Для выгнутой формы P_1 стремится к 1 при радиусе кривизны излучающей поверхности, стремящемся к бесконечности (при бесконечно большом радиусе кривизны поверхность становится плоской).

1. Форма ультразвукового пучка. Диаграмма направленности. – https://studopedia.ru/7_99698_forma-ultrazvukovogo-puchka-diagramma-napravlenosti.html
2. Воробьев, Е.А. Теория ультразвуковых колебаний как основа построения и применения технических средств получения информации: учебное пособие / Е.А. Воробьев – СПб: Изд-во СПбГУАП, 2002. – 54 с.
3. Характеристики стали 12X18H10T. – <https://www.chelarm.ru/pdfs/st.12X18H10T.PDF>
4. Биргер, Г.И. Ультразвуковые расходомеры / Г.И. Биргер, Н.И. Бражников – М.: Металлургия, 1964. – 207 с.
5. Каталог пьезокерамических элементов. – <http://avrora-elma.ru>

Третьякова Е.Е., Куксова А.Е., Графский О.А., Пономарчук Ю.В.
Исследование и моделирование в математическом пакете Maple кривых линий Эрмита и поверхностей Куна

*Дальневосточный государственный университет путей сообщения
(Россия, Хабаровск)*

doi: 10.18411/lj-04-2020-13

idsp: ljjournal-04-2020-13

Аннотация

В статье ставится задача рассмотреть метод построения кривых линий Эрмита, и на основе данного метода смоделировать бикубические поверхности Куна. При построении кривой линии или поверхности Эрмита за основу принят матричный метод моделирования поверхности. Результатом выполнения данной работы является моделирование независимых поверхностей и их последующее объединение в фигуру определенной формы. Данная работа реализована в математическом пакете Maple.

Ключевые слова: векторы, матрицы, граничные условия, моделирование бикубических поверхностей Куна, кривые Эрмита, математический пакет Maple.

Abstract

The article aims to consider the method of constructing Hermite curves, and on the basis of this method to simulate bicubic Kuhn surfaces. When constructing a curve line or Hermite surface, the matrix method of surface modeling is used as a basis. The result of this work is the modeling of independent surfaces and their subsequent integration into a shape of a certain shape. This work is implemented in the mathematical package Maple.

Keywords: vectors, matrices, boundary conditions, modeling of bicubic Kuhn surfaces, Hermit curves, mathematical package Maple.

Актуальность данной работы состоит в том, что в современном мире все чаще возникает вопрос об улучшении и упрощении работы в системах проектирования. Матричное представление данных рационально упрощает моделирование сплайнов кривых линий и поверхностей, и их последующую реализацию [1, 2]. Следовательно, в программах САД для описания кривых линий необходимо знать способы применения параметрического уравнения кривой линии третьего порядка [3].

Целью данной статьи является исследование возможности моделирования сплайнов кривых линий и поверхностей посредством альтернативных способов их задания и реализации в матричных операциях посредством математического пакета программирования Maple.

В прикладных задачах интерполяции при автоматизированном проектировании и дизайне наиболее приемлем метод Эрмита.

Воспользуемся простейшим параметрическим уравнением кривой линии третьего порядка (1):

$$\mathbf{P}(u) = [x(u) \quad y(u) \quad z(u)] = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 u + \mathbf{a}_2 u^2 + \mathbf{a}_3 u^3, \quad (0 \leq u \leq 1), \quad (1)$$

где $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ векторные алгебраические коэффициенты уравнения, u – параметр.

По векторным коэффициентам достаточно затруднительно определить форму изменения кривой. Необходимо ввести векторы, обладающие конкретным геометрическим смыслом и значением. Для этого зададим радиусы-векторы конечных точек кривой P_0 и P_1 (для $u=0$), а также векторы P'_0 и P'_1 (для $u=1$), задающих направление касательных в этих точках. Используя граничные условия, получим систему вида (2):

$$\begin{cases} P_0 = P(0) = \mathbf{a}_0; \\ P_1 = P(1) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3; \\ P'_0 = P'(0) = \mathbf{a}_1; \\ P'_1 = P'(1) = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3, \end{cases} \quad (2)$$

Выразим коэффициенты $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ из системы (2) и получим систему вида (3):

$$\begin{cases} \mathbf{a}_0 = P_0; \\ \mathbf{a}_1 = P'_0 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3; \\ \mathbf{a}_2 = -3P_0 + 3P_1 - 2P'_0 - P'_1; \\ \mathbf{a}_3 = 2P_0 - 2P_1 + P'_0 + P'_1, \end{cases} \quad (3)$$

подставив выражение (3) в уравнение (1) получим матричное определение (4):

$$P(u) = [1 - 3u^2 + 2u^3 \quad 3u^2 - 2u^3 \quad u - 2u^2 + u^3 \quad -u^2 + u^3] \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P'_0 \\ P'_1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Система уравнений (4) позволяет установить векторные коэффициенты $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, по которым сформирован другой вид параметрического уравнения кривой линии третьего порядка (1). На основании полученного уравнения (4), с учетом выражения (2) определена матрица M (5):

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

В результате получаем подход для моделирования кривых Эрмита (6):

$$P(u) = U \cdot M \cdot B, \quad (6)$$

где

$$B = [P_0 \quad P_1 \quad P'_0 \quad P'_1]$$

Существует другая форма представления матрицы M (5), но в данной работе используется именно эта матрица, так как она обладает необходимой простотой и удобством для дальнейшего использования. Таким образом, рассмотрен метод Эрмита для создания сплайна кривой линии. Этот метод является основой для моделирования поверхностей Эрмита.

Обозначим для дальнейшего исследования обозначим четыре граничные условия – матрица G : точки $P(0,0), P(0,1), P(1,0), P(1,1)$; касательные векторы в этих точках по направлению u , касательные векторы по направлению v и четыре вектора кручения $P_{uv}(0,0), P_{uv}(0,1), P_{uv}(1,0), P_{uv}(1,1)$, которые являются основой моделирования одного лоскута поверхности Эрмита.

Для построения поверхностей Куна при реализации в математическом пакете программирования Maple используется уравнение (7):

$$P(u,v) = U \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot V^T, \quad (7)$$

где M^T – транспонированная матрица M (5), матрица G с соответствующими компонентами представлена граничными условиями, и представляет собой совокупность векторов, объединяющая векторы заданных точек поверхности, векторы-касательные по направлениям u, v и векторы кручения в этих точках. Матрица U имеет выражение

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix},$$

а матрица V^T , как и матрица U , но по параметру v , но транспонированная.

В результате матрица, как произведение матриц (7), пригодная для моделирования заданной поверхности, имеющей нескольких лоскутов, использована в различных вариаций (форм), которые представлены по замыслу авторов на рисунках 1 и 2.

Широкие возможности математического пакета Maple позволяют использовать данный метод без каких-либо затруднений. Последовательность действий при моделировании данных поверхностей по отдельным лоскутам представлена в следующем алгоритме. Для построения необходимо задать исходные данные: $P(0,0), P(0,1), P(1,0), P(1,1)$, планируемые касательные векторы по параметру u $P_u(0,0), P_u(0,1), P_u(1,0), P_u(1,1)$, аналогично по параметру v $P_v(0,0), P_v(0,1), P_v(1,0), P_v(1,1)$, векторы кручения $P_{uv}(0,0), P_{uv}(0,1), P_{uv}(1,0), P_{uv}(1,1)$, посредством координат X, Y, Z . Ниже представлен фрагмент формирования указанных матриц для первого лоскута.

```
Xm1:=Matrix([[P100[1,1],      P101[1,1],      Pv100[1,1],
Pv101[1,1]], [P110[1,1], P111[1,1], Pv110[1,1], Pv111[1,1]],
[Pu100[1,1],      Pu101[1,1],      Puv100[1,1],      Puv101[1,1]],
[Pu110[1,1], Pu111[1,1], Puv110[1,1], Puv111[1,1]]]);
Ym1:=Matrix([[P100[1,2],      P101[1,2],      Pv100[1,2],
Pv101[1,2]], [P110[1,2], P111[1,2], Pv110[1,2], Pv111[1,2]],
[Pu100[1,2],      Pu101[1,2],      Puv100[1,2],      Puv101[1,2]],
[Pu110[1,2], Pu111[1,2], Puv110[1,2], Puv111[1,2]]]);
Zm1:=Matrix([[P100[1,3],      P101[1,3],      Pv100[1,3],
Pv101[1,3]], [P110[1,3], P111[1,3], Pv110[1,3], Pv111[1,3]],
[Pu100[1,3],      Pu101[1,3],      Puv100[1,3],      Puv101[1,3]],
[Pu110[1,3], Pu111[1,3], Puv110[1,3], Puv111[1,3]]]);
```

При визуализации первого лоскута, его анализа, производилось задание векторов следующих планируемых лоскутов и их визуализация. При помощи функций математического пакета Maple, смоделированные лоскуты объединяются в одну фигуру. Результаты построения представлены на рисунке 1 и рисунке 2.

Рисунок 1 – Визуализация в Maple (модель 1)

Рисунок 2 – Визуализация в Maple (модель 2)

В результате проведенной работы созданы поверхности Куна, которые построены на основе нескольких лоскутов, моделирующих единое целое проектируемых предметов. Каждый лоскут построен с помощью четырех интерполяционных точек (радиус-векторов), восьми векторов-касательных в этих точках и четырех векторов кручения. В связи с тем, что матричные представления задания данных и действия над ними универсальны, бикубическая поверхность Куна находит широкое применение в системах проектирования. Это достаточно удобный, но в то же время не единственный метод, так как имеют место и другие методы моделирования поверхностей.

1. Ли К. Основы САПР (CAD/CAM/CAE) / Кунву Ли. – СПб.: Питер, 2004. – 560 с.
2. Роджерс Д. Математические основы машинной графики: Пер с англ. / Д. Роджерс, Дж. Адамс – М.: Мир, 2001. – 604 с.
3. Графский О.А. Вычислительная геометрия: учебное пособие / О.А. Графский. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2014. – 150 с.