РАЗДЕЛ XI. МАТЕМАТИКА

Залукаева О.В.

Две вероятностные задачи математических олимпиад

Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В.Ломоносова
(Россия, Северодвинск)

doi: 10.18411/lj-04-2021-77

Аннотация

В статье приведено подробное решение двух задач по теории вероятностей из Открытых международных студенческих интернет олимпиад по математике. Приведенный материал может служить основой для проведения занятия по подготовке к участию в олимпиадах различного уровня.

Ключевые слова: теория вероятностей, задачи из олимпиад, геометрическая вероятность, двоичные последовательности, числа Фибоначчи

Abstract

In the article provides a detailed solution to two problems in the theory of probability. This tasks was in Open International Student Internet Olympiads in Mathematics. The given material can serve as a basis for conducting a lesson on preparation for participation in Olympiads at various levels.

Keywords: probability theory, problems from Olympiads, geometric probability, binary sequences, Fibonacci numbers

Учебная дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» занимает уникальное положение в системе математического образования, т.к. способствует формированию наиболее значимых общекультурных компетенций. К ним относятся способность вероятностного стиля восприятия и описания объектов, явлений окружающего мира; способность находить организационно-управленческие решения в нестандартных, неопределенных ситуациях [1].

Участие в математических олимпиадах дает дополнительный стимул к раскрытию творческого потенциала студентов, формированию их мировоззрения. Ниже рассмотрены две задачи из Открытых международных студенческих интернет олимпиад по математике (организатор – Поволжский технический университет).

Задача 1. Точка $M(a, b)$ случайным образом ставится на единичный квадрат

$\{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Пусть вероятность того, что уравнение $\frac{1}{3}z^3 - a^2z + b = 0$

имеет три различных действительных корня, равна P . Значение выражения $144P$ равно... (Йошкар-Ола, 2020).

Решение. Пусть дано кубическое уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ с вещественными коэффициентами a, b, c, d . Все возможные случаи состава корней легко определить с помощью знака дискриминанта кубического уравнения [2], т.е.

$$\Delta = -4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 + 18abcd - 27a^2d^2.$$

Возможны три случая:

$\Delta > 0$	Уравнение имеет три различных вещественных корня
$\Delta < 0$	Уравнение имеет один вещественный и пару комплексно-сопряженных корней
$\Delta = 0$	Все корни уравнения вещественные, причем хотя бы два из них совпадают

Для уравнения $\frac{1}{3}z^3 - a^2z + b = 0$ дискриминант

$$\Delta = -4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-a^2)^3 - 27 \left(\frac{1}{3}\right)^2 b^2 = \frac{4}{3}a^6 - 3b^2.$$

Следовательно, уравнение имеет три различных действительных корня, когда $\frac{4}{3}a^6 - 3b^2 > 0$.

Применим формулу геометрической вероятности. Пусть Ω - пространство элементарных событий, событие

$A = \{\text{уравнение имеет три различных действительных корня}\}$:

$$\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$A = \left\{ (x, y): \frac{4}{3}x^6 - 3y^2 > 0 \right\}.$$

Изобразим области Ω и A на плоскости, заметив предварительно, что точки множества A определяются неравенствами $\begin{cases} y < \frac{2}{3}x^3, \\ y > -\frac{2}{3}x^3 \end{cases}$ и $\begin{cases} y > \frac{2}{3}x^3, \\ y < -\frac{2}{3}x^3 \end{cases}$ (рис.1).

Рис.1

Таким образом, вероятность события A :

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\int_0^1 \frac{2}{3}x^3 dx}{1^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Значение выражения $144P$ равно 24.

Аналог известной задачи про коэффициенты и корни квадратного трехчлена. Например, в таком варианте: коэффициенты квадратного трехчлена $x^2 + bx + c$ равновозможно принимают значения из промежутков $|b| \leq 2, |c| \leq 2$. Найти вероятность события $A = \{\text{корни квадратного трехчлена комплексные}\}$.

Задача 2. Монету подбросили 10 раз. Пусть вероятность того, что в последовательности результатов этого опыта не будет двух последовательных гербов равна P . Тогда $1024 \cdot P$ равно... (Йошкар-Ола, 2014).

Решение. Понятно, что непосредственный подсчет числа исходов опыта окажется малоэффективным (хотя, несомненно, выбрав определенную тактику, сделать это несложно).

Можно предложить следующий подход к решению этой задачи. Будем записывать после каждого подбрасывания монеты 1, если выпадет «орёл» и 0, если выпадет «решка». Таким образом, получим двоичные последовательности. Назовем двоичную последовательность правильной, если она не содержит двух соседних единиц. Для наглядности можно составить таблицу:

Количество подбрасываний	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	...
Последовательности	0 1	00 10 01 11	000 100 010 001 101 110 011 111	0000 1000 0100 0010 1010 0001 1001 0101 0011 1011 1100 0110 1110 1101 0111 1111	00000 10000 01000 00100 10100 00010 10010 01010 00001 10001 01001 00101 10101 00011 10001 01011 ...	

Пусть a_n - число правильных последовательностей длины n : $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, ... (в таблице выделены красным цветом). Ясно, что каждая правильная последовательность длины n может быть получена из правильных последовательностей длины $n-1$ приписыванием к ним нуля справа (ко всем) и приписыванием единицы к правильным последовательностям длины $n-1$, оканчивающихся нулем. В свою очередь, правильных последовательностей длины $n-1$, оканчивающихся нулем, будет столько, сколько правильных последовательностей длины $n-2$. Таким образом, для $n \geq 3$ имеем

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Это известная формула, определяющая последовательность Фибоначчи. Итак, получаем

$$a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 8, a_5 = 13, a_6 = 21, a_7 = 34, a_8 = 55, a_9 = 89, a_{10} = 144.$$

Общее число последовательностей, составленных из нулей и единиц, длины 10 равна числу размещений с повторениями $A_2^{10} = 2^{10}$. Искомая вероятность

$$P = \frac{144}{2^{10}} = \frac{9}{64}.$$

Следовательно, $1024 \cdot P = 144$.

Подобное решение можно найти в статье [3].

Рассмотренная задача дарит радость нахождения закономерностей случайного мира.

Приведенная подборка задач может оказаться полезной для подготовки к участию в математических олимпиадах.

1. Пучков, Н.П. Теория вероятностей и математическая статистика в системе политехнического образования: учебное пособие/ Н.П. Пучков. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2017. – 80 с.
 2. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы / Г. Корн – М.: Книга по Требованию, 2014. – 832 с.
 3. Эвнин, А.Ю., Лернер, Э.Ю., Игнатов, Ю.А., Григорьева, И.С. Задачи по теории вероятностей на студенческих олимпиадах, Математическое образование, 2017, выпуск 4(84), 45-60.
-