61. Solov'ev S.I. Eigenvibrations of a bar with elastically attached load // Differential Equations. – 2017. – V. 53, № 3. – P. 409–423.
62. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Численное исследование геометрически нелинейной задачи об устойчивости шарнирно закрепленной трехслойной оболочки с трансверсально-мягким наполнителем // Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций. Международная конференция. Сборник материалов. – Екатеринбург: ИМАШ УрО РАН, 2018. – С. 361–362.
63. Chebakova V.Y. Modeling of radio-frequency capacitive discharge under atmospheric pressure in argon // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – V. 38, № 6. – P. 1165–1178.
64. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. Численное исследование низкотемпературной ВЧ-плазмы в аргоне при повышенных давлениях // Материалы XI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016) Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2016. – С. 477–479.
65. Бикчантаев Д.Х., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. Численное исследование процесса взаимодействия высокочастотного емкостного разряда с материалами // Теория управления и математическое моделирование Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Удмуртский государственный университет, 2015. – С. 241–242.

Гацаева Р.С.-А.

Графическое и числовое решение уравнений

*Чеченский государственный университет
(Россия, Грозный)*

doi: 10.18411/lj-06-2020-51

idsp: ljjournal-06-2020-51

Аннотация

В данной статье рассматриваются, ряд новых идей, давших толчок развитию теоретической алгебры, введение общих методов графического решения уравнений, корни.

Ключевые слова: алгебра, уравнения, корни, графическое решение, кривая, геометрические построения, парабола, эллипс.

Abstract

This article discusses a number of new ideas that gave impetus to the development of theoretical algebra, the introduction of general methods for graphically solving equations, and roots.

Keywords: algebra, equations, roots, graphical solution, curve, geometric constructions, parabola, ellipse.

Графические методы. «Геометрия» Декарта не только выдвинула ряд новых идей, давших толчок развитию теоретической алгебры. Столь же важной ее заслугой явилось введение общих методов графического решения уравнений, которое покоилось на новой геометрической трактовке вопроса и отчасти возобновляло приемы, употреблявшиеся некогда греками и арабами. К вопросу о возникновении и развитии аналитической геометрии, давшей для этого вспомогательные средства, мы обратимся в своем месте, а сейчас займемся только ее применением к алгебре. Уравнения решались с помощью геометрических построений и до Декарта. Так, например, Жирар, Ф. ван-Скаутен и др. привели решение некоторых числовых кубических уравнений к задаче о тритрисекции угла. Метод Декарта тем не менее был нов, а главное – общеприменим. Он заключался в том, что посредством введения второй неизвестной решаемое уравнение разбивалось на два. Эти два уравнения выражали в новой геометрии Декарта геометрические места, пересечение которых и доставляло искомые корни. Чтобы решить, например, уравнение четвертой степени

$$x^4 = pz^2 - qz + r,$$

Декарт полагал $z^2 = x$ и легко получал уравнение окружности

$$x^2 + z^2 - (p + 1)x + qz - r = 0,$$

которую можно вычертить непосредственно. Ординаты точек пересечения окружности с параболой $z^2 = x$ прямо давали корни уравнения; при этом парабола $z^2 = x$ в силу постоянства параметра оставалась одной и той же, каковы бы ни были числовые коэффициенты решаемого уравнения.

Согласно предложенной Декартом классификации кривых по «родам» кривые порядка $2n - 1$ и $2n$ относились к одному роду, и трактовать их следовало одинаково. Поэтому приведенное построение давало в его глазах также решение кубического уравнения. В самом деле, достаточно заставить окружность пройти через начало координат, одновременно являющееся вершиной параболы, чтобы оказалось не более трех действительных точек пересечения, дающих корни. Следующий род обнимал кривые пятого и шестого порядка, и Декарт действительно дал графическое решение общего уравнения шестой степени. С этой целью он представил его корни как ординаты точек пересечения окружности и одной кривой третьего порядка, для которой указал способ механического описания. Этот случай, труднейший из рассмотренных Декартом, не был затронут хотя бы мельком ни одним из его комментаторов ни Де-боном в «Кратких замечаниях», ни Ф. ван-Скаутеном в «Комментариях» — сочинениях, присоединенных к латинским изданиям «Геометрии» 1649 и 1659/61. Отсюда видно, какие трудности представляла для современников новая концепция Декарта, к тому же намеренно изложенная им неясно.

С несомненной целью скрыть от других избранный им путь, Декарт нигде не показал, как находить по данным уравнениям кривые, с помощью которых он определял корни этих уравнений. Ферми был откровеннее Декарта и в работе, приложенной к «Введению в изучение плоских и телесных мест» (*Isagoge ad locos planos et solidos*, написано еще до 1637), разъяснил, как можно составлять в каждом отдельном случае такие геометрические места. В другом сочинении «Рассуждение в трех частях ... о решении геометрических проблем» (*De resolutione problematum geometricorum ... dissertatio tripartita*, около 1660), полемизируя со своим соперником Декартом, Ферма показал, что при известных условиях, особенно в случае уравнений какого-либо специального вида, вроде, например, двучленных, можно обойтись кривыми низшей степени, чем рекомендовал Декарт. После Ферма составление таких геометрических мест было подробно изучено Р. Ф. де-Слюзом в «Месолабии» (*Mesolabium*, 1659) и Маклореном в «Алгебре» (1748). Интересно отметить, что уже тогда подвергались обсуждению подобные принципиальные вопросы, и, в частности, Декарт заметил, что с помощью циркуля и линейки можно построить лишь уравнения второй степени, хотя приведенное им доказательство не было, да и не могло быть, удовлетворительным. В своих построениях Декарт и Ферма всегда подчеркивали, что следует пользоваться кривыми возможно более низкого порядка, например, коническими сечениями, а среди них — окружностью и параболой. Ньютон и в этом вопросе пошел своей собственной дорогой. В «Универсальной арифметике» (1707) он заявил, что при выборе кривой для геометрического построения уравнения он считает нужным руководствоваться не степенью ее уравнения, а только легкостью ее образования с помощью какого-либо прибора. Поэтому он предпочел пользоваться вместо конических сечений конхоидой Никомеда. Среди конических сечений он отдал предпочтение не параболе, а эллипсу в силу большей легкости и точности его построения, а также ограниченности его фигуры. При графическом решении уравнений третьей степени Ньютон употреблял конхоиду, при решении уравнения четвертой степени — эллипс. Чтобы при решении уравнений можно было применять еще циссоиду Диоклеса, он изобрел некий механический прием ее вычерчивания. В последующее время ученые примыкали то к Декарту, то к Ньютону. Требования, выставленные

последним, привели И. Барроу (уже в 1670), а потом Як. Бернулли, Дж. Стирлинга и маркиза Лопиталья к мысли строить уравнение вида

$$a = bx + cx^2 + dx^3 + \dots + px^n$$

прямо посредством точек пересечения прямой $y = a$ и кривой $y = bx + cx^2 + \dots + px^n$. В 1750 этот метод подробно изложил Г. Крамер в уже известном нам «Введении» (стр. 49). Несколько позднее его упростил Зегнер [Nov. Comm. Ac. Petr., 1758/59 1761)], который стал искать точки пересечения линии $y = -a + bx + cx^2 + \dots + px^n$, с осью x и указал сравнительно несложное построение такой кривой. Крамер усмотрел пользу этого приема также и в легкости определения с его помощью простых и двойных действительных корней уравнения и границ, между которыми они лежат. Предложенное Зегнером построение этих параболических кривых по точкам привело англичанина Дж. Роунинга к изобретению аппарата, позволявшего механически вычерчивать кривую

$$y = -a + bx + cx^2 + \dots + px^n,$$

(см. Philos. Trans., 1770). В силу своей громоздкости он не получил никакого применения. Построение Зегнера и аппарат Роунинга основывались на представлении ординаты y в виде суммы $y = y' + y'' + \dots + y^{(n-1)}$, где $y' = -a + bx$, $y'' = cx^2$, $\dots$, $y^{(n-1)} = px^n$.

Этим способом пользовался еще Ньюгон в работе «Перечисление кривых третьего порядка» (Enumeratio linearum tertii ordinis, опубликовано в 1711. Распространение названия «параболических кривых» на линии, выражаемые приведенным общим уравнением, было тоже делом Ньютона («Метод разностей», 1-е изд. вышло также в 1711. Одна из этих кривых, так называемая кубическая парабола $y^3 = 2m^2(x - n)$, была позднее применена Г. Монжем (1814) для построения всех кубических уравнений. Разработка систематических приемов численного решения алгебраических уравнений высших степеней начата была задолго до Виета. В средневековом Китае был разработан способ, совпадающий с так называемым ныне способом Руффини-Горнера; подробное описание его применительно к уравнениям любой степени встречается в литературе XIII в., а возник он в развитие приема извлечения квадратных и кубических корней, описанного в Математике в девяти книгах» (см. стр. 40); в VII в. этот способ применен был в Китае к уравнениям третьей степени. Прием Виета в некоторых отношениях сходен с древнекитайским (см. книгу И. Миками в списке литературы). Численные методы решения кубических уравнений разрабатывались и в арабских странах; об одном из таких методов, примененных Джемшидом ал-Каши к весьма точному вычислению синуса 1° по известному синусу 3° , см. в книге: Джемшид Гиясэддин ал-Каши, «Ключ арифметики. Трактат об окружности», перев. Б. А. Розенфельда с комментариями А. П. Юшкевича и Б. А. Розенфельда, стр. 311. Постановка вопроса о границах действительных корней квадратных и кубических уравнений восходит к древности. Для одной задачи, выражающейся уравнением третьей степени, полный анализ условий возможности положительного корня дал еще Архимед. Для уравнений третьей степени систематическое исследование условий возможности положительных корней, не свободное, правда, от неточностей, произведено было рядом математиков Ближнего и Среднего Востока, особенно полно -Омаром Хайямом в XI в. (см.русский перевод его трактата по алгебре в «Историко-математических исследованиях», вып. VI, М., 1953.

Числовые приближенные методы. Первым ученым, которому пришла мысль систематически решать числовые уравнения приближенным путем, был Виет. Но из-за своей сложности этот прием, даже после улучшений, внесенных Оутредом, Гарриотом и др., остался практически почти неприменимым. Ньютон, во всех работах которого на первом плане стояли интересы практики, обратил внимание на этот вопрос еще в самом начале своей математической деятельности. Тогда же он разработал метод, носящий до

сих пор его имя. В первом своем сочинении «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов» (*Analysis per aequationes numero terminorum infinitas*), написанном не позднее 1669 и впервые частично изложенном в 1685 в 94-й главе «Алгебры» Валлиса, Ньютон пояснил свой прием на примере уравнения

$$y^3 - 2y - 5 = 0.$$

Пусть $y = 2$ представляет собой искомый корень с точностью до $-\frac{1}{10}$. Примем в качестве точного значения выражение $y = 2 + p$ и подставим его в уравнение. Тогда для определения p получится уравнение

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$$

Если пренебречь здесь высшими степенями p , то $p = 0,1$. Подставив теперь в предыдущее уравнение мы при том же условии найдем, что $q = -0,0054$, и т. д. Таким образом, корень окажется представленным в виде ряда

$$y = 2 + 0,1 - 0,0054 - \dots$$

Ньютон применил этот способ и к решению буквенных уравнений с двумя неизвестными. Пусть требуется, например, решить относительно y уравнение

$$y^3 + a^2y - 2a^3 + 2ax - x^3 = 0$$

и пусть известно, что x – малая величина. Первое приближенное значение $y = a$ найдем, полагая $x = 0$. Выражая затем y в виде $y = a + p$ и подставляя это значение в уравнение, найдем

$$4a^2p + 3ap^2 + p^3 + a^2x + apx - x^3 = 0$$

Для определения погрешности p в последнем уравнении сначала учитываются только члены первой степени относительно x и p .

Тогда $4a^2p + a^2x = 0$ и, значит, $p = -\frac{x}{4}$. Полагая теперь,

$p = -\frac{x}{4} + q$ и подставляя это значение в предыдущее уравнение, таким же путем получим, что $q = \frac{x^3}{64}$, и т. д. В результате Ньютон пришел к ряду

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3} + \dots$$

В случае, когда величина x велика, Ньютон видоизменяет свой метод и дает разложение в ряд, расположенный по отрицательным степеням x . Для определения начального члена таких разложений Ньютон в одном письме от 24 октября 1676, предназначенном для Лейбница, сообщил практическое правило, получившее название параллелограмма Ньютона и впервые ставшее общеизвестным из вышеупомянутой 94 главы валлисовой «Алгебры». Чтобы найти, например, первый член разложения в ряд для y , определяемого уравнением $y^6 + 5xy^2 + \frac{x^3}{a}x^4 - 7a^2x^2y^2 + 6x^3a^3apx - b^2x^4 = 0$ все члены бинарной формы, в которой x восходит до четвертой, а y до шестой степени, заносятся в прямоугольник, как это показано на черт. 1. Внутренние прямоугольники, содержащие члены предложенного уравнения, отмечаются затем звездочками (как это сделано на черт. 2). К левому нижнему углу левого нижнего

x^4	x^4y	x^4y^2	x^4y^3	x^4y^4	x^4y^5	x^4y^6
x^3	x^3y	x^3y^2	x^3y^3	x^3y^4	x^3y^5	x^3y^6
x^2	x^2y	x^2y^2	x^2y^3	x^2y^4	x^2y^5	x^2y^6
x	xy	xy^2	xy^3	xy^4	xy^5	xy^6
0	y	y^2	y^3	y^4	y^5	y^6

отмеченного звездочкой прямоугольника прикладывается линейка, которую вращают направо снизу вверх, пока она не коснется угла какого-нибудь другого отмеченного прямоугольника. Наконец, составляется уравнение из тех членов данного уравнения, которые соответствуют затронутым линейкой прямоугольникам: $6x^3a^3 - 7a^2x^2y^2 + x^6 = 0$

Это уравнение (считая, что $a > 0$) имеет четыре действительных корня:

$y = +\sqrt{ax}$, $y = -\sqrt{ax}$, $y = +\sqrt{2ax}$, $y = -\sqrt{2ax}$, каждый из которых, рассматриваемый как начальный член, порождает свой ряд для y . Остальные два корня уравнения - мнимые и поэтому не рассматриваются. В последующее время параллелограмм Ньютона пользовался большим успехом. В применении к числовым уравнениям метод Ньютона несколько переработал уже Э. Галлей (Philos. Trans., 1687 и 1694; последняя статья была перепечатана в 1707 в «Универсальной арифметике» Ньютона). Однако в том виде, в каком им пользуются ныне, т. е. с применением для производства подстановок ряда Тейлора, его опубликовал впервые, по-видимому, Эйлер («Основания дифференциального исчисления», 1755). Еще ранее Эйлер применил его в таком виде в письме к Гольдбаху от 4 июля 1744. Недостатки метода Ньютона впервые заметил Галлей. Один из них он усматривал в том, что первое приближенное значение приходится устанавливать с точностью до $1/10$, а другой - в том, что метод не дает критерия точности для каждого из получаемых последовательно приближений, и, наконец, третий в том, что при некоторых обстоятельствах может возникнуть даже расходящийся ряд. В замечании V к своему неоднократно упоминавшемуся трактату «О решении числовых уравнений» (A798) Лагранж тщательно проанализировал метод Ньютона и нашел, что с полной уверенностью его можно применять только для вычисления наибольшего и наименьшего корней. Одной из важнейших задач, предшествующих применению большинства приближенных методов, являются определение границ, между которыми лежат положительные и отрицательные корни, и отделение корней.

1. Башмакова И. Г., Об одном вопросе теории алгебраических уравнений в трудах И. Ньютона и Э. Варинга. ИМИ, вып. XII, стр. 431-456.
2. Cajory F., Fouriers improvement of the Newton -Raphson method of approximation anticipated by Mourraille. -Bibl. math., C), 11, 1911, 132-137.
3. Loria G., Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebraiche. -Bibl. math. B), 5, 1891, 99-112; B), 7, 1893, 47-50.
4. Мордухай-Болтовской Д. Д., Два основных источника методов решения уравнений. -Известия Сев.-Кавк. гос. ун-та, III (XV), 1928, 36-46.