В. Келдыш и М. А. Лаврентьев, Н. Н. Богомолов и В. С. Владимиров к проблемам квантовой теории поля.

1. М.Я.Выгодский ; Справочник по элементарной математике М., наука 2010 г.
2. Выгодский Я. М.: Справочник по высшей математике. АСТ: Астрель, 2010.
3. А.В.Савин.-М.: Педагогика ,2010 г. «Энциклопедический словарь математика»

Гацаева Р.С.-А.

Специальные плоские кривые

*ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет»
(Россия, Грозный)*

doi: 10.18411/lj-01-2021-88

idsp: ljjournal-01-2021-88

Аннотация

В статье содержится обзор развития некоторых математических понятий, начиная с основоположных работ Декарта по аналитической геометрии (1637) и кончая 1850 г. В статье даются указания на все рассмотренные сочинения.

Ключевые слова: Кривая, касательная, биссектриса, парабола, геометрия, прямая, окружность.

Abstract

The article provides an overview of the development of some mathematical concepts, starting with the fundamental works of Descartes on analytic geometry (1637) and ending in 1850. The article gives instructions on all the considered works.

Key words: Curve, tangent, bisector, parabola, geometry, straight line, circle.

Специальные плоские кривые. Еще задолго до того, как возникла общая теория конических сечений, был изобретен ряд отдельных кривых для построения знаменитых античных задач (Цейтен, ч. I). Мы приведем ниже главнейшие черты истории наиболее известных специальных кривых, следуя их современному подразделению на алгебраические и трансцендентные. Древней истории их мы касаться почти не будем.

Кривые 3-го порядка. Одной из наиболее древних кривых является «циссоида Диоклеса», названная так благодаря сходству с листом плюща; бесконечные ветви ее были, действительно, обнаружены лишь в начале XVII столетия. Она послужила Ферма, Гюйгенсу, Котесу и И. Бернулли образцом для испытания их интеграционных приемов. «Декартов лист» чисто аналитически определил в одном письме к Мерсенну от 1638 Декарт, предложив его в качестве примера для применения своего метода касательных [ср. стр. 109]. Первоначально во всех четырех квадрантах вычерчивали четыре одинаковых листа, так что Роберваль предложил для этой название «le galanth» (т. е. подснежник). Правильная форма кривой была установлена лишь в конце XVII столетия. С целью расставить перед Робервалем ловушку, Декарт дал также уравнение этой кривой относительно биссектрисы угла между старыми координатными осями. «Декартова парабола» появилась, правда, лишь с одной ветвью уже в «Геометрии» Декарта (1637). Правильно нарисовал ее Ньютон, назвавший ее «Tridens», т. е. трезубец («Перечисление кривых», 1704; ср. стр. 221). «Строфоида» (термин Э. Монтуччи, 1846) была открыта в середине XVII столетия, вероятно, одним французским математиком. Ее изучением занимались «Трисектриса Маклорена» появилась в его «Органической геометрии» (1720), «кривая Чирнгауза» (термин Р. Арчибальда, 1900) встречается в Acta Enid. 1690, а «версьера» (или т. н. «локон Аньези») ведет свое происхождение из

«Квадратуры круга и гиперболы» (*Quadratura circuli et hyperbolae*, Пиза, 1703) Г. Гранди.

Кривые 4-го порядка. И здесь имеются весьма древние линии, вроде «спирических линий» Персея (II столетие до н. э.), представлявших собой сечения тора, и «конхоиды Никомеда», две ветви которой рассматривались как различные кривые еще геометрами XVII столетия (см., например, стр. 226). В XVI и XVII столетиях конхоида была излюбленным примером для приложения всяческих инфинитезимальных приемов. Ньютон («Универсальная арифметика», 1707) даже предложил отнести ее, наряду с прямой и окружностью, к разряду постоянно употребляемых кривых. Конхоида, основанием которой является окружность, была названа еще Робервалем «улиткой Паскаля», в честь Этьена Паскаля (отца Блеза), которому, вероятно, принадлежит ее изобретение. Открытие «кардиоиды» приписывается И. Коерсма, жившему в конце XVII столетия, а название это ввел Касгильон в *Phil. Trans.*, 1741. Довольно большую статью об общих свойствах конхоид опубликовал Лагир [*Mem. Ac. Paris*, 1708 (?1730)]. «Декартовы овалы» были описаны Декартом во второй книге «Геометрии» (1637) с целью их применения при выделке линз. Из рукописей Декарта (ср. стр. 222) видно, что важная теорема о трех фокусах этих овалов была ему известна уже в 1629. «Кривая-каппа» (название принадлежит А. Обрей, *Journ. math*, спес, 1895) согласно сообщению, сделанному в 1662 Гюйгенсу де-Слюзом, была придумана учеником и сотрудником Декарта Г. ван-Гутшовеном. «Кривые Кассини» «Кривые Кассини» (см. стр. 273) должны были представлять собой, по мнению Дж. Д. Кассини, орбиту Солнца, а в фокусе их помещалась Земля [сообщено его сыном Жаком Кассини в «Началах астрономии» (*Elements d'astronomie*, Париж, 1749)]. Еще Даламберу не было известно, что эта линия представляет собой частный случай кривых Кассини с действительной узловой точкой перегиба («Методическая энциклопедия» - *Encyclopedic methodique*, Париж -Льеж, 1785); доказано это было лишь П. Феррони А782) и Дж. Саладини (1806). «Раковинная линия», описанная в «Наставлении об измерении» (*Unterweysung der messung usw.*, Нюрнберг, 1525) Альбрехта Дюрера, являлась обобщением конхоиды Никомеда, чего, правда, Дюрер не подозревал.

Алгебраические кривые высшего порядка. «Параболы и гиперболы высших порядков», как упоминалось выше, были использованы в начале разбираемого нами периода рядом математиков в качестве основы для разработки инфинитезимальных приемов (см. стр. 104,108). В класс «биномиальных кривых» их объединил, лишь О. Конт (1843). Общими параболическими кривыми $y = ax^m + bx^{m-1} + \dots + f$ занимался особенно Ньютон в интерполяционных задачах и для графического решения уравнений. «Розы» были открыты Гвидо Гранди (два письма к Лейбницу, (1713), детально рассмотревшим их в специальной книге «Геометрические цветы» (*Flores geometrici*, Флоренция, 1728). «Треугольные кривые» возникли в одной оптической задаче, поставленной Эйлером [*Act. Ac. Petr.*, 1778, II 1781). Эвольвенты этих кривых он называл «круговидными» (*Orbiformen*). «Мультипликатрисы» и «медиатрисы», т. е. линии, служащие для умножения куба и соответственно для вставки произвольного числа средних пропорциональных между двумя данными отрезками, изобретались математиками всех времен. Во второй книге «Геометрии» Декарт привел такую кривую совершенно общего вида (см. стр. 263), специально изученную затем Дж. Б. Караччиоли в его «Книге о кривых линиях» (*De lineis curvis liber*, Пиза, 1740). В возрасте двенадцати с половиной лет несколько таких кривых нашел Клеро (*Misc. Berol.*, 1734); одна из них была, вероятно, тождественна с так называемой «кампилой» Эвдокса. «Сектрисы», или «кривые деления угла», были тоже предложены в большом числе. Одну из них предложил Томазо Чева (*Opuscula*, Милан, 1699), назвав ее «аномальной циклоидой» (*Cyclois anomala*). Кривым с несколькими осями симметрии посвятил XV главу второго тома своего «Введения» 1748) Эйлер. Кривыми, длины дуг

которых представляют собой некоторые определенные функции, несколько раз занимались Эйлер [Nov. Act. Petr., 1789 (представлено 1776), Mem. Ac. St.-Pet., 1830 (представлено 1781)] и Н. Фус (Nov. Act. Petr., 1805). «Синус-спирали», современное полярное уравнение которых $\rho^n = a^n \cos n\varphi$ исследовал еще Маклорен в «Трактате о флюксиях» (1742). Однако название многочисленных красивые свойства этих линий были получены недавно. Частными случаями их являются прямая, все виды конических сечений, лемниската, кардиоида и кривая Чирнгауза.

Трансцендентные кривые. Одной из древнейших трансцендентных кривых является «квадратриса Динострата». До Роберваля [около 1636, см. Mem. Ac. Paris, 1666/99 (1730)] рассматривали только ветвь кривой, лежащую в определяющем квадранте круга. «Квадратриса Чирнгауза» («Исцеление ума» - *Medicina mentis*, Амстердам, 1686) была аффинна синусоиде. В Phil.Trans., 1700 Дж. Перке (анонимно) предложил другую квадратрису, уравнение которой в полярных координатах было бы $\rho = a \frac{\sin \varphi}{\varphi}$ эту кривую рассматривали также несколько математиков XVIII столетия.

Название «кохлеоиды» ей дал Фалькенбург А883). Общеизвестна «спираль Архимеда», также представляющая собой одну из квадратрис. В XVII столетии особенное внимание привлекло ее спрямление, отсутствовавшее у Архимеда. Кавальери, Григорий из Сен-Винцента, Паскаль и Ферма показали, что оно может быть приведено к спрямлению параболы. «Спирали высших порядков», современное уравнение которых $\rho^k = a^k \varphi$ прежде всего были использованы как примеры для квадратур еще до открытия интегрального исчисления (Ферма, 1636; Стефандельи Анджели, 1660; Валлис, около 1663). Частные случаи $k=2$ встречались и в задачах механики [ср. Вариньон, Mem. Ac. Paris, 1699 1732?). В том же случае $k = 2$ («параболическая спираль») Як. Бернулли применил методы интегрального исчисления (Acta Erud., 1691). «Гиперболическую спираль» впервые ввел Вариньон [Mem. Ac. Paris, 1704 1722?). «Жезл» (посох, «Lituus», $k = -2$). Открытие «логарифмической спирали» следует приписать Декарту. Вероятно, одновременно с Декартом к этой кривой пришел Торричелли, давший ее квадратуру и спрямление, явившееся первым спрямлением высшей кривой. Особенно красивые свойства логарифмической спирали были открыты Як. Бернулли (Acta Erud., 1692). История открытия «циклоиды» неясна. Некоторые находят эту линию у де-Бувелля в «Шести книгах введения в геометрию» (*Geometricae introductionis libri sex*, Париж, 1503). Название «циклоиды» ей дал около 1598 Галилей, пытавшийся определить ее площадь посредством взвешивания. Точно вычислил площадь циклоиды Роберваль в 1634, результат которого подтвердили Декарт и Ферма в 1638 (Роберваль называл ее «трохоидой»). Вскоре затем Рен произвел спрямление циклоиды. Впоследствии ею занимались все выдающиеся геометры. В частности, ряд ценных предложений открыл около 1658 Паскаль. Гюйгенс («Маятниковые часы», 1673, закончено в 1665) нашел, что эволюта циклоиды с ней конгруэнтна. Касательная к циклоиде была проведена Декартом еще в 1638, причем он указал общий способ построения нормалей для циклоидальных кривых. Гюйгенс установил, что циклоида является таутохронной кривой. Что она представляет собой также брахистохрону, нашел Иоганн Бернулли (Acta Enid., 1696). Существование удлинённых и укороченных циклоид заметил уже Торричелли 1644) Мысль об «эпициклоидах» во всяком случае весьма давняя. Объяснить движение планет с помощью эпициклов пытались еще Аполлоний (около 200 до н. э.) и особенно Гиппарх (около 150 до н. э.). Но геометрически первая конкретная эпициклоида была рассмотрена лишь Дюрером в «Наставлении об измерении» 1525). Первую систематическую работу об эпициклоидах и гипоциклоидах написал Лагир [Mem. Ac. Paris, 1666/99 1730)], сам указавший в качестве своего предшественника Дезарга; однако, о результатах, полученных в этом направлении последним, ничего не известно. В развитие вышеупомянутого способа Декарта, Гюйгенс («Маятниковые часы», 1673) дал построение нормалей в общем случае качения одной кривой по другой. Что розовидные кривые (стр. 283) являются

эпи- или гипоциклоидами, впервые заметил Суарди («Новые приборы» -Nuovi strumenti, Брешиа, 1752). Эвольвенту круга, приведенную еще Лагиром в «Трактате о рулетках» [Traite des roulettes, Mem. Ac. Paris, 1706 1731?], т. е. общих кривых качения, систематически изучил впервые Дени Дидро («Мемуар о различных вопросах математики», Париж, 1748). На «псевдоциклоиды» (термин Э. Чезаро, 1896), т. е. эпициклоиды с мнимым образующим кругом, натолкнулся еще Эйлер в поисках кривых, подобных своим эволютам. Уже Лагир доказал, что каждую кривую можно рассматривать как рулетку. Задачу, ведущую к «кривым Рибокура» (это название было дано в одной работе 1880), поставил Иоганн Бернулли (в одном письме 1716). Лейбниц предложил ее английским математикам, а затем она привлекла внимание многих ученых, особенно в связи с проблемой ортогональных траекторий. Термин «линия синусов» (синусоида) ввел уже О. Фабри (1659, см. стр. 324). Тангенсоиду и секансоиду Ронде в своем переводе «Анализа бесконечно малых» (Analyse des infiniment petits, Париж, 1735) Э. Стона называл «figure des tangentes» и «figure des secantes». «Показательная кривая» (этот термин предложил под влиянием Лейбница И. Бернулли, Acta Erud., 1697) или «логарифмическая кривая» (Г. Гранди, 1701) появилась около 1640. Торричелли писал о ней в одном письме к М. Риччи от 1644 и установил постоянство ее подкасательной. Кроме названных ученых, показательной кривой особенно занимались еще Гюйгенс и Котес. Иоганн Бернулли приписал ей отрицательную ветвь, ошибочно полагая, что $\log(-x)$ равен $\log x$ (письмо к Лейбницу от 1712).

К. Перро поставил перед рядом парижских математиков, а затем и перед Лейбницем, задачу о «трактрисе». Характерное свойство ее нашел Лейбниц (Acta Erud., 1693). Еще Галилей полагал, что кривой, по которой располагается подвешенная за два конца нить, является парабола [«Беседы и математические доказательства» (Discorsi e dimostrazioni, Лейден, 1638)]. Согласно указанию Лейбница (Acta Erud., 1691) ошибочность этого мнения выяснил Иохим Юнгиус. Як. Бернулли поставил задачу о математическом определении этой кривой (Acta Erud. 1690). Решения задачи дали в следующем году он сам, а также Гюйгенс, Лейбниц и И. Бернулли. Гюйгенс назвал кривую «цепной линией» («Catenaria, письмо к Лейбницу в ноябре 1690). «Упругую кривую», т. е. линию, форму которой принимает закрепленный на одном конце упругий стержень, Галилей как это указывает Як. Бернулли (Acta Erud., 1694), также считал параболой. Геометрическую характеристику этой кривой дал Я. Бернулли (Acta Erud., 1694 и 1695).

1. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1990.
2. Выгодский М.Я. «Арифметика и алгебра в Древнем мире»
3. Г. Вилейтнер История математики от Декарта до середины XIX столетия. Государственное издательство физ.-мат. литературы Москва 1960.

Догадова И.В., Трегуб А.В.

Минимизация рисков при инвестировании в акции

*Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
(Россия, Москва)*

doi: 10.18411/lj-01-2021-89

idsp: ljjournal-01-2021-89

Аннотация

В статье рассматриваются вопросы минимизации рисков при приобретении акций предприятий. Выделены способы снижения влияния инвестиционных рисков, а также способы предотвращения возникновения рисков.