РАЗДЕЛ XII. МАТЕМАТИКА

Васильева Н.В.

Точные формулы для двойных сумм Гаусса

ФГАОУ ВО «БелГУ»
(Россия, Белгород)

doi:10.18411/lj-05-2018-76

idsp: 000001:lj-05-2018-76

Научный руководитель: Куртова Л. Н.

Аннотация

Статья посвящена рассмотрению точных формул для двойных сумм Гаусса, полученных разными методами в работах С.А. Гриценко и У.М. Пачева, Р.А. Дохова. Приводятся несколько случаев, в которых проводится сравнение формул для двойных сумм Гаусса. В конце работы представлены основные выводы по полученным результатам.

Ключевые слова: двойная сумма Гаусса, точные формулы, результаты исследований.

Вычислению сумм Гаусса разных видов посвящено большое количество работ [1-3]. В статьях [4] и [5] приводятся точные формулы для двойных сумм Гаусса, соответствующих классам идеалов мнимого квадратичного поля. В настоящей работе проводится сравнительный анализ результатов этих исследований.

Введем следующие обозначения. Пусть $F = Q(\sqrt{d})$ – мнимое квадратичное поле, δ_F – дискриминант поля F , $D = -\delta_F$. $Q(\bar{k}) = ak_1^2 + bk_1k_2 + ck_2^2$ – бинарная положительно определенная примитивная квадратичная форма, соответствующая мнимому квадратичному полю F , $D = 4ac - b^2$, $\bar{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$, $(l, q) = 1$.

В работе С.А. Гриценко [4] рассматривается двойная сумма Гаусса

$$G(q, l, \bar{m}) = \sum_{k_1=1}^q \sum_{k_2=1}^q e^{\frac{2\pi i (lQ(\bar{k}) + \bar{m} \cdot \bar{k})}{q}},$$

а в работе У.М. Пачева и Р.А. Дохова [5] изучается частный случай данной суммы $G(q, l) = G(q, l, \bar{0})$.

Сумму Гаусса является мультипликативной функцией, т.е. может быть представлена в виде произведения по степеням простых чисел, входящих в разложение числа q . Пусть $q = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$, $r_j = q / p_j^{\alpha_j}$, тогда справедливо равенство:

$$G(q, l, \bar{m}) = \prod_{j=1}^s G(p_j^{\alpha_j}, l r_j, \bar{m}).$$

В леммах 1, 3, 4, 6, 7 [4] приводятся равенства для $G(p_j^{\alpha_j}, l r_j, \bar{m})$ в случаях, когда дискриминант поля не делится на p_j , делится на p_j и для сумм Гаусса по степеням двойки.

В леммах 7, 11, 12, 13 и теоремах 1, 2, 3 [5] представлены точные формулы для суммы $G(q, l)$.

Таким образом, в работе [5] представлены конечные равенства для двойной суммы Гаусса, в отличие от работы [4], в которой для получения точных равенств, необходимо найти произведение по степеням простых чисел.

Сравним равенства для сумм Гаусса $G(q, l)$ в некоторых частных случаях.

1 случай. Пусть $q = p_1 p_2$, $(\delta_F, q) = 1$. Тогда из леммы 1 [4] получаем, что $G(q, l) = q \left(\frac{\delta_F}{q} \right)$, где $\left(\frac{\delta_F}{q} \right)$ – символ Якоби от числа δ_F по модулю q .

Согласно лемме 7 [5] будем иметь: $G(q, l) = q \left(\frac{-\delta_F}{q} \right) (-1)^{\frac{q-1}{2}}$.

Эти формулы совпадают, так как $\left(\frac{\delta_F}{q} \right) = \left(\frac{-\delta_F}{q} \right) (-1)^{\frac{q-1}{2}}$.

2 случай. Пусть $q = 2^\alpha$, $(\delta_F, 2) = 1$. Тогда из леммы 1 [4] получаем, что

$$G(2^\alpha, l) = 2^\alpha (-1)^{\frac{(1-\delta_F)\alpha}{4}}.$$

Согласно лемме 11 [5] будем иметь $G(2^\alpha, l) = 2^\alpha (-1)^{\frac{(\delta_F^2-1)\alpha}{8}}$.

Так как $(-1)^{\frac{(1-\delta_F)\alpha}{4}} = (-1)^{\frac{(\delta_F^2-1)\alpha}{8}}$, снова получаем совпадение формул.

3. случай. Пусть $q = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, $(\delta_F, q) = p_1$. Тогда из лемм 1 и 3 [4] получаем, что $G(q, l) = q \left(\frac{-D}{p_2^{\alpha_2}} \right) \varepsilon(p_1) \sqrt{p_1} \left(\frac{al p_2^{\alpha_2}}{p_1^{\alpha_1}} \right) \left(\frac{D/p_1}{p_1^{\alpha_1-1}} \right)$, где $\varepsilon(p_1) = 1$, если $p_1 \equiv 1 \pmod{4}$ и $\varepsilon(p_1) = i$, если $p_1 \equiv 3 \pmod{4}$.

Используя теорему 1 [5], будем иметь $G(q, l) = \left(\frac{al}{p_1} \right) \left(\frac{-D/p_1}{p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2}} \right) i^s \sqrt{p_1} q$,

где s может принимать значение 0, 1 или 2 в зависимости от q .

Выявлено противоречие, так как нельзя гарантировать равенство

$$\left(\frac{-D}{p_2^{\alpha_2}} \right) \varepsilon(p_1) \left(\frac{p_2^{\alpha_2}}{p_1^{\alpha_1}} \right) = \left(\frac{-1}{p_2^{\alpha_2}} \right) i^s.$$

4 случай. Пусть $q = 2$, $(\delta_F, 2) = 2$. Согласно равенству из леммы 4 [4], можем считать, что $G(2, l) = 0$.

В работе [5] этот случай отсутствует.

5 случай. Пусть $q = 2^\alpha$, $\alpha \geq 2$, $(\delta_F, 2^\alpha) = 4$. Тогда, используя лемму 6 [4], будем иметь:

$$G(2^\alpha, l) = 2^{\alpha+1} \exp\left(\frac{2\pi i al}{8} + \frac{2\pi i al D/4}{8}\right), \text{ если } \alpha \text{ – нечетное.}$$

В работе [5] этому случаю соответствует лемма 12:

$$G(2^\alpha, l) = \begin{cases} (-1)^{\frac{(D/4)^2-1}{8}\alpha} \cdot i^{al} \cdot 2^{\alpha+1}, & \text{если } D/4 \equiv 1 \pmod{4}, \\ (-1)^{\frac{(D/4)^2-1}{8}\alpha} \cdot 2^{\alpha+1}, & \text{если } D/4 \equiv -1 \pmod{4}. \end{cases}$$

В случае четного α множитель $(-1)^{\frac{(D/4)^2-1}{8}\alpha}$ можно опустить, а в случае нечетного α этот множитель будет равен $(-1)^{\frac{(D/4)^2-1}{8}}$.

Так как $(1+i^{al})(1+i^{alD/4})=2i^{al}$ при $D/4 \equiv 1(\text{mod } 4)$ и $(1+i^{al})(1+i^{alD/4})=2$ при $D/4 \equiv -1(\text{mod } 4)$, то получаем совпадение формул.

В случае нечетного α , после проведения некоторых вычислений, также получим совпадение формул.

6 случай. Пусть $q=2^\alpha$, $\alpha \geq 2$, $(\delta_F/4, 2^\alpha)=2$. Тогда, используя лемму 7 [4], будем иметь: $G(4, l)=0$; $G(2^\alpha, l)=2^{\alpha+1}(1+i^{al})\exp\left(\frac{2\pi ialD/8}{8}\right)$, если α – четное, и $G(2^\alpha, l)=2^{\alpha+1}(1+i^{alD/8})\exp\left(\frac{2\pi ial}{8}\right)$, если α – нечетное.

В работе [5] этому случаю соответствует лемма 13:

$$G(2^\alpha, l) = \begin{cases} i^{al} \cdot 2^{\alpha+1} \sqrt{2}, & \text{если } D/8 \equiv 1(\text{mod } 4), \\ 2^{\alpha+1} \sqrt{2}, & \text{если } D/8 \equiv -1(\text{mod } 4). \end{cases}$$

Заметим, что значения для суммы Гаусса $G(4, l)$ не совпадают. В остальных случаях, можно доказать, что формулы равны.

Выводы.

1. В работе С.А. Гриценко представлен более общий случай точных формул для двойных сумм Гаусса, а именно рассматриваются точные формулы для $G(q, l, \overline{m})$. В работе У.М. Пачева, Р.А. Дохова представлен частный случай формул для $G(q, l) = G(q, l, \overline{0})$.

2. Точные формулы для $G(q, l)$, полученные У.М. Пачевым и Р.А. Доховым более удобны для использования, чем формулы С.А. Гриценко, представленные для степеней простых чисел, входящих в разложение числа q .

3. Присутствуют некоторые несоответствия в полученных точных формулах.

4. В работе [5] отсутствуют случаи $q=2$, $(\delta_F, 2)=2$ и $q=4$, $(\delta_F/4, 2^\alpha)=2$.

1. Малышев А.В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Труды математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1962. – Т. 65. – С. 3–212.
2. Хассе Г. Лекции по теории чисел. – М.: Иностранная литература, 1953. – 519 с.
3. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. – М.: Мир, 1987. – 416 с.
4. Гриценко С.А. О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле // Чебышевский сборник. – 2003. – Т. 4. – Вып. 2. – С. 53–67.
5. Пачев У.М., Дохов Р.А. О двойных суммах Гаусса, соответствующих классам идеалов мнимого квадратичного поля // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2013. – № 19(162). – Вып. 32. – С. 108–119.

Красникова Л.М.

Проблема поиска эффективных методов использования компьютерных технологий как нового дидактического средства изучения геометрии в школе

*Ставропольский государственный педагогический институт
(Россия, Ставрополь)*

doi:10.18411/lj-05-2018-77

idsp: 000001:lj-05-2018-77

Аннотация

В статье рассматривается проблема поиска эффективных методов использования компьютерных технологий на примере исследования свойств окружности девяти точек в интерактивной геометрической среде GeoGebra, а также на примере других современных