Гацаева Р.С.-А.

Исследование одной функциональной, краевой задачи для дифференциального уравнения первого порядка

Чеченский государственный университет
(Россия, Грозный)

doi: 10.18411/lj-05-2019-04

idsp: ljjournal-05-2019-04

Аннотация

В статье рассматривается специальная краевая задача. Доказывается теорема существования и единственности решения. Результаты находят применение при исследовании экстремальных свойств решений.

Ключевые слова: Специальная краевая задача; теорема существования; экстремальные свойства.

Abstract

The article deals with a special boundary value problem. The theorem of existence and uniqueness of the solution is proved. The results are used in the study of extreme properties of solutions.

Keywords: special boundary value problem; existence theorem; extreme properties.

Будем изучать дифференциальное уравнение вида

$$y' + P(x)y = f(x, y) \quad (1)$$

$$\text{с граничным условием } y'(x_0) = d \quad (2)$$

где $x_0 \in [a, b]$, $P(x)$, $f(x, y)$ непрерывные функции по всем переменным, причем $P(x_0) \neq 0$, d – некоторое число. Если функция $y(x)$ есть решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), то из (2) вытекает справедливость равенства

$$y(x_0) = (P(x_0))^{-1} [f(x_0, y(x_0)) - d] \quad (3)$$

И наоборот, если функция $y(x)$ есть решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (3), то имеет место и равенство (2). Следовательно, задачи (1),(2) и (1),(3) эквивалентны, поэтому, чтобы выявить определенные свойства решения задачи (1),(2), будем изучать задачу (1),(3), которая относится к категории задач с нелинейными функциональными краевыми условиями и является частным случаем функциональной краевой задачи из [1].

Как будет показано ниже, задача (1),(3) имеет практическое приложение. Для доказательства теоремы существования и единственности решения этой задачи будет использован новый прием, основанный на сходимости одного, специальным образом построенного итерационного процесса, идея которого со значительной пользой применяется и при исследовании различных многоточечных и функциональных краевых задач.

Теорема. Пусть $P(x)$ функция непрерывна на $[a, b]$ и $P(x_0) \neq 0$, $x_0 \in [a, b]$, функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных в замкнутой области D . Если выполнены неравенства

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, \bar{\bar{y}})| \leq L_1(x) |\bar{y} - \bar{\bar{y}}| \quad (4)$$

где $L_1(x)$ – непрерывная функция на $[a, b]$, для любых значений $\bar{y}$, $\bar{\bar{y}}$ переменного

$$M_1 = |\alpha|L_1(x_0)l < 1, \quad (5)$$

$$\alpha = P^{-1}(x_0), \quad l = \max_{x \in [a,b]} \exp \left(\int_a^x L_1(t) dt - \int_{x_0}^x P(t) dt \right); \quad \frac{N_1}{1-M_1} \leq r, \quad (6)$$

где

$$N_1 = \max_{x \in [a,b]} \left| \alpha [f(x_0, 0) - d] + \int_{x_0}^x f(t, 0) \exp \left(\int_{x_0}^t P(s) ds \right) dt \right|.$$

Тогда задача (1),(2) имеет единственное непрерывное решение.

Доказательство. Возьмем функцию $y_0(x) = 0$. За функцию $y_1(x)$ выберем решение интегрального уравнения

$$y_1(x) = \alpha [f(x_0, 0) - d] \exp \left(- \int_{x_0}^x P(s) ds \right) + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) \exp \left(\int_x^t P(s) ds \right) dt. \quad (5_1)$$

В качестве функции $y_2(x)$ возьмем решение интегрального уравнения

$$y_2(x) = \alpha [f(x_0, y_1(x_0)) - d] \exp \left(- \int_{x_0}^x P(s) ds \right) + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) \exp \left(\int_x^t P(s) ds \right) dt, \quad (5_2)$$

и т.д. строить последовательность функции $y_1(x), y_2(x), \dots$

$$y_n(x) = \alpha [f(x_0, y_{n-1}(x_0)) - d] \exp \left(- \int_{x_0}^x P(s) ds \right) + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) \exp \left(\int_x^t P(s) ds \right) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5_n)$$

$$\text{Из } (5_1) \text{ имеем} \quad y_1(x) \exp \left(\int_{x_0}^x P(s) ds \right) = N + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) \exp \left(\int_x^t P(s) ds \right) dt,$$

где $N = \alpha [f(x_0, 0) - d]$. Далее

$$y_1(x) \exp \left(\int_{x_0}^x P(s) ds \right) = N + \int_{x_0}^x f(t, 0) \exp \left(\int_x^t P(s) ds \right) dt + \int_{x_0}^x [f(t, y_1(t)) - f(t, 0)] \exp \left(\int_x^t P(s) ds \right) dt$$

Поэтому, ввиду (4), получим

$$\left| y_1(x) \exp \left(\int_{x_0}^x P(s) ds \right) \right| = \left| N + \int_{x_0}^x f(t, 0) \exp \left(\int_x^t P(s) ds \right) dt \right| + \int_a^x L_1(t) |y_1(t)| \exp \left(\int_{x_0}^t P(s) ds \right) dt \quad (6)$$

Следовательно, справедлива оценка [1.2]

$$|y_1(x)| \exp \left(\int_{x_0}^x P(s) ds \right) \leq N_1 \exp \left(\int_a^x L_1(t) dt \right), \quad (7)$$

$$N_1 = \left| N + \int_a^b |f(f, 0)| \exp \left(\int_{x_0}^t P(s) ds \right) dt \right|$$

где

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq N_1 \exp \left(\int_a^x L_1(t) dt - \int_{x_0}^x P(t) dt \right) \leq N_1 l \quad (6_1)$$

Из (7) имеем

Из (5_1) и (5_2) находим

$$[y_2(x) - y_1(x)] \exp \left(\int_{x_0}^x P(s) ds \right) = \alpha [f(x_0, y_1(x_0)) - f(x_0, 0)] + \\ + \int_{x_0}^x [f(t, y_2(t)) - f(t, y_1(t))] \exp \left(\int_{x_0}^t P(s) ds \right) dt.$$

Следовательно,

$$|y_2(x) - y_1(x)| \exp \left(\int_{x_0}^x P(s) ds \right) \leq |\alpha| L_1(x_0) |y_1(x_0)| + \\ + \int_a^x L_1(t) |y_2(t) - y_1(t)| \exp \left(\int_{x_0}^t P(s) ds \right) dt$$

или [2] (см. (6_1))

$$|y_2(x) - y_1(x)| \exp \left(\int_{x_0}^x P(s) ds \right) \leq \\ \leq |\alpha| L_1(x_0) |y_1(x_0)| \left(\int_a^x L_1(t) dt \right) \leq \\ \leq |\alpha| L_1(x_0) N_1 l \exp \left(\int_{x_0}^t P(s) ds \right) dt.$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq |\alpha| L_1(x_0) N_1 l \exp \left(\int_a^x L_1(t) dt - \int_{x_0}^x P(t) dt \right) \leq |\alpha| L_1(x_0) N_1 l M_1.$$

Отсюда

Аналогично

$$|y_3(x) - y_2(x)| \exp \left(\int_{x_0}^x P(s) ds \right) \leq \\ \leq |\alpha| L_1(x_0) |y_2(x_0) - y_1(x_0)| + \int_a^x L_1(t) |y_3(t) - y_2(t)| \exp \left(\int_{x_0}^t P(s) ds \right) dt, \\ |y_3(x) - y_2(x)| \exp \left(\int_{x_0}^x P(s) ds \right) \leq |\alpha| L_1(x_0) |y_2(x_0) - y_1(x_0)| \exp \left(\int_a^x L_1(t) dt \right) \leq \\ \leq |\alpha| L_1(x) |\alpha| L_1(x_0) N_1 l^2 \exp \left(\int_a^x L_1(t) dt \right),$$

$$\text{следовательно,} \quad |y_3(x) - y_2(x)| \leq |\alpha|^2 L_1^2(x_0) N_1 l M_1^2,$$

и т.д. для любого n имеет оценку

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leq N_1 |\alpha|^{n-1} L_1^{n-1}(x_0) l^n = N_1 l M_1^{n-1},$$

Если предположить, что выполняется неравенство (6) то, как нетрудно проверить, не одна из функций $y_1(x), y_2(x), \dots$ не выходит из области D_i т.е.

$$|y_n(x)| \leq r \quad \text{для любого } n.$$

Пусть $M_1 < 1$. Тогда функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} [y_n(x) - y_{n-1}(x)] \quad (8)$$

мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} N_1 M_1^{n-1}$ и, следовательно, равномерно сходится на сегменте $[a, b]$. обозначим сумму ряда (8) через $y(x)$. Очевидно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x) \quad (9)$$

и $y(x)$ есть непрерывная функция. Переходим к пределу в (5_n) при $n \rightarrow \infty$, в силу (9) имеем

$$y(x) = \alpha[f(x_0, y(x_0)) - d] \exp\left(-\int_{x_0}^x P(s) ds\right) + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) \exp\left(\int_x^t P(s) ds\right) dt \quad (10)$$

Дифференцируя обе части (10) по x , получим

$$\begin{aligned} y'(x) &= -P(x)\alpha[f(x_0, y(x_0)) - d] \exp\left(-\int_{x_0}^x P(s) ds\right) + \\ &+ f(x, y(x)) + P(x) \int_{x_0}^x f(t, y(t)) \exp\left(\int_x^t P(s) ds\right) dt = \\ &= -P(x)\alpha[f(x_0, y(x_0)) - d] \exp\left(-\int_{x_0}^x P(s) ds\right) + f(x, y(x)) - P(x)y(x) + \\ &+ P(x)\alpha[f(x_0, y(x_0)) - d] \exp\left(-\int_{x_0}^x P(s) ds\right) = P(x)y(x) + f(x, y(x)), \end{aligned}$$

т.е. функция $y(x)$ является решением дифференциального уравнения (10).

при $x = x_0$ из (10) следует $y(x) = \alpha[f(x_0, y(x_0)) - d]$

или $P(x_0)y(x_0) = f(x_0, y(x_0)) - d$,

Значит $y'(x_0) = d$.

Таким образом, при перечисленных предположениях задача (1), (2) имеет хотя бы одно решение. Этих предположений вполне достаточно, чтобы решение было единственным.

Действительно пусть задача (1), (2) имеет два решения $y(x)$, $z(x)$. Тогда имеет место тождество (см.(10)).

$$\begin{aligned} y(x) - z(x) &= \alpha[f(x_0, y(x_0)) - f(x_0, z(x_0))] \exp\left(-\int_{x_0}^x P(s) ds\right) + \\ &+ \int_{x_0}^x [f(t, y(t)) - f(t, z(t))] \exp\left(\int_x^t P(s) ds\right) dt. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |y(x) - z(x)| \exp\left(\int_{x_0}^x P(s) ds\right) &\leq |\alpha| L_1(x_0) |y(x_0) - z(x_0)| + \\ &+ \int_a^x L_1(t) |y(t) - z(t)| \exp\left(\int_{x_0}^t P(s) ds\right) dt \end{aligned}$$

или по лемме Гронуолла-Беллмана [1]

$$|y(x) - z(x)| \exp\left(\int_{x_0}^x P(s) ds\right) \leq |\alpha| L_1(x_0) |y(x_0) - z(x_0)| \exp\left(\int_a^x L_1(t) dt\right),$$

Следовательно

$$|y(x) - z(x)| \leq |y(x_0) - z(x_0)| M_1,$$

$$\max_{x \in [a,b]} |y(x) - z(x)| \leq \max_{x \in [a,b]} |y(x) - z(x)| M_1,$$

$$M_1 \geq 1,$$

чем быть не может в силу неравенства (5).

Итак, теорема доказана.

1. Израилов С.В., Юшаев С.С. Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Нальчик, Изд-во «Эльфа», 2004. С445
 2. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т.1.2., Москва, ИЛ, 1954
-