Для суммирования ряда введем обозначение $\frac{1}{3} = t, \quad |t| < 1$.

$$\text{Тогда } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)n}{3^{n-2}} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)t^{n-2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{n=2}^{\infty} t^n = \frac{d^2}{dt^2} \cdot \left(\frac{1}{1-t} \right) = \frac{2}{(1-t)^3}.$$

$$\text{При } t = \frac{1}{3} \text{ получаем } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)n}{3^{n-2}} = \frac{2}{(1-1/3)^3} = \frac{27}{4}.$$

$$\text{Вероятность события } A: P(A) = \frac{1}{36} \cdot \frac{27}{4} = \frac{3}{16}.$$

Проведенная олимпиада позволила выявить разделы теории вероятностей, усвоение которых вызвало наибольшие трудности в условиях дистанционного обучения (вероятности сложных событий, повторение испытаний, составление закона распределения случайной величины). В целом, опыт проведения такой олимпиады можно признать положительным и использовать его в дальнейшей работе, например, для проведения отборочных туров или подготовки к участию во всероссийских олимпиадах.

1. Дворяткина, С.Н. Развитие вероятностного стиля мышления в процессе обучения математике: теория и практика: монография / С.Н. Дворяткина. – М.: ИНФРА-М, 2013. – 272 с.
2. Эвнин, А.Ю., Лернер, Э.Ю., Игнатов, Ю.А., Григорьева, И.С. Задачи по теории вероятностей на студенческих олимпиадах, Математическое образование, 2017, выпуск 4(84), 45-60.

Зацепина Ю.А., Кирьянова Е.Е.

Методика применения эвристических подходов при решении математических задач

*ГБОУ ВО «Ставропольский государственный педагогический институт»
(Россия, Ставрополь)*

doi: 10.18411/lj-02-2021-53

idsp: ljjournal-02-2021-53

Аннотация

С учётом развития науки и технологий, применение эвристических методов в процессе обучения становится востребованным для развития мышления и логики. Эвристические методы в математике это не только нечто интересное и увлекательное, но и эффективное средство по освоению материала и развитию логического мышления учеников. Рассматриваемые эвристические методы позволяют упростить решение математических задач в школьном курсе математики.

Ключевые слова: эвристика, эвристический метод, математическая задача, методы решения задач.

Abstract

Taking into account the development of science and technology, the use of heuristic methods in the learning process is becoming popular for the development of thinking and logic. Heuristic methods in mathematics are not only something entertaining and fascinating, but also an effective tool for mastering the material and developing students' logical thinking. The considered heuristic methods will simplify the solution of mathematical problems in the school mathematics course.

Keywords: heuristics, heuristic method, mathematical problem, methods of problem solving.

Математическая подготовка необходима каждому человеку, так как математика незримо присутствует во всех сферах человеческой деятельности. Для адаптации в современном информационном обществе важным фактором становится формирование математического стиля мышления, включающего в себя индукцию и дедукцию, обобщение и конкретизацию, анализ и синтез, классификацию и систематизацию, абстрагирование и аналогию.

На всех ступенях общего математического обучения формируется логическое и алгоритмическое мышление, а также такие качества мышления, как сила и гибкость, конструктивность и критичность. В связи с этим важным условием правильной организации этого процесса на всех ступенях общего математического образования появляется необходимость развития и совершенствования методологии эвристического обучения. Это объяснимо тем, что эвристические методы в обучении математике предоставляет возможность школьникам научиться планировать свою деятельность, критически оценивать её, принимать самостоятельные решения, отстаивать свои взгляды и убеждения.

Обучение математике построенное на базе теории эвристического обучения, достигается особенностями изложения теоретического материала и упражнениями на сравнение, анализ, выделение главного, установление связей, классификацию, обобщение и систематизацию. При этом особо акцентируются содержательное раскрытие математических понятий, толкование сущности математических методов и области их применения, демонстрация возможностей применения теоретических знаний для решения разнообразных задач прикладного характера, например решения текстовых задач, денежных и процентных расчётов, умение пользоваться количественной информацией, представленной в различных формах, умение читать графики.

Важно отметить, что реализация эвристических методов в школьном обучении предусматривает при изучении математических предметов не только изучение теоретических знаний, но и формирование умений применять эти знания на практике, решая нестандартные задачи и проблемы, возникающие при изучении смежных дисциплин школьного курса. Методы эвристики позволяют ученику самостоятельно найти решения задачи, развивая его творческие способности.

При решении любой математической задачи всегда существует два вида поисковой деятельности: алгоритмическая деятельность (решение состоит из определенных действий по заранее составленному образцу) и эвристическая деятельность (решение состоит из действий направленных на поиск этого образца) [3]. В процессе поиска нестандартного решения зачастую применяют эвристические методы, которые подразумевает некоторый порядок процедур обработки информации, выполняемый для поиска быстрых, простых и новых не стандартных решений. В силу чего, иногда, эвристические методы сравнивают с формальными методами решения задач, которые основываются на точных математических моделях.

В ходе решения многих математических задач применяется следующий эвристический принцип: для быстрого поиска решения задачи преобразуй задачу из нестандартного вида в стандартный вид. Процесс реализации такого преобразования заложен в следующих основных эвристических методах обучения, название каждого из которых определяет присущий этому методу определенный алгоритм преобразований математической задачи.

Первым и наиболее оптимальным эвристическим методом является **метод восходящего анализа**. Основная идея метода состоит в начале решения математических задач с конца, то есть «от требования - к условию». В качестве примера иллюстрации этого метода рассмотрим следующую задачу: туристы отправились в поход. Известно, что за первый день они прошли $\frac{1}{3}$ от всего маршрута, за второй день $-\frac{1}{3}$ от остатка, и за третий день $-\frac{1}{3}$ от нового остатка. После чего осталось пройти 16 километров. Вопрос: сколько километров составляет весь маршрут?

Для решения данной задачи, используя метод восходящего анализа и принципы математического моделирования, можно воспользоваться следующей схемой рассуждений [2]. Из условия задачи известно, что остатки маршрутов каждый день составляют: $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ остатков маршрута после каждого дня. По условию задачи известно, что туристам после третьего дня осталось пройти 16 км, то эти 16 км и будут составлять $\frac{2}{3}$ последнего остатка. Отсюда найдем расстояние, пройденное туристами в третий день: $16 : \frac{2}{3} = 24$ км. Найденное значение поможет найти расстояние, пройденное туристами за два дня, т.е.: $24 : \frac{2}{3} = 36$ км. Отсюда можно найти расстояние всего маршрута: $36 : \frac{2}{3} = 54$ км.

Второй эвристический метод – это метод **переформулирования**. Основная идея метода заключается в замене исходных условий на новые, которые эквивалентны имеющимся, но не упрощающие поиск решения.

Иными словами, переформулирование – это изменение в задаче, которое сводится к замене термина его содержанием. Особенно широко этот метод активно используется при решении задач методами математического моделирования. Так, например, при решении текстовой задачи, следующего содержания: пешеход был в пути 2 часа, за каждый час он проходил по 5 километров. Какова длина пройденного пути?

Эту текстовую задачу, заменяя описание действий математическими терминами и применяя основные принципы математического моделирования, можно представить в виде следующей простой математической модели:

$$s = v \cdot t,$$

где s – длина пройденного пути, v – время движения, а t время в пути.

Тогда, зная, что скорость пешехода $v = 5$ (км/ч), время в пути составляет $t = 2$ (ч), найдем искомое расстояние: $s = v \cdot t = 5 \cdot 2 = 10$ (км).

Третий эвристический метод – это метод **наложения**. Он основывается на решении задач в частных случаях. Учтя, что все частные случаи, рассматриваемые в задаче, должны полностью рассматривать все случаи, которые только могут быть.

Примером использования данного метода в ходе решения задачи может служить метод решения уравнений с параметром. Рассмотрим это на примере следующей задачи: при каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - x + 8 = 0$ имеет единственное решение? Решение этого уравнения имеет несколько случаев, каждый из которых необходимо рассмотреть. Важно заметить, что данное уравнение не является квадратным. Рассмотрим следующие случаи:

1. Если $a = 0$, то, подставив это значение в исходное уравнение, получаем: $-x + 8 = 0$. Отсюда следует, что $x = 8$ – единственное решение уравнения.

2. Если $a \neq 0$, то $ax^2 - x + 8 = 0$ – квадратное уравнение. Найдем дискриминант: $D = 1 - 4 \cdot a \cdot 8 = 1 - 32a$. Вспомним, что уравнение имеет единственное решение только в том случае, когда дискриминант равен нулю. Отсюда следует, что параметр $a = \frac{1}{32}$.

Метод суперпозиции часто приравнивают к эвристическому методу рассмотрения частных случаев, которые не исчерпывают всех возможных случаев.

Четвертый метод – метод **предельного случая**. Этот метод, как правило, используется в случае поиска предельного случая при решении задачи. Суть этого метода покажем на примере решения следующей геометрической задачи: доказать, что сумма расстояний от любой точки внутри правильного тетраэдра до его граней есть величина постоянная.

Прежде чем переходить к доказательству, необходимо понять, о какой величине идет речь. Для этого в качестве произвольной точки выбрать одну вершину тетраэдра. Тогда совсем несложно доказать, что сумма расстояний от любой точки внутри тетраэдра до всех его граней будет равна высоте тетраэдра.

Пятый эвристический метод, это **прием обобщения**, который часто используется при поиске решения, когда ищется решение не исходной задачи, а иной более общей, по отношению к данной задаче. Этот прием составляет основу реализации основных этапов математического моделирования. Так, при использовании математического моделирования, решение задачи приемом обобщения сводится к выполнению следующих трех этапов:

1. Составление математической модели;
2. Решение математической модели;
3. Ответ на главный вопрос задачи.

Шестой метод - **выделение подзадач**. Используется для решения задач, которые не затруднительно решать внутри основной задачи. Таким образом, происходит упрощение структуры основной задачи.

Примером использования данного метода может служить следующая задача: из пункта А в пункт В, которые расположены на расстоянии 60 км, навстречу друг другу отправились 2 велосипедиста. Первый ехал со скоростью 12 км/ч, а второй - 10 км/ч. Вместе с первым велосипедистом выбежала собака со скоростью 16 км/ч. После встречи со вторым велосипедистом, собака повернула обратно и побежала навстречу первому велосипедисту. Встретив первого велосипедиста, она снова повернула. Собака бегала между велосипедистами до тех пор, пока велосипедисты встретились. Сколько километров пробежала собака?

Решение этой задачи, согласно условию задачи, следует начинать с изучения движения собаки и второго велосипедиста. В результате возникает необходимость рассмотреть последовательность встречных движений, что может оказаться весьма сложной и неразрешимой задачей. Если внутри основной задачи выделить, в качестве элементарной подзадачу, в которой рассмотреть движение навстречу друг другу двух велосипедистов, и решая ее определить время до их встречи, то тогда сразу возникает вторая элементарная подзадача – о движении собаки, скорость и время которой известны, а маршрут движения - безразличен.

Седьмой метод - **метод непрерывных величин**. Применяется при решении немногих задач. При использовании положения: если одна величина изменяется непрерывно и зависит от некоторой другой величины, и при разных значениях второй величины значения первой окажутся больше и меньше некоторого числа С, то это значит, что существует такое значение второй величины, при котором значение первой равно С [5].

Рассмотрим этот метод, на примере решения следующей задачи: лодка движется против течения реки из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 93 км. Известно, что скорость лодки 18 км/ч, а скорость течения реки – 5 км/ч. За какое время лодка прибудет в пункт В?

Анализируя условие данной задачи, можно заметить, что движение лодки против течения реки – это величина, которая меняется непрерывно в зависимости от некоторой другой величины, и в данной задаче – это скорость течения реки. Известно, что скорость течения реки зависит от того движется ли лодка по течению реки или против ее течения[4]. Таким образом, скорость движения лодки полностью зависит от скорости движения реки, т.е. фактически может изменяться в зависимости от природных условий.

Восьмой метод - **метод вспомогательных неизвестных**. Заключается в составлении уравнения из условия задачи. При этом используя дополнительные аргументы, которые дают набор элементов из условий задачи [1]. В качестве примера этого метода рассмотрим следующую задачу: трава на лугу растет равномерно и густо. Известно, что 48 лошадей съели бы всю траву за 18 дней, а 16 лошадей за 58 дней. На сколько дней хватит травы для 10 лошадей.

Для того, чтобы решить задачу, введем вспомогательные элементы:

- 1) первоначальное количество травы на лугу - a единиц;

- 2) ежедневно на лугу вырастает - b единиц травы;
- 3) каждая лошадь за 1 день съедает - c единиц травы.

Тогда в первом случае, когда 48 лошадей съели всю траву на лугу за 19 дней, всего травы изначально было a единиц, и за 18 дней выросло еще $19 \cdot b$ единицы. Всего $a + 18 \cdot b$ единиц, и всю эту траву съели 48 лошадей, поедая каждая в один день c единиц, за 18 дней. Из этих зависимостей получаем следующее уравнение:

$$a + 18 \cdot b = 48 \cdot 18 \cdot c \quad (1)$$

Для второго случая получаем уравнение:

$$a + 58 \cdot b = 16 \cdot 58 \cdot c \quad (2)$$

Если искомое число дней обозначить через x , то получаем уравнение:

$$a + x \cdot b = 10 \cdot x \cdot c \quad (3)$$

В итоге мы получили три уравнения с четырьмя неизвестными. Затем, вычитая из уравнения (2) уравнение (1), получим $40 \cdot b = 64 \cdot c$, откуда находим $c = 0,625 \cdot b$ (4). Затем, подставляя выражение (4) вместо c в уравнение (1), определим, что $a = 522 \cdot b$ (5). Подставляя полученные значения (4) и (5) в уравнение (3) и, сокращая обе части полученного уравнения на b , получаем уравнение относительно x : $522 + x = 6,25x$. Отсюда находим, что $x = 99,4$. Таким образом, для 10 лошадей травы хватит на 99 дней.

Рассмотренные эвристические методы являются часто используемыми при решении математических задач [3]. При этом, необходимо дать возможность ученикам познакомиться с эвристическими методами решения математических задач, и сформировать умения их использовать при решении задач. Важно отметить, что среди рассмотренных нами методов нет единственного и верного метода, который подойдет для решения любого типа задач. В то же время, умение применять полученные знания на практике гарантируют развитие мыслительных процессов у учащихся.

1. Ильясов И.И. Система эвристических приёмов решения задач. – М.: Издательство Российского открытого университета, 1992. - 138 с.
2. Клепиков В.Н. Формирование математической картины мира в современном школьном образовании. Педагогика. -2017. - № 3. - С. 49-56.
3. Кулюткин Ю.Н. Эвристические методы в структуре решений - М.: Альфа-книга, - 2013. - 325 с.
4. Шуба М.Ю. Учим творчески мыслить на уроках математики. - М., 2012. -218 с.
5. Хуторской А.В. Методы эвристического обучения. Школьные технологии, №1-2. - 1999. С.233-243.

Гамова Н.А., Безводицкий А.В., Каляда К.Д.

Математическое обоснование спутниковой геодезической съемки

*Оренбургский государственный университет
(Россия, Оренбург)*

doi: 10.18411/lj-02-2021-54

idsp: ljjournal-02-2021-54

Аннотация

В нашем прогрессивном мире в различных сферах деятельности наблюдается серьезный спрос на высококвалифицированных инженеров. От специалистов в технической области требуются больше знаний из разных отраслей техники, науки и технологии. В данной статье описывается один из способов измерения земельных участков – спутниковая съемка, а также процесс расчета поправок, возникающих вследствие съемки. Цель данной статьи заключается в том, чтобы показать, как используются математические знания на практике, в частности будущими бакалаврами направления подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры. Покажем, как осуществить на практике построение плана местности с помощью спутниковой геодезической съемки и используя математические методы и подходы при решении