РАЗДЕЛ VII. МАТЕМАТИКА

Богомолова Е.В.

Построение трёхмерного крыловского подпространства для решения линейных систем

ГБОУ ВПО «Государственный университет «Дубна»
(Россия, Дубна)

doi: 10.18411/lj-02-2021-51

idsp: ljjournal-02-2021-51

Аннотация

Рассматривается трёхмерное крыловское подпространство, с помощью которого можно находить приближенное решение системы линейных уравнений. Представлен алгоритм, реализующий этот метод, и условия его сходимости.

Ключевые слова: решение систем линейных уравнений; крыловское подпространство; проекционные методы; ортогональное проектирование; условия Петрова-Галёркина.

Abstract

The three-dimensional Krylov subspace is considered, which can be used to find an approximate solution of a system of linear equations. The algorithm that implements this method and conditions for its convergence is presented.

Keywords: solution of a system of linear equations; projection methods; an orthogonal projection; the Krylov subspace; the conditions of Petrov-Galerkin.

Построим трёхмерное крыловское подпространство для нахождения приближённого решения линейной системы $Ax = b$ вещественной симметричной положительно определённой матрицей A . Будем использовать ортогональный проекционный метод с трёхмерным крыловским подпространством $\mathcal{K} = \text{span}\{r, Ar, A^2r\}$, где $r = b - Ax$ текущая невязка. В качестве базиса подпространства $\mathcal{K}$ возьмём вектор r ; вектор p , получаемый ортогонализацией вектора Ar ; и вектор q , получаемый ортогонализацией вектора A^2r , с использованием метода Грама-Шмидта:

$$\begin{aligned} p &= Ar - h_{12}r, \text{ причём } (p, r) = 0, \\ q &= A^2r - h_{13}r - h_{23}p, \text{ причём } \begin{cases} (q, r) = 0, \\ (q, p) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$h_{12} = \frac{(Ar, r)}{(r, r)}; h_{13} = \frac{(A^2r, r)}{(r, r)}; h_{23} = \frac{(A^2r, p)}{(p, p)}.$$

Тем самым построен ортогональный базис трёхмерного подпространства $\mathcal{K}$, состоящий из векторов r, p, q .

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{K}$.

Необходимо найти такое $\delta = \alpha r + \beta p + \gamma q \in \mathcal{K}$, чтобы $r_0 - A\delta \perp \mathcal{L}$, т.е.

$$x_{\text{new}} = x_0 + \delta, \delta \in \mathcal{K} \quad (1)$$

$$\forall l \in \mathcal{L}: (r_0 - A\delta, l) = 0. \quad (2)$$

В таком случае новое приближение получается посредством операций:

$$\begin{aligned} r &\leftarrow b - Ax, \\ p &\leftarrow Ar - \frac{(Ar, r)}{(r, r)}r, \\ q &\leftarrow A^2r - \frac{(A^2r, r)}{(r, r)}r - \frac{(A^2r, p)}{(p, p)}p, \end{aligned}$$

$$x \leftarrow x + \alpha r + \beta p + \gamma q.$$

Условие Петрова-Галёркина даёт $(r - \alpha Ar - \beta Ap - \gamma Aq, l) = 0$. Отсюда при $l = r$, $l = p$ и $l = q$ получим систему уравнений для нахождения α, β и γ :

$$\begin{cases} \alpha(Ar, r) + \beta(Ap, r) + \gamma(Aq, r) = (r, r), \\ \alpha(Ar, p) + \beta(Ap, p) + \gamma(Aq, p) = 0, \\ \alpha(Ar, q) + \beta(Ap, q) + \gamma(Aq, q) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь учитывается, что $(r, p) = 0, (r, q) = 0$.

Если обозначить $V = [r, p, q]$ матрицу, столбцы которой образуют базис в $\mathcal{K} = \mathcal{L}$, тогда матрица коэффициентов системы (3) примет вид $V^T A V$. Так как A положительно определена, тем же свойством обладает матрица $V^T A V$. Значит,

$$\text{определитель матрицы системы (3)} \Delta = \begin{vmatrix} (Ar, r) & (Ap, r) & (Aq, r) \\ (Ar, p) & (Ap, p) & (Aq, p) \\ (Ar, q) & (Ap, q) & (Aq, q) \end{vmatrix} > 0.$$

Тогда система (3) имеет единственное решение

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \beta = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} (r, r) & (Ap, r) & (Aq, r) \\ 0 & (Ap, p) & (Aq, p) \\ 0 & (Ap, q) & (Aq, q) \end{vmatrix} = (r, r)[(Ap, p)(Aq, q) - (Ap, q)(Aq, p)]; \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} (Ar, r) & (r, r) & (Aq, r) \\ (Ar, p) & 0 & (Aq, p) \\ (Ar, q) & 0 & (Aq, q) \end{vmatrix} = (r, r)[(Ar, q)(Aq, p) - (Ar, p)(Aq, q)]; \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} (Ar, r) & (Ap, r) & (r, r) \\ (Ar, p) & (Ap, p) & 0 \\ (Ar, q) & (Ap, q) & 0 \end{vmatrix} = (r, r)[(Ar, p)(Ap, q) - (Ar, q)(Ap, p)]. \end{aligned}$$

Приближенное решение на k -ом шаге в указанном многообразии даётся формулами

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k + \beta_k p_k + \gamma_k q_k. \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta_k &= \alpha_k r_k + \beta_k p_k + \gamma_k q_k; \\ r_k &= b - Ax_k; \\ p_k &= Ar_k - \frac{(Ar_k, r_k)}{(r_k, r_k)} r_k; \\ q_k &= A^2 r_k - \frac{(A^2 r_k, r_k)}{(r_k, r_k)} r_k - \frac{(A^2 r_k, p_k)}{(p_k, p_k)} p_k; \\ \Delta^{(k)} &= \begin{vmatrix} (Ar_k, r_k) & (Ap_k, r_k) & (Aq_k, r_k) \\ (Ar_k, p_k) & (Ap_k, p_k) & (Aq_k, p_k) \\ (Ar_k, q_k) & (Ap_k, q_k) & (Aq_k, q_k) \end{vmatrix}; \\ \Delta_1^{(k)} &= (r_k, r_k)[(Ap_k, p_k)(Aq_k, q_k) - (Ap_k, q_k)(Aq_k, p_k)]; \\ \Delta_2^{(k)} &= (r_k, r_k)[(Ar_k, q_k)(Aq_k, p_k) - (Ar_k, p_k)(Aq_k, q_k)]; \\ \Delta_3^{(k)} &= (r_k, r_k)[(Ar_k, p_k)(Ap_k, q_k) - (Ar_k, q_k)(Ap_k, p_k)]; \\ \alpha_k &= \frac{\Delta_1^{(k)}}{\Delta^{(k)}}, \beta_k = \frac{\Delta_2^{(k)}}{\Delta^{(k)}}, \gamma_k = \frac{\Delta_3^{(k)}}{\Delta^{(k)}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Алгоритм метода

1. Вычислить $r = b - Ax$, $p = Ar - \frac{(Ar, r)}{(r, r)} r$, $q = A^2 r - \frac{(A^2 r, r)}{(r, r)} r - \frac{(A^2 r, p)}{(p, p)} p$
2. Until критерий остановки Do

$$\begin{aligned}
3. \quad \Delta &:= \begin{vmatrix} (Ar, r) & (Ap, r) & (Aq, r) \\ (Ar, p) & (Ap, p) & (Aq, p) \\ (Ar, q) & (Ap, q) & (Aq, q) \end{vmatrix} \\
\Delta_1 &:= (r, r)[(Ap, p)(Aq, q) - (Ap, q)(Aq, p)] \\
\Delta_2 &:= (r, r)[(Ar, q)(Aq, p) - (Ar, p)(Aq, q)] \\
\Delta_3 &:= (r, r)[(Ar, p)(Ap, q) - (Ar, q)(Ap, p)] \\
4. \quad \alpha &:= \frac{\Delta_1}{\Delta} \\
\beta &:= \frac{\Delta_2}{\Delta} \\
\gamma &:= \frac{\Delta_3}{\Delta} \\
5. \quad x &:= x + \alpha r + \beta p + \gamma q \\
6. \quad r &:= r - \alpha Ar - \beta Ap - \gamma Aq \\
7. \quad p &:= Ar - \frac{(Ar, r)}{(r, r)} r \\
q &:= A^2 r - \frac{(A^2 r, r)}{(r, r)} r - \frac{(A^2 r, p)}{(p, p)} p \\
8. \quad &\text{EndDo}
\end{aligned}$$

Если A является вещественной симметричной положительно определённой матрицей, тогда A -нормы векторов ошибки $d_k = x_* - x_k$, генерируемых алгоритмом, удовлетворяют неравенству

$$\|d_{k+1}\|_A \leq \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} \|d_k\|_A. \quad (6)$$

Алгоритм сходится при любом начальном приближении x_0 .

Здесь $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы, x_* - точное решение системы, x_k - приближенное решение, определяемое формулой (4). Символ $\|x\|_A$ обозначает A -норму вектора, определяемую формулой

$$\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}.$$

В качестве примера рассмотрим систему с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Точное решение } X = \left(\frac{17}{4} \quad 18 \quad \frac{49}{2} \quad -10 \right) = (4.25 \quad 18 \quad 24.5 \quad -10).$$

Таблица 1 показывает результаты применения алгоритма к задаче для начального приближения $x_0 = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$:

Таблица 1

Итерации k	Приближённое решение x_k	Невязка $\ r_k\ $	Ошибка $\ d_k\ $
k=10	(3.975 16.564 22.515 -9.071)	1.052	2.635
k=20	(4.227 17.879 24.332 -9.922)	0.089	0.223
k=30	(4.248 17.99 24.486 -9.993)	$7.503 \cdot 10^{-3}$	0.019

1. Саад Ю. Итерационные методы для разреженных линейных систем: Учеб. пособие. – В 2-х томах. Том 1 / Пер. с англ.: Х.Д.Икрамов; Предисл.: В.А.Садовничий. – М.: Издательство Московского университета, 2013. – 344 с.
2. Богомолова Е.В. Методы ортогонального проектирования решения систем линейных уравнений для двумерного крыловского подпространства: Статья. Тенденции развития науки и образования, 2019, № 51. Ч. 7. – 96 с.