неопределенный случай тогда и только тогда, когда функция $(-pq)^{-n/2}$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^+)$ суммируемых функций на полуоси $\mathbb{R}^+$.

Следствие 4. Пусть выполнены условия 1-5, $pq > 0$ на $\mathbb{R}^+$ и все собственные значения матрицы C чисто мнимые. Тогда для выражения vy имеет место вполне неопределенный случай тогда и только тогда, когда функция $(pq)^{-n/2}$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^+)$ суммируемых функций на полуоси $\mathbb{R}^+$.

1. Eastham M. S. P. The asymptotic solution of linear differential systems. Oxford: Clarendon Press, 1989. 241 p.
2. Федорюк М. В. Асимптотика собственных значений и собственных функций одномерных сингулярных дифференциальных операторов // ДАН СССР. 1966. Т. 169, вып. 2. С. 288 – 291.
3. Everitt W. N., Marcus L. Boundary value problem and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators. Mathematical surveys and monographs, 1999. 560 p.
4. Мирзоев К. А. Об одном классе операторов, связанных с дифференциальными уравнениями второго порядка // Успехи математических наук. 2000. Т. 55, вып. 6. С. 147 – 148.
5. W.N. Everitt, L. Marcus Boundary value problems and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators / AMS: Mathematical Surveys and Monographs, 1999. – Vol.61. – 185 p.

Конечная Н.Н.

Асимптотическое интегрирование линейных дифференциальных уравнений второго порядка

*Северный (Арктический) федеральный университет
имени М.В. Ломоносова
(Россия, Архангельск)*

doi: 10.18411/lj-04-2019-249

idsp: ljjournal-04-2019-249

Аннотация

В данной работе сформулированы теоремы об асимптотике фундаментальной системы решений некоторого класса линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Полученные результаты применяются к изучению вопроса об индексе дефекта соответствующего симметрического дифференциального оператора. Приведены примеры реализации случая предельного круга для дифференциальных операторов второго порядка.

Ключевые слова: квазипроизводные, асимптотика решений, линейные дифференциальные уравнения

Abstract

In this paper, theorems on the asymptotics of the fundamental system of solutions of a certain class of second-order linear differential equations are formulated. The results obtained are applied to the study of the index of the defect of the corresponding symmetric differential operator. Examples of the implementation of the limit circle case for second order differential operators are given.

Keywords: quasi-derivatives, asymptotic solutions, linear differential equations

1. Пусть $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, μ – вещественнозначная измеримая функция на $\mathbb{R}^+$ такая, что μ^2 суммируема на каждом замкнутом конечном подынтервале полуоси $\mathbb{R}^+$. Пусть далее y – финитная абсолютно непрерывная функция на $\mathbb{R}^+$. Определим квазипроизводную функции y , полагая $y^{[1]} = y' - \mu y$.

Предположим, что функция $y^{[1]}$ также абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}^+$, и рассмотрим дифференциальное выражение

$$ly = -(y^{[1]})' - \mu y^{[1]} - \mu^2 y.$$

Таким образом, область определения дифференциального выражения второго порядка ly – это множество всех финитных абсолютно непрерывных функций y , для которых существует локально абсолютно непрерывная квазипроизводная $y^{[1]}$.

Несложно показать, что выражение ly является симметрическим (формально самосопряженным) дифференциальным выражением.

Пусть v – вещественнозначная измеримая функция на R^+ такая же, как и μ , т.е. функция v^2 суммируема на каждом замкнутом конечном подынтервале полуоси R^+ . Предположив, что функции y и $y_{[1]} = y' - vy$ локально абсолютно непрерывны на R^+ , рассмотрим дифференциальное выражение второго порядка

$$sy = -(y^{[1]})' - vy^{[1]} - v^2y.$$

Рассмотрим далее линейные дифференциальные уравнения второго порядка

$$-(y^{[1]})' - \mu y^{[1]} - \mu^2 y = 0 \quad (1)$$

и

$$-(y^{[1]})' - vy^{[1]} - v^2 y = 0 \quad (2)$$

Данная работа посвящена установлению достаточных условий на функции μ и v уравнений (1) и (2) и фундаментальную систему решений u и v уравнения (2), обеспечивающих асимптотическую близость их решений. Полученные результаты применяются к изучению вопроса об индексе дефекта соответствующих симметрических дифференциальных операторов второго порядка.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Пусть функции u и v образуют фундаментальную систему решений уравнения (2). Пусть далее функции μ и v такие, что функции $(\mu-v)^2 w^2$, $|\mu-v||ww'|$ и $|\mu-v|(uv)'$, где $w=u$ или $w=v$, принадлежат пространству $L_1(R^+)$ суммируемых функций на полуоси R^+ .

Тогда для любой пары вещественных чисел α и β уравнение (1) имеет единственное решение $f(x)$, удовлетворяющее условиям

$$f(x) = (\alpha + a(x))u(x) + (\beta + b(x))v(x),$$

$$f_{[1]}(x) = (\alpha + a(x))u_{[1]}(x) + (\beta + b(x))v_{[1]}(x),$$

где $a(x)$ и $b(x)$ – бесконечно малые функции при $x \rightarrow +\infty$.

Применяя классические асимптотические формулы Лиувилля-Грина для решений уравнения (2), получаем достаточный признак асимптотической близости решений дифференциальных уравнений (1) и (2) уже в терминах коэффициентов μ и v этих уравнений.

Теорема 2. Пусть локально суммируемая на полуоси R^+ функция v имеет локально абсолютно непрерывную производную второго порядка на R^+ .

Пусть далее $v' < 0$ на R^+ , функции $(-v')^{-1/4}((-v')^{-1/4})''$, $\mu - v$, $(\mu - v)^2(-v')^{-1/2}$ принадлежат пространству $L_1(R^+)$ суммируемых функций на полуоси R^+ , а функция $(-v')^{1/2}$ не принадлежит этому пространству. Тогда справедливо утверждение теоремы 1.

2. Выражение ly известным образом порождает минимальный замкнутый симметрический оператор L_0 в пространстве $L_2(R^+)$ суммируемых с квадратом модуля функций на полуоси R^+ (см., например, [1]).

Верхнее n_+ и нижнее n_- дефектные числа оператора L_0 , равные максимальному количеству линейно независимых решений уравнения $ly = \lambda y$ при $\text{Im } \lambda < 0$ и $\text{Im } \lambda > 0$ соответственно, равны между собой и равны либо 1, либо 2. Следовательно, пара (n_+, n_-) , называемая индексом дефекта оператора L_0 , равна либо (1,1), либо (2,2).

В первом случае говорят, что для выражения ly имеет место случай предельной точки, а во втором – случай предельного круга [2]. Таким образом, для выражения ly реализуется случай предельного круга тогда и только тогда, когда все решения уравнения (1) принадлежат пространству $L_2(R^+)$.

Обозначим теперь через S_0 минимальный замкнутый симметрический оператор, порожденный выражением sy в пространстве $L_2(R^+)$ суммируемых с квадратом модуля функций на полуоси R^+ .

Теоремы 1 и 2 позволяют найти дефектные числа минимального оператора L_0 , порожденного выражением ly в пространстве $L_2(R^+)$, зная эти числа для оператора S_0 , порожденного выражением sy . А именно, справедливы следующие утверждения.

Следствие 1. Пусть справедливы условия теоремы 1. Тогда индексы дефекта оператора S_0 и индексы дефекта оператора L_0 совпадают.

Доказательство. Обозначим через u_1 и v_1 решения уравнения (1), определенные равенствами

$$u_1 = (1 + a(x))u(x) + b(x)v(x), \quad v_1 = a(x)u(x) + (1 + b(x))v(x).$$

Согласно теореме 1, такие решения существуют и отвечают числам $\alpha=1$, $\beta=0$ и $\alpha=0$, $\beta=1$ соответственно. Легко показать, что u_1 и v_1 являются линейно независимыми решениями уравнения (1).

Вычисления показывают, что функции

$$|u_1|^2 + |v_1|^2 \text{ и } |u|^2 + |v|^2$$

принадлежат или не принадлежат пространству $L_1(R^+)$ суммируемых функций на полуоси R^+ одновременно. Из этого следует справедливость следствия 1.

Следствие 2. Пусть справедливы условия теоремы 2. Тогда операторы S_0 и L_0 имеют индексы дефекта (2,2) тогда и только тогда, когда функция $(-v')^{-1/2}$ принадлежит пространству $L_1(R^+)$ суммируемых функций на полуоси R^+ .

Доказательство. В доказанном выше следствии 1 было показано, что индексы дефекта оператора S_0 и индексы дефекта оператора L_0 совпадают.

С другой стороны, согласно асимптотическим формулам Лиувилля-Грина (см., например, [3]), уравнение (2) имеет фундаментальную систему решений u и v , для которых при $x \rightarrow +\infty$ справедливы асимптотические формулы

$$u = (-v')^{-1/4} \exp(i \int_0^x (-v')^{1/2} dt) (1 + o(1)), \quad v = (-v')^{-1/4} \exp(-i \int_0^x (-v')^{1/2} dt) (1 + o(1)).$$

Поэтому функция $|u|^2 + |v|^2$ имеет такое же поведение при $x \rightarrow +\infty$, как и функция $(-v')^{-1/2}$. Таким образом, функция $(-v')^{-1/2}$ принадлежит пространству $L_1(R^+)$ тогда и только тогда, когда линейно независимые решения u и v принадлежат пространству $L_1(R^+)$. Следовательно, оператор S_0 , а значит и оператор L_0 , имеет индексы дефекта (2,2). Следствие 2 доказано.

2. Пусть теперь μ' означает обобщенную производную, т.е. производную в смысле теории распределений. В смысле теории распределений справедливо равенство $(\mu y)' = \mu' y + \mu y'$. Следовательно, в выражении ly можно раскрыть все скобки. Сделав это, получаем $ly = -y'' + \mu' y$.

Таким образом, оператор L_0 является минимальным замкнутым симметрическим оператором, порожденный выражением $ly = -y'' + \mu' y$ в пространстве $L_2(R^+)$ суммируемых с квадратом модуля функций на полуоси R^+ , а уравнение $ly = \lambda y$ приобретает вид

$$-y'' + \mu' y = \lambda y.$$

Корректное определение оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом – распределением, являющимся сингулярным распределением первого порядка, рассмотренное здесь, приведено в [4], [5].

Построим примеры реализации случая предельного круга для симметрических дифференциальных выражений второго порядка.

Пусть v – отрицательная, строго убывающая и трижды непрерывно дифференцируемая функция на R^+ , удовлетворяющая условиям теоремы 2, и такая, что ее производная также строго убывает на R^+ , а функция $(-v')^{-1/2}$ принадлежит пространству $L_1(R^+)$ суммируемых функций на полуоси R^+ .

Пусть далее x_n ($n=1,2,\dots$) – бесконечно большая возрастающая последовательность положительных чисел, $x_0=0$. На каждом отрезке $[x_k, x_{k+1})$ отметим произвольную точку z_k и определим на R^+ функцию v , полагая $\mu(x) = v(z_k)$ на каждом отрезке $[x_k, x_{k+1})$. Тогда распределение μ' , очевидно, имеет вид

$$\mu' = h_0 \delta(x - x_0) + h_1 \delta(x - x_1) + \dots,$$

где $h_k = v(z_{k+1}) - v(z_k)$ – вещественные числа, $\delta(x)$ – дельта – функция.

Вычисления показывают, что если ряд

$$\sum v'(x_{k+1})^2 (x_{k+1} - x_k)^2$$

сходится, то выполняются все условия следствия 2. Поэтому операторы S_0 и L_0 имеют индексы дефекта (2,2), т.е. для операторов S_0 и L_0 реализуется случай предельного круга.

Приведем примеры последовательностей чисел x_k ($k=1,2,\dots$) и функций v , удовлетворяющие всем выше перечисленным условиям, необходимых для реализации случая предельного круга.

I. Пусть $x_k = \alpha \ln k$ и $v(x) = -x^\beta - 1$, где числа $\alpha > 0$ и $\beta > 3$.

II. Пусть опять $x_k = \alpha \ln k$, а $v(x) = -e^{\beta x}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha\beta < 1$.

1. W. N. Everitt, A. Zettl Generalized symmetric ordinary differential expressions I: The general theory // Nieuw archief voor wiskunde (3). – 1979. – XXVII. – p. 363-397.
2. H. Weyl Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen // Math. Ann. – vol. 68. – 1910. – p. 220-269.
3. Eastham M. S. P. The asymptotic solution of linear differential systems. Oxford: Clarendon Press, 1989. 241 p.
4. А.М. Савчук, А.А. Шкаликос Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки. – 1999. – 66:3. – С. 847-912.
5. А.М. Савчук, А.А. Шкаликос Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами - распределениями // Труды Моск. Матем. Общества. – 2003. – 64. – С. 159-212.

Коринец Е.М.

Решение практических задач гидрологии с применением информационных систем и технологий

*Российский государственный гидрометеорологический университет
(Россия, Санкт-Петербург)*

doi: 10.18411/lj-04-2019-250

idsp: ljournal-04-2019-250

Аннотация

Проведён критический анализ эффективности формул для расчета расходов донных наносов и предложена новая методика, включающая в себя использование баз данных и баз знаний, которая может служить основой автоматизированной информационной системы принятия решений.

Ключевые слова: речная система, база знаний, информационная система, параметрическая модель, компьютерная технология.

Abstract: a critical analysis of the efficiency of formulas for calculating the flow of bottom sediments is carried out and a new technique is proposed, which includes the use of databases and knowledge bases, which can serve as the basis for an automated information decision-making system.

Keywords: river system, knowledge base, information system, parametric model, computer technology.

На основе данных исследований по оценке формул для расчета расходов донных наносов были сделаны выводы о причинах неудовлетворительных результатов расчетов по ним. Одной из основных причин таких результатов явилось то, что для равнинных пойменных рек не учитывался эффект взаимодействия руслового и пойменного потоков. Тогда была сформулирована новая научная задача по оценке влияния эффекта взаимодействия руслового и пойменного потока на транспорт донных наносов, для ее решения было необходимо экспериментальным путем установить влияние пойменной шероховатости на транспортирующую способность руслового потока.