РАЗДЕЛ XXIII. МАТЕМАТИКА

Богомолова Е.В.

Методы ортогонального проектирования решения систем линейных уравнений для двумерного крыловского подпространстваГБОУ ВПО «Государственный университет «Дубна»
(Россия, Дубна)

doi: 10.18411/lj-06-2019-154

idsp: ljjournal-06-2019-154

Аннотация

Исследуется метод ортогонального проектирования решения линейных систем, описывающий способ извлечения приближенного решения данной системы из заданного двумерного крыловского подпространства. Представлен алгоритм, реализующий этот метод, и рассмотрены условия его сходимости.

Ключевые слова: проекционные методы; ортогональное проектирование; крыловское подпространство; условия Петрова-Галёркина.

Annotation

The method of orthogonal projection of the solution of linear systems, describing a method for extracting an approximate solution of the system from a given two-dimensional Krylov subspace, is investigated. An algorithm that implements this method is presented, and the conditions for its convergence are considered.

Keywords: projection methods; orthogonal projection; Krylov subspace; Petrov-Galerkin conditions.

Пусть для исходной линейной системы $Ax = b$, где A вещественная симметричная положительно определённая матрица, задано начальное приближение x_0 . Рассмотрим ортогональный проекционный метод, использующий на каждом шаге двумерное крыловское подпространство $\mathcal{K} = \text{span}\{r, Ar\}$, где через $r = b - Ax$ обозначена текущая невязка. Проектирование на $\mathcal{K}$ ортогонально к $\mathcal{L}$ это процесс построения приближенного решения системы в линейном многообразии $x_0 + \mathcal{K}$, использующий условие Петрова-Галёркина ортогональности новой невязки к $\mathcal{L}$: $r_k = b - Ax_k \perp \mathcal{L}$.

В качестве базиса подпространства $\mathcal{K}$ возьмём вектор r и вектор p , получаемый ортогонализацией вектора Ar с использованием метода Грама-Шмидта:

$$p = Ar - hr, \text{ причём } (p, r) = 0.$$

Отсюда $h = \frac{(Ar, r)}{(r, r)}$. Тем самым построен ортогональный базис двумерного подпространства $\mathcal{K}$, состоящий из векторов r и p .

Рассмотрим ортогональный проекционный метод, в котором на каждом шаге $\mathcal{L} = \mathcal{K}$. Необходимо найти такое $\delta = \alpha r + \beta p \in \mathcal{K}$, чтобы $r_0 - A\delta \perp \mathcal{L}$, т.е.

$$x_{\text{new}} = x_0 + \delta, \delta \in \mathcal{K} \quad (1)$$

$$\forall l \in \mathcal{L}: (r_0 - A\delta, l) = 0. \quad (2)$$

Справедливы соотношения

$$b - Ax_k = b - A(x_0 + \alpha r + \beta p) = b - Ax_0 - \alpha Ar - \beta Ap = r_0 - \alpha Ar - \beta Ap.$$

В таком случае новое приближение получается посредством операций:

$$r \leftarrow b - Ax,$$

$$p \leftarrow Ar - \frac{(Ar, r)}{(r, r)}r,$$

$$x \leftarrow x + \alpha r + \beta p,$$

а условие Петрова-Галёркина даёт $(r - \alpha Ar - \beta Ap, l) = 0$. Отсюда при $l = r$ и $l = p$ получим систему уравнений для нахождения α и β :

$$\begin{cases} \alpha(Ar, r) + \beta(Ap, r) = (r, r), \\ \alpha(Ar, p) + \beta(Ap, p) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Если обозначить $V = [r, p]$ матрицу, столбцы которой образуют базис в $\mathcal{K} = \mathcal{L}$, тогда матрица системы (3) примет вид $V^T A V$. Так как A положительно определена, тем же свойством обладает матрица $V^T A V$. Значит, определитель матрицы системы (3) $\Delta = (Ar, r)(Ap, p) - (Ar, p)^2 > 0$.

Тогда система (3) имеет единственное решение

$$\alpha = \frac{(r, r)(Ap, p)}{(Ar, r)(Ap, p) - (Ar, p)^2}; \quad \beta = \frac{-(r, r)(Ar, p)}{(Ar, r)(Ap, p) - (Ar, p)^2}.$$

Приближенное решение на k -ом шаге в указанном многообразии даётся формулами

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k + \beta_k p_k. \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta_k &= \alpha_k r_k + \beta_k p_k; \\ p_k &= Ar_k - \frac{(Ar_k, r_k)}{(r_k, r_k)} r_k; \\ \alpha_k &= \frac{(r_k, r_k)(Ap_k, p_k)}{(Ar_k, r_k)(Ap_k, p_k) - (Ar_k, p_k)^2}; \quad \beta_k = \frac{-(r_k, r_k)(Ar_k, p_k)}{(Ar_k, r_k)(Ap_k, p_k) - (Ar_k, p_k)^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Алгоритм метода

1. Вычислить $r = b - Ax$ и $p = Ar - \frac{(Ar, r)}{(r, r)} r$
2. Until критерий остановки Do
3. $\alpha := \frac{(r, r)(Ap, p)}{(Ar, r)(Ap, p) - (Ar, p)^2}$
 $\beta := \frac{-(r, r)(Ar, p)}{(Ar, r)(Ap, p) - (Ar, p)^2}$
4. $x := x + \alpha r + \beta p$
5. $r := r - \alpha Ar - \beta Ap$
6. $p := Ar - \frac{(Ar, r)}{(r, r)} r$
7. EndDo

Оценим скорость сходимости данного метода.

Теорема. Пусть A является вещественной симметричной положительно определённой матрицей. Тогда A -нормы векторов ошибки $d_k = x_* - x_k$, генерируемых алгоритмом, удовлетворяют неравенству

$$\|d_{k+1}\|_A \leq \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} \|d_k\|_A. \quad (6)$$

Алгоритм сходится при любом начальном приближении x_0 .

Здесь x_* - точное решение системы, x_k - приближенное решение, определяемое формулой (4). Символ $\|x\|_A$ обозначает A -норму вектора, определяемую формулой

$$\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}.$$

Доказательство. Так как $d_{k+1} = x_* - x_{k+1}$, а $d_k = x_* - x_k$, тогда, учитывая (4), находим $d_{k+1} - d_k = x_k - x_{k+1} = -\delta_k$. Отсюда

$$d_{k+1} = d_k - \alpha_k r_k - \beta_k p_k.$$

Рассмотрим A -норму вектора ошибки

$$\|d_{k+1}\|_A^2 = (d_{k+1}, d_k - \delta_k)_A = (d_{k+1}, d_k)_A - \alpha_k (d_{k+1}, r_k)_A - \beta_k (d_{k+1}, p_k)_A.$$

В силу условий Петрова-Галёркина имеем

$$(d_{k+1}, r_k)_A = (Ad_{k+1}, r_k) = (Ax_* - Ax_{k+1}, r_k) = (b - Ax_{k+1}, r_k) = (r_{k+1}, r_k) = 0;$$

$$(d_{k+1}, p_k)_A = (Ad_{k+1}, p_k) = (b - Ax_{k+1}, p_k) = (r_{k+1}, p_k) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|d_{k+1}\|_A^2 &= (d_{k+1}, d_k)_A = (Ad_{k+1}, d_k) = (d_{k+1}, Ad_k) = (d_{k+1}, Ax_* - Ax_k) = \\ &= (d_{k+1}, b - Ax_k) = (d_{k+1}, r_k) = (d_k - \alpha_k r_k - \beta_k p_k, r_k) = \end{aligned}$$

$$= (d_k, r_k) - \alpha_k(r_k, r_k) - \beta_k(r_k, p_k).$$

Учитывая ортогональность векторов r_k и p_k , получим

$$\|d_{k+1}\|_A^2 = (d_k, r_k) - \alpha_k(r_k, r_k).$$

Преобразуем первое слагаемое

$$(d_k, r_k) = (x_* - x_k, r_k) = (A^{-1}b - A^{-1}Ax_k, r_k) = (A^{-1}(b - Ax_k), r_k) = (A^{-1}r_k, r_k).$$

Так как

$$\|d_k\|_A^2 = (Ad_k, d_k) = (Ax_* - Ax_k, d_k) = (b - Ax_k, d_k) = (r_k, d_k) = (r_k, x_* - x_k) = (r_k, A^{-1}b - A^{-1}Ax_k) = (r_k, A^{-1}(b - Ax_k)) = (r_k, A^{-1}r_k).$$

Получим

$$\|d_{k+1}\|_A^2 = \|d_k\|_A^2 - \alpha_k(r_k, r_k) = \|d_k\|_A^2 \left(1 - \frac{\alpha_k(r_k, r_k)}{(r_k, A^{-1}r_k)}\right).$$

Используя (5), имеем

$$\begin{aligned} \|d_{k+1}\|_A^2 &\leq \|d_k\|_A^2 \left(1 - \frac{(r_k, r_k)(Ap_k, p_k)}{(Ar_k, r_k)(Ap_k, p_k) - (Ar_k, p_k)^2} \frac{(r_k, r_k)}{(r_k, A^{-1}r_k)}\right) = \\ &= \|d_k\|_A^2 \left(1 - \frac{(r_k, r_k)(Ap_k, p_k)}{(Ar_k, r_k)(Ap_k, p_k) \left(1 - \frac{(Ar_k, p_k)^2}{(Ar_k, r_k)(Ap_k, p_k)}\right)} \frac{(r_k, r_k)}{(r_k, A^{-1}r_k)}\right). \end{aligned}$$

Учитывая, что для положительно определённой матрицы A выполняется условие $(Au, u) \geq \mu \|u\|^2$, где $\mu > 0$, для всякого вещественного вектора u , и определитель $\Delta_k = (Ar_k, r_k)(Ap_k, p_k) - (Ar_k, p_k)^2 > 0$, получим

$$\|d_{k+1}\|_A^2 \leq \|d_k\|_A^2 \left(1 - \frac{(r_k, r_k)}{(Ar_k, r_k)} \frac{(r_k, r_k)}{(r_k, A^{-1}r_k)}\right).$$

Воспользуемся неравенством Канторовича для вещественной симметричной положительно определённой матрицы B , где $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ её наибольшее и наименьшее собственные значения:

$$\frac{(Bx, x)(B^{-1}x, x)}{(x, x)^2} \leq \frac{(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})^2}{4\lambda_{\max}\lambda_{\min}} \quad \forall x \neq 0.$$

Отсюда получим требуемую оценку:

$$\|d_{k+1}\|_A^2 \leq \|d_k\|_A^2 \left(1 - \frac{4\lambda_{\max}\lambda_{\min}}{(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})^2}\right) \leq \|d_k\|_A^2 \frac{(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})^2}{(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})^2}.$$

Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим систему с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Точное решение } X = \left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right).$$

Таблица 1 показывает результаты применения алгоритма к задаче для начального приближения $x_0 = (1, 1, 1)$:

Таблица 1

Итерации k	Приближённое решение x_k	Невязка $\ r_k\ $	Ошибка $\ d_k\ $
1.	(0.065, 0.587, 0.37)	0.163	0.363
2.	(-0.154, 0.835, 0.506)	0.049	0.014
3.	(-0.164, 0.831, 0.499)	$1,825 \cdot 10^{-3}$	$4,069 \cdot 10^{-3}$
4.	(-0.167, 0.833, 0.5)	$5,488 \cdot 10^{-4}$	$1,621 \cdot 10^{-4}$

Видим, что сходимость метода очень быстрая.

1. Саад Ю. Итерационные методы для разреженных линейных систем: Учеб. пособие. – В 2-х томах. Том 1 / Пер. с англ.: Х.Д.Икрамов; Предисл.: В.А.Садовничий. – М.: Издательство Московского университета, 2013. – 344 с.
2. Лапчик М.П. Численные методы: Учебное пособие для студентов вузов. / М.П.Лапчик, М.И.Рагулина, Е.К.Хеннер; под ред.М.П.Лапчика. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 384 с.