41. Лин Э.Э. Примеры применения принципов неопределенности и абсолютной определенности в задачах кинетики образования объектов // Проблемы и вопросы современной науки. № 2(3). Часть 2. С. 39-48. НИЦ МОАН, 2019.
42. Гинзбург В.Л. Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными ? // Успехи физических наук. 1999. Т. 169. № 4. С. 419-441.
43. Matson, L. On Dark Matter Identification // World Journal of Mechanics. 2017. Vol. 7. Number 1. Pp. 133-141.
44. Elsayed A., Khalil S. and Moretti S., "Higgs Mass Corrections in the SUSY B-L Model with Inverse Seesaw," Physics Letters B, Vol. 715, No. 1-3, 2012, pp. 208-213.
45. Ишханов Б.С., Капитонов И.М., Юдин Н.П. Частицы и атомные ядра – М.: Изд-во ЛКИ, 2007.
46. Perl M.L. Certainty and Uncertainty in the Practice of Science: Electrons, Muons, and Taus. SLAC-PUB-8010-REV, 1999.
47. Уильямс Л., Адамс У. Нанотехнологии без тайн. Путеводитель. М.: Эксмо, 2009.
48. Shenderova, O.A., Zhinov, V.V. and Brunner, D.W. Carbon Nanostructures. Critical Reviews in Solid State and Material Sciences. 2002. 27(3), 227-356.
49. Mann, S. () Life as a Nanoscale Phenomenon. Angew. Chem. Int. Ed. 2008. 47, 5306-5320.
50. Цянь Сюэ-сень. Физическая механика. М.: Наука, 1965.
51. Шпикитер В. О. Миозин // БСЭ. М.: «Советская энциклопедия», 1974. Т. 16. С. 901-902.
52. Костюк П. Г. Нейрофибриллы // БСЭ. М.: «Советская энциклопедия», 1974. Т. 17. С. 1244.
53. Бартини Р.О. Некоторые соотношения между физическими константами // ДАН СССР. 1965. Т. 163. №4. С. 861-864. [Bartini, R.O. Relations between Physical Constants/ / Progress in Physics. 2005. Vol. 3. Pp. 34-40.]
54. Утробин В.П. Сверхновые звезды // Физическая энциклопедия. Том 4. / Под ред. А.М. Прохорова, М.: Большая Российская энциклопедия, 1994. С. 433-435.
55. Ю.Э. Любарский, Р.А. Сюняев. Астрономия и астрофизика // Физические величины. Справочник. Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. С. 1197-1229.
56. Козенко А.В. Земля // Физическая энциклопедия. Т. 2. / Под ред. А.М. Прохорова. "Большая Российская Энциклопедия", М. (1990). С. 78.
57. Аснович Э. З., Петрашко А. И. Кремнийорганические соединения // Физический энциклопедический словарь. М. 1962. Том второй. С. 513-517.
58. Krieg Noel Bergey's Manual of Systematic Bacteriology – US: Springer, 2005. P. 21-6.

Тукмаков Д.А.

Численное моделирование отражения ударной волны в аэрозоле с однородной и многофракционной дисперсной компонентой

*Федеральный исследовательский центр Казанский научный центр Российской Академии наук
(Россия, Казань)*

doi: 10.18411/lj-05-2020-18

idsp: ljjournal-05-2020-18

Аннотация

В работе представлена математическая модель динамики гетерогенной среды аэрозоля. Описаны математические модели динамики аэрозоля с однофракционной дисперсной фазой и дисперсной фазой состоящей из множества фракций. Математическая модель динамики неоднородной среды представляет собой краевую задачу Коши для нелинейной системы уравнений в частных производных. С помощью математических моделей исследовалось отражение ударной волны в аэрозоле.

Ключевые слова: численное моделирование, полидисперсные аэрозоли, краевая задача Коши, конечно-разностная схема, отражение ударных волн

Abstract

A mathematical model of the dynamics of a heterogeneous aerosol medium is presented. Mathematical models of aerosol dynamics with a single-fraction dispersed phase and a dispersed phase consisting of many fractions are described. The mathematical model of the dynamics of an inhomogeneous medium is a Cauchy boundary value problem for a

nonlinear system of partial differential equations. Using mathematical models, the reflection of a shock wave in an aerosol was studied.

Keywords: numerical simulation, polydisperse aerosol, Cauchy boundary value problem, finite-difference scheme, reflection of shock waves

Течения неоднородных сред встречаются как в естественной природе, так и в технике. В ряде монографий разработана методология моделирования течений многофазных сред, смесей в которых компоненты имеют различное агрегатное состояние, в том числе газовзвесей – газовых взвесей жидких капель и твердых частиц: газокпельных и запылённых сред [1-4]. Теоретическому и экспериментальному исследованию динамики газовзвесей посвящены публикации в периодических изданиях [5-9]. Актуальность в исследованиях течений таких сред связана с оптимизацией работы реактивных двигателей.

Уравнения математической модели представленной в данной работе составлены с учётом методологии исследования течений аэрозолей предложенной в [2], с учётом вязкости несущей среды и двухмерности течения [10,11].

Математическая модель предполагает решение полной гидродинамической системы уравнений для каждой из компонент смеси. При этом системы уравнений связаны слагаемыми, отвечающими за межкомпонентный обмен импульсом и теплом. Для компонент смеси решались уравнения непрерывности плотности газа и «средней плотности» дисперсной компоненты (1),(2). Также в систему уравнений включены уравнения сохранения пространственных составляющих импульса дисперсной и дисперсной фазы смеси –уравнения (3), (4). Уравнения (4),(5) описывали сохранение энергии компонент газовой взвеси [5-9]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \nabla(\rho_j \mathbf{V}_j) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho V^k}{\partial t} + \nabla^i (\rho V^k V^i + \delta_{ik} p - \tau_{ik}) = -F_{kj} + \alpha_j \nabla^k p, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho_1 V_1^k}{\partial t} + \nabla^i (\rho_1 V_1^i V_1^k) = F_{kj} - \alpha \nabla^k p, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(e)}{\partial t} + \nabla^i (V^i (e + p - \tau_{ii}) - V^k \tau_{ki} - \lambda \nabla^i T) = - \sum_{j=1}^m Q_j - \sum_{j=1}^m |F_{kj}| (V^k - V_j^k) + \sum_{j=1}^m \alpha_j \nabla^k (p V^k), \quad (5)$$

$$\frac{\partial(e_j)}{\partial t} + \nabla^k (e_j V_j^k) = Q_j, \quad (6)$$

$$\mathbf{V}=[u,v]; \mathbf{V}_j=[u_j,v_j];$$

Уравнения динамики аэрозоля (1)-(6) являются развитием моделей динамики газовзвесей [2] с учётом дополнительных характеристик течения – двухмерной геометрии течения и вязкости газа [10,11].

В уравнениях (1)-(6) $\mathbf{V}$ –вектор скорости. Здесь и далее индексом «1» обозначается физический параметр дисперсной компоненты смеси.

Вводятся обозначения p, ρ, u, v –давление, плотность, декартовы составляющие скорости в направлении осей x_1 и x_2 соответственно; T, e –температура и полная энергия газа; λ и μ , теплопроводность и вязкость несущей среды. Температура газа

выражается через полную энергию: $T=(\gamma-1)(e/\rho-0.5(u^2+v^2))/R$, где R - газовая постоянная несущей фазы, γ -постоянная адиабаты, g -ускорение свободного падения.

«Средняя плотность» дисперсной компоненты смеси описывается выражением $\rho_j=\alpha_j\rho_0$, где $\alpha_j=\alpha_j(t,x_1,x_2)$ -объёмное содержание твердой компоненты смеси, а ρ_0 - истинная или как еще именуют данную величину, физическая плотность материала частиц, которая в процессе движения смеси не изменяется.

В выражение для тепловой энергии дисперсной фазы входит «средняя плотность»: $e_j=\rho_j C_{pj} T_j$, где C_{pj} – удельная теплоемкость единицы массы вещества j -ой фракции дисперсной фазы. Функция межкомпонентного теплообмена фракции дисперсной фазы выражается через относительное число Нуссельта: $Q_j=6\pi\eta_j Nu_j (T-T_j)/(2r_j)^2$. Относительное число Нуссельта определяется с помощью зависимости от относительных чисел Маха, Рейнольдса и от числа Прандтля [2]:

$$M_j = |\bar{V} - \bar{V}_j|/c, \quad Re_j = \rho |\bar{V} - \bar{V}_j| 2r_j / \mu, \quad Pr = \gamma C_p \mu / \lambda$$

$$Nu_j = 2 \exp(-M_j) + 0.459 Re_j^{0.55} Pr^{0.33},$$

Здесь c -скорость звука, вычисляемая из уравнения- $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$, где M – молярная масса воздуха, теплопроводность несущей среды предполагалась равной- $\lambda=0.02553$ Вт/(м·К), динамическая вязкость несущей среды $\mu=1,72 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

В уравнениях (3), (4) правые части уравнений описывают межфазный обмен импульсом. В уравнениях (5), (6) правые части уравнений описывают межфазный теплообмен. Отсутствие правых слагаемых в уравнениях непрерывности плотности (1), (2) соответствует отсутствию теплофизических и химических превращений в смеси.

Для моделирования высокоскоростных течений газа, существенное значение имеет учёт сжимаемости среды, в применяемой в статье математической модели, учёт сжимаемости газа осуществляется за счёт того, что плотность газа является функцией временной и пространственных переменных. Для «средней плотности» дисперсной фазы, также присутствует некий аналог сжимаемости, хотя сами частицы являются несжимаемыми- изменяется, лишь значение объёмного содержания дисперсной фазы. При этом в работе учитывается вязкость несущей среды, так как компоненты тензора вязких напряжений входят как в уравнение сохранения импульса (3) (Навье-Стокса), так и в уравнение сохранения энергии (5)

Слагаемые тензора вязких напряжений газа - τ описываются следующими выражениями [10]:

$$\tau_{11} = \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{22} = \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{12} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right), \quad D = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}.$$

Межфазное силовое взаимодействие задавалось выражениями:

$$F_{x_1 j} = \frac{3}{4} \frac{\alpha_j}{(2r_j)} C_{d j} \rho_1 \sqrt{(u-u_j)^2 + (v-v_j)^2} (u-u_j) + \alpha_j \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) +$$

$$+ 0.5 \alpha_j \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial t} - u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - v_j \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right),$$

$$F_{x_2 j} = \frac{3}{4} \frac{\alpha_j}{(2r_j)} C_{d j} \rho \sqrt{(u-u_j)^2 + (v-v_j)^2} (v-v_j) + \alpha_j \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x_1} + v \frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial t} - u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_1} - v_j \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right),$$

$$+v \frac{\partial v}{\partial x_2} \Big) + 0.5\alpha_j \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x_1} + v \frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial t} - u_j \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - v_j \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - g\alpha_j \rho_{j0},$$

Компоненты вектора межфазного силового взаимодействия - F_{x2} , F_{x1} учитывают силу Стокса, динамическую силу Архимеда, силу присоединенных масс [1], а также силу тяжести действующую на частицы аэрозоля в направлении координаты x_2 .

Коэффициент аэродинамического сопротивления вычислялся с использованием следующего выражения [1,3]:

$$C_{dj} = \frac{24}{Re_j} + \frac{4}{Re_j^{0.5}} + 0.4 \quad (7)$$

Выражение (7) описывает аэродинамическое сопротивление частиц сферической формы.

Система уравнений динамики многофазной среды (1)-(6) решалась двухэтапным явным конечно-разностным методом Мак-Кормака, позволяющим получать решения второго порядка точности [10].

Рассмотрим применение численного алгоритма на примере скалярного нелинейного уравнения в частных производных (8):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial a(f)}{\partial x_1} + \frac{\partial b(f)}{\partial x_2} = c(f) \quad (8)$$

Алгоритм явного конечно-разностного метода Мак-Кормака для нелинейного уравнения (8) имеет вид (9)-(10)

$$f_{j,k}^* = f_{j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (a_{j+1,k}^n - a_{j,k}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (b_{j,k+1}^n - b_{j,k}^n) + \Delta t c_{j,k}^n \quad (9)$$

$$f_{j,k}^{n+1} = 0.5(f_{j,k}^n + f_{j,k}^*) - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x_1} (a_{j,k}^n - a_{j-1,k}^n) - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x_2} (b_{j,k}^n - b_{j,k-1}^n) + 0.5 \Delta t c_{j,k}^n \quad (10)$$

Здесь Δx_i - шаг по соответствующему пространственному направлению, Δt – шаг по времени.

При расчёте высокоскоростных течений двухфазной смеси в начале и конце моделируемого канала ($x_l=0$, $x_l=L$) составляющие скорости компонент смеси приравнялись нулю. Для остальных динамических функций гетерогенной смеси и для составляющих векторов скоростей несущей и дисперсной фазы на боковых поверхностях канала нулевыми задавались первые производные по нормали к поверхности. Такая постановка граничных условий соответствует методике конечно-разностного моделирования динамики сжимаемого теплопроводного газа [10,11] и методике моделирования динамики, взвешенной в сжимаемом теплопроводном газе, дисперсной компоненты с изменяющейся «средней плотностью» и энергией [2]:

$$\begin{aligned} u(t, 1, j) &= 0, & u_1(t, 1, j) &= 0, \\ v(t, 1, j) &= 0, & v_1(t, 1, j) &= 0, \\ u(t, N_{x_1}, j) &= 0, & u_1(t, N_{x_1}, j) &= 0, \\ v(t, N_{x_1}, j) &= 0, & v_1(t, N_{x_1}, j) &= 0, \\ u(t, i, 1) &= u(t, i, 2), & u_1(t, i, 1) &= u_1(t, i, 2), \\ v(t, i, 1) &= v(t, i, 2), & v_1(t, i, 1) &= v_1(t, i, 2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(t, i, N_{x_2}) &= u(t, i, N_{x_2} - 1), & u_1(t, i, N_{x_2}) &= u_1(t, i, N_{x_2} - 1), \\
v(t, i, N_{x_2}) &= v(t, i, N_{x_2} - 1), & v_1(t, i, N_{x_2}) &= v_1(t, i, N_{x_2} - 1), \\
\rho(t, 1, j) &= \rho(t, 2, j), & \rho_1(t, 1, j) &= \rho_1(t, 2, j), \\
\rho(t, N_{x_1}, j) &= \rho(t, N_{x_1} - 1, j), & \rho_1(t, N_{x_1}, j) &= \rho_1(t, N_{x_1} - 1, j), \\
\rho(t, i, 1) &= \rho(t, i, 2), & \rho_1(t, i, 1) &= \rho_1(t, i, 2), \\
\rho(t, i, N_{x_2}) &= \rho(t, i, N_{x_2} - 1), & \rho_1(t, i, N_{x_2}) &= \rho_1(t, i, N_{x_2} - 1), \\
e(t, 1, j) &= e(t, 2, j), & e_1(t, 1, j) &= e_1(t, 2, j), \\
e(t, N_{x_1}, j) &= e(t, N_{x_1} - 1, j), & e_1(t, N_{x_1}, j) &= e_1(t, N_{x_1} - 1, j), \\
e(t, i, 1) &= e(t, i, 2), & e_1(t, i, 1) &= e_1(t, i, 2), \\
e(t, i, N_{x_2}) &= e(t, i, N_{x_2} - 1), & e_1(t, i, N_{x_2}) &= e_1(t, i, N_{x_2} - 1).
\end{aligned}$$

Здесь i, j, N_{x1}, N_{x2} – индексы и количество узлов по первой и второй пространственным переменным соответственно.

Алгоритм численного решения системы уравнений (1)-(6) реализован в виде программного кода на языке программирования Fortran.

Рис.1. Пространственное распределение давления в отражённой ударной волне: 1 – аналитическое решение, 2 – численное решение для газозвеси с размером частиц 200 – мкм, 3 – численное решение для газозвеси с размером частиц 2 – мкм

В расчётах для моно и полидисперсных газозвесей, начальное объёмное содержание дисперсной фазы предполагалось равным $\alpha_2 = \sum_{i=2}^n \alpha_i = 0.001$. Истинная плотность вещества дисперсной фазы в расчётах: $\rho_{20} = \dots = \rho_{n0} = 2500 \text{ кг/м}^3$. Из рис.1 следует, что с уменьшением размера частиц монодисперсной газозвеси интенсивность давления в отражённой ударной волне возрастает. При отражении ударной волны от твёрдой поверхности в мелкодисперсной газозвеси давление оказывается выше, чем давление в отражённой ударной волне, рассчитанное аналитически для чистого газа при тех же параметрах волны, набегающей на стенку [12].

Численные расчёты для отражённой ударной волны в полидисперсной запылённой среде показывают, что наличие в твёрдой фазе фракции мелкодисперсных частиц приводит к замедлению движения и увеличению давления в отражённой ударной волне - (рис. 2).

Рис.2 Численное решение для давления в отраженной ударной волне кривая 1- бидисперсная газовзвесь с размерами частиц $d_1=20$, $d_2=10$ мкм; 2- бидисперсная газовзвесь с размерами частиц $d_1=20$, $d_2=2$ мкм.

В результате проведённых численных расчётов удалось установить зависимость между размером частиц дисперсной фазы и интенсивностью давления в отражённой ударной волне. При уменьшении размера частиц в монодисперсных газовзвесьях увеличивается интенсивность отражённой ударной волны, в полидисперсных газовзвесьях наличие фракции мелких частиц приводит к росту давления в отражённой волне.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-01-00442 и гранта президента РФ № МК-297.2020.1 .

1. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред / Москва: «Наука», 1978. -336 с.
2. Кутушев А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах / Санкт-Петербург: «Недра», 2003.-284 с.
3. Стернин Л.Е. Двухфазные моно – и полидисперсные течения газа с частицами / Москва: Машиностроение, 1980. -176 с.
4. Федоров А.В., Фомин В.М., Хмель Т.А. Волновые процессы в газовзвесьях частиц металлов / Новосибирск, 2015. -301 с.
5. Tukmakov D.A. Numerical study of polydisperse aerosol dynamics with the drops destruction // Lobachevskii Journal of Mathematics. -2019.- I. 6. –P. 824-827.
6. Тукмаков Д.А. Численное исследование скоростного скольжения фаз при прохождении ударной волны малой интенсивности из чистого газа в запылённую среду // Многофазные системы-2019.-№2.- С. 125-131.
7. Тукмаков Д.А. Численное исследование интенсивных ударных волн в запыленных средах с однородной и двухкомпонентной несущей фазой // Компьютерные исследования и моделирование, 2020, т.12, №1, С. 141-154.
8. Тукмаков Д.А. Численное исследование влияния свойств газовой составляющей взвеси твердых частиц на разлет сжатого объема газовзвеси в двухкомпонентной среде // Инженерно – физический журнал, 2020, том 93, №2, С. 304-310.
9. Тукмаков Д.А. Численное исследование скоростного скольжения несущей и дисперсной фазы при взаимодействии ударной волны с электрически заряженной газовзвесью // «Вестник Пермского университета. Физика», 2020, №1, С. 35-42.
10. Fletcher C.A. Computation Techniques for Fluid Dynacmics / Berlin: Springer-Verlang , 1988. - 409 p.
11. Тукмаков А.Л. Численное моделирование колебаний газового столба в закрытом канале с упругой стенкой // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2002. № 1. С. 31-34.
12. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. / Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. - 336 с.