РАЗДЕЛ XVII. МАТЕМАТИКА

Асланян Л.Х.

Алгоритм решения задачи эрдеша на множествах $\{4q+3\}$ И $\{4q+1\}$ Армянский Государственный Экономический Университет
(Армения, Ереван)

doi:10.18411/lj-04-2018-126

idsp: 000001:lj-04-2018-126

Аннотация

Работа является продолжением первой статьи, где был разработан алгоритм для решения проблемы второго порядка на множествах $\{4q\}$, $\{4q + 2\}$. В данной работе проблема решена на множествах $\{4q + 3\}$ и $\{4q + 1\}$, где параметры x , y и z являются числовыми функциями. Доказано, что задача всегда имеет натуральные решения для фиксированного числа $k > 1$. С применением теорем Ферма и Эйлера, доказана, что задача имеет бесконечное решение.

Ключевые слова: приведенные вычеты, теория сравнений, каноническое представление числа, формула для нахождения количества делителей, теоремы Ферма и Эйлера.

Annotation

The work is a continuation of the first article, which was developed an algorithm for solving the problem of the second order on the sets $\{4q\}$, $\{4q + 2\}$. In this paper, the problem is solved on the set $\{4q + 3\}$, $\{4q + 1\}$, wherein the parameters x , y and z are numerical functions. It is proved that the problem always has a natural solution for a fixed number $k > 1$. Using the Fermat and Euler theorems, it is proved that the problem has an infinite solution.

Keywords: residues, theory of comparisons, canonical representation of number, formula for finding the quantity of divisors, Fermat and Euler's theorems.

Введение. Первая статья была посвящена алгоритму решения задачи П. Эрдеша, когда $k \in \{4q\}$ и $k \in \{4q + 2\}$ (см. [2]). Задача П. Эрдеша (см. [5]) гласит: Существует ли для каждого натурального числа $k > 1$ натуральные числа x , y , z такие, что

$$\frac{4}{k} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} ? \quad (1)$$

Многолетние исследования гипотезы П. Эрдеша показывают, что задача всегда имеет натуральные решения. В [8] отмечено: “Египетские дроби ставят ряд трудных и по сей день нерешенных математических проблем. Гипотеза Эрдеша-Штрауса (en. Erdős-Straus conjecture) утверждает, что для всякого целого числа $k \geq 2$, существуют положительные целые x , y и z такие, что $\frac{4}{k} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Компьютерные эксперименты показывают, что гипотеза верна для всех $k \leq 10^{14}$, но доказательство пока не найдено” (см. [7, 8]).

В результате исследования многочисленных частных задач поставили передо мной следующий вопрос: можно ли создать единый алгоритм для нахождения натуральных решений? После преобразования уравнения (1) получили функции с параметрическим представлением $x = \frac{k \cdot n}{4n - km}$, $z = \frac{n(n+1)}{m \cdot a}$, $y = \frac{n(n+1)}{m}$ или $y = a \cdot z$ (см. [1], стр. 7-12). Возникает новая гипотеза: действительно ли существует тройка (или тройки) натуральных чисел (m, n, a) , при которой значения x , y и z одновременно

будут и натуральными и удовлетворять уравнению (1). Для доказательства данной гипотезы были сформулированы две главные теоремы:

Теорема 1. Для того, чтобы значения числовой функции z были натуральными, необходимо и достаточно, чтобы $a + 1 = m \cdot r$ и $n = A \cdot a$, где A и a взаимодополняющие делители числа n .

Теорема 2. Для того, чтобы $x \in N$ необходимо и достаточно, чтобы имело место хотя бы одно, или несколько, или все из следующих предполагаемых условий: 1) $4n - mk = 1$, 2) $4n - mk = p_1$, ..., i) $4n - mk = p_i^{\alpha_i}$ и общий случай: $n \cdot k = t(4n - mk)$, $t \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (см. [3]).

Применяя теорему 2, когда $k \in \{4q + 3\}$, получим: $x = \frac{(4q+3) \cdot n}{4n - (4q+3) \cdot m}$. Исследование начнем с очевидных делителей $n \cdot k$.

Исследование условия $4n - (4q + 3) \cdot m = 1$

Имеем: $n = mq + \frac{3m+1}{4}$. Для того чтобы $n \in N$, необходимо и достаточно, чтобы $3m + 1 \equiv 0 \pmod{4}$ или $3m \equiv -1 \pmod{4} \equiv 3$. Получим: $m = 4t + 1$, $n = (4q + 3) \cdot t + q + 1$. Если $t = 0$, то $m = 1$, $n = q + 1$, $x = n \cdot (4q + 3) = (q + 1) \cdot (4q + 3)$. Числовые функции m , n и x всегда принимают натуральные значения. Найдем значение z , $z = \frac{n(a+1)}{m \cdot a} = \frac{(q+1) \cdot (a+1)}{a}$. а) Если $a = 1$, то $z = y = 2(q + 1)$, $x = (q + 1)(4q + 3)$.

б) Если $a = q + 1$, то $z = q + 2$, $y = (q + 1) \cdot (q + 2)$, $x = (q + 1) \cdot (4q + 3)$. Все делители элемента $(q + 1)$ являются значениями параметра (a) и задача имеет $\tau = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_i)$ решений, где τ есть количество делителей параметра $(q + 1)$ (см [4], стр. 26). Если $t = 1$, то $m = 5$, $n = 5q + 4$, $x = n(4q + 3) = (5q + 4)(4q + 3)$, $k = 4q + 3$, $z = \frac{n(a+1)}{m \cdot a} = \frac{(5q+4)(a+1)}{5 \cdot a}$. Если $a = 5q + 4$, то $z = q + 1$, $y = (q + 1)(5q + 4)$. Если $t = q + 1$, то $m = 4q + 5$, $n = 4(q + 1)^2$, $x = 4(q + 1)^2 \cdot (4q + 3)$, $k = 4q + 3$. Задача, при условии $4n - (4q + 3) \cdot m = 1$, всегда имеет натуральные решения для любого числа $k = 4q + 3$, где $q \geq 0$.

Вывод. Нетрудно заметить, что значение параметра a является делителем числовой функции $n = (4q + 3) \cdot t + q + 1$, где $t \in [0, +\infty)$. То есть, если $(n, m) = m$, то $z = \frac{n(a+1)}{m \cdot a} = \frac{m \cdot r \cdot (a+1)}{m \cdot a} = \frac{r(a+1)}{a}$, все делители параметра r являются значениями параметра a . Задача имеет τ решений.

Если $m = 1$, то $z = \frac{n(a+1)}{a}$. Все делители элемента (n) являются числовыми значениями параметра a и задача имеет τ решений.

Если $(n, m) = 1$ и при делении (n) на m , в остатке получим единицу, то $n/d = a \equiv -1 \pmod{m}$. То есть (a) является таким делителем параметра n , который характеризуется видом $a \equiv -1 \pmod{m}$.

Исследование условия $4n - (4q + 3) \cdot m = 4q + 3$

Имеем: $n = \frac{(4q+3)(m+1)}{4}$. Пусть $m = 4q + 3$, тогда $n = (q + 1)(4q + 3)$, $z = \frac{(q+1)(a+1)}{a}$. Все делители элемента $(q + 1)$ являются значениями параметра a и задача имеет τ решений для любого числа $k = 4q + 3$.

Исследование условия $4n - (4q + 3) \cdot m = n$

Имеем: $n = \frac{(4q+3) \cdot m}{3}$, $z = \frac{(4q+3) \cdot (a+1)}{3 \cdot a}$. Если $q = 1$, то $z = \frac{7(a+1)}{3 \cdot a}$. По условию 3) задача не всегда имеет натуральное решение. Действительно, если $a = -7$, то $z = 2$, $y = -14$, $x = 4q + 3 = 7$, $k = 7$. Таким образом доказали, что задача всегда имеет бесконечное количество натуральных решений, но не для всех натуральных чисел вида $k = 4q + 3$.

Исследование условия $nk = t(4n - mk)$

Имеем: $n = \frac{(4q+3) \cdot mt}{4t - (4q+3)}$ или $\frac{n}{m} = \frac{(4q+3) \cdot t}{4t - (4q+3)}$ и $x = t \in N$. Докажем, что существует хотя бы однозначное значение параметра t , при котором значения числовых функций z и y будут натуральными числами. Пусть $t = q + 1$, в этом случае $\frac{n}{m} = (q + 1) \cdot (4q + 3)$, $z = \frac{(q+1)(4q+3) \cdot (a+1)}{a}$. Если $a = q + 1$, то $z = (q + 2)(4q + 3)$, $y = a \cdot z = (q + 1)(q + 2)(4q + 3)$, $x = t = q + 1$, $k = 4q + 3$. Если $a = 4q + 3$, то $z = 4(q + 1)^2$, $y = 4(q + 1)^2 \cdot (4q + 3)$. Если $a = 1$, то $z = y = 2(q + 1)(4q + 3)$, $x = q + 1$.

Если $a = (q + 1)(4q + 3)$, то $z = (q + 1)(4q + 3) + 1$, $y = ((q + 1)(4q + 3) + 1)(q + 1)(4q + 3)$. Доказательство очевидно.

Таким образом, при условиях $(4q + 3) \cdot n = t(4n - (4q + 3)m)$, $k = 4q + 3$, $q \geq 0$, диофантовое уравнение вида $\frac{4}{4q+3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ всегда имеет натуральные решения.

Если $k \in \{4q + 1\}$, то получим диофантовое уравнение вида

$$\frac{4}{4q + 1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad (2)$$

Согласно разработанному алгоритму: $x = \frac{(4q+1) \cdot n}{4n - (4q+1) \cdot m}$.

Теорема 3. Для того чтобы значение (значения) числовой функции x было натуральным, необходимо и достаточно, чтобы существовало хотя бы одно, или несколько, или все из следующих предполагаемых условий: 1) $4n - (4q + 1) \cdot m = 1$, 2) $4n - (4q + 1)m = n$, 3) $4n - (4q + 1) \cdot m = 4q + 1$, ... i) $4n - (4q + 1) \cdot m = p_i^{\alpha_i}$, ... и $u(4q + 1) \cdot n = t(4n - (4q + 1)m)$ (общее условие).

Исследование условия $4n - (4q + 1) \cdot m = 1$

Имеем: $n = \frac{(4q+1) \cdot m + 1}{4} = qt + \frac{m+1}{4}$. Чтобы $n \in N$, необходимо и достаточно, чтобы $m \equiv -1 \pmod{4}$ или $m = 4t - 1$, $n = (4q + 1)t - q$, $x = (4q + 1) \cdot n = (4q + 1)((4q + 1)t - q)$, $t \in N$. Очевидно, что $(m, n, x) \in N$. Найдем значение числовой функции z , $z = \frac{n(a+1)}{m \cdot a}$. Если $t = 1$, то $m = 3$, $n = 3q + 1$, $z = \frac{(3q+1)(a+1)}{3 \cdot a}$. Исходя из того, что $(3q + 1, 3) = 1$, могу утверждать, что множество $\{3q + 1\}$ содержит бесконечное количество чисел образующих геометрическую прогрессию и для каждого члена прогрессии выполняются условия малой теоремы Ферма (см. [6], стр. 146). $\{3q + 1\} = \{4, 7, 10, 13, 16, \dots, 3p + 1, \dots\}$. Составим геометрическую прогрессию со знаменателями 4 и 10: $2^2, 2^4, 2^6, \dots, 2^{2\lambda}, \dots$ и $10, 10^2, \dots, 10^\lambda, \dots$. Согласно малой теореме Ферма $2^{2\lambda} \equiv 1 \pmod{3}$ и $10^\lambda \equiv 1 \pmod{3}$. Одновременно существуют главные условия $2^{2\lambda}/d = 2^{2\lambda-1} \equiv -1 \pmod{3}$ и $10^\lambda/d = 2^\alpha \cdot 5^\beta \equiv -1 \pmod{3}$. Значениями числовой функции a будут: $a \in \{2, 2^3, 2^5, \dots, 2^{2\lambda-1}, 5, 5^3, 5^5, 5^7, \dots, 5^{2\beta-1}, 2^\alpha \cdot 5^\beta\}$, где сумма $(\alpha + \beta)$ есть нечетное число. Если $n_1 = 2^{2\lambda}$, то $z = \frac{2^{2\lambda}(a+1)}{3 \cdot a}$. Если $a = 2^{2\lambda-1}$, то $z = \frac{2 \cdot (2^{2\lambda-1} + 1)}{3}$. Докажем, что $z \in N$. Действительно, $a = 2 \equiv -1 \pmod{3}$, $a = 2^3 \equiv -1 \pmod{3}$, ..., $a = 2^{2\lambda-1} \equiv -1 \pmod{3}$, тогда $(2^{2\lambda} + 1)$ без остатка делится на число 3. Тогда $z \in N$, $y = a \cdot z \in N$, $x = n_1 \cdot (4q + 1) = 2^{2\lambda}(4q + 1)$. Найдем значение q . Имеем: $3q + 1 = 2^{2\lambda}$, $q = \frac{2^{2\lambda}-1}{3}$. Согласно малой теореме Ферма (см. [6]): $2^{2\lambda} \equiv 1 \pmod{3}$. Тогда $2^{2\lambda-1} - 1$ без остатка делится на 3. В результате получили, что $x \in N$, $(k = 4q + 1 = \frac{4 \cdot 2^{2\lambda-1} - 1}{3} \in N)$. Задача имеет бесконечное количество натуральных решений, но это не значит, что для любого натурального числа $k = 4q + 1$, при

условии $4n - (4q + 1) \cdot m = 1$, задача имеет натуральные решения. **Задача имеет целые отрицательные решения. Можно привести множество примеров. Значит, условие $4n - (4q + 1)m = 1$ обеспечивает нахождение натуральных решений, но не для любого натурального числа $k = 4q + 1$.**

Исследование условия $4n - (4q + 1) \cdot m = n$

Имеем: $n = \frac{(4q+1)m}{3}$, $z = \frac{(4q+1)(a+1)}{3 \cdot a}$. Для доказательства того, что числовая функция z не всегда принимает натуральные значения, необходимо решить сравнение вида: $q \equiv \alpha \pmod{3}$, $0 \leq \alpha \leq 2$.

1) Если $\alpha = 0$, то $q = 3r$, $z = \frac{(12r+1)(a+1)}{3 \cdot a}$. Имеем: $(12r + 1, 3) = 1$. Согласно малой теореме Ферма, утверждаю, что среди чисел вида $12r + 1$ существует бесконечное количество последовательностей, которые образуют геометрическую прогрессию, удовлетворяют условию теоремы Ферма и, кроме того, делители членов геометрической прогрессии удовлетворяют главному условию: $(12r + 1)/d \equiv -1 \pmod{3}$. Найдем несколько чисел из множества $\{k\} = \{12r + 1\} = \{13, 25, 37, 49, 91, 73, \dots\}$. $25 = 5^2 \equiv 1 \pmod{3}$ и одновременно $25/d = 5 \equiv -1 \pmod{3}$. Составим следующую прогрессию: $5^2, 5^4, 5^6, \dots, 5^{2\lambda}, \dots$. Имеем $5^{2\lambda} \equiv 1 \pmod{3}$ и $5^{2\lambda}/d = 5^{2\lambda-1} = a \equiv -1 \pmod{3}$. Множеством числовой функции a будет $a \in \{5, 5^3, 5^7, \dots, 5^{2\lambda-1}\}$. Если $a = 5^{2\lambda-1}$, то $z = \frac{5^{2\lambda}(a+1)}{3 \cdot a} = \frac{5^{2\lambda}(5^{2\lambda-1}+1)}{3 \cdot 5^{2\lambda-1}} = \frac{5(5^{2\lambda-1}+1)}{3}$. Как известно, $5 \equiv -1 \pmod{3}$, $5^3 \equiv -1 \pmod{3}$, $5^5 \equiv -1 \pmod{3}$, ..., $5^{2\lambda-1} \equiv -1 \pmod{3}$. Задача, при условии $4n - (4q + 1) \cdot m = n$, имеет бесконечное решение, но не для любого числа, $k = 4q + 1 = 12r + 1$. Например $r = 1$, $k = 13$, $z = \frac{13(a+1)}{3 \cdot a}$. Если $a = -13$, то задача имеет целые отрицательные решения.

2) Если $\alpha = 1$, то $q = 3r + 1$, $z = \frac{(4q+1)(a+1)}{3 \cdot a} = \frac{(12q+5)(a+1)}{3 \cdot a}$. $(12q + 5)/d = a \equiv -1 \pmod{3}$. Значит, если $a = 12q + 5$, то $z = 4q + 2$, $y = (4q + 2) \cdot (12q + 5)$, $x = 4q + 1 = 12q + 5$, $k = 12q + 5$. Задача имеет натуральные решения, для чисел вида $k = 4q + 1 = 12r + 5$.

3) Если $\alpha = 2$, то $q = 3r + 2$, $z = \frac{(12r+9)(a+1)}{3 \cdot a} = \frac{(4r+3)(a+1)}{a}$. Все делители числа $(4r + 3)$ являются значениями параметра a . При данных условиях задача имеет $\tau = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_i)$ решений. **Вывод: условие $4n - (4q + 1)m = 4q + 1$ обеспечивает нахождение натуральных решений, но не для всех чисел имеющих вид: $k = 4q + 1 = 12r + 1$.** Значит $\{q\} = \{3r\} \cup \{3r + 1\} \cup \{3r + 2\}$, но на самом деле, в множестве $\{12r + 1\}$ содержатся бесконечное количество натуральных чисел для которых задача имеет натуральные решения. Доказательство аналогично предыдущему. Все предполагаемые условия обеспечивают нахождение натуральных решений, но не для всех чисел $q > 0$. Только общее условие $(4q + 1) \cdot n = t(4n - (4q + 1)m)$ обеспечивает нахождение натуральных решений для любого натурального числа q .

Исследование условия $(4q + 1) \cdot n = t(4n - (4q + 1) \cdot m)$

Найдем отношение $\frac{n}{m}$, $\frac{n}{m} = \frac{(4q+1) \cdot t}{4t - (4q+1)}$, $z = \frac{(4q+1) \cdot t(a+1)}{(4t - (4q+1)) \cdot a}$. Если $t = q + 1$, то $z = \frac{(4q+1)(q+1)(a+1)}{3 \cdot a}$. Чтобы мы могли доказать, что для любого числа вида $k = 4q + 1$ задача имеет натуральные решения, необходимо и достаточно решить следующие сравнения: $q \equiv \alpha \pmod{3}$, $0 \leq \alpha \leq 2$. Т.е. для чисел $\{q\} = \{3r\} \cup \{3r + 1\} \cup \{3r + 2\}$ и $\{k\} = \{12r + 1\} \cup \{12r + 5\} \cup \{12r + 9\}$ задача всегда имеет натуральные решения. Доказательство:

1) Если $q = 3r + 1$, то $\frac{n}{m} = \frac{(12r+5)(3r+2)(a+1)}{3 \cdot a}$, $z = \frac{(12r+5)(3r+2)(a+1)}{3 \cdot a}$. Если $a = 3r + 2$, то $z = (r + 1)(12r + 5)$, $y = (r + 1)(12r + 5)(3r + 2)$, $x = t = q + 1 = 3r + 1 + 1 =$

$3r + 2, k = 4q + 1 = 12r + 5$. Если $a = 12r + 5$, то $z = (3r + 2) \cdot (4r + 2)$, $y = a \cdot z = (3r + 2)(4r + 2)(12r + 5)$, $x = t = 3r + 2$, $k = 12r + 5$. Задача для любого натурального числа вида $\{k\} = \{12r + 5\} = \{5, 17, 29, \dots\}$ имеет натуральное решение.

2) Если $q = 3r + 2$, то $k = 4q + 1 = 12r + 9$, $\frac{n}{m} = \frac{(12r+9)(3r+3)}{3} = 3(4r + 3)(r + 1)$, $z = \frac{3(4r+3)(r+1)(a+1)}{a}$. Очевидно что все делители элемента $3(4r + 3)(r + 1)$ являются

числовыми значениями параметра (a) и их количество равно $\tau = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_i)$. Вывод: для $\forall r \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ и $\{k\} = \{12r + 9\} = \{9, 21, 30, 42, 54, \dots\}$ задача всегда имеет натуральные решения.

3) Если $\alpha = 0$, то $q = 3r, k = 12 \cdot r + 1, \frac{n}{m} = \frac{(12r+1)(3r+1)}{3}, z = \frac{(12r+1) \cdot (3r+1)(a+1)}{3 \cdot a}$. Имеем:

$(12r + 1, 3) = 1, (3r + 1, 3) = 1, (a + 1, a) = 1, \{12r + 1\} \subset \{3r + 1\}$. Наша цель является следующим: а) Доказать, что для любого натурального числа q числовая функция z принимает натуральные значения на множестве $\{k\} = \{4q + 1\} = \{12r + 1\} = \{13, 25, 37, 49, 61, 73, 85, 97, 109, 121, 133, 145, 157, 169, 181, 193, 205, \dots\}$.

Согласно малой теореме Ферма, в множестве $\{12r + 1\}$ существует бесконечное количество последовательностей элементы которого образуют геометрическую прогрессию. Для любого члена таких прогрессий можно утверждать, что имеет место малая теорема Ферма и одновременно делители этих членов являются числовыми значениями для функции a . Например, составим геометрическую прогрессию из множества $\{12r + 1\}$: $5^2, 5^4, 5^6, 5^8, \dots, 5^{2\lambda}, \dots, 5^{2\lambda} \equiv 1 \pmod{3}$ и $5^{2\lambda}/d = a = 5^{2\lambda-1} \equiv -1 \pmod{3}$. $85^2, 85^4, 85^6, 85^8, \dots, 85^{2\lambda}, \dots, 85^{2\lambda} \equiv 1 \pmod{3}$ и $85^{2\lambda}/d = 5^\alpha \cdot 17^\beta = a \equiv -1 \pmod{3}$. $11^2, 11^4, 11^6, 11^8, \dots, 11^{2\lambda}, 11^{2\lambda} \equiv 1 \pmod{3}$ и $11^{2\lambda}/d = a = 11^{2\lambda-1} \equiv -1 \pmod{3}$. Для приведенных примеров очевидно, что существуют бесконечное количество чисел, при которых задача имеет натуральные решения. Этот факт доказываем научным методом. Из представления функции z , можем написать: Чтобы $z \in N$, необходимо и достаточно, что $a + 1 = 3\lambda$, тогда $z = \frac{(12r+1) \cdot (3r+1) \cdot \lambda}{3\lambda-1}$, где $(3\lambda -$

$1, \lambda) = 1$. Всегда найдутся такие натуральные числа $r \in N$, что $12r + 1 = (3\lambda - 1) \cdot A$. Исходя из того, что $\{12r + 1\} \subset \{3r + 1\}$, то естественно $\{3r + 1\} = (3\lambda_1 - 1) \cdot A_1$.

После чего функция z принимает следующий вид: $z = A \cdot A_1 \cdot \lambda \cdot (3\lambda_1 - 1) \in N$, $y = a \cdot z \in N$. Удовлетворимся только следующим фактом: $(12r + 1) = (3\lambda - 1) \cdot A$ и найдем связь между параметрами r и A . Если $\lambda = 2$, то $A = (12r + 1):5 = 2r + (2r + 1):5$. Если $2r \equiv -1 \pmod{5}$ или $r = 5p + 2$, то $A = 12p + 5$. Подставим значение r , получим: $(12r + 1) = (3\lambda - 1) \cdot A = 5 \cdot (12p + 5)$ и $z = \frac{5 \cdot (12p+5) \cdot (15p+7)(a+1)}{3 \cdot a}$. Если

$a = 5$, то $z = 2(12p + 5)(15p + 7)$, $y = a \cdot z = 10(12p + 5)(15p + 7)$, $x = t = q + 1 = 3r + 1 = 3(5p + 2) + 1 = 15p + 7$, $k = 12r + 1 = 12 \cdot (5p + 2) + 1 = 60p + 25 = 5(12p + 5)$. Множество $\{5 \cdot (12p + 5)\}_{2p}$ является подмножеством множества $\{12r + 1\}$. Имеем: $\{12r + 1\} = \{(3\lambda - 1) \cdot A\} = \{5 \cdot (12p + 5)\}_{2 \cdot p} = \{5 \cdot 5, 5 \cdot 17, 5 \cdot 29, 5 \cdot$

$41, 5 \cdot 53, 5 \cdot 65, \dots\}$. Изменяя значения параметров λ и p , найдем бесконечное количество подмножеств множества $\{12r + 1\}$, для элементов которых значения функции z всегда будут натуральными числами. Из сравнения $\{12r + 1\}/d = a \equiv -1 \pmod{3}$ можем записать $12r + 1 = (3\lambda - 1) \cdot A$. Найдем значение параметра A выраженного через параметр r . То есть $A = \frac{12r+1}{3\lambda-1}$. Если $\lambda = 4$, то $A = \frac{12r+1}{11} = r + \frac{r+1}{11}$, если $r = 11p - 1$, то $A = 12p - 1$. Имеем: $\{12r + 1\}_{4p} = \{11 \cdot 11, 11 \cdot 23, 11 \cdot 35, 11 \cdot 47, 11 \cdot 59, \dots\}$. Очевидно, что для элементов множества $\{12r + 1\}_{4p} = \{11 \cdot (12p - 1)\}_{4p}$ существуют условия $(12r + 1)/d = (11(12p - 1))/d = a = 11 \equiv -1 \pmod{3}$, $(11(12p - 1))/d = 12p - 1 \equiv -1 \pmod{3}$. Задача имеет бесконечное

количество решений. Если $\lambda = 6$, то $A = \frac{12r+1}{17}$. Чтобы $A \in N$, необходимо и достаточно, чтобы $12r + 1 \equiv 0 \pmod{17}$ или $12r \equiv -1 \pmod{17} = 84$, $r = 17p + 7$, $A = 12p + 5$. Получим подмножество следующего вида: $\{17 \cdot (12p + 5)\}_{6p} = \{17 \cdot 5, 17 \cdot 17, 17 \cdot 29, 17 \cdot 41, 17 \cdot 53, 17 \cdot 65, 17 \cdot 77, 89, \dots\}$.

Имеем: $(17 \cdot (12p + 5))/d = a = 17 \equiv -1 \pmod{3}$, $(17 \cdot (12p + 5))/d = a = 12p + 5 \equiv -1 \pmod{3}$. Задача имеет бесконечное количество решений. Если $\lambda = 8$, то $\{12r + 1\}_{8p} = \{23 \cdot (23p - 2)\} = \{23 \cdot 21, 23 \cdot 44, 23 \cdot 67, 23 \cdot 90, \dots\}$. Исходя из того, что множество $\{12r + 1\} = \{(3\lambda - 1) \cdot A\}$ имеет бесконечное количество подмножеств, можем записать: $\{12r + 1\} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{(3\lambda_i - 1) \cdot A_i\} = \{(3\lambda_1 - 1) \cdot A_1\} \cup \{(3\lambda_2 - 1) \cdot A_2\} \cup \dots \cup \{(3\lambda_p - 1) \cdot A_p\} \cup \dots$. Значит, если $\{q\} = \{3r\} \cup \{3r + 1\} \cup \{3r + 2\}$, то $\{k\} = \{4q + 1\} = \{12r + 1\} \cup \{12r + 5\} \cup \{12r + 9\} =$
 $= \{13, 25, 37, 49, 61, \dots\} \cup \{5, 17, 29, 41, 53, \dots\} \cup \{9, 21, 33, 45, 57, 69, \dots\} =$
 $\{5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57, 61, 65, 69, \dots\} = \{4q + 1\}$.

Задача решена на множествах $\{12r + 5\}$, $\{12r + 9\}$ и $\{12r + 1\}$.

На множествах $\{12r + 5\}$ и $\{12r + 9\}$ задача имеет формульные решения, т.е. полученные функции x, y, z представлены в четкой аналитической форме, а на множестве $\{4q + 1\} = \{12r + 1\}$, функции x, y и z выражаются через параметры.

Теперь обсудим тот вариант, когда число k фиксировано и равно 49. Требуется решить уравнение вида $\frac{4}{49} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Имеем: $x = \frac{49 \cdot n}{4n - 49m}$. Чтобы $x \in N$, необходимо и достаточно, чтобы имело место хотя бы одно, или несколько, или все из следующих предполагаемых условий: 1) $4n - 49m = 1$, 2) $4n - 49m = 7$, 3) $4n - 49m = 49$, 4) $49 \cdot n = t(4 \cdot n - 49 \cdot m)$. Из условия 2) получим: $n = \frac{7(7m+1)}{4}$, $n \in N$. Если $7m \equiv -1 \pmod{4} \equiv 7$ или $m = 4t + 1$, $n = 7(7t + 2)$. Если $t = 0$, то $n = 14$, $m = 1$, $z = \frac{14(a+1)}{a}$. Если $a = 1$, то $z = 28$, $y = 28$, $x = 7 \cdot n = 7 \cdot 14$, $k = 49$. Если $a \in \{1, 2, 7, 14\}$, то задача имеет 4 решения. Все делители числа 14 являются значениями числовой функции a . Из условия 4) получим, что $\frac{n}{m} = \frac{49 \cdot t}{4t - 49}$. Откуда, если $t = 13$, то $z = \frac{49 \cdot 13(a+1)}{3 \cdot a}$. Задача имеет целые отрицательные решения, когда $a \in \{-13, -49\}$. Если $t = 14$, то $\frac{n}{m} = \frac{49 \cdot 14}{7} = 49 \cdot 2 = 2 \cdot 7^2$, $\tau = (1 + 1) \cdot (1 + 2) = 6$. То есть при условии $(4n - 49m) \cdot t = 49 \cdot n$, где $t = 14$, задача имеет шесть решений.

Таким образом можем констатировать: если значение числа k фиксировано, то необходимо применить общее условие: $k \cdot n = t(4n - mk)$ и доказать, что задача имеет натуральные решения. Однако это не означает, что остальные предполагаемые условия сформулированные в теореме 2 лишние. С их помощью находим натуральные решения, хотя не для всех чисел k . Для элементов множества $\{4q\}$, $\{4q + 2\}$, $\{4q + 3\}$ всегда найдутся натуральные решения для произвольного натурального числа $k > 1$ и почти не нужно применять общее условие, т.к. нашей целью являлось доказательство существования натуральных решений. А для произвольного элемента множества $\{4q + 1\}$, существование натуральных решений задачи доказывается с помощью общего условия, т.е. $n \cdot k = t(4n - mk)$.

После исследования диофантового уравнения вида $\frac{4}{k} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ можно сделать вывод: Дроби вида $\frac{4}{4q+1}$ и $\frac{4}{4q+3}$ можно многочисленными способами представить в виде суммы трех обратных натуральных чисел. Если зафиксировать число k , то уравнение (1) представляет пространственную поверхность, а найденные параметры x, y и z являются координатами точек принадлежащих данной

поверхности. Сумма обратных координат таких точек есть постоянное число и равно $\frac{4}{k}$.

1. Асланян Л.Х. Алгоритм решения диофантовых задач Эрдеша-Штрауса и В. Сierпинского, части I и II. Ереван, 2015. TimetoPrint.
2. Асланян Л.Х. Исследование алгоритма решения диофантовых задач вида $4/k=1/x+1/y+1/z$ сформулированного Эрдешем. Научный журнал "Вестник" СГУГиТ (Сибирского государственного университета геодезии и технологии), N 3 (35), 2016, стр. 57-67.
3. Асланян Л.Х. Решение гипотезы П. Эрдеша, В. Сierпинского, А. Шинцеля, Л. Асланяна, LAR LAMBERT, Academic Publishing, Германия, 2017, код 918-3-330-05-946-7, стр. 23-25.
4. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М., "Наука", 1981.
5. Сierпинский В. (Wacław Sierpiński). Сто простых, но одновременно и трудных вопросов арифметики (перевод Голубева). М., 1961.
6. Хрестоматия по истории математики, под редакцией А.П. Юшкевича, Москва, "Просвещение", 1976.
7. Гипотеза Эрдеша-Штрауса (электронный ресурс), Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Гипотеза_Эрдеша_—_Штрауса.
8. Открытые проблемы. "Проблемы современной математики", отдел Теория чисел (электронный ресурс). Режим доступа: http://gruzdoff.ru/wiki/Египетские_дроби.

Хромова Н.Н.

Изучение свойств геометрических преобразований средствами программы «1С: Математический конструктор»

*КГУ им. К.Э. Циолковского
(Россия, Калуга)*

doi:10.18411/lj-04-2018-127

idsp: 000001:lj-04-2018-127

Аннотация

В статье раскрываются возможности проведения геометрических преобразований и экспериментального изучения их свойств в интерактивной среде «1С: Математический конструктор».

Ключевые слова: динамическая геометрия, математический эксперимент, «1С: Математический конструктор», геометрические инструменты, геометрические преобразования, осевая симметрия, параллельный перенос, движение, алгоритм построения.

Abstract

The article reveals the possibilities of geometric transformations and experimental study of their properties in an interactive environment "1C: Mathematical constructor".

Keywords: dynamic geometry, mathematical experiment, «1C: Mathematical constructor», geometric tools, geometric transformations, axial symmetry, parallel translation, motion, algorithm construction.

Уже более 20 лет в преподавании математики используются программы так называемой динамической геометрии, позволяющие проводить математические эксперименты. По цели использования можно выделить математические эксперименты трех видов:

- 1) эксперименты, направленные на открытие новых фактов и выдвижение гипотез;
- 2) эксперименты, подтверждающие теоретические результаты;
- 3) эксперименты, предназначенные для решения задач [1].