РАЗДЕЛ XXII. МАТЕМАТИКА

Конечная Н.Н.

Асимптотика решений одного класса линейных дифференциальных уравнений

Северный (Арктический) федеральный университет
имени М.В. Ломоносова
(Россия, Архангельск)

doi: 10.18411/lj-04-2019-248

idsp: ljjournal-04-2019-248

Аннотация

В данной работе получены асимптотические формулы и верхние оценки для решений одного класса линейных дифференциальных уравнений высокого порядка. При этом применяются асимптотические методы, изложенные в работах [1] и [2].

Ключевые слова: квазипроизводные, асимптотика решений, оценки решений, линейные дифференциальные уравнения

Abstract

In this paper, we obtain asymptotic formulas and upper bounds for solutions of a class of high-order linear differential equations. In this case, the asymptotic methods described in [1] and [2] are used.

Keywords: quasi-derivatives, asymptotic solutions, estimates of solutions, linear differential equations

1. Пусть вещественнозначные функции p и q определены и измеримы на полуоси $R^+ = [0, +\infty)$, функции p^{-1} , q суммируемы на каждом ее замкнутом конечном подынтервале $[\alpha, \beta] \subset R^+$, α_k ($k = 1, 2, \dots, n$) – действительные числа, причем $\alpha_k = \alpha_{n+1-k}$, n – натуральное число. Обозначим через F матрицу с элементами f_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n+1$), где $f_{k,k+1} = p^{-1}$, $f_{k+1,k} = \alpha_k q$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и $f_{ij} = 0$ при остальных значениях i и j .

Следуя общепринятой процедуре (см., например, [3]), определим посредством F квазипроизводные функции y , полагая $y^{[0]} = y$, $y^{[1]} = p(y^{[0]})'$, $y^{[k+1]} = p((y^{[k]})' - f_{k+1,k}y^{[k-1]})$ ($k=1, 2, \dots, n-1$), и скалярное квазидифференциальное выражение $n+1$ -го порядка, полагая $vy = (y^{[n]})' - f_{n+1,n}y^{[n-1]}$.

Таким образом, область определения выражения v – это множество всех функций y , для которых существуют локально абсолютно непрерывные квазипроизводные $y^{[j]}$ до n -го порядка включительно.

В данной работы исследуется асимптотика решений линейного дифференциального уравнения

$$vy = 0 \quad (1)$$

при $x \rightarrow +\infty$, и, как следствие, получены оценки для решений дифференциального уравнения (1). Рассмотрены некоторые частные случаи уравнения (1). Особо стоит отметить второй случай, так как асимптотические формулы для решений этого класса дифференциальных уравнений были получены другим методом в работе [4]. Полученные результаты применяются к исследованию спектральных свойств соответствующего минимального замкнутого дифференциального оператора.

2. Уравнение (1) равносильно системе дифференциальных уравнений

$$Y' = F(x)Y, \quad (2)$$

где Y – вектор-столбец, элементами которого являются квазипроизводные $y^{[k]}$ функции y ($k = 0, 1, \dots, n$). Таким образом, вопрос об асимптотике решений дифференциального уравнения (1) сводится к исследованию асимптотики решений системы дифференциальных уравнений (2).

Матрицу $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = (q/p)^2 Q(x) C Q^{-1}(x),$$

где $Q(x)$ – диагональная матрица размерности $(n+1) \times (n+1)$ вида

$$Q = \text{dg} (1, (pq)^{1/2}, (pq), (pq)^{3/2}, \dots, (pq)^{n/2});$$

C – постоянная матрица с элементами c_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n+1$), где $c_{k,k+1} = 1$, $c_{k+1,k} = \alpha_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и $c_{ij} = 0$ при остальных значениях i и j .

Перечислим основные предположения относительно матрицы F :

1. матрица C имеет $n+1$ простое собственное значение $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$; через $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ обозначим соответствующие собственные векторы матрицы C ;
2. функции $p(x)$ и $q(x)$ отличны от нуля на R^+ ;
3. функции $p'(x)$, $q'(x)$ принадлежат пространству $AC_{\text{loc}}(R^+)$ локально абсолютно непрерывных функций на полуоси R^+ ;
4. функция $p|^{-1/4}(|p|(|p|^{-1/4}))'$ принадлежит пространству $L_1(R^+)$ суммируемых функций на полуоси R^+ ;
5. функция $(|q|/|p|)^{1/2}$ не принадлежит пространству $L_1(R^+)$ – суммируемых функций на полуоси R^+ .

Справедлива следующая теорема:

Теорема. Пусть выполнены условия 1-5. Тогда система (2) имеет решения $Y_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n+1$) такие, что при $x \rightarrow +\infty$ справедливы асимптотические формулы

$$Y_k(x) = (pq)^{-n/4} Q(x) (v_k + o(1)) \exp(\lambda_k \int_0^x (q/p)^{1/2} dt). \quad (3)$$

Доказательство. Преобразование $Y = QZ$ приводит систему (2) к виду

$$Z' = ((q/p)^{1/2} C - Q^{-1} Q') Z, \quad (4)$$

Пусть T – матрица, вектор – столбцами которой являются собственные векторы $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ матрицы C . Диагонализируем матрицу C посредством матрицы T . Получим, что $T^{-1}CT = \text{dg}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1})$.

Вычисления показывают, что $Q^{-1}Q' = ((pq)' / 2pq) D$, где $D = \text{dg}(0, 1, 2, \dots, n)$ – постоянная диагональная матрица. Дальнейшее преобразование $Z = TW$ приводит систему (4) к виду

$$W' = ((q/p)^{1/2} T^{-1}CT - ((pq)' / 2pq) T^{-1}DT) W. \quad (5)$$

Согласно теореме 1.3.1 из [1, с. 8], система (5) имеет решения $W_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, n+1$) такие, что при $x \rightarrow +\infty$ справедливы асимптотические формулы

$$W_k(x) = (e_k + o(1)) \exp(\int_0^x \{(q/p)^{1/2} \lambda_k - r_{kk} ((pq)' / 2pq)\} dt), \quad (6)$$

где r_{kk} – k -ый диагональный элемент матрицы $T^{-1}DT$.

Найдем диагональные элементы матрицы $T^{-1}DT$. Пусть E – матрица с элементами $e_{i,n+1-i} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$) и $e_{ij} = 0$ при остальных значениях i и j ($i, j = 1, 2, \dots, n+1$), S – симметрическая матрица с элементами $s_{i,n+3-i} = 1$ ($i = 2, 3, \dots, n+1$), $s_{i,n+1-i} = \alpha_{n+1-i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и $s_{ij} = 0$ при остальных значениях i и j ($i, j = 1, 2, \dots, n+1$).

Так как матрица C имеет различные собственные значения λ_k ($k = 1, 2, \dots, n+1$), и ее можно представить в виде $C = ES$, то, в силу леммы 1.2.2. из [1, с. 4], строками матрицы T^{-1} являются вектор-строки $(Ev_k)^t / (Ev_k)^t v_k$ ($k = 1, 2, \dots, n+1$).

Из этого, в частности, следует, что диагональные элементы матрицы $T^{-1}DT$ находятся по формуле $r_{kk} = n/2$ ($k = 1, 2, \dots, n+1$). Следовательно, асимптотические формулы (6) примут вид

$$W_k(x) = (pq)^{-n/4} (e_k + o(1)) \exp(\lambda_k \int_0^x (q/p)^{1/2} dt).$$

В силу преобразований $Y = QTW$ система (2) имеет решения $Y_k(x)$, для которых при $x \rightarrow +\infty$ справедливы асимптотические формулы (3). Теорема доказана.

Замечание. Так как матрица T является постоянной, а элементами первой строки диагональной матрицы $Q(x)$ служат числа, то из асимптотических формул (3) легко получить и асимптотику решений дифференциального уравнения (1) при $x \rightarrow +\infty$.

Следствие 1. Пусть выполнены условия 1-5, $pq < 0$ на R^+ и все собственные значения матрицы S действительные. Тогда для всех решений уравнения (1) при больших значениях аргумента верны оценки

$$|y| \leq (\text{const}) |pq|^{-n/4}. \quad (7)$$

Доказательство. В силу теоремы при выполнении вышеперечисленных условий система (2) имеет фундаментальную систему решений $Y_k(x)$, для которой при $x \rightarrow +\infty$ справедливы асимптотические формулы (3).

Если $pq < 0$ на R^+ и все собственные значения S являются действительными, то в показателе экспоненциальной функции стоит чисто мнимое выражение. Поэтому для решений уравнения (1) будут справедливы оценки (7). Следствие доказано.

Следствие 2. Пусть выполнены условия 1-5, $pq > 0$ на R^+ и все собственные значения матрицы S чисто мнимые. Тогда для всех решений уравнения (1) при больших значениях аргумента верны оценки (7).

3. Рассмотрим следующие примеры:

1) Пусть $\alpha_k = 1$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Матрица S с элементами $s_{k,k+1} = 1$, $s_{k+1,k} = 1$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и $s_{ij} = 0$ при остальных значениях i и j ($i, j = 1, 2, \dots, n+1$) имеет простые действительные собственные числа $\lambda_k = 2\cos(\pi k/(n+2))$ ($k = 1, 2, \dots, n+1$).

Тогда система (2) имеет решения $Y_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n+1$) такие, что справедливы асимптотические формулы при $x \rightarrow +\infty$

$$Y_k(x) = (pq)^{-n/4} Q(x) (v_k + o(1)) \exp(2\cos(\pi k/(n+2)) \int_0^x (q/p)^{1/2} dt).$$

Согласно следствию, для решений уравнения (1) верны оценки (7) при условии, что $pq < 0$.

2) Пусть $\alpha_k = k(n+1-k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Матрица S с элементами $s_{k,k+1} = 1$, $s_{k+1,k} = k(n+1-k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и $s_{ij} = 0$ при остальных значениях i и j ($i, j = 1, 2, \dots, n+1$) имеет простые действительные собственные числа $\lambda_k = n-2k$ ($k = 0, 1, \dots, n$).

Тогда система (2) имеет решения $Y_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n+1$) такие, что справедливы асимптотические формулы при $x \rightarrow +\infty$

$$Y_k(x) = (pq)^{-n/4} Q(x) (v_k + o(1)) \exp((n-2k) \int_0^x (q/p)^{1/2} dt).$$

Согласно следствию, в данном случае для решений уравнения (1) верны оценки (7) при условии, что $pq < 0$.

4. Выражение ν известным образом порождает минимальный замкнутый симметрический оператор L_0 в пространстве $L_2(R^+)$ суммируемых с квадратом модуля функций на полуоси R^+ (см., например, [5]). Известно, что верхнее и нижнее дефектные числа оператора L_0 равны максимальному количеству линейно независимых решений уравнения $\nu u = \mu u$ при $\text{Im } \mu < 0$ и $\text{Im } \mu > 0$ соответственно. В случае, когда оператор L_0 имеет максимальные дефектные числа, равные порядку $n+1$ выражения ν , выражение ν называется квазирегулярным (для выражения ν имеет место вполне неопределенный случай). Теорема 1 позволяет получить следующие следствия:

Следствие 3. Пусть выполнены условия 1-5, $pq < 0$ на R^+ и все собственные значения матрицы S действительные. Тогда для выражения ν имеет место вполне

неопределенный случай тогда и только тогда, когда функция $(-pq)^{-n/2}$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^+)$ суммируемых функций на полуоси $\mathbb{R}^+$.

Следствие 4. Пусть выполнены условия 1-5, $pq > 0$ на $\mathbb{R}^+$ и все собственные значения матрицы C чисто мнимые. Тогда для выражения vy имеет место вполне неопределенный случай тогда и только тогда, когда функция $(pq)^{-n/2}$ принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^+)$ суммируемых функций на полуоси $\mathbb{R}^+$.

1. Eastham M. S. P. The asymptotic solution of linear differential systems. Oxford: Clarendon Press, 1989. 241 p.
2. Федорюк М. В. Асимптотика собственных значений и собственных функций одномерных сингулярных дифференциальных операторов // ДАН СССР. 1966. Т. 169, вып. 2. С. 288 – 291.
3. Everitt W. N., Marcus L. Boundary value problem and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators. Mathematical surveys and monographs, 1999. 560 p.
4. Мирзоев К. А. Об одном классе операторов, связанных с дифференциальными уравнениями второго порядка // Успехи математических наук. 2000. Т. 55, вып. 6. С. 147 – 148.
5. W.N. Everitt, L. Marcus Boundary value problems and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators / AMS: Mathematical Surveys and Monographs, 1999. – Vol.61. – 185 p.

Конечная Н.Н.

Асимптотическое интегрирование линейных дифференциальных уравнений второго порядка

*Северный (Арктический) федеральный университет
имени М.В. Ломоносова
(Россия, Архангельск)*

doi: 10.18411/lj-04-2019-249

idsp: ljournal-04-2019-249

Аннотация

В данной работе сформулированы теоремы об асимптотике фундаментальной системы решений некоторого класса линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Полученные результаты применяются к изучению вопроса об индексе дефекта соответствующего симметрического дифференциального оператора. Приведены примеры реализации случая предельного круга для дифференциальных операторов второго порядка.

Ключевые слова: квазипроизводные, асимптотика решений, линейные дифференциальные уравнения

Abstract

In this paper, theorems on the asymptotics of the fundamental system of solutions of a certain class of second-order linear differential equations are formulated. The results obtained are applied to the study of the index of the defect of the corresponding symmetric differential operator. Examples of the implementation of the limit circle case for second order differential operators are given.

Keywords: quasi-derivatives, asymptotic solutions, linear differential equations

1. Пусть $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, μ – вещественнозначная измеримая функция на $\mathbb{R}^+$ такая, что μ^2 суммируема на каждом замкнутом конечном подынтервале полуоси $\mathbb{R}^+$. Пусть далее y – финитная абсолютно непрерывная функция на $\mathbb{R}^+$. Определим квазипроизводную функции y , полагая $y^{[1]} = y' - \mu y$.

Предположим, что функция $y^{[1]}$ также абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}^+$, и рассмотрим дифференциальное выражение

$$ly = -(y^{[1]})' - \mu y^{[1]} - \mu^2 y.$$

Таким образом, область определения дифференциального выражения второго порядка ly – это множество всех финитных абсолютно непрерывных функций y , для которых существует локально абсолютно непрерывная квазипроизводная $y^{[1]}$.