45. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2003. – № 1. – С. 20–28.
46. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. О сходимости итерационного метода двойственного типа решения смешанных вариационных неравенств // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 1115–1122.
47. Бадриев И.Б., Ляшко А.Д., Панкратова О.В. Исследование сходимости итерационных методов решения нелинейных задач теории фильтрации // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1998. – № 11. – С. 8–13.
48. Бадриев И.Б., Фанюк Б.Я. Итерационные методы решения задач фильтрации в многослойных пластах при наличии точечного источника // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2010. – Т. 152, № 4. – С. 39–55.
49. Badriev I.B., Fanyuk B.Y. Iterative methods for solving seepage problems in multilayer beds in the presence of a point source // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2012. – V. 33, № 4. – P. 386–399.
50. Бадриев И.Б., Чебакова В.Ю. Математическое моделирование низкотемпературной ВЧЕ-плазмы в аргоне // Математическое моделирование и краевые задачи Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах. – Саратов, 2016. – С. 17–21.
51. Чебакова В.Ю. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при атмосферном давлении в аргоне // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158, № 3. – С. 404–423.
52. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при больших межэлектродных расстояниях. I. Постановка задачи // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 2.. – С. 123–130.
53. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Продольно-поперечный изгиб по цилиндрической форме трехслойной пластины, подкрепленной в торцевых сечениях абсолютно твердыми телами // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2017. – Т. 159, № 2.. – С. 174–190.
54. Badriev I.B., Ju Chebakova V., Zheltukhin V.S. Numerical solution of the initial boundary value problems of radio-frequency capacitive coupled discharge // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – V 927, № 012008.
55. Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Бадриев И.Б., Макаров М.В. Геометрически и физически нелинейная задача о трехточечном изгибе композитных тест-образцов // Материалы XXII Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" им. А.Г.Горшкова.. Т. 2. – М: ООО «ТР-принт», 2016. – С. 197–202.
56. Solov'ev S.I. Superconvergence of finite element approximations to eigenspaces // Differential Equations. – 2002. – V. 38, № 5. – P. 752–753.
57. Solov'ev S.I. The error of the Bubnov-Galerkin method with perturbations for symmetric spectral problems with a non-linearly occurring parameter // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1992. – V. 32., № 5. – P. 579–593.
58. Solov'ev S.I. Finite element approximation with numerical integration for differential eigenvalue problems // Applied Numerical Mathematics. – 2015. – V. 93. – P. 206–214.
59. Solov'ev S.I. Eigenvibrations of a beam with elastically attached load // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2016. – V. 37, № 5. – P. 597–609.
60. Solov'ev S.I. Eigenvibrations of a bar with elastically attached load // Differential Equations. – 2017. – V. 53, № 3. – P. 409–423.
61. Иванов В.А., Паймушин В.Н., Полякова Т.В. Уточненная теория устойчивости трехслойных конструкций (линеаризованные уравнения нейтрального равновесия и простейшие одномерные задачи) // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1995. – № 3. – С. 15–24.

Кашапов Л.Н., Фахретдинова Э.И., Чебакова В.Ю.
О математических моделях процессов электролиза воды

*Казанский (Приволжский) федеральный университет
(Россия, Казань)*

doi: 10.18411/lj-02-2020-74

idsp: ljjournal-02-2020-74

Аннотация

Дан обзор работ, посвященных математическому моделированию процессов электролиза растворов электролитов. Проанализированы различия в протекании

основных электрохимических процессов электролиза в зависимости от водородного показателя среды.

Ключевые слова: Электролиз, математическое моделирование, водородный показатель среды

Abstract

A review of the works devoted to the mathematical modeling of electrolysis of electrolyte solutions is given. The differences in the course of the main electrochemical processes of electrolysis, depending on the hydrogen index of the medium, are analyzed.

Keywords: electrolysis, mathematical modeling, hydrogen indicator of the medium

Электролиз водных растворов нашел самое широкое применение, как правило, это и нанесение высококачественных функциональных гальванических покрытий на основе металлов [1-5], получение металлов, в частности, алюминия из криолито-глиноземного расплава [6,7], водорода и кислорода [8], хлора и других соединений, так же это и обработка воды [9-11]. Однако, электролиз находит и не столь тривиальное применение. Например, в работе [12] описано применение электролиза для подготовки семян подсолнечника перед отделением семенной оболочки (лузги). В работе [13] описано применение наноразмерных оксидных вольфрамовых бронз, полученных высокотемпературным электролизом для обессеривания нефтепродуктов. В [14] дан обзор водно-электролизных корректирующих двигательных установок для малых космических аппаратов. Электролиз нашел свое применение в народной медицине, для приготовления «живой» и «мертвой» воды.

Рассмотрим основные процессы, происходящие в электролите и на границе раздела электролит-электрод, на примере электролиза питьевой воды. По нормам качества питьевой воды ее водородный показатель (рН) изменяется от 6 до 9 рН, что соответствует слабокислой – щелочной среде. При этом рН отстоянной воды за счет проникновения CO_2 уменьшается. Процессы, происходящие при электролизе, будут различными для различных рН.

В [15] описаны два механизма протекания катодного процесса в кислых растворах с высоким содержанием ионов H^+ . Образование атомарного водорода может быть охарактеризовано или реакцией $\text{H}^+ + e + \text{Me} \rightarrow (\text{H}-\text{Me})$, где Me – металл катода, или, в случае, когда ион водорода в растворе гидротирован, реакцией $\text{H}_3\text{O}^+ + e + \text{Me} \rightarrow \text{H}_2\text{O} + (\text{H}-\text{Me})$. Следующая стадия катодного процесса – рекомбинация атомарного водорода в молекулярный, т.е. $2(\text{H}-\text{Me}) \rightarrow \text{H}_2 + 2\text{Me}$. Обе стадии катодного процесса – разряд ионов H^+ и выделение молекулярного водорода – могут протекать одновременно, т.е. будет происходить реакция $\text{H}_3\text{O}^+ + e + (\text{H}-\text{Me}) \rightarrow \text{H}_2 + \text{H}_2\text{O} + \text{Me}$. В кислотных растворах при очень высоких плотностях тока, а также в щелочных растворах протекает реакция: $2\text{H}_2\text{O} + 2e + \text{Me} \rightarrow \text{H}_2 + 2\text{OH}^- + \text{Me}$. При этом часть водорода может окисляться: $\text{H}_2 - 2e + 2\text{OH}^- \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$. Выделение на аноде кислорода при электролизе воды происходит в результате разряда гидроксильных ионов или молекул воды. В щелочных растворах при умеренных плотностях тока имеем: $2\text{OH}^- \rightarrow 2e + \text{H}_2\text{O} + \frac{1}{2}\text{O}_2$. В щелочных растворах при высоких плотностях тока, а также кислотных растворах количество ионов OH^- ограничено, и основной будет реакция: $\text{H}_2\text{O} - 2e \rightarrow \frac{1}{2}\text{O}_2 + 2\text{H}^+$.

В работе [16] приведены примеры реакций электролиза воды с использованием нерастворимых (инертных) и растворимых электродов, показаны процессы, происходящие на катоде и аноде при электролизе водных растворов KOH и H_2SO_4 . Другие катионы, имеющие меньший положительный потенциал выделения по сравнению с водородом, на электроде не разряжаются. Например, ионы K^+ и Na^+ на электродах не окисляются. При проведении электролиза в течение длительного времени концентрация ионов K^+ и Na^+ в катодном пространстве возрастает, а в анодах

уменьшается вследствие переноса. Если же в растворе присутствуют катионы, имеющие больший положительный потенциал выделения по сравнению с водородом, то эти катионы выделяются на катоде, меняя потенциал выделения водорода и условия протекания приэлектродных процессов (см., напр., [17]). Изменение механизмов выхода катодного и анодного процесса может быть достигнуто за счет мембран в межэлектродном пространстве [18–20]. В [21] происходят реакции на катоде: $\text{H}_2\text{O} + 2\text{e}^- \rightarrow \text{H}_2 + \text{O}^{2-}$ и на аноде: $\text{O}^{2-} \rightarrow \frac{1}{2}\text{O}_2 + 2\text{e}^-$.

Внутренние процессы в электролитах различаются в зависимости от кислотности среды, также как и приэлектродные процессы. Чистая вода является слабым электролитом и диссоциирует с образованием ионов гидратированного протона H_3O^+ -гидрооксония и ионов OH^- -гидроксида (реакция автопротолиза) $2\text{H}_2\text{O} \leftrightarrow \text{H}_3\text{O}^+ + \text{OH}^-$. В щелочных средах концентрация гидрооксония чрезвычайно мала и вода диссоциирует на ион водорода и гидроксид: $2\text{H}_2\text{O} \leftrightarrow \text{H}^+ + \text{OH}^-$ [22, 23]. Для описания движения ионов в электролите используется уравнение Нернста-Планка (см., напр., [24])

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} = D_k \nabla \cdot \left(\nabla C_k + \frac{z_k F}{RT} C_k \nabla \varphi \right),$$

где D_k – коэффициент диффузии k -й компоненты, z_k – заряд иона, F – постоянная Фарадея, R – универсальная газовая постоянная, C_k – концентрация.

Для постановки граничных условий часто используется закон Фарадея $m = (Q/F) \cdot (M/z)$, где m – масса осажденного на электроде вещества, Q – полный электрический заряд, проходящий через вещество, F – постоянная Фарадея, M – молярная масса вещества, Z – валентное число ионов вещества, M/z – эквивалентная масса осажденного вещества. При постоянном токе, когда $Q = It$, закон переписывается в виде $m = (It/F) \cdot (M/z)$, или $n = (It/F)(1/z)$, где $n = m/M$ – выделенное количество вещества (количество молей). Но на практике количество образовавшегося вещества не совпадает с рассчитываемыми по закону Фарадея [25]. Это связано с тем, что закон Фарадея выводится для идеального случая протекания единственной реакции. Данное явление послужило появлению такого понятия, как «выход по току», данная величина является одной из основных характеристик, описывающих электролизеры [26]. Например, в работе [6] выход по току металлической меди составил 98%–99% за счет того, что происходит восстановление не только двухвалентных ионов меди, но и одновалентных. В [16] показано поэтапное выделение катионов Ag^+ , Cu_2^{+} , Pb_2^{+} из смеси. В результате часто при моделировании нескольких приэлектродных реакций решают систему кинетических реакций [27], где константы скорости реакции зачастую описываются законом Аррениуса.

Для расчета электрического поля используют или уравнение Пуассона, или уравнение электро-нейтральности [28, 29]. На стенках можно задавать условия неразрывности (равенства нулю нормальной компоненты) [30, 31]. При этом граничные условия на электроде записываются через электродный потенциал и перенапряжение [23, 29, 32]. Понятия перенапряжения и стандартного электродного потенциала относятся не к материалу электрода, а к электродным процессам [33]. Условия на электроде для уравнения Пуассона могут задаваться также, исходя из экспериментальных данных. Анализ поляризационных кривых, отражающих зависимость между потенциалом электрода и током, является одним из основных методов исследования электродных процессов [34, 35].

На данный момент наиболее изученным является процесс получения алюминия путем разложения глинозема как с предварительно обожженными анодами, так и со самообжигающимися анодами. Для данного процесса рассмотрены различные подходы к моделированию [36–39], а также разработаны программные комплексы для

оптимизации параметров работы электролизеров, используемых в промышленности для производства алюминия [40]. В работе [41] на примере бинарного электролита исследуются вычислительные алгоритмы для решения уравнения Нернста–Планка, обладающего квадратичной нелинейностью. Однако для их решения можно использовать методы, разработанные для решения вариационных задач [42–45], возникающих в теориях упругости [46–52], мягких оболочек [53, 54], фильтрации [55, 56], низкотемпературной плазмы [57–60].

В силу сильного различия процессов, проходящих в расплавах и растворах с разным водородным показателем, математические модели, существующие в настоящее время, нуждаются в существенной переработке под каждый конкретный электролит и состав электродов.

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-08-01184).

1. Кузьмар И., Кушнер Л., Ланин В., Хмыль А. Гальваническое осаждение функциональных покрытий в нестационарных режимах электролиза // Технологии в электронной промышленности. – 2013. – № 4 (64). – С. 70–74
2. Тураев Д.Ю. Новый анодный материал для проведения процессов мембранного электролиза в гальваническом производстве // Успехи в химии и химической технологии. – 2007 – Т. 21, № 9 (77). – С. 35–37.
3. Тураев Д.Ю. Основные приемы проведения регенерации, рекуперации и утилизации растворов и электролитов гальванического производства методом мембранного электролиза // Успехи в химии и химической технологии. – 2007. – Т. 21, № 9 (77). – С. 53 - 57.
4. Кузьмар И.И., Василец В.К., Кушнер Л.К., Хмыль А.А., Гиро А.М. Особенности формирования электрохимических покрытий сплавами на основе олова в условиях нестационарного электролиза // Современные электрохимические технологии и оборудование. – 2017. – С. 272–276.
5. Целуйкин В.Н., Корешкова А.А. Электроосаждение композиционных покрытий на основе сплава цинк-никель в импульсном режиме // Физикохимия поверхности и защита материалов. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 293–296.
6. Савельева Е.А., Дикун М.П. Эффективность очистки медьсодержащих растворов импульсным электролизом // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2017. – Т. 23, № 4. – С. 672–679.
7. Бажин В.Ю. Электрометаллургия алюминия: Учебное пособие. – СПб: Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», – 2012. – 56 с.
8. Прошкин В.Ю., Курмазенко Э.А., Гаврилов Л.И., Кочетков А.А., Павлова Н.В., Телегин А.А., Рябкин А.М., Кирышин О.В., Любимов Г.А. Системы генерации кислорода на основе электролиза воды: результаты эксплуатации на международной космической станции и перспективы развития // Авиакосмическая и экологическая медицина. – 2008. – Т. 42, № 6-1. – С. 70–72.
9. Мороз Е.М., Черник А.А., Жарский И.М. Извлечение ионов цинка из отработанного электролита цинкования методом мембранного электролиза // Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). – 2013. – № 19 (45). – С. 019–021.
10. Бадеников А.В., Бадеников В.Я. Электролиз воды и флотация шламов // Сборник научных трудов Ангарского государственного технического университета. – 2005. – Т. 1, № 1. – С. 003–005.
11. Фесенко Л.Н., Пчельников И.В., Териков А.С. Оценка экономической эффективности обеззараживания питьевой воды прямым электролизом // Военный инженер. – 2017. – № 4 (6). – С. 11–18.
12. Погребная В.Л., Тарасов В.Е., Боковикова Т.Н., Капустянская Ж.В., Токарев М.И., Сирота Ю.Г., Машнина С.П. Активация процессов обрушивания семян подсолнечника при обработке их растворами, полученными электролизом хлорида натрия // Известия высших учебных заведений. Пищевая технология. – 1997. – № 2-3 (237-238). – С. 30–32.
13. Петров Л.А., Шишмаков А.Б., Вакарин С.В., Семерикова О.Л., Меляева А.А., Микушина Ю.В., Зайков Ю.П., Чупахин О.Н. Поведение наноразмерных оксидных вольфрамовых бронз, полученных высокотемпературным электролизом, в модельных процессах обессеривания нефтепродуктов // Журнал неорганической химии. – 2014. – Т. 59, № 1. – С. 72.
14. Степень П.В., Лукьянчик А.И. Обзор двигательных установок на воде и продуктах ее электролиза для малых космических аппаратов // Проблемы разработки, изготовления и эксплуатации ракетно-

- космической техники и подготовки инженерных кадров для авиакосмической отрасли. Материалы XII Всероссийской научной конференции. – 2018. – С. 98–104.
15. Якименко Л.М., Модылевская И.Д., Ткачек З.А. Электролиз воды. – М: Химия, 1970. – 264 с.
 16. Карташов С.Н., Климачев Д.А. К вопросу об электролизе водных растворов электролитов // Вестник Московского государственного областного университета. – 2012. – № 2. – С. 51–55.
 17. Гарифуллин А.Р., Садиков К.Г. Электролиз подтоварной воды // Вестник технологического университета. – 2015. – Т. 18, № 2. – С. 167–168.
 18. van der Stegen J.H.G., van der Veen A.J., Weerdenburg H., Hogendoorn J.A., Versteeg G.F. Application of the Maxwell-Stefan theory to the transport in ion-selective membranes used in the chloralkali electrolysis process // Chemical Engineering Science. – 1999. – V. 54. – P. 2501–2511.
 19. Hogendoorn J.A., van der Veen A.J., van der Stegen J.H.G., Kuipers J.A.M., Versteeg G.F. Application of the Maxwell-Stefan theory to the membrane electrolysis process Model development and simulations // Computers and Chemical Engineering. – 2001. – V. 25. – P. 1251–1265.
 20. Kavadias K.A., Apostolou D., Kaldellis J.K. Modelling and optimisation of a hydrogen-based energy storage system in an autonomous electrical network // Applied Energy. – 2018. – V. 227. – P. 574–586.
 21. Rachid Miria, Sofiane Mraoui. Electrolyte process of hydrogen production by solar energy // Desalination. – 2007. – V. 206(1-3). – P. 69–77.
 22. Ротинян А.Л., Тихонов К.И., Шошина И.А. Теоретическая электрохимия. – Л: Химия, 1981. – 424с.
 23. Haran B.S., Popov B.N., Zheng G., White R.E. Mathematical Modeling of Hexavalent Chromium Decontamination from Low Surface Charged Soils // Journal of Hazardous Materials. – 1993. – V. 56, № 1-3. – P. 93–107.
 24. Калмыков А.В., Кулешов А.А., Савенкова Н.П. Моделирование анодного эффекта в многоанодном алюминиевом электролизере // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2016. – № 131. – 22 с.
 25. Урюпина О.А. Исследование точности аппроксимации тока электролиза кулонометрического гигрометра // Вестник Ангарской государственной технической академии. – 2013. – № 7. – С. 074–077.
 26. Перелыгин Ю.П. Зависимость катодного выхода по току металла при электролизе расплавов от режимов электролиза // Альманах современной науки и образования. – 2013. – № 6 (73). – С. 125–127.
 27. Бабаев Р.К., Алиев С.А. Исследование кинетических закономерностей процесса получения водорода электролизом воды // Проблемы науки. – 2018. – № 4 (28). – С. 31–33.
 28. Аринова А.Б. Математическое моделирование электродиффузионного транспорта ионов хлоридного комплекса родия в катодной камере мембранного электролизера // Вестник Кузбасского государственного технического университета. – 2019. – № 3 (133). – С. 37–43.
 29. Варенцов В.К., Кошев А.Н. Моделирование процесса газообразования водорода в проточных трехмерных электродах при извлечении металлов из растворов электролитов // Региональная архитектура и строительство. – 2017. – № 3 (32). – С. 128–135.
 30. Кошев А.Н. Некоторые особенности математического моделирования процессов извлечения металлов из растворов электролитов на проточные трехмерные электроды // Региональная архитектура и строительство. – 2015. – № 2 (23). – С. 104–115.
 31. Козырев Е.Н., Алехин В.И. Построение математических моделей однофазовых полупроводниковых пленок при помощи сингулярно возмущенного электролиза // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2011. – № 10. – С. 384–386.
 32. Alhassan Salami Tijani, Nur Afifah Binti Kamarudin, Fatin Athirah Binti Mazlan, Investigation of the effect of charge transfer coefficient (CTC) on the operating voltage of polymer electrolyte membrane (PEM) electrolyzer // international journal of hydrogen energy. – 2018. – V.43. – P. 9119–9132.
 33. Лукомский Ю.Я., Гамбург Ю.Д. Физико-химические основы электрохимии. – Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2008. – 424 с.
 34. Жерин И.И., Амелина Г.Н., Страшко А.Н., Ворошилов Ф.А. Основы электрохимических методов анализа: учебное пособие. Часть 2. Неравновесные методы анализа. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2015. – 175 с.
 35. Серебренникова Н.В., Иванова Н.В. Вольтамперометрия. Кемерово: Кузбассвуиздат, 2007. – 81 с.
 36. Алаторцев А.В., Кузьмин Р.Н., Савенкова Н.П., Проворова О.Г. Повышение эффективности электролиза алюминия с помощью математического моделирования // Прикладная физика. – 2007. № 4. – С. 34–42.
 37. Кузьмин Р.Н., Савенкова Н.П., Шобухов А.В. Математическое моделирование электролиза алюминия на длительном интервале времени // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. – 2009. – № 3. – С. 57–61.

38. Пискажова Т.В., Савенкова Н.П., Анпилов С.В., Калмыков А.В., Зайцев Ф.С., Аникеев Ф.А. Трёхмерное математическое моделирование динамики границы раздела сред алюминия, электролита и зоны обратного окисления металла в зависимости от распределения потенциала // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Техника и технологии. – 2017. – Т. 10, № 1. – С. 59–73.
39. Кремчеева Д.А. Моделирование процесса разложения алюминатных растворов в производстве глинозема // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 3. – С. 109.
40. Радионов Е.Ю., Немчинова Н.В., Третьяков Я.А. Моделирование магнитогидродинамических процессов в электролизерах при получении первичного алюминия // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2015. – № 7 (102). – С. 112–121.
41. Вабищевич П.Н., Илиев О.П. Численное решение нестационарных задач для системы уравнений Нернста–Планка // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 10. – С. 133–148..
42. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2003. – № 1. – С. 20–28.
43. Badriev I.B., Zadvornov O.A. On the convergence of the dual-type iterative method for mixed variational inequalities // Differential Equations. – 2006. – V. 42, № 8. – P. 1180–1188.
44. Бадриев И.Б. О решении вариационных неравенств второго рода // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Девятой Всероссийской конференции. – Казань: Отечество, 2012. – С. 32–35.
45. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. О решении некоторых нелинейных краевых и начально-краевых задач // Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – Москва: ООО "ТРИП", 2016. – С. 31–33.
46. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Численное исследование физически нелинейной задачи о продольном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 1. – С. 39–51.
47. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Численное решение задачи о равновесии трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем в геометрически нелинейной постановке // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – Т. 17, № 23. – С. 393–396.
48. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Геометрически нелинейная задача о продольно-поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158, № 4. – С. 453–468.
49. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Решение нелинейных задач теории многослойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Десятой Международной конференции. – Казань: Казанский университет, 2014. – С. 103–107.
50. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Продольно-поперечный изгиб по цилиндрической форме трехслойной пластины, подкрепленной в торцевых сечениях абсолютно твердыми телами // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2017. – Т. 159, № 2. – С. 174–190.
51. Badriev I.B., Paimushin V.N. Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – V. 38, № 5. – P. 779–793.
52. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Geometrically nonlinear problem of longitudinal and transverse bending of a sandwich plate with transversally soft core // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – V. 39, № 3. – P. 448–457.
53. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование разрешимости осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2005. – № 1. – С. 25–30.
54. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. О решении задачи равновесия мягкой сетчатой оболочки при наличии нагрузки, сосредоточенной в точке // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 3. – С. 16–34.
55. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование стационарной задачи фильтрации с многозначным законом при наличии точечного источника // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 7. С. 874–880.

56. Badriev I.B., Fanyuk B.Y. Iterative methods for solving seepage problems in multilayer beds in the presence of a point source // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2012. – V. 33, № 4. – P. 386–399.
57. Бадриев И.Б., Чебакова В.Ю. Математическое моделирование низкотемпературной ВЧЕ-плазмы в аргоне // Математическое моделирование и краевые задачи Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах. – Саратов, 2016. – С. 17–21.
58. Чебакова В.Ю. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при атмосферном давлении в аргоне // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158, № 3. – С. 404–423..
59. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при больших межэлектродных расстояниях. I. Постановка задачи // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 2.. – С. 123–130.
60. Badriev I.B., Ju Chebakova V., Zheltukhin V.S. Numerical solution of the initial boundary value problems of radio-frequency capacitive coupled discharge // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – V. 927, № 012008.

Логинова Е.А., Титов А.А.

Задача распределения тепла на двумерном многообразии

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
(Россия, Воронеж)

doi: 10.18411/lj-02-2020-75

idsp: ljournal-02-2020-75

Аннотация

В статье описывается построение решения задачи о распределении тепла по поверхности бесконечного цилиндра с конечным разрезом. Проверяется выполнение граничных условий типа сопряжения и доказывается гладкость решения. Основным результатом представляет собой асимптотические представления первых производных компонент решения.

Ключевые слова: теплопроводность, условия типа сопряжения, асимптотические представления, гладкость решения, двумерное многообразие, разрез-трещина

Abstract

The article describes the construction of a solution to the problem of heat distribution over the surface of an infinite cylinder with a finite section. The fulfillment of boundary conditions of the conjugation type is verified and the smoothness of the solution is proved. The main result is the asymptotic representations of the first derivatives of the solution components.

Keywords: thermal conductivity, conjugation type conditions, asymptotic representations, smoothness of a solution, two-dimensional manifold, cut-crack

Задачи теплопроводности, упругости, термоупругости для композитных материалов с различными дефектами не теряют актуальности уже несколько десятилетий. Настоящая статья посвящена одной из таких задач.

Задаётся стационарное уравнение теплопроводности

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) рассматривается на поверхности двумерного многообразия – прямого кругового полого бесконечного цилиндра γ с разрезом-трещиной μ по отрезку $[-1;1]$, направленному вдоль образующей цилиндра. $u(x, \varphi)$ – искомая