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \Sigma_{n-1}$.

Часть а) леммы приводится в [17]; там же указаны следующие представления для функций $\theta(x)$ и $\widehat{\theta}(\xi)$:

$$\theta(x) = \int_0^\infty t^{-\gamma} g(t^A x) \frac{dt}{t}, \quad (6)$$

$$\widehat{\theta}(\xi) = t^{-\gamma - \nu} \widehat{g}(t^{A^*} \xi) \frac{dt}{t}, \quad (7)$$

где $g(x) = \theta(x) \varphi(\rho(x))$, φ – неотрицательная функция из $C_0^\infty(R^1)$, такая, что

$$\int_0^\infty \varphi(t) \frac{dt}{t} = 1. \quad (8)$$

Лемма 3. Если $a(x) \in C_0^\infty$, то справедлива оценка

$$(\tilde{\Delta}_y^\ell a)(x) \leq c \left[\frac{\rho^\ell(y)}{\prod_{k=0}^\ell (1 + \rho(x - ky))} \right]^\theta, \quad \ell = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Неравенство (1.1) дано в [16] в изотропном случае, т.е. когда $\rho(y) = |y|$; в общем случае оно следует из частного в силу свойства 5) функция $\rho(y)$.

Анизотропные г. с. и. и анизотропные потенциалы. Пространства анизотропных потенциалов.

Анизотропным гиперсингулярным интегралом (г.с.и.) называется конструкция

$$(T^\alpha f)(x) = \int_{R^n} \frac{(\Delta_y^{2\ell} f)(x)}{\rho^{v+\alpha}(y)} dy, \quad \alpha > 0, \quad (10)$$

где $\Delta_y^{2\ell} f$ – центрированная конечная разность порядка $2\ell > \frac{\alpha}{\theta}$.

Известно, что на функциях $f(x)$, имеющих ограниченные производные до порядка $[\alpha] + 1$, справедливая оценка

$$|(\Delta_y^{2\ell} f)(x)| \leq c|y|^{[\alpha+1]}, \quad |y| \leq 1, \quad \ell > 1. \quad (11)$$

Это обеспечивает абсолютную сходимость г. с. и. (1) при $2\ell > \frac{\alpha}{\theta}$.

На «плохих» функциях интеграл в (1) уже не является абсолютно сходящимся и будет пониматься, как условно сходящийся:

$$(T^\alpha f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (L_p) T_\varepsilon^\alpha f, \quad (11^*)$$

где

$$(T^\alpha f)(x) = \int_{\rho(y) > \varepsilon} \frac{(\Delta_y^{2\ell} f)(x)}{\rho^{v+\alpha}(y)} dy, \quad 2\ell > \frac{\alpha}{\theta}. \quad (12)$$

(усеченный г. с. и.).

Покажем, что если $f \in L_p$, то $T_\varepsilon f \in L_p$ для любого фиксированного $\varepsilon > 0$. Пользуясь неравенством Минковского, получим

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon^\alpha f\|_p &= \left\{ \int_{R^n} dx \left| \int_{\rho(y) > \varepsilon} \frac{(\Delta_y^{2\ell} f)(x)}{\rho^{v+\alpha}(y)} dy \right|^\rho \right\}^{\frac{1}{\rho}} \leq \\ &\leq \int_{\rho(y) > \varepsilon} \frac{dy}{\rho^{v+\alpha}(y)} \left\{ \int_{R^n} |(\Delta_y^{2\ell} f)(x)|^\rho dx \right\}^{\frac{1}{\rho}} \leq C \|f\|_\rho, \end{aligned}$$

где $c = c(\varepsilon)$.

На функциях $\varphi \in C_0^\infty$ справедливы формулы

$$(T^{\hat{\alpha}} \varphi)(x) = -1^\alpha 2^{2\ell} S_\alpha(x) \hat{\varphi}(x), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} S_\alpha(x) &= \int_{R^n} \frac{\sin^{2\ell}(xy/2)}{\rho^{v+\alpha}(y)} dy; \\ (T^{\hat{\alpha}} \varphi)(x) &= -1^\alpha 2^{2\ell} S_{\alpha,\varepsilon}(x) \hat{\varphi}(x), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$S_{\alpha,\varepsilon}(x) = \int_{\rho(y) > \varepsilon} \frac{\sin^{2\ell}(xy/2)}{\rho^{v+\alpha}(y)} dy.$$

Докажем некоторые свойства функции $S_\alpha(x)$ (символа г. с. и. $T^\alpha f$), которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1. $S_\alpha(x)$ при $2\ell > \frac{\alpha}{\theta}$ представляет собой

A^* – однородную степени α функцию, бесконечно дифференцируемую вне начала координат и положительную на единичной сфере $|x| = 1$.

Доказательство. Сначала нужно убедиться в существовании интеграла в (5). Перейдем к обобщенным сферическим координатам. Пологая, что

$y = \rho^A y'$, $y' \in \Sigma_{n-1}$, $\rho = \rho(y)$, получим

$$S_\alpha(x) = \int_0^\infty \rho^{-\alpha-1} \int_{\Sigma_{n-1}} (\sin^{2\ell} \rho^A y' x / 2) d\sigma_A d\rho,$$

где $d\sigma_A$ – элемент поверхности на Σ_{n-1} . Существование интеграла на ∞ не вызывает сомнения. В окрестности нуля имеем $\sin(\rho^A y' x / 2) \sim \rho^A y' x / 2$,

$$|\rho^A y'| \leq \rho^\theta.$$

В нуле особенность порядка

$$\frac{\rho^{2\ell\theta}}{\rho^{\alpha+1}} = \rho^{2\ell\theta-\alpha-1};$$

но $2\ell\theta - \alpha > 0$, т.к. $2\ell > \ell/\theta$.

Особенность интегрируемая; интеграл существует для любого $x \in R^n$.

Положительность функции $S_\alpha(x)$ на единичной сфере очевидна. Докажем A^* – однородность.

$$\begin{aligned} S_\alpha(t^{A^*} x) &= \int_{R^n} \frac{\sin^{2\ell}(y t^{A^*} x / 2)}{\rho^{v+\alpha}(y)} dy = \int_{R^n} \frac{\sin^{2\ell}(t^A y x / 2)}{\rho^{v+\alpha}(y)} dy = \\ &= \int_{R^n} \frac{\sin^{2\ell}(y x / 2)}{\rho^{v+\alpha}(t^{-A} y)} d(t^{-A} y) = \int_{R^n} \frac{\sin^{2\ell}(y x / 2)}{t^{-v-\alpha} \rho^{v+\alpha}(y)} t^{-v} dy = t^\alpha S_\alpha(x) \end{aligned}$$

для любого $t > 0$.

Осталось доказать бесконечную дифференцируемость функции $S_\alpha(x)$. Для этого рассмотрим функцию $\psi(t)$, бесконечно дифференцируемую, положительную и финитную в промежутке $(0, \infty)$, причем

$$\int_0^\infty \psi(t) \frac{dt}{t} = 1.$$

Положим

$$g(z) = \frac{1}{\rho^{v+\alpha}(z)} \psi(\rho(z)),$$

тогда

$$\frac{1}{\rho^{v+\alpha}(z)} = \int_0^\infty \xi^{v+\alpha-1} g(\xi^\alpha z) d\xi.$$

Пользуясь последним неравенством, получим

$$\begin{aligned} S_\alpha(x) &= \int_0^\infty \xi^{v+\alpha-1} d\xi \int_{R^n} g(\xi^\alpha z) \sin^{2\ell} \frac{z x}{2} dz = \\ &= \int_0^\infty \xi^{\alpha-1} d\xi \int_{R^n} g(z) \sin^{2\ell} \frac{z \xi^{-A^*} x}{2} dz = \int_0^\infty \xi^\alpha \bar{g}(\xi^{-A^*} x) \frac{d\xi}{\xi}. \end{aligned}$$

функция

$$\bar{g}(y) = g(z) \sin^{2\ell} \frac{z y}{2} dz.$$

принадлежит пространству S , поскольку она представляется как линейная комбинация преобразований Фурье функции $g \in C_0^\infty$, если синус выразить через экспоненту. Для $S_\alpha(x)$ получено представление

$$S_\alpha(x) = \int_0^\infty \bar{g}(\tau^{A^*} x) \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha}}; \quad (15)$$

в силу свойства функции $\bar{g}$ производные $D^k S_\alpha(x)$ можно вычислить дифференцированием под знаком интеграла в (6).

Докажем оценки для модулей г. с. и. (1) и (3) на функциях классов S , которые понадобятся в дальнейшем.

1. Самко С.Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Ростов н/д: изд-во Рост. Ун-та, 1984. 208 с.
2. Бесов О.В., Лизоркин Д.П. Сингулярные интегральные операторы и последовательности сверток в пространстве L_p // Матем. сб. 1967. Т. 73(115). С. 65-88.
3. Давтян А.А. Анизотропные потенциалы, их обращения и некоторые приложения // Тр. Мат. Ин-та АН СССР. 1986. Т. 173. С. 113-124.
4. Емгушева Г.П., Ногин В.А. Об анизотропных пространствах дифференцируемых функций / Ростов н/д, 1988. 55 с. Деп. в ВИНТИ 11.02.88, №1173-В.

Гацаева Р.С.-А.

Определение интегродифференциальных операторов. операторы типа $\{\alpha, \beta\}$.

Простейшие свойства

*Чеченский государственный университет
(Россия, Грозный)*

doi: 10.18411/lj-06-2021-313

Аннотация

Изучаются интегродифференциальные свойства операторов дробного порядка.

Ключевые слова: Оператор, функция, множество, дробный порядок, интеграл, дифференциальные операторы, интегральные операторы.

Abstract

The integro-differential properties of operators of fractional order are studied.

Keywords: Operator, function, set, fractional order, integral, differential operators, integral operators.

Через A обозначим множества всех функций, аналитических в открытом единичном круге

$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Пусть $f \in A$, $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$, где f_k – теيلоровы коэффициенты.

Определение 1. Официальным оператором дробного порядка $\alpha > -1$ с поправкой дробного порядка $\beta \geq -1$ называем оператор $D_{\alpha, \beta}$, заданный соотношением

$$D_{\alpha, \beta} f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2 + \alpha + \beta + k)}{\Gamma(2 + \beta + k)} f_k z^k, \quad \text{где } f \in A. \quad (1)$$

Определение 2. Интегральным оператором дробного порядка $\alpha > -1$ с поправкой дробного порядка $\beta \geq -1$ называют оператор $D_{\alpha, \beta}^{-1}$ заданным соотношением

$$D_{\alpha, \beta}^{-1} f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2 + \beta + k)}{\Gamma(2 + \alpha + \beta + k)} f_k z^k, \quad \text{где } f \in A. \quad (2)$$

В дальнейшем операторы $D_{\alpha, \beta}$ и $D_{\alpha, \beta}^{-1}$ будем называть соответственно дифференциальным и интегральным операторами типа $\{\alpha, \beta\}$ (кратко - операторами типа $\{\alpha, \beta\}$), а множество операторов типа $\{\alpha, \beta\}$ интегродифференциальными операторами.