Берестень М.В., Корсак М.В., Графский О.А., Пономарчук Ю.В.
Отображение прямой линии в дугу окружности в решении позиционной задачи

*Дальневосточный государственный университет путей сообщения
(Россия, Хабаровск)*

doi: 10.18411/lj-01-2019-125

idsp: ljjournal-01-2019-125

Аннотация

Одной из особенностей позиционных задач в конструктивном исполнении является нахождение таких приемов их решения, при которых можно использовать циркуль и угольник с линейкой. Однако, достоверность искомого графического (конструктивного, синтетического) результата решения, можно проанализировать посредством аналитической геометрии применяя математическое программное обеспечение, что может подтвердить получаемое графическое решение.

Ключевые слова: поверхности отображения, двуполостный гиперболоид, прямая линия, окружность, точки пересечения прямой с поверхностью, математический пакет программирования Maple.

Abstract

One of the features of positional problems in constructive design is finding such methods of their solution, in which you can use compasses and a square with a ruler. However, the accuracy of the desired graphical (constructive, synthetic) result of the decision can be analyzed using analytical geometry using mathematical software, which can confirm the resulting graphical solution.

Keywords: display surfaces, two-cavity hyperbolic id, straight line, circle, points of intersection of a straight line with a surface, Maple programming package.

В настоящей работе рассматривается как графический метод, так и аналитическое решение задачи на пересечение прямой линии l с поверхностью Φ (направляющей является гипербола) методом отображения на поверхности-посредники, в качестве которых выступают в пространстве $\Pi(Oxyz)$ двухполостный гиперболоид вращения Σ , а в пространстве $\Pi'(O'x'y'z')$ – фронтально проецирующий круговой цилиндр Σ' с тем же очерком, что и поверхность $\Sigma \subset \Pi$. Такая задача может быть проанализирована с применением математического пакета программирования Maple.

На рис. 1 представлены исходные данные и показано построение двух точек $(1, 2) \in l$ в конструктивном исполнении (точка 2 является двойной). В данном случае пространства $\Pi(Oxyz)$ и $\Pi'(O'x'y'z')$ условно совмещены на одном эюре (чертеже).

Рис. 1. Задача на определение пересечения прямой линии с поверхностью Φ

Следует понимать по методу Н.А. Малахова [1], что левая часть пространства $\Pi(Oxyz)$ относительно плоскостей $P(P_2) = P'(P'_2)$ соответствует левой части пространства $\Pi'(O'x'y'z')$, а правая часть – правой части этого пространства. Тогда поверхность Φ также в пространстве $\Pi'(O'x'y'z')$, также будет являться проецирующей $\Phi'(\Phi'_2)$ относительно фронтальной плоскости проекций.

Метод Н.А. Малахова рассматривался и в других работах, например [2, 3, 4], но предлагаемый способ построения рассмотрен в статье [5], однако в настоящей работе аналитические исследования проведены в математическом пакете программирования Maple. Ниже представлена реализация в этом пакете данной задачи (в таблице 1 – подготовка исходных данных, далее по алгоритму).

Таблица 1

Подготовка исходных данных

Ввод данных	Отображение в Maple	Примечание
$> f1 := y = k1 * x + d1;$	$f1 := y = k1 x + d1$	Уравнение горизонтальной проекции прямой линии l_1
$> f2 := z = k2 * x + d2;$	$f2 := z = k2 x + d2$	Уравнение фронтальной проекции прямой линии l_2
$> y := k1 * x + d1;$	$y := \frac{k1 (z - d2)}{k2} + d1$	Выражение функции области определения для выражения проекции l_1

Функция отображения пространств определяется в соответствии с рисунком 1 посредством поверхностей отображения, т.е. двуполостного гиперболоида вращения Σ пространства $\Pi(Oxyz)$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

и кругового цилиндра Σ' пространства $\Pi'(O'x'y'z')$:

$$(x')^2 + (z')^2 = a^2.$$

Учитывая, что при отображении соблюдаются условия $y' = y$, $z' = z$ (а для пакета программирования x' обозначено как $x1$), функция отображения рассматриваемых пространств имеет следующий вид:

$$> f0 := (b^2 * x^2) + (a^2 * (n^2 - y^2)) = b^2 * x1^2;$$

и при ее реализации в программе:

$$f0 := \frac{b^2 (z - d2)^2}{k2^2} + a^2 \left(n^2 - \left(\frac{k1 (z - d2)}{k2} + d1 \right)^2 \right) = b^2 x1^2$$

После обращения к команде $<collect>$, $> f01 := collect(f0, z)$, получаем выражение

$$f01 := \left(\frac{b^2}{k2^2} - \frac{a^2 k1^2}{k2^2} \right) z^2 + \left(-2 \frac{b^2 d2}{k2^2} - \frac{2 a^2 \left(-\frac{k1 d2}{k2} + d1 \right) k1}{k2} \right) z + \frac{b^2 d2^2}{k2^2} + a^2 \left(n^2 - \left(-\frac{k1 d2}{k2} + d1 \right)^2 \right) = b^2 x1^2$$

из которого, после обращения к команде $<simplify>$ и ещё раз $<collect>$, устанавливаем вид уравнения

$$f_{45} := z^2 + \frac{2(a^2 k_1 d_1 k_2 + b^2 d_2 - a^2 k_1^2 d_2)z}{-b^2 + a^2 k_1^2} + \frac{-2a^2 k_1 d_2 d_1 k_2 - b^2 d_2^2 - a^2 n^2 k_2^2 + a^2 k_1^2 d_2^2 + a^2 d_1^2 k_2^2}{-b^2 + a^2 k_1^2} = -\frac{x l^2 k_2^2 b^2}{-b^2 + a^2 k_1^2},$$

при этом программно оно приводится к виду

$$\left(z + \frac{a^2 k_1 d_1 k_2 + b^2 d_2 - a^2 k_1^2 d_2}{-b^2 + a^2 k_1^2} \right)^2 - \frac{a^2 k_2^2 (-n^2 b^2 + a^2 n^2 k_1^2 + d_1^2 b^2)}{(-b^2 + a^2 k_1^2)^2} = -\frac{x l^2 k_2^2 b^2}{-b^2 + a^2 k_1^2}. \quad (1)$$

Из полученного уравнения (1) следует, что первый член уравнения можно представить как $(z - t)^2$, где

$$t := \frac{a^2 k_1 d_1 k_2 + b^2 d_2 - a^2 k_1^2 d_2}{-b^2 + a^2 k_1^2}$$

В результате дальнейшей реализации получено выражение

$$\frac{x l^2 b^2 (-b^2 + a^2 k_1^2)}{a^2 (-n^2 b^2 + a^2 n^2 k_1^2 + d_1^2 b^2)} + \frac{\left(z + \frac{a^2 k_1 d_1 k_2 + b^2 d_2 - a^2 k_1^2 d_2}{-b^2 + a^2 k_1^2} \right)^2 (-b^2 + a^2 k_1^2)^2}{a^2 k_2^2 (-n^2 b^2 + a^2 n^2 k_1^2 + d_1^2 b^2)} = 1,$$

которое можно рассматривать как уравнение эллипса:

$$\frac{(x')^2}{A^2} + \frac{(z - t)^2}{B^2} = 1. \quad (2)$$

В уравнении (2) квадратичные значения полуосей эллипса $A_k = A^2$, $B_k = B^2$ имеют вид:

$$A_k := \frac{a^2 (-n^2 b^2 + a^2 n^2 k_1^2 + d_1^2 b^2)}{b^2 (-b^2 + a^2 k_1^2)}, \quad B_k := \frac{a^2 k_2^2 (-n^2 b^2 + a^2 n^2 k_1^2 + d_1^2 b^2)}{(-b^2 + a^2 k_1^2)^2}. \quad (3)$$

Из выражения (3) следует, что если эти значения приравнять, то в Maple получается зависимость, которая обеспечивает отображение заданной прямой линии $l(l_1 l_2)$ в дугу окружности l'_2 :

$$k_2^2 = \frac{(a^2 k_1^2 - b^2)}{b^2}. \quad (4)$$

Если рассматривать равенство $b = a$ (направляющая поверхности Φ является равносторонней гиперболой), то выражение (4) примет вид

$$k_2^2 = k_1^2 - 1 \quad \text{или} \quad k_1^2 = k_2^2 + 1.$$

На рис.2 приведен пример задачи для следующих исходных данных, ввод которых осуществлялся в Maple:

```
> a:=sqrt(2.0); b:=sqrt(2.0); n:=-3.28; d1:=-2; d2:=2;
  k1:=sqrt(2.0); k2:=sqrt((a^2*k1^2-b^2)/b^2);
```

В результате реализации получено уравнение окружности l'_2

$$(x')^2 + (z - t)^2 = R^2,$$

где $t = 4,828427126$, $R = 3,841666306$, что вполне соответствует построению рисунка 2.

Для примера на рис. 2 показано построение точки $l'_2 \in l'_2$, построения элементарны и показаны стрелками. Искомая точка $A(A_1 A_2)$ определяется посредством точки $A'_2 \in l'_2$, где $A'_2 = l'_2 \cap \Phi'_2$.

Рис. 2. Пример решения задачи

В заключении можно отметить, что геометрические исследования необходимо проводить совместно с конструктивных и аналитических позиций с применением

средств программирования. Это позволяет рассматривать прикладные задачи начертательной геометрии [6, 7], что и подтверждено в настоящей работе.

1. Малахов Н.А. Построение линии пересечения поверхностей топологи-ческими преобразованиями и графомеханическими способами [Текст]: Дисс ... канд. техн. наук / Н.А. Малахов. – Л., 1954. – 126 с.
 2. Тарасов Б.Ф. Аналитические выражения топологических преобразова-ний [Текст] / Б.Ф. Тарасов // Сб. тр./ ЛИИЖТ. – Вып. 278. – Л., 1968. — С. 24–26.
 3. Графский О.А. Об одном способе топологических преобразований [Текст] / О.А. Графский, Б.Ф. Тарасов. Вопросы теории и практики начерта-тельной геометрии: Сб. науч. тр. ЛИИЖТа. Деп. в ВИНТИ, № 1180-76. – с. 22–29.
 4. Фролов С.А. Методы преобразования ортогональных проекций [Текст] / С.А. Фролов. – М.: Машиностроение, 1970. – 144.
 5. Графский О.А. Исследование топологических преобразований с по-верхностью преломления вращения [Текст]: Материалы XXVII научно-технической конференции. Вып. 9 / О.А. Графский. – Хабаровск: ХабИИЖТ, 1974. – С.116 –122.
 6. Графский О.А. Введение мнимых элементов в начертательную геомет-рию [Текст]: монография / О.А. Графский. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2004. – 168 с.
 7. Графский О.А. Теоретико-конструктивные проблемы моделирования мнимых элементов в начертательной геометрии и ее приложениях [Текст]: Дис. ... д-ра техн. наук / О.А. Графский. – М., 2004. – 406 с.
-