Сайфуллина А.Ф., Севастьянова С.А.
Теория пределов

*Самарский государственный экономический университет
(Россия, Самара)*

doi: 10.18411/lj-05-2019-07

idsp: ljjournal-05-2019-07

Аннотация

Статья посвящена более подробному изучению теории пределов и разбору всевозможных аспектов, что позволит получить исчерпывающие знания для применения их при вычислении данного элемента высшей математики. В статье поднимаются актуальные темы, связанные с теорией пределов, а также различные методы решения соответствующих математических задач.

Ключевые слова: теория пределов, решение задач, методология определения, функции, свойства, значения пределов.

Abstract

The article is devoted to a more detailed study of the theory of limits and the analysis of all possible aspects, which will allow one to obtain comprehensive knowledge for applying them in the calculation of a given element of higher mathematics. The article raises relevant topics related to the theory of limits, as well as various methods for solving the corresponding mathematical problems.

Keywords: limit theory, problem solving, definition methodology, functions, properties, limit values.

Теория пределов – является одним из не маловажных разделов математического анализа. Изначально она применялась при создании дифференциального и интегрального исчисления, а в настоящее время используется для строгого обоснования данной дисциплины. Вопрос нахождения пределов является достаточно общим, так как существуют множество приемов **решения пределов** различных видов.

Предположим, что функция f и $f(x)$ являются значениями f для независимой переменной x . Значение « f », к которому приближаются значения $f(x)$, когда значение x приближается к действительному числу или $+$ - бесконечность, называется пределом.

Пишется это следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = 2$$

Это означает, что значения $f(x)$, когда x приближается к числу 1, приближаются к значению 2.

Если попытаться поместить $x = 1$ в функцию $f(x)$, можно заметить, что получается $\frac{0}{0}$. Это не значит, что $\frac{0}{0} = 2$. Это неопределенная форма для пределов и нуждается в другом способе решения. Иногда можно напрямую указать значение x в функции и найти предел.

Также есть другой способ определения предела, так называемое определение эпсилон-дельта. Функция имеет пределы на число c , когда предел является действительным числом, иначе он не существует, и в ходе исследования возникает мнение, что функция не имеет предела на значение c .

Кроме того, предел не обязательно должен применяться ко всему набору определений, но может применяться к его части. Это означает, что функция может иметь предел на число c только тогда, когда речь идёт о положительных числах.

Предел для определенного числа уникален, и поэтому, когда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 11 \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 12$$

То:

$$11=12$$

Основные пределы и свойства:

Основные пределы:

$\lim (c) = c$, постоянная функция $f(x) = c$ всегда имеет значение c , которое не зависит от значения, к которому происходит приближение при нахождении предела.

$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, тождественная функция $f(x) = x$ всегда имеет предел, равный значению, к которому идет приближение

$\lim_{x \rightarrow x_0} (ax + b) = a \times x_0 + b$, объединение предыдущих правил.

Свойства:

Например, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)] = a \times b$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \div g(x)] = a \div b, \text{ где } b \text{ ненулевой}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)^n] = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^n = a^n, \text{ для каждой степени целого числа } n$$

Сжатие

теоремы:

(Например, функция f, g и h и x_0 таковы, что x приближается).

Другие полезные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |1|, \text{ где } |1| \text{ означает абсолютное значение предела } f(x)$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$, в итоге идет попадание в доказательство, когда происходит попадание в серию.

Когда $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)] = y_0$ и $\lim_{y \rightarrow y_0} [g(y)] = 1$, тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = 1$, где $g(f(x))$ - это композиция функций f и g .

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 2} \right) = -\frac{2}{3}$$

Можно заметить, что если поместить $x = -1$ в функцию, то не получится неопределенная форма, такая как $\frac{0}{0}$, которая имела в первом пределе. Это означает, что будет найден предел верхней и нижней функции, и тогда результат будет равен их разделению, как было показано ранее в свойствах.

При присвоении значения $x = -1$ обеим функциям и в итоге получается:

$$\lim_{x \rightarrow -1} [x^2 - 3] = 1 - 3 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} [x^2 + 2] = 1 + 2 = 3$$

И поэтому весь лимит составляет $-\frac{2}{3}$.

Пределы на Бесконечность / Бесконечные пределы:

Предел f , когда x приближается к бесконечности (+ или -), равен L , и поэтому дано:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

Этот предел называется пределом на бесконечности (или минус бесконечность)

К примеру, дан следующий предел:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Экспоненциальная функция e^x строго возрастает и имеет значение 0 в минус бесконечность.

Речь идет о бесконечном пределе, когда значение предела равно бесконечности.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

Значение a может быть бесконечностью, но это не обязательно.

Свойства, о которых говорилось ранее, все еще применяются, когда предельное значение равно бесконечности.

В рациональных функциях $\frac{p(x)}{q(x)}$, где p, q - многочлены, имеется:

Когда степень p больше, чем степень q , тогда предел равен $\pm\infty$. Когда степени p и q равны, предел равен делению старших коэффициентов (один перед наибольшей степенью x).

Когда степень p меньше, чем степень q , тогда предел равен 0.

Заключение. Методика, положенная в основу данной работы, позволяет значительно ускорить процесс подготовки и проведения семинарских занятий, посвященных изучению данной темы, выполнения домашнего задания, подготовки к

различных проверочным работам. Обобщен опыт изложения материала по указанной теме, что позволит облегчить восприятие теории пределов и поможет при выполнении задач.

1. Теория пределов. URL: <https://steemit.com>
 2. Теория пределов. URL: <http://ru.solverbook.com/spravochnik/predely/teoriya-predelov/>
 3. Предел (Математика). URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB_\(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0))
 4. Круглова С.С. Галкина С.Ю. Галкин О.Е. Теория пределов Дифференциальное исчисление функций одной переменной. М.: ФиС, 2017г.
 5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. М. Дрофа. 2018г.
 6. Крисчен Э., Математический Анализ: Предел. /пер. с англ. Марк В., - М.: Фист, 2018г.
-