6. Лоренц К. Обратная сторона зеркала: Пер. с нем. / Под ред. А. В. Гладкого, сост. А. В. Гладкого, А. И. Федорова; Послесловие А. И. Федорова. – М.: Республика, 1998. – 393 с.
7. Напалков С. В. Специфика заданий и задачных конструкций информационного контента тематического образовательного web-квеста // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия: Социальные науки. – 2014, № 4 [36]. – С. 222-226.
8. Ротова, Н.А. Мастер-класс «Презентация профессии «учитель начальных классов» как средство активизации профессионального и личностного самоопределения личности. Педагогика и современное образование: традиции, опыт и инновации : сборник статей Международной научно-практической конференции. Пенза:Издательство: МЦНС «Наука и Просвещение», 2018. С.145.
9. Фортыхина С. Н., Павлова Л. Н. Профессиональное самоопределение выпускников педагогического вуза // Вестник Новосибирского государственного педагогического университета. – 2017, том 7, № 6. – С. 26-36.
10. Хлупина Надежда Олеговна Использование веб-квест-технологии в организации самостоятельной работы студентов // Сибирский педагогический журнал. 2016. №5. С.87..2
11. Шестакова А. Ю. Веб-квест как новая образовательная технология в высшей школе // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Гуманитарные и общественные науки. 2012. №148. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/web-kvest-kak-novaya-obrazovatel'naya-tehnologiya-v-vysshey-shkole> (дата обращения: 26.12.2018).
12. Leung, C. B., & Unal, Z. (2013). Advantages and disadvantages of classroom instruction with WebQuests: Connecting literacy and technology. *Journal of Reading Education*, 38(2), 31-38.

Антоновская О.Г., Бесклубная А.В.

Об изложении приложений метода точечных отображений в учебном процессе

*Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет
(Россия, Нижний Новгород)*

doi: 10.18411/lj-04-2019-02

idsp: ljjournal-04-2019-02

Аннотация

В работе излагается методика исследования динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями, содержащими малый параметр, методом приближенных точечных отображений и предложения по ее применению в образовательном процессе. Применение методики иллюстрируется на примере исследования динамики квазигармонического осциллятора.

Ключевые слова: образовательный процесс, профессиональная деятельность, компетенции, метод точечных отображений, квазигармонический осциллятор.

Abstract

In current work the methodic of studying of dynamic systems, which are described by differential systems with small parameter, by the method of approximate point mappings and the proposals of its using in educational process are stated. This methodic is put into practice on the example of quasi-harmonic oscillator dynamic study.

Keywords: educational process, professional activity, competences, point mappings method, quasi-harmonic oscillator.

В настоящее время перед высшими учебными заведениями ставится задача подготовки высококвалифицированных специалистов, владеющих современными методами моделирования и исследования, способных продуктивно работать в высокотехнологичных отраслях, развивать отечественную науку и производство [1,2]. Особую роль в решении этой задачи играют фундаментальные дисциплины, в частности, дисциплины математические [1]. Традиционно содержание образовательных курсов по математическим дисциплинам не рассматривает прикладных вопросов, связанных с будущей профессиональной деятельностью обучаемого [1], а значит не обеспечивается полноценное формирование целого ряда компетенций. Речь идет в первую очередь об общепрофессиональных компетенциях ОПК-3 (способность представлять адекватную современному уровню знаний научную картину мира на основе законов и методов

естественных наук и математики) и ОПК-4 (способность выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат), а также профессиональной компетенции ПК-5 (способность выполнять математическое моделирование объектов и процессов по типовым методикам, в том числе с использованием стандартных пакетов прикладных программ). При этом важное значение играет не только профориентационная деятельность вуза, позволяющая отобрать подготовленных молодых людей, способных к освоению программ высшего профессионального образования [3,4], из которых со временем получатся технически грамотные специалисты, но и изучение в вузах математических методов исследования, которые могут быть полезны при моделировании и исследовании динамики технических систем [1]. Одним из таких методов является метод точечных отображений.

Метод точечных отображений был введен в теорию систем автоматического регулирования и теорию колебаний А. А. Андроновым [5], и получил свое дальнейшее развитие в работах его учеников и последователей [6, 7].

Изучение колебательных процессов имеет фундаментальное значение в различных разделах механики, физики, техники [5-7]. Математический аппарат теории линейных колебаний, т. е. колебаний, характеризуемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, детально разработан, а потому, естественно, были попытки свести изучению нелинейных колебательных процессов к линейной схеме [8]. Однако многочисленные исследования показали глубокое, принципиальное отличие механики нелинейных колебаний от механики линейных колебаний, которое сохраняется даже при рассмотрении слабо нелинейных колебаний [5, 8].

Наиболее доступными для исследования являются системы с малой нелинейностью, но и для их приближенного исследования требуются методы, позволяющие учитывать нелинейный характер системы. Для слабо нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с малым параметром при нелинейных членах, имеется ряд общих асимптотических методов исследования [5, 8]. В настоящей работе рассмотрен асимптотический метод исследования таких систем, основанный на применении метода точечных отображений. Как и прочие асимптотические методы, предложенный метод будет рассмотрен на примере исследования квазигармонического осциллятора.

Возможность использования теории точечных отображений для изучения решений дифференциальных уравнений основана на сводимости изучения фазовых траекторий динамической системы, описываемой дифференциальными уравнениями, к рассмотрению точечных отображений, порождаемых этими фазовыми траекториями [6, С. 184-188]. В самом деле, многие стороны поведения траекторий динамической системы, описываемой дифференциальными уравнениями, могут быть выявлены через выяснение поведения последовательных точек их пересечения с секущей поверхностью, т.е. через изучение свойств точечного отображения, порождаемого этой траекторией на секущей поверхности.

При этом практическое применение метода точечных отображений оказалось связанным с рядом трудностей, главная из которых – отыскание функций последования отображения. Построение точечных отображений не представляет затруднений, если известно общее решение рассматриваемых дифференциальных уравнений. В случае, когда получение такого общего решения невозможно, можно прибегнуть к тем или иным приближенным (в том числе и асимптотическим) методам [6, С. 21]. Ниже изложен метод приближенного получения функций последования точечного отображения секущей поверхности в случае, когда система содержит малый параметр, который достаточно прост в применении и который имеет смысл излагать в учебном процессе для построения и исследования математических моделей систем с малой нелинейностью.

Рассмотрим уравнение движения синхронизируемого осциллятора вида

$$\ddot{x} + x = \mu \cdot f(x, \dot{x}, t/p), \quad (1)$$

в котором $0 < \mu \ll 1$, а $2p\pi$ – период внешней силы, или, если ввести $y = \dot{x}$, систему двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \mu \cdot f(x, y, t/p). \quad (2)$$

Величина параметра μ при заданной функции $f(x, y, t/p)$ определяет степень близости рассматриваемой системы к линейной консервативной системе (гармоническому осциллятору) [5, С. 651-651]. Относительно самой функции $f(x, y, t/p)$ обычно предполагается ее ограниченность и непрерывность для любого t (либо ограниченность и наличие только конечного числа точек разрыва). Задача состоит в нахождении условий существования у (2) периодического решения с периодом $2p\pi$.

Исследование поведения траекторий синхронизируемого осциллятора (2) может быть сведено к изучению точечного отображения T секущей поверхности $t = [t/(2p\pi)]2p\pi$ фазового пространства x, y, t в себя [6, С. 148; 7, С. 68-78], порожденного траекториями системы. Для получения функций последования отображения можно воспользоваться заменой переменных $(x, y) \rightarrow (a, b)$ типа Ван-дер-Поля [5, С. 653]

$$x = a \cos t + b \sin t, \quad y = -a \sin t + b \cos t.$$

При этом a, b будут определяться дифференциальными уравнениями

$$\dot{a} = -\mu f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t, t/p) \sin t,$$

$$\dot{b} = \mu f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t, t/p) \cos t,$$

а для отображения T точек $M_0(x_0, y_0)$ в точки $M(\bar{x}, \bar{y})$ получим

$$x_0 = a_0, y_0 = b_0, \quad \bar{x} = \bar{a} \cos 2p\pi + \bar{b} \sin 2p\pi, \quad \bar{y} = -\bar{a} \sin 2p\pi + \bar{b} \cos 2p\pi,$$

где $a_0 = a(0)$, $b_0 = b(0)$, $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$, $\bar{a} = a(2p\pi)$, $\bar{b} = b(2p\pi)$, $\bar{x} = x(2p\pi)$, $\bar{y} = y(2p\pi)$.

Заметим, что согласно [9, С. 114-122], с точностью до величин порядка μ^2 выражения для $\bar{a}, \bar{b}$ могут быть приближенно представлены формулами

$$\tilde{a} = a_0 - \mu F_1(a_0, b_0), \quad \tilde{b} = b_0 + \mu F_2(a_0, b_0), \quad (3)$$

где

$$F_1(a_0, b_0) = \int_0^{2p\pi} f(a_0 \cos t + b_0 \sin t, -a_0 \sin t + b_0 \cos t, t/p) \sin t dt,$$

$$F_2(a_0, b_0) = \int_0^{2p\pi} f(a_0 \cos t + b_0 \sin t, -a_0 \sin t + b_0 \cos t, t/p) \cos t dt.$$

Соотношения (3), порождают приближенное точечное отображение $\tilde{T}$

$$\tilde{x} = \tilde{a} \cos 2p\pi + \tilde{b} \sin 2p\pi, \quad \tilde{y} = -\tilde{a} \sin 2p\pi + \tilde{b} \cos 2p\pi,$$

с функциями последования

$$\tilde{x} = [x_0 - \mu F_1(x_0, y_0)] \cos 2p\pi + [y_0 + \mu F_2(x_0, y_0)] \sin 2p\pi,$$

$$\tilde{y} = -[x_0 - \mu F_1(x_0, y_0)] \sin 2p\pi + [y_0 + \mu F_2(x_0, y_0)] \cos 2p\pi.$$

А поскольку это формулы явные, изучение условий существования синхронного режима с периодом внешней силы может быть проведено с помощью изучения условий

существования и устойчивости простой неподвижной точки $\tilde{x} = x_0 = x^*$, $\tilde{y} = y_0 = y^*$ приближенного точечного отображения.

Для примера рассмотрим уравнение синхронизируемого осциллятора типа Ван-дер-Поля [8, С. 13-25; 9]

$$\ddot{x} + x = \mu[(1 - 4x^2)\dot{x} - \xi x + A \cos t],$$

где $0 < \mu < 1$, $A > 0$, или, если ввести $y = \dot{x}$, систему двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \mu[(1 - 4x^2)y - \xi x + A \cos t],$$

для которой будем искать условия существования периодического решения с периодом 2π .

В этом случае приближенное точечное отображение $\tilde{T}$ секущей поверхности $t = [t/(2\pi)]2\pi$ фазового пространства x, y, t в себя имеет вид

$$\tilde{x} = x_0 + \mu\pi[x_0(1 - (x_0^2 + y_0^2)) + \xi y_0], \quad (4)$$

$$\tilde{y} = y_0 + \mu\pi[-\xi x_0 + y_0(1 - (x_0^2 + y_0^2)) + A]. \quad (5)$$

Условия существования неподвижной точки точечного отображения (4)-(5) дают соотношения

$$x^* = \frac{\xi \rho}{A}, \quad y^* = -\frac{\rho}{A}(1 - \rho),$$

где $\rho = (x^*)^2 + (y^*)^2 > 0$ находится из уравнения

$$\rho[\xi^2 + (1 - \rho)^2] = A^2. \quad (6)$$

Т.е. факт существования неподвижных точек $\tilde{T}$ определяется фактом существования корней $\rho > 0$ у (6).

Детальный анализ уравнения (6) позволяет получить известную картину резонансных кривых [9] при различных значениях A (рис.1). В самом деле, при $A^2 < 4/27$ для $\xi=0$ существует три корня уравнения (6) $0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. С увеличением $|\xi|$ первый корень убывает до нуля, корни же ρ_2 и ρ_3 сближаются и при некотором значении $|\xi| = |\xi_{\text{крит}}|$ сливаются и исчезают. Таким образом, ветвь резонансной кривой, соответствующая корням ρ_2, ρ_3 , является замкнутой, а ветвь, соответствующая корню ρ_1 – незамкнутой.

В случае $A^2 = 4/27$ при $\xi=0$ ρ_1 и ρ_2 сливаются, но с ростом $|\xi|$ ветви, им соответствующие, расходятся.

В случае $A^2 > 4/27$, но при A^2 близких к $4/27$, для значения $\xi=0$ существует только один корень уравнения (6), но с ростом $|\xi|$ корней становится два, а затем три. Причем после $|\xi| = |\xi_{\text{крит}}|$ корень опять остается один. С увеличением A^2 случай трех корней становится невозможным ($A^2 \gg 4/27$). Переходным же к случаю $A^2 \gg 4/27$ является случай $A^2 = 8/27$, когда при $\rho = 2/3$, $\xi^2 = 1/3$ существует действительный корень кратности три.

Рис. 1 Резонансные кривые

Устойчивость неподвижных точек точечного отображения (4)-(5) в случае их существования определяется корнями характеристического полинома

$$P(z) = [z - (1 + \mu\pi(1 - 2\rho))]^2 + (\mu\pi)^2 [\xi^2 - \rho^2].$$

Корни полинома $P(z)$ будут действительными при $\rho \geq |\xi|$ и комплексно-сопряженными при $\rho < |\xi|$, т. е. граница N_ϕ , соответствующая уходу пары корней характеристического полинома с действительной оси, в этом случае будет иметь вид двух полупрямых

$$\rho = \pm \xi (\rho > 0).$$

Уравнения границ N_- , N_+ , N_ϕ области устойчивости на плоскости ξ, ρ имеют следующий вид.

Уравнение N_-

$$(2 + \mu\pi(1 - 2\rho))^2 + (\mu\pi)^2 (\xi^2 - \rho^2) = 0, \rho \geq \xi \quad (7)$$

есть уравнение эллипса с центром в точке $\xi=0, \rho=(2/3)(1+2/(\mu\pi))$ и главными диаметрами $(\sqrt{3}/3)(1+2/(\mu\pi))$ по ξ и $(1/3)(1+2/(\mu\pi))$ по ρ . С уменьшением μ этот эллипс поднимается вверх и расширяется, при $\mu \rightarrow +0$ N_- уходит в бесконечность. С увеличением μ эллипс (7) сжимается и опускается вдоль оси ρ .

Уравнение границы N_+ в предположении, что $\mu \neq 0$, имеет вид

$$(1 - 2\rho)^2 + \xi^2 - \rho^2 = 0,$$

не зависящий от μ .

Эллипсы N_- и N_+ целиком лежат в области $\rho \geq |\xi|$ и касаются ее границ в точках с $\rho = (1/2)(1 + 2/(\mu\pi))$ и $\rho = 1/2$ соответственно.

Уравнение границы N_ϕ есть

$$(\xi^2 - \rho^2 + (1 - 2\rho)^2)\mu\pi + 2(1 - 2\rho) = 0, \rho < |\xi|,$$

т.е. N_ϕ представляет собой куски эллипса с центром в точке $\xi=0, \rho=(2/3)(1+1/(\mu\pi))$ и главными диаметрами $(\sqrt{3}/3)\sqrt{(1+1/(\mu\pi))^2 + 3/(\mu\pi)^2}$ по ξ и $1/3\sqrt{(1+1/(\mu\pi))^2 + 3/(\mu\pi)^2}$ по ρ , соединяющие точки $\rho=1/2, \xi = \pm 1/2$ и $\rho = (1/2)(1 + 2/(\mu\pi)), \xi = \pm(1/2)(1 + 2/(\mu\pi))$ касания границ N_+ и N_- с N_ϕ . При $\mu \rightarrow +\infty$ N_ϕ сжимается в точки $\rho=1/2, \xi = \pm 1/2$, при $\mu \rightarrow +0$ переходит в прямую $\rho=1/2$.

Границы N_- и N_+ при $\mu < 1/\pi$ не пересекаются.

На рисунках 2-3 приведены границы D -разбиения с соответствующей штриховкой в сторону выхода корней характеристического уравнения из единичного круга при различных значениях μ . Однократная штриховка соответствует бифуркации корней на действительной оси, двойная – бифуркации комплексно-сопряженных корней.

Область $D=0$ есть область устойчивости. При $\mu \rightarrow +0$ результаты исследования устойчивости периодического решения различными асимптотическими методами совпадают [9, С. 17; 10].

Факт существования неподвижных точек точечного отображения $\tilde{T}$ с некоторым характером устойчивости при $A=const$ и различных ξ может быть установлен наложением картины поведения границ областей существования различных типов неподвижных точек на плоскости ξ, ρ при заданном μ на плоскость с резонансной кривой при заданном A .

В заключение хотелось бы отметить, что исследование явно заданного точечного отображения $\tilde{T}$ является задачей более простой, чем исследование неявного точечного отображения T , порожденного траекториями системы на секущей поверхности. А значит, предложенный метод приближенных точечных отображений может оказаться полезным для студентов технических и математических специальностей, как будущих исследователей.

Рис. 2 Границы D -разбиения при $\mu \rightarrow +0$

Рис. 3 Границы D -разбиений при малых μ

1. Малыгина О. А. Совершенствование обучения высшей математике в технических университетах // Международный научно-исследовательский журнал. – 2018. – № 3(69). – С. 170-174.
2. Гацаева Р. С-А. Математика в ВУЗЕ: проблемы и перспективы // Тенденции развития науки и образования. – Самара, 2018. – № 45. – Часть 4. – С. 23-26.
3. Бесклубная А. В. Особенности профессионального самоопределения современных старшеклассников // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – Самара, 2011. – Т. 13. – № 2(4). – С. 768-770.
4. Бесклубная А. В., Щербакова Е. Е. Формирование готовности старшеклассников к выбору профессии на современном этапе модернизации школьного образования // Приволжский научный журнал / Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Н. Новгород, 2012. – № 3. – С. 226-230.
5. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. – 916 с.
6. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. – 472 с.
7. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. – 384 с.
8. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. – 504 с.
9. Антоновская О. Г., Горюнов В. И. Метод точечных отображений в задачах нелинейной динамики (Метод точечных отображений и задача исследования динамики квазигармонического осциллятора). LAP Lambert Academic Publishing, OmniScriptum GmbH, Deutschland / Германия, 2013. – 148с.
10. Андронов А. А., Витт А. А. К теории захватывания Ван-дер-Поля // Arch. f. Elektrotech. 247 99 (1930), Собрание трудов А.А.Андропова. Изд. АН СССР, 1956. – С. 51-64.