РАЗДЕЛ XVII. МАТЕМАТИКА

Бадриев И.Б., Буянов В.Ю., Макаров М.В.

Решение геометрически нелинейной задачи устойчивости для трехслойной пластины

*Казанский (Приволжский) федеральный университет
(Россия, Казань)*

doi: 10.18411/lj-02-2020-73

idsp: ljournal-02-2020-73

Аннотация

Рассмотрена геометрически нелинейная задача об устойчивости трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем в одномерной постановке. Для исследования форм потери устойчивости разработан конечно-разностный метод с использованием схемы продолжения решений по параметру и нелинейной спектральной задачи.

Ключевые слова: Трехслойная пластина, геометрическая нелинейность, форма потери устойчивости, нелинейная спектральная задача.

Abstract

The geometrically nonlinear problem of the stability of three-layer plates with a transversally soft core in a one-dimensional formulation is considered. To study the buckling forms a finite-difference method is developed using a scheme for continuing solutions to a parameter and a nonlinear spectral problem.

Keywords: Sandwich plate, geometric nonlinearity, buckling form, nonlinear spectral problem.

Введение.

К конструктивным элементам современной авиационной и космической техники предъявляются два противоречивых требования, которые заключаются в обеспечении высокой прочности и жесткости при минимальном весе конструкций. Наиболее эффективными видами таких элементов конструкций, обеспечивающих выполнение обоих требований, являются трехслойные стержни, пластины и оболочки [1-9]. Конструктивно они состоят из двух несущих слоев, изготавливаемых из материалов с высокими механическими характеристиками (предназначенных для восприятия основной части внешней нагрузки) и маложесткого легкого заполнителя, служащего для образования монолитной конструкции и обеспечивающего совместную работу несущих слоев. Применение в качестве заполнителей материалов с малым удельным весом позволяет при сравнительно небольшом весе существенно повысить изгибную жесткость пакета слоев в целом. Данная работа является продолжением [10–23] и посвящена решению задачи о смешанных формах потери устойчивости (ФПУ) трехслойных пластин в условиях формирования моментного докритического напряженно-деформированного состояния (НДС). Для исследования таких ФПУ трехслойных пластин, находящихся в условиях поперечного и продольно-поперечного изгибов, на базе уточненных уравнений дана постановка геометрически нелинейных задач, разработан конечно-разностный метод их решения в сочетании с использованием схемы продолжения решений по параметру нагружения в виде работы внешних сил и итерационного процесса на каждом шаге нагружения. Обобщенные постановки физически нелинейных и геометрически линейных задач рассмотрены в

[24–27]. Нелинейные задачи теории мягких сетчатых оболочек изучены в [28–37]. Численное решение геометрически нелинейных задач проведено в [38–42].

1. Постановка задачи.

Рис. 1. Схема соединения трехслойной панели с подкрепляющим стержнем (а); схема нагружения трехслойной пластины (б)

Изучаются задачи определения НДС бесконечно широких трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем. Длина пластины равна a , толщина заполнителя $2h$, толщины несущих слоев есть $2h_{(k)}$, $k = 1, 2$, – номер слоя. На рис. 1. показана схема нагружения конструкции поперечной изгибающей нагрузкой и осевой сжимающей силой P , где 1 – подкрепляющая внешние слои диафрагма; 2 – жесткий опорный элемент (полка лонжерона или нервюры); 3 – заполнитель; 4, 5 – внешние слои. Для изображенного вида соединения панели с опорным элементом, наиболее характерного для авиационных конструкций, в силу наличия подкрепляющей внешние слои диафрагмы, имеющей значительную в сравнении с заполнителем 3 жесткость в поперечном направлении, при постановке граничных условий прогибы внешних слоев можно считать нулевыми, допуская в то же время возможность поворота всего торцевого сечения. В случае осевого нагружения панели торцевая сжимающая сила P , очевидно, будет восприниматься главным образом, лишь верхним несущим слоем 5. В связи с этим при постановке граничных условий допустимо принять $P_{(2)} = 0$, $P_{(1)} = P$, считая нижний несущий слой в опорном сечении ненагруженным. Для построения обобщенной постановки задачи введем в рассмотрение пространства Соболева [43] $V_1 = W_2^{(1)}(0, a)$, $V_2 = \{z \in W_2^{(2)}(0, a) : z(0) = z(a) = 0\}$, $W_k = V_k \times V_k$, $k = 1, 2$, $W = W_2 \times W_1 \times V_1$. Обозначим $u = (u^{(1)}, u^{(2)}) \in W_1$, $w = (w^{(1)}, w^{(2)}) \in W_2$, $w^{(k)}$ и $u^{(k)}$ – прогибы и осевые перемещения точек срединной поверхности k -го слоя, $\eta = (\eta^{(1)}, \eta^{(2)}) \in W_1$, $z = (\eta^{(1)}, \eta^{(2)}) \in W_2$, $U = (w, u, q) \in W$, где q – касательные напряжения в заполнителе, $Z = (z, \eta, u) \in W$. Следуя [12, 16, 20], под решением геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем будем понимать функцию $U \in W$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$b(U, Z) = f(Z) \quad \forall Z \in W, \quad (1)$$

где форма $b(\cdot, \cdot)$ и функционал f , заданные на $W \times W$ и W , определяются по формулам

$$b(U, Z) = \int_0^a \sum_{k=1}^2 T_{(k)}^{11} \left(\frac{d\eta^{(k)}}{dx} + \frac{dw^{(k)}}{dx} \frac{dz^{(k)}}{dx} \right) dx + \int_0^a \sum_{k=1}^2 M_{(k)}^{11} \frac{d^2 z^{(k)}}{dx^2} dx +$$

$$\begin{aligned}
& + c_3 \int_0^a (w^{(2)} - w^{(1)})(z^{(2)} - z^{(1)}) dx + \int_0^a \left\{ \sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dz^{(k)}}{dx} + (\eta^{(2)} - \eta^{(1)}) \right\} q dx + \\
& + \int_0^a \left[\sum_{k=1}^2 H_{(k)} \frac{dw^{(k)}}{dx} + (u^{(2)} - u^{(1)}) \right] y dx + \int_0^a \left[c_1 q y - c_2 \frac{dq}{dx} \frac{dy}{dx} \right] dx, \\
f(Z) = & \sum_{k=1}^2 \left\{ \int_0^a [X_{(k)}^1 \eta^{(k)} + M_{(k)}^1 \frac{dz^{(k)}}{dx} + X_{(k)}^3 z^{(k)}] dx + P_{(k)} (\eta^{(k)}(a) - \eta^{(k)}(0)) \right\},
\end{aligned}$$

где $X_{(k)}^1, X_{(k)}^3$ – компоненты поверхностной нагрузки, приведенной к срединной поверхности k -го слоя, $T_{(k)}^{11} = B_{(k)} (du^{(k)}/dx + 0.5(dw^{(k)}/dx)^2)$, $M_{(k)}^{11} = D_{(k)} d^2 u^{(k)}/dx^2$ – мембранные усилия и внутренние изгибающие моменты в k -м слое соответственно. $B_{(k)} = 2h_{(k)} E^{(k)} / (1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)})$ – жесткость k -го слоя на растяжение–сжатие, $E^{(k)}$ и $\nu_{12}^{(k)}, \nu_{21}^{(k)}$ – модуль упругости 1-го рода и коэффициенты Пуассона материала k -го слоя, $D_{(k)} = B_{(k)} h_{(k)}^2 / 3$ – изгибная жесткость k -го слоя, G_{13}, E_3 – модули поперечного сдвига и обжатия заполнителя, $c_1 = 2h / G_{13}$, $c_2 = h^3 / (3E_3)$, $c_3 = E_3 / (2h)$, $M_{(k)}^1$ – поверхностный момент внешних сил, приведенный к срединной поверхности k -го слоя.

В [11, 12] установлено, что форма $b(\cdot, \cdot)$ порождает оператор $A: W \rightarrow W$, а функционал f – элемент $F \in W$, определяемые формулами $b(U, Z) = (AU, Z)_W$, $f(Z) = (F, Z)_W$, так что (1) эквивалентно операторному уравнению

$$AU = F. \quad (2)$$

Для бесконечно широкой трехслойной пластины длиной a нелинейные дифференциальные уравнения равновесия и кинематическое условие сопряжения внешних слоев с заполнителем по тангенциальным перемещениям, имеют вид ($0 < x < a$, $k=1, 2$)

$$dT_{(k)}^{11} / dx + X_{(k)}^1 + (3 - 2k)q = 0, \quad (3)$$

$$dS_{(k)}^1 / dx + X_{(k)}^3 + (3 - 2k)c_3(w^{(2)} - w^{(1)}) = 0, \quad (4)$$

$$(u^{(1)} - u^{(2)}) - H_{(1)} dw^{(1)} / dx - H_{(2)} dw^{(2)} / dx + c_1 q + c_2 d^2 q / dx^2 = 0. \quad (5)$$

Здесь $S_{(k)}^1 = Q_{(k)}^1 + H_{(k)}$ – обобщенные перерезывающие силы в k -м слое, $Q_{(k)}^1 = dM_{(k)}^{11} / dx + T_{(k)}^{11} dw^{(k)} / dx + M_{(k)}^1$ – перерезывающие силы несущих слоев.

Предполагаем, что края несущих слоев шарнирно оперты на абсолютно жесткие в поперечном направлении диафрагмы. Поэтому в сечениях $x=0$, $x=a$ для уравнений (3)–(5) формулируются граничные условия

$$T_{(k)}^{11} = -P_{(k)}, \quad w^{(k)} = d^2 w^{(k)} / dx^2 = 0, \quad k=1, 2, \quad dq/dx = 0, \quad (6)$$

причем в случае поперечного изгиба $P_{(1)} = P_{(2)} = 0$, а в случае продольно-поперечного изгиба $P_{(1)} = P$, $P_{(2)} = 0$.

2. Постановка задачи устойчивости в виде задачи на собственные значения, линеаризация в окрестности нелинейного решения.

Будем проводить определение точек бифуркации задачи (2) и соответствующих им бифуркационных (критических) значений нагрузок. Точка бифуркации определяется как точка ветвления решений нелинейной задачи (2). Один из способов решения указанной задачи поиска точки бифуркации состоит в линеаризации задачи и нахождения критической нагрузки в окрестности решения линейной задачи. Нами же предполагается проводить линеаризацию задачи в окрестности решения нелинейной задачи. Основная идея определения точки бифуркации на основе решений однородных линеаризованных уравнений состоит в следующем. Предположим, что одна, какая-то, форма равновесия системы известна, и нужно найти точку бифуркации этой формы равновесия. Для этого достаточно, не интересуясь поведением системы вдали от

известной формы равновесия $U = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)}, q)$, найти условия существования другой формы $U + \Delta U$, отличной от исходной, но к ней близкой

$$A(U + \Delta U) = F. \quad (7)$$

Другими словами, точка, в окрестности которой существуют по крайней мере две формы равновесия U и $U + \Delta U$, т.е. $A(U) = A(U + \Delta U) = F$, и является точкой бифуркации, где

$\Delta U = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)}, q)$ – малое приращение.

Сформулированная задача эквивалентна задаче о нахождении такой точки U , что дифференциал $B(U)\Delta U$ оператора AU будет равен нулю: $B(U)\Delta U = 0$. Покажем, что это действительно так, и получим вид линейного по ΔU оператора $B(U)$. Напомним, что если при фиксированном U и всех ΔU

$$A(U + \Delta U) - A(U) = B(U)\Delta U + R(U, \Delta U), \quad (8)$$

где $B(U)$ – линейный непрерывный по ΔU оператор,

$\lim_{\Delta U \rightarrow 0} R(U + \Delta U) / \|\Delta U\|_V = 0$, то $B(U)\Delta U$ – дифференциал оператора A в точке U ,

а $R(U, \Delta U)$ – остаточный член этого дифференциала. Также стоит отметить, что задача о нахождении точки бифуркации, которая получается в результате учета уравнений (2) и (7) будет иметь вид

$$A(U + \Delta U) - AU = 0. \quad (9)$$

Отсюда, в силу равенства (8) и соотношения $R(U, \Delta U) \rightarrow 0$ (т.к. ΔU – малое приращение), задача запишется в виде

$$B(U)\Delta U = 0. \quad (10)$$

Вместе с тем, представим оператор A в виде $A = A_1 + A_2$, где A_1 – линейный, A_2 – нелинейный операторы. Тогда (9) примет вид $A_1 \Delta U(x) + A_2(U(x) + \Delta U(x)) - A_2(U(x)) = 0$. Обозначим дифференциал оператора

A_2 в точке U через $B_2(U)$. Тогда задача (10) может быть сформулирована в виде $A_1 \Delta U(x) + B_2(U(x)) \Delta U(x) = 0$, или

$$B(U) \Delta U = (A_1 + B_2(U(x)) \Delta U(x) = 0. \quad (11)$$

где $B(U)$, $B_2(U)$ – линейные непрерывные по ΔU и нелинейные по U операторы.

Применительно к сформулированной задаче (3)–(6) задача (11) будет иметь вид

$$\begin{aligned} & B_{(k)} d^2 u^{(k)} / dx^2 + (3 - 2k)q + B_{(k)} d / (dw^{(k)} / dx d^0 w^{(k)} / dx) / dx = 0, \\ & - D_{(k)} d^4 w^{(k)} / dx^4 + H_{(k)} dq / dx + (3 - 2k)c_3 (w^{(2)} - w^{(1)}) + \\ & + B_{(k)} d / (du^{(k)} / dx d^0 w^{(k)} / dx + d^0 u^{(k)} / dx dw^{(k)} / dx + 1.5 (d^0 w^{(k)} / dx)^2 dw^{(k)} / dx) = 0, \\ & (u^{(1)} - u^{(2)}) - H_{(1)} dw^{(1)} / dx - H_{(2)} dw^{(2)} / dx + c_1 q - c_2 d^2 q / dx^2 = 0 \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} & B_{(k)} du^{(k)} / dx + B_{(k)} (dw^{(k)} / dx d^0 w^{(k)} / dx) = 0, \quad w^{(k)} = d^2 w^{(k)} / dx^2 = 0, k=1,2, \\ & dq / dx = 0, \end{aligned}$$

Для нахождения нетривиальных решений задачи (11) сведем ее к задаче на собственные значения. С этой целью рассмотрим следующую вспомогательную задачу, которая получается в результате умножения в уравнении (11) U на λ / p , где λ – число, которое характеризует точку бифуркации в окрестности известной формы

равновесия $U = (w^{(1)}, w^{(2)}, u^{(1)}, u^{(2)}, q)$, p – нагрузка, соответствующая состоянию равновесия, при одном из двух способов нагружения (при поперечном изгибе $p = X_{(1)}^3$, при продольно-поперечном изгибе $p = P$)

$$B(\lambda U / p) \Delta U = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) есть задача на собственные значения относительно пары $\lambda, \Delta U$. Таким образом, при различных правых частях, сформулированной задачи (2) $AU = F$, U пробегает множество таких функций $(U_p) \supset U$, что $U \in W$, и относительно каждой $U \in (U_p)$ ставится задача (12). Путем последовательного нагружения в основной геометрически нелинейной задаче (2) $AU = F$, табулируя сначала по нагрузке p , а потом согласно методу продолжения по параметру по работе внешних сил Π , мы находим множество форм равновесия (U_p) , решая для каждого U задачу на собственные значения (12), будем следить за поведением λ . В действительности в сформулированной задаче на собственные значения (12), условие существования другого состояния равновесия выполнено лишь в том случае, когда λ равна параметру нагружения p , потому что именно в этом случае выполняется равенство (7), т.е. $A_1(U + \Delta U) = F$. Следует отметить, что $\lambda = p$ есть точка бифуркации, а значит если $\lambda = p$, равенство (12) эквивалентно равенству (11) и λ является критической нагрузкой, которая характеризует точку пересечения двух решений. Работа внешних

$$\Pi = \int_0^a X_{(1)}^3 w^{(1)} dx = X_{(1)}^3 \int_0^a w^{(1)} dx$$

сил Π задается выражением при действии на

первый несущий слой поперечной нагрузки $X_{(1)}^3 \equiv \text{const}$ или $\Pi = P(u^{(1)}(0) - u^{(1)}(a))$ при действии в торцевых сечениях первого несущего слоя сжимающих усилий, равных P . Решение нелинейных задач вида (2) проводилось с помощью двухслойного итерационного процесса с опусканием нелинейности на нижний слой [3, 4, 44–55], решение нелинейных спектральных задач с помощью методов из [56–60].

3. Результаты численных экспериментов.

Разработанные методы были реализованы численно. Сначала рассматривался случай, когда несущие слои имеют одинаковую толщину. Расчеты проводились при следующих параметрах: $2h_{(k)}=0.1$ см, $2h=2$ см, $a=20$ см, $E^{(k)}=133$ ГПа, $E_3=50$ МПа, $G_{13}=25$ МПа, $P=-100$ кН/м, $P_{(1)}=P_{(2)}=P/2$, $\nu_{12}^{(k)}=\nu_{21}^{(k)}=0.34$, $X_{(k)}^3=0$ МПа, $X_{(k)}^1=0$, $M_{(k)}^1=0$. Результаты расчетов приведены на рис. 2, 3.

Рис. 2. Осевые перемещения

Рис. 3. Собственные вектора

Из этих рисунков можно сделать вывод, что при нагружении несущих слоев одинаковыми усилиями реализуется изгибная ФПУ трехслойной пластины, характеризующаяся выпучиванием по одной полуволне. Соответствующая такой ФПУ критическая нагрузка, найденная из численного решения линеаризованной задачи устойчивости, равна $P^*=519.5$ кН/м. Отметим, что предложенные в [61] аналитические выражения для определения критической нагрузки хорошо согласовываются с полученной критической нагрузкой. Рассматривался также случай, когда несущие слои имеют одинаковую толщину, $2h_{(1)}=0.05$ см, $h_{(2)}=3h_{(1)}=0.15$ см. Результаты расчетов приведены на рис. 4–7. Видно, что симметрия деформирования несущих слоев нарушена. На рис. 5 видно, что несущий слой с меньшей толщиной имеет большие осевые перемещения. Вследствие нарушения симметрии, в пластине возникает изгибающий момент, из-за которого, как видно на рис. 4, осевые усилия в несущих слоях становятся различными. В целом же пластина начинает изгибаться в сторону несущего слоя с большей толщиной (рис. 6). На рис. 7 представлен график распределения касательных усилий в заполнителе. Видно, что в окрестности краёв пластины они принимают максимальные значения, а в середине в силу симметрии граничных условий, они равны нулю.

Рис. 4. Мембранные усилия

Рис. 5. Осевые перемещения

Рис. 6. Прогибы в несущих слоях

Рис. 7. Касательные напряжения в заполнителе

Благодарности

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 18-38-00595, 20-08-01005, 19-08-01184).

1. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // Composite structures. – 2001. – V. 53, № 1. – P. 21–42.
2. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Численное исследование физически нелинейной задачи о продольном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – № 1. – С. 39–51.
3. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Геометрически нелинейная задача о продольно-поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158, № 4. – С. 453–468.
4. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Численное решение задачи о равновесии трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем в геометрически нелинейной постановке // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – Т. 17, № 23. – С. 393–396.
5. Badriev I.B., Paimushin V.N. Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – V. 38, № 5. – P. 779–793.
6. Badriev I.B., Bujanov V.Yu., Makarov M.V. Differential Properties of the Operator of the Geometrically Nonlinear Problem of a Sandwich Plate Bending // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – V. 40, № 3. – P. 263–273.
7. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В. Численное исследование физически нелинейных задач об изгибе трехслойных пластин // Материалы XI Международной конференции по неравновесным

- процессам в соплах и струях (NPNJ'2016), Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). – М: Изд-во МАИ, 2016. – С. 475-477.
8. Макаров М.В., Бадриев И.Б., Паймушин В.Н. Определение критических точек бифуркации для задачи о геометрически нелинейном поведении трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2016. Материалы международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 292-294.
 9. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Исследование задачи об изгибе трехслойной пластины в физически нелинейной постановке // Математическое моделирование и краевые задачи Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах.. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара, 2016. – С. 19–24.
 10. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П. Постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 16-1. – С. 5–11.
 11. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Мартынова О.П. Операторная формулировка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 18-3. – С. 5–13.
 12. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Обобщенная постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 23-1. – С. 4-10.
 13. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. О псевдомонотонности оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 24-2. – С. 5–14.
 14. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. О свойстве типа ограниченной липшиц-непрерывности оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 25-3. – С. 5–12.
 15. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. О квазипотенциальности оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 26-1. – С. 5–12.
 16. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Постановка геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 8-2 (34-2). – С. 11–14.
 17. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Исследование свойств оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. – 2017. – Т. 10. – С. 7–10.
 18. Бадриев И.Б. Исследование математических моделей процессов изгиба трехслойных пластин с трансверсально-мягким заполнителем и методов их численной реализации // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 7-2 (33-2). – С. 83–88.
 19. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. О решении геометрически нелинейных задач об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 7-2 (33-2). – С. 95–98.
 20. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Исследование геометрически нелинейных задач об изгибе трехслойных пластин в одномерной постановке // Материалы XII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018). – М: Изд-во МАИ, 2018. – С. 322–324.
 21. Бадриев И.Б., Буянов В.Ю., Макаров М.В. Производная Гато оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2017. – № 30-2. – С. 5–12.
 22. Бадриев И.Б., Буянов В.Ю., Макаров М.В. Свойства производной Фреше оператора геометрически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины и постановка нелинейной спектральной задачи // Тенденции развития науки и образования. – 2019. – № 52-4. – С. 5–13.
 23. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В. Сеточные аппроксимации физически нелинейной задачи об изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2016. Материалы международной конференции. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 70–72.
 24. Бадриев И.Б. Решение вариационных задач нелинейных процессов механики сплошной среды // Теория управления и математическое моделирование Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В.Азбелева и профессора Е.Л.Тонкова.. – Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2015. – С. 234–235.

25. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Гарипова Г.З. О решении физически нелинейных задач о равновесии трехслойных пластин // Теория управления и математическое моделирование. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В.Азбелева и профессора Е.Л.Тонкова. - Ижевск: Изд-во "Удмуртский университет", 2015. - С. 235-237.
26. Бадриев И.Б., Гарипова Г.З., Макаров М.В. Приближенные методы решения задачи об изгибе трехслойной пластины с идеально упруго-пластическим наполнителем // Материалы XXII Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" им. А.Г. Горшкова. – М: ООО "ТРИП", 2016. – С. 31-33.
27. Бадриев И.Б. Математические модели нелинейных процессов изгиба трехслойных пластин // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: материалы международной научной конференции, 8-13 октября 2017 г., Самара. – Самара: СГПУ, 2017. – С. 180–181.
28. Badriev I.B., Banderov V.V. Numerical solution of the equilibrium of axisymmetric soft shells // Математические методы в технике и технологиях-ММТТ. – 2014. – № 5 (64). – С. 16–20.
29. Бадриев И.Б. О решении вариационных неравенств второго рода // Сеточные методы для краевых задач и приложения Материалы Девятой Всероссийской конференции. – Казань: Отечество, 2012. – С. 32–35.
30. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Численное моделирование деформирования биокomпозитов // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXI международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. – М: ООО "ТРИП", 2015. – С. 7–9.
31. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Исследование разрешимости осесимметричной задачи об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2005. – № 1. – С. 25–30.
32. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Калачева Н.В. Численное исследование вариационных и квазивариационных неравенств теории мягких сетчатых оболочек // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1037–1041.
33. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Численное решение задач о равновесии осесимметричных мягких оболочек // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 29–35.
34. Бадриев И.Б., Бандеров В.В. Итерационные методы решения вариационных неравенств теории мягких оболочек // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 2. – С. 19–33.
35. Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. О решении задачи равновесия мягкой сетчатой оболочки при наличии нагрузки, сосредоточенной в точке // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 3. – С. 16–34.
36. Бадриев И.Б., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю. О решении некоторых нелинейных краевых и начально-краевых задач // Материалы XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – Москва: ООО "ТРИП", 2016. – С. 31–33.
37. Badriev I.B. Mathematical modeling of continuum mechanics problems with the point sources // Проблемы химмотологии: от эксперимента к математическим моделям высокого уровня Сборник избранных докладов VI Международной научно-технической конференции. – М. ООО «Издательство «Граница», 2016. С. 19–21.
38. Макаров М.В. Численное исследование геометрически нелинейной задачи о поперечном изгибе трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. – 2016. – № 17-2. – С. 26–35.
39. Макаров М.В. О решении геометрически нелинейных и линейных задач о поперечном изгибе жестко закрепленной трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем // Тенденции науки и образования в современном мире. - 2016. - № 19-2. - С. 23-29.
40. Бадриев И.Б., Буянов В.Ю., Макаров М.В. Исследование задачи о потере устойчивости трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 7-2 (33-2). – С. 92–94.
41. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Буянов В.Ю. Геометрически нелинейная задача о потере устойчивости трехслойной пластины // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2017. – Т. 5, № 8-2 (34-2). – С. 7–10.
42. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Численное исследование процессов изгиба трехслойных пластин в геометрически нелинейной и линейной постановках // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXIII международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. – М: ООО "ТРИП", 2017. – С. 21-24.
43. Adams R.A. Sobolev Spaces. – New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975. – 286 p.
44. Badriev I.B., Zadvornov O.A. Analysis of the stationary filtration problem with a multivalued law in the presence of a point source // Differential Equations. - 2005. – Т. 41, № 7. – С. 915–922.

45. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. Итерационные методы решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2003. – № 1. – С. 20–28.
46. Бадриев И.Б., Задворнов О.А. О сходимости итерационного метода двойственного типа решения смешанных вариационных неравенств // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 1115–1122.
47. Бадриев И.Б., Ляшко А.Д., Панкратова О.В. Исследование сходимости итерационных методов решения нелинейных задач теории фильтрации // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1998. – № 11. – С. 8–13.
48. Бадриев И.Б., Фанюк Б.Я. Итерационные методы решения задач фильтрации в многослойных пластах при наличии точечного источника // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2010. – Т. 152, № 4. – С. 39–55.
49. Badriev I.B., Fanyuk B.Y. Iterative methods for solving seepage problems in multilayer beds in the presence of a point source // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2012. – V. 33, № 4. – P. 386–399.
50. Бадриев И.Б., Чебакова В.Ю. Математическое моделирование низкотемпературной ВЧЕ-плазмы в аргоне // Математическое моделирование и краевые задачи Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием: в 3-х томах. – Саратов, 2016. – С. 17–21.
51. Чебакова В.Ю. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при атмосферном давлении в аргоне // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 158, № 3. – С. 404–423.
52. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н. Моделирование высокочастотного емкостного разряда при больших межэлектродных расстояниях. I. Постановка задачи // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 2.. – С. 123–130.
53. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Паймушин В.Н. Продольно-поперечный изгиб по цилиндрической форме трехслойной пластины, подкрепленной в торцевых сечениях абсолютно твердыми телами // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2017. – Т. 159, № 2.. – С. 174–190.
54. Badriev I.B., Ju Chebakova V., Zheltukhin V.S. Numerical solution of the initial boundary value problems of radio-frequency capacitive coupled discharge // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – V 927, № 012008.
55. Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Бадриев И.Б., Макаров М.В. Геометрически и физически нелинейная задача о трехточечном изгибе композитных тест-образцов // Материалы XXII Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" им. А.Г.Горшкова. Т. 2. – М: ООО «ТР-принт», 2016. – С. 197–202.
56. Solov'ev S.I. Superconvergence of finite element approximations to eigenspaces // Differential Equations. – 2002. – V. 38, № 5. – P. 752–753.
57. Solov'ev S.I. The error of the Bubnov-Galerkin method with perturbations for symmetric spectral problems with a non-linearly occurring parameter // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1992. – V. 32., № 5. – P. 579–593.
58. Solov'ev S.I. Finite element approximation with numerical integration for differential eigenvalue problems // Applied Numerical Mathematics. – 2015. – V. 93. – P. 206–214.
59. Solov'ev S.I. Eigenvibrations of a beam with elastically attached load // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2016. – V. 37, № 5. – P. 597–609.
60. Solov'ev S.I. Eigenvibrations of a bar with elastically attached load // Differential Equations. – 2017. – V. 53, № 3. – P. 409–423.
61. Иванов В.А., Паймушин В.Н., Полякова Т.В. Уточненная теория устойчивости трехслойных конструкций (линеаризованные уравнения нейтрального равновесия и простейшие одномерные задачи) // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1995. – № 3. – С. 15–24.

Кашапов Л.Н., Фахретдинова Э.И., Чебакова В.Ю.
О математических моделях процессов электролиза воды

*Казанский (Приволжский) федеральный университет
(Россия, Казань)*

doi: 10.18411/lj-02-2020-74

idsp: ljjournal-02-2020-74

Аннотация

Дан обзор работ, посвященных математическому моделированию процессов электролиза растворов электролитов. Проанализированы различия в протекании