Рис. 12. График $\Pi(\varphi)$ при $r=0,17$ м.

В этом случае период изменения потенциальной энергии равен 34π рад. Таким образом, исследование движения механизма в нелинейной постановке показало высокую чувствительность потенциальной энергии $\Pi(\varphi)$ механизма к изменению его геометрических характеристик, которые задавались рациональными числами.

Анализ этой функции также подтвердил, что она является периодической функцией и поэтому положения устойчивого равновесия механизма, около которых могут совершаться его свободные колебания, определяются точно.

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Дрофа, 2004, 591 с.
2. Курс теоретической механики./Под ред. К.С. Колесникова, В.В. Дубинина. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. 584 с.
3. Крайнев А.Ф. Словарь-справочник по механизмам. М.: Машиностроение, 1987, 560 с.
4. Алдошин Г.Т. Теория линейных и нелинейных колебаний. С.Пб.: Лань, 2013, 320 с.

Цгоева Н.А.

Решение задачи об инвестировании предприятий методом динамического программирования

*Северо-Кавказский горно-металлургический институт (Государственный технологический университет)
(Россия, Владикавказ)*

doi: 10.18411/lj-03-2021-72

idsp: ljjournal-03-2021-72

Аннотация

В статье рассмотрена методика оптимального распределения инвестиций методом динамического программирования. Приведен пример решения задачи об оптимальном распределении инвестиций.

Ключевые слова: инвестиции, математические модели, динамическое программирование, функция Беллмана, оптимизационные задачи.

Abstract

The article discusses the method of optimal investment allocation using the dynamic programming method. An example of solving the problem of optimal investment distribution is given.

Keywords: investments, mathematical models, dynamic programming, Bellman function, optimization problems.

Инвестиции это - долгосрочные вложения денежных средств и иного капитала в предприятия различных отраслей, предпринимательские проекты, социально-экономические программы, инновационные проекты в целях получения дохода или достижения иного полезного эффекта.

Инвестиции играют важную роль в экономике. Они необходимы для стабильного развития экономики, обеспечения устойчивого экономического роста. Активный инвестиционный процесс предопределяет экономический потенциал страны в целом, способствует повышению жизненного уровня населения. Экономическая деятельность отдельных хозяйствующих субъектов зависит в значительной степени от объемов и форм осуществляемых инвестиций.

При инвестировании средств необходимо руководствоваться следующими соображениями:

- безопасность вложений,
- стабильность получения дохода,
- ликвидность вложений.

Планирование инвестиций преимущественно осуществляется на основе использования математических моделей. Наилучший вариант инвестирования можно получить, разбив задачу на подзадачи, и решив задачу по частям. Именно на этой идее основан метод динамического программирования.

Динамическое программирование (ДП) является одним из разделов оптимального программирования. Динамическое программирование (ДП) связано с возможностью представления процесса управления в виде цепочки последовательных действий или шагов, развернутых во времени и ведущих к цели. Таким образом, процесс управления можно разделить на части и представить его в виде динамической последовательности и интерпретировать в виде пошаговой программы. Это позволяет спланировать программу будущих действий. Поскольку вариантов возможных планов – программ множество, то необходимо из них выбрать лучший, оптимальный по какому-либо критерию в соответствии с поставленной целью, что позволяют методы динамического программирования. При этом отличительной особенностью является решение задач по этапам, через фиксированные интервалы, промежутки времени, что и определило появление термина «динамическое программирование». ДП применяется для решения задач, в которых поиск оптимума возможен при поэтапном подходе. Для него характерны специфические методы и приемы, применяемые к операциям, в которых процесс принятия решения разбит на этапы (шаги).

Данные вопросы полезно рассмотреть со студентами при изучении как экономических, так и математических дисциплин.

Рассмотрим решение задачи об инвестировании предприятий методом динамического программирования.

Задача. Необходимо распределить имеющиеся S млн.руб. между n предприятиями таким образом, чтобы обеспечить наибольшую общую прибыль, если каждое предприятие при инвестировании в него x_j млн.руб. приносит прибыль $g_i(x_j)$ (табл. 1).

Таблица 1

x	g_1	g_2	...	g_n
x_1	$g_1(x_1)$	$g_2(x_1)$	...	$g_n(x_1)$
x_2	$g_1(x_2)$	$g_2(x_2)$	...	$g_n(x_2)$
...	...	...	...	...
x_m	$g_1(x_m)$	$g_2(x_m)$	...	$g_n(x_m)$

Эту задачу можно решить перебором всех возможных вариантов распределения S млн.руб. по n предприятиям. Однако существует более эффективный метод. Метод

динамического программирования. Разобьём процесс на n шагов, и на k -м шаге будем оптимизировать инвестирование предприятий с k -го по n -е. При этом, естественно, считать, что в остальные предприятия (с 1-го по $(k-1)$ -е) тоже вкладываются некоторые средства, и потому на инвестирование предприятий с 1-го по n -е остается некоторая сумма $c_k \leq S$. Эта величина и будет являться переменной состояния системы. Переменной управления на k -м шаге назовем величину x_k средств, вкладываемых в k -е предприятие. В качестве функции Беллмана $F_k(c_k)$ на k -м шаге в этой задаче нужно выбрать максимальную прибыль, которую можно получить с предприятий с k -го по n -е при условии, что на их инвестирование осталось x_k средств. Понятно, что при вложении в k -е предприятие x_k средств, мы получим прибыль $g_k(x_k)$, а система к $(k+1)$ -му шагу перейдет в состояние $c_{k+1} = c_k - x_k$ т.е. на инвестирование предприятий с $(k+1)$ -го до n -го останется c_{k+1} средств.

Итак, на первом шаге условной оптимизации при $k=n$ функция Беллмана представляет собой прибыль только с n -го предприятия. При этом на его инвестирование может остаться c_n млн.руб., $0 \leq c_n \leq S$. Очевидно, чтобы получить максимум прибыли с последнего предприятия, надо вложить в него все эти средства, т.е. $F_n(c_n) = g_n(c_n)$, $x_n = c_n$.

На каждом последующем шаге будем использовать результаты, полученные на предыдущем шаге. Пусть на k -м шаге для инвестирования с k -го по n -е осталось c_k средств ($0 \leq c_k \leq S$). Тогда от вложения в k -е предприятие x_k средств будет получена прибыль $g_k(x_k)$ средств, а на инвестирование остальных предприятий (с k -го по n -е) останется $c_{k+1} = c_k - x_k$ средств. Максимально возможная прибыль, которая может быть получена с предприятий $k \dots n$ будет равна.

$$F_k(c_k) = \max_{x_i \leq c_i} \{g_k(x_k) + F_{k+1}(c_k - x_k)\}$$

Максимум достигается на некотором значении x_n , которое и является оптимальным управлением на k -м шаге для состояния системы c_k .

Функция Беллмана $F_1(S)$ представляет собой максимально возможную прибыль со всех предприятий (с 1-го по n -е), а значение x_1 , на котором достигается максимум прибыли, является оптимальным объемом средств, которые необходимо инвестировать в 1-е предприятие. Далее, для всех последующих шагов вычисляется величина $c_k = c_{k-1} - x_{k-1}$ и оптимальным управлением на k -м шаге является то значение x_k , которое доставляет максимум прибыли при соответствующем состоянии системы c_k .

Пример. Распределить 5 млн.руб. по трем предприятиям с целью получения максимальной суммарной прибыли. Прибыль с предприятий задается следующими значениями (табл.2):

Таблица 2

Инвестирование средств (млн.руб.)	Прибыль (млн.руб.)		
x	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$
1	3	2	4
2	4	3	5
3	6	4	6
4	7	9	8
5	8	10	9

Пусть $F_{12}(S)$ - оптимальное распределение, когда S единиц капитала вкладывается в 1 и 2 предприятие, $F_{123}(S)$ - оптимальное распределение капитала, вкладываемое во все три предприятия вместе.

Рассчитаем $F_{12}(S) = \max_{x \leq S} [g_1(x) + g_2(S - x)]$ (табл.3),

$$F_{12}(1) = \max_{x \leq 1} \begin{cases} g_1(1) + g_2(0) = 3 \\ g_1(0) + g_2(1) = 2 \end{cases} = 3$$

$$F_{12}(5) = \max_{x \leq S} \begin{cases} g_1(0) + g_2(5) = 0 + 10 = 10 \\ g_1(1) + g_2(4) = 3 + 9 = 12 \\ g_1(2) + g_2(3) = 4 + 4 = 8 \\ g_1(3) + g_2(2) = 6 + 3 = 9 \\ g_1(4) + g_2(1) = 7 + 2 = 9 \\ g_1(5) + g_2(0) = 8 + 0 = 8 \end{cases} = 12$$

Таблица 3

x	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$F_{12}(S)$	Оптимальное распределение
1	3	2	3	(1,0)
2	4	3	5	(1,1)
3	6	4	6	(3,0) (2,1)(1,2)
4	7	9	9	(0,4)
5	8	10	12	(1,4)

Мы получили зависимость $F_{12}(S)$ от величины вкладываемого капитала в первые два предприятия, найдем $F_{123}(S) = \max_{x \leq S} [F_{12}(x) + g_3(S - x)]$ (табл. 4)

Таблица 4

x	$F_{12}(S)$	$g_3(x)$	$F_{123}(S)$	Оптимальное распределение
1	3	4	4	(0,0,1)
2	5	5	7	(1,0,1)
3	6	6	9	(1,1,1)
4	9	8	10	(3,0,1)(2,1,1) (1,2,1)(1,1,2)
5	12	9	13	(0,4,1)

Рассмотрим более подробно расчет значений этой таблицы, при инвестировании 3 млн.рублей во все три предприятия:

$$F_{123}(3) = \max_{x \leq S} \begin{cases} F_{12}(3) + g_3(0) = 6 + 0 = 6 \\ F_{12}(2) + g_3(1) = 5 + 4 = 9 \\ F_{12}(1) + g_3(2) = 3 + 5 = 8 \\ F_{12}(0) + g_3(3) = 0 + 6 = 6 \end{cases} = 9$$

Таким образом, для получения максимальной суммарной прибыли в размере 13 млн.рублей, необходимо вложить 4 млн.рублей во второе предприятие и 1 млн.рублей в третье предприятие.

Рассмотренная задача может быть введена в процесс обучения студентов вузов для повышения уровня математической компетенции обучающихся.

1. Карасева Р.Б. Оптимальное распределение инвестиций по объектам вложения методами динамического программирования // научно – методический электронный журнал «Концепт».- 2016.-№7.
2. Лежнев А.В. Динамическое программирование в экономических задачах. Учебное пособие. М. Бином. Лаборатория знаний. 2009 г.
3. Цгоева Н.А., Зембатова Л.Т. Обучение решению профессиональных задач бакалавров-экономистов на основе информационных технологий // Современные тенденции развития информационных технологий в научных исследованиях и прикладных областях: Сборник трудов 1 Международной конференции. Владикавказ, 27-28 марта 2020г., с.26-30.