56. Badriev I.B., Fanyuk B.Y. Iterative methods for solving seepage problems in multilayer beds in the presence of a point source // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2012. – V. 33, № 4. – P. 386–399.
57. Бадриев И.Б., Чебакова В.Ю. Математическое моделирование низкотемпературной ВЧЕ-плазмы в аргоне // Математическое моделирование и краевые задачи Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах. – Саратов, 2016. – С. 17–21.
58. Чебакова В.Ю. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при атмосферном давлении в аргоне // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158, № 3. – С. 404–423..
59. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при больших межэлектродных расстояниях. I. Постановка задачи // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 2.. – С. 123–130.
60. Badriev I.B., Ju Chebakova V., Zheltukhin V.S. Numerical solution of the initial boundary value problems of radio-frequency capacitive coupled discharge // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – V. 927, № 012008.

Логинова Е.А., Титов А.А.

Задача распределения тепла на двумерном многообразии

*ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
(Россия, Воронеж)*

doi: 10.18411/lj-02-2020-75

idsp: ljjournal-02-2020-75

Аннотация

В статье описывается построение решения задачи о распределении тепла по поверхности бесконечного цилиндра с конечным разрезом. Проверяется выполнение граничных условий типа сопряжения и доказывается гладкость решения. Основным результатом представляет собой асимптотические представления первых производных компонент решения.

Ключевые слова: теплопроводность, условия типа сопряжения, асимптотические представления, гладкость решения, двумерное многообразие, разрез-трещина

Abstract

The article describes the construction of a solution to the problem of heat distribution over the surface of an infinite cylinder with a finite section. The fulfillment of boundary conditions of the conjugation type is verified and the smoothness of the solution is proved. The main result is the asymptotic representations of the first derivatives of the solution components.

Keywords: thermal conductivity, conjugation type conditions, asymptotic representations, smoothness of a solution, two-dimensional manifold, cut-crack

Задачи теплопроводности, упругости, термоупругости для композитных материалов с различными дефектами не теряют актуальности уже несколько десятилетий. Настоящая статья посвящена одной из таких задач.

Задаётся стационарное уравнение теплопроводности

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) рассматривается на поверхности двумерного многообразия – прямого кругового полого бесконечного цилиндра γ с разрезом-трещиной μ по отрезку $[-1;1]$, направленному вдоль образующей цилиндра. $u(x, \varphi)$ – искомая

функция, температура в точке (x, φ) , x - осевая координата точки поверхности, φ - полярный угол, a_{11} , a_{22} - некоторые известные постоянные, для которых выполнено условие $a_{11} \cdot a_{22} > 0$, k - известная величина, участвующая в выражении коэффициента теплопроводности. Постановка задачи производится в полярных координатах, что обусловлено геометрией области.

Уравнение (1) дополнено граничными условиями на разность температур и тепловых потоков при переходе через границу – трещину:

$$u(x, 0) - e^{\frac{\pi k}{a_{11}}} u(x, 2\pi) = q_0(x), \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}} \left(\frac{\partial u(x, 0)}{\partial \varphi} - e^{\frac{\pi k}{a_{11}}} \frac{\partial u(x, 2\pi)}{\partial \varphi} \right) + \frac{k}{2a_{22}} (u(x, 0) - e^{\frac{\pi k}{a_{11}}} u(x, 2\pi)) = q_1(x), \quad (3)$$

где $q_0(x)$, $q_1(x)$ - известные функции, определенные на отрезке μ .

Для задачи (1) – (3) справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть функции $q_0(x)$, $q_1(x)$ определены на отрезке μ и один раз

$$\int_{-1}^1 q_r(x) dx = 0, \quad r = 0, 1$$

непрерывно дифференцируемы на нём. Пусть μ - Тогда решение задачи (1) - (3) представимо в виде

$$u(x, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \cdot e^{-\frac{k}{2a_{11}}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-1}^1 e^{i\xi s} q_0(\xi) d\xi \cdot \frac{e^{-\sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \varphi} - e^{-\sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} (\varphi - 2\pi)}}{1 - e^{-2\pi \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2}}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{-1}^1 e^{i\xi s} q_1(\xi) d\xi \cdot \frac{e^{-\sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \varphi} + e^{-\sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} (\varphi - 2\pi)}}{\sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} (1 - e^{-2\pi \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2}})} \right) \cdot e^{-i\xi s} ds \right) \quad (4)$$

и является непрерывной по совокупности переменных, ограниченной на любом компакте $K \subset \gamma$ функцией, бесконечно дифференцируемой в любой точке из множества $\gamma \setminus \mu$. Граничное условие (2) выполнено по непрерывности. Условие (3) выполнено в смысле главного значения.

Определение 1. Будем говорить, что условие (3) выполнено в смысле главного значения, если при каждом $x \in (-1; 1)$ справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}} \left(\frac{\partial u(\xi, \varepsilon)}{\partial \varphi} - e^{\frac{\pi k}{a_{11}}} \frac{\partial u(\xi, 2\pi - \varepsilon)}{\partial \varphi} \right) + \frac{k}{2a_{22}} (u(\xi, \varepsilon) - e^{\frac{\pi k}{a_{11}}} u(\xi, 2\pi - \varepsilon)) = q_1(\xi)$$

Теорема 2. Пусть функции $q_0(x)$, $q_1(x)$ один раз непрерывно дифференцируемы на μ . Тогда справедливы следующие асимптотические при $x \rightarrow \pm 1$; $\varphi \rightarrow 2\pi n$, где $n = 0, 1$ представления производных компонент решения задачи (1)-(3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = & e^{\frac{k\varphi}{2a_{11}}} \left(-\sqrt{a_{11}a_{22}} \frac{q_0(1)\varphi}{a_{22}\varphi^2 + a_{11}(1-x)^2} + \sqrt{a_{11}a_{22}} \frac{q_0(-1)\varphi}{a_{22}\varphi^2 + a_{11}(1+x)^2} + \right. \\ & + \sqrt{a_{11}a_{22}} \frac{(2\pi - \varphi)q_0(1)}{a_{22}(2\pi - \varphi)^2 + a_{11}(1-x)^2} - \sqrt{a_{22}a_{11}} \frac{q_0(-1)(2\pi - \varphi)}{a_{22}(2\pi - \varphi)^2 + a_{11}(1+x)^2} - \\ & - q_1(1) \ln \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}} \varphi^2 + (x-1)^2} + q(-1) + \ln \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}} \varphi^2 + (x+1)^2} - \\ & \left. - q_1(1) \ln \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}} (2\pi - \varphi)^2 + (1-x)^2} + q_1(-1) \ln \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}} (2\pi - \varphi)^2 + (x+1)^2} \right) + R, \end{aligned} \quad (5)$$

где R - непрерывная, ограниченная на любом компакте $K \subset \gamma$ функция.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = & e^{\frac{k\varphi}{2a_{11}}} \sqrt{a_{22}a_{11}} \left(q_0(1) \frac{x-1}{a_{22}\varphi^2 + a_{11}(x-1)^2} - q_0(-1) \frac{x+1}{a_{22}\varphi^2 + a_{11}(x+1)^2} + \right. \\ & \left. + q_0(1) \frac{x-1}{a_{22}(2\pi - \varphi)^2 + a_{11}(x-1)^2} - q_0(-1) \frac{x+1}{a_{22}(2\pi - \varphi)^2 + a_{11}(x+1)^2} \right) + \tilde{R}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\tilde{R}$ - непрерывная, ограниченная на компакте $K \subset \gamma$ функция.

Для доказательства теоремы 1 уравнение (1) сначала приводится к

каноническому виду $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{k}{\sqrt{a_{22}a_{11}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$, где $\xi = x$, $\eta = \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \varphi$ - новые независимые переменные. Граничные условия (2), (3) переходят в условия

$$u(\xi, 0) - e^{\frac{\pi k}{a_{11}}} u(\xi, 2\pi \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}) = q_0(\xi),$$

$$\frac{\partial u(\xi, 0)}{\partial \eta} - e^{\frac{k\pi}{a_{11}}} \frac{\partial u(\xi, 2\pi \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}})}{\partial \eta} + \frac{k}{2\sqrt{a_{22}a_{11}}} (u(\xi, 0) - e^{\frac{k\pi}{a_{11}}} u(\xi, 2\pi \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}})) = q_1(\xi).$$

Затем, применяется замена $u(\xi, \eta) = e^{\frac{-k\eta}{2\sqrt{a_{22}a_{11}}}} v(\xi, \eta)$.

В результате указанных действий задача (1) – (3) переходит в задачу

$$\frac{\partial^2 v(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} - \frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} v(\xi, \eta) = 0, \quad (7)$$

$$v(\xi, 0) - v(\xi, 2\pi \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}) = q_0(\xi), \quad (8)$$

$$\frac{\partial v(\xi, 0)}{\partial \eta} - \frac{\partial v(\xi, 2\pi \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}})}{\partial \eta} = q_1(\xi). \quad (9)$$

Предполагая, что функции $q_0(\xi)$, $q_1(\xi)$ продолжены нулем вне отрезка μ и применяя преобразование Фурье по переменной ξ к равенствам (7) – (9), получаем задачу

$$-s^2 \tilde{v}(s, \eta) + \frac{\partial^2 \tilde{v}(s, \eta)}{\partial \eta^2} - \frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} \tilde{v}(s, \eta) = 0; \quad (10)$$

$$\tilde{v}(s, 0) - \tilde{v}(s, 2\pi \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}) = \tilde{q}_0(s); \quad (11)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}(s, 0)}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{v}(s, 2\pi \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}})}{\partial \eta} = \tilde{q}_1(s). \quad (12)$$

Решив её, находим представление

$$\begin{aligned} \tilde{v}(s, \eta) = & \frac{\tilde{q}_0(s) \sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} + \tilde{q}_1(s)}{2 \sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} (1 - e^{2\pi \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} \eta})} \cdot e^{\sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} \eta} + \\ & + \frac{\tilde{q}_0(s) \sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} - \tilde{q}_1(s)}{2 \sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} (1 - e^{-2\pi \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} \eta})} \cdot e^{-\sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} \eta}, \end{aligned}$$

из которого при помощи обратного преобразования Фурье и обратных замен переменной получается выражение (4).

Для изучения гладкости построенного решения и доказательства выполнения граничных условий область интегрирования $(-\infty; +\infty)$ представляется как объединение промежутков $(-\infty; -N) \cup [-N; -\delta] \cup (-\delta; \delta) \cup [\delta; N] \cup (N; +\infty)$. Предполагается, что δ – произвольная малая положительная величина, N – произвольная большая величина. На каждом из указанных промежутков функция $u(x, \varphi)$ изучается и оценивается отдельно. В результате, на основании оценок полученных интегралов, делается вывод о гладкости решения задачи (1) – (3). Выполнение граничного условия (2) непосредственно следует из непрерывности решения вблизи разреза μ . Для доказательства выполнения условия (3) выполняется подстановка решения в равенство определения 1 и вычисляется предел.

Доказательство теоремы 2 основано на применении к представлениям первых производных компонент решения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = & \frac{1}{4\pi} \cdot e^{-\frac{k\varphi}{2a_{11}}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (-is) \left(\int_{-1}^1 e^{i\xi s} q_0(\xi) d\xi \cdot \frac{e^{-\sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \varphi} - e^{-\sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} (\varphi - 2\pi)}}{1 - e^{-2\pi \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2}}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_{-1}^1 e^{i\xi s} q_1(\xi) d\xi \cdot \frac{e^{-\sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \varphi} + e^{-\sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} (\varphi - 2\pi)}}{\sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} (1 - e^{-2\pi \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2}})} \right) \cdot e^{-ixs} ds \right), \\ \frac{\partial u(x, \varphi)}{\partial \varphi} = & -\frac{k}{2a_{11}} u(x, \varphi) + \frac{1}{4\pi} \cdot e^{-\frac{k\varphi}{2a_{11}}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} -\sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \left(\int_{-1}^1 e^{i\xi s} q_0(\xi) d\xi \cdot \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot \frac{(e^{-\sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \varphi} + e^{-\sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} (2\pi - \varphi)})}{1 - e^{-2\pi \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2}}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_{-1}^1 e^{i\xi s} q_1(\xi) d\xi \cdot \frac{e^{-\sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \varphi} - e^{-\sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} (2\pi - \varphi)}}{\sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2} (1 - e^{-2\pi \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \sqrt{\frac{k^2}{4a_{22}a_{11}} + |s|^2}})} \right) \cdot e^{-ixs} ds \right) \end{aligned}$$

рассуждений и действий, аналогичных тем, что были проведены для доказательства теоремы (1). Области интегрирования $(-\infty; +\infty)$ также представляются как объединение промежутков $(-\infty; -N) \cup [-N; -\delta] \cup (-\delta; \delta) \cup [\delta; N] \cup (N; +\infty)$, на

каждом из которых функции $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ изучаются и оцениваются отдельно. Таким образом отделяются непрерывные на любом компакте $K \subset \mathcal{Y}$ функции и получаются представления (5) и (6).

1. Vitucci G., Mishuris G. Analysis of residual stresses in thermoelastic multilayer cylinders / G. Vitucci, G. Mishuris // Journal of the European Ceramic Society. - 2016. - V. 36. - P. 2411-2417.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики: учеб. пособие / В.С. Владимиров. - М.: Наука, 1981. - 512 с.
3. Черникова А.С. Асимптотические представления решения и его первых производных задачи о стационарном распределении тепла в биматериале вблизи межфазной трещины / А.С. Черникова // Вестник Воронежского Государственного Университета: Серия. Физика, Математика. - 2014. - № 1. - С. 188-206.