РАЗДЕЛ XVIII. МАТЕМАТИКА

Аксенюшкина Е.В.

Задача о формировании кредитной политики фирмы

Байкальский государственный университет
(Россия, Иркутск)

doi: 10.18411/lj-01-2019-114

idsp: ljjournal-01-2019-114

Аннотация

В работе формулируется и решается задача о формировании кредитной политики фирмы и таком распределении прибыли на инвестиции (процентный рост) и потребление (дивиденды), чтобы обеспечить максимальный объем потребления за некоторый период планирования.

Описанная ситуация формализуется в рамках билинейной задачи оптимального управления. В таких задачах, вообще говоря, принцип максимума является только необходимым условием оптимальности и выделяет экстремальные управления, которые подозрительны на оптимальность. С учетом специфики задачи показывается, что управления, удовлетворяющие принципу максимума, являются сильно экстремальными, что согласно известным достаточным условиям обеспечивает их оптимальность. В результате рассматриваемая билинейная задача полностью решается на основе принципа максимума.

Ключевые слова: билинейная задача, принцип максимума, оптимальное управление, сильно экстремальное управление, принцип максимума.

Abstract

The paper formulates and solves the problem of forming the credit policy of the company and such distribution of profit on investments (interest growth) and consumption (dividends) to ensure the maximum volume of consumption for a certain period of planning.

The described situation is formalized within the framework of the linear optimal control problem. In such problems, generally speaking, the maximum principle is only a necessary condition of optimality and highlights extreme controls that are suspicious of optimality. Taking into account the specifics of the problem, it is shown that the controls satisfying the maximum principle are strongly extreme, which, according to the known sufficient conditions, ensures their optimality. As a result, the considered bilinear problem is completely solved on the basis of the maximum principle.

Keywords: bilinear problem, maximum principle, optimal control, highly extreme control, maximum principle.

Пусть $t \in [0, T]$ – время;

$x(t)$ – собственные средства фирмы в момент времени t , которые могут быть использованы на инвестиции и потребление;

$y(t)$ – привлеченные средства (например, кредит) в момент времени t ;

$r_1 \in (0, 1]$ – процентная ставка по инвестициям;

$r_2 \in (0, 1]$ – процентная ставка по привлечению средств;

$v(t) \in [0, 1]$ – доля собственных средств, идущая на инвестиции в момент времени t ;

$u(t) \in [0, 1]$ – отношение привлеченных средств к собственным в момент t (объем привлеченных средств не превосходит собственные)

$$u(t) = \frac{y(t)}{x(t)}.$$

Тогда величину $x(t)$ можно представить в виде (кредит $y(t)$ расходуется только на инвестиции после уплаты процентов)

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + r_1 \int_0^t x(\tau) v(\tau) d\tau + r_1 \left(\int_0^t y(\tau) d\tau - r_2 \int_0^t y(\tau) d\tau \right) = \\ &= x(0) + r_1 \int_0^t x(\tau) v(\tau) d\tau + r_1 (1 - r_2) \int_0^t x(\tau) u(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Обозначим $r = r_1$, $c = 1 - r_2$, $0 < c < 1$. На основании предыдущего

$$x(t) = x(0) + r \int_0^t x(\tau) [v(\tau) + cu(\tau)] d\tau.$$

В результате дифференцирования получаем фазовое уравнение

$$\dot{x} = r(cu + v)x$$

с начальным условием $x(0) = x_0$.

Сформируем целевой функционал, подлежащий максимизации

$$\Phi(u, v) = \int_0^T (1 - v(t)) x(t) dt - \int_0^T u(t) x(t) dt.$$

По содержательному смыслу это разность между собственными средствами фирмы, направленными на потребление, и привлеченными средствами за период $[0, T]$.

Примем предположение об обесценивании со временем капитала фирмы. Пусть $\rho > 0$ — параметр дисконтирования, причем $\rho < r$. Тогда с учетом фактора обесценивания средств, запланированных на потребление, целевой функционал примет окончательный вид

$$\Phi(u, v) = \int_0^T e^{-\rho t} (1 - u(t) - v(t)) x(t) dt.$$

В результате приходим к задаче оптимального управления на максимум потребления

$$\Phi(u, v) = \int_0^T e^{-\rho t} (1 - u - v) x dt \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\dot{x} = r(cu + v)x, \quad x(0) = x_0,$$

$$u(t) \in [0, 1], \quad v(t) \in [0, 1],$$

$$x_0 > 0, \quad \rho > 0, \quad r \in (0, 1], \quad \rho < r, \quad c \in (0, 1).$$

Введем множество допустимых управлений

$$W = \{ w(\cdot) \in PC([0, T]) : w(t) \in [0, 1], \quad t \in [0, T] \}.$$

Решение фазового уравнения, соответствующего управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ представляется по формуле Коши

$$x(t, u, v) = x_0 e^{r \int_0^t (cu(\tau) + v(\tau)) d\tau}.$$

Следовательно, все фазовые траектории положительны

$$x(t, u, v) > 0, \quad t \in [0, T].$$

Пусть X – множество фазовых траекторий в задаче (1).

Проведем анализ задачи на основе принципа максимума.

Составим функцию Понтрягина

$$\begin{aligned} H(\psi, x, u, v) &= \psi r(cu + v)x + (1 - u - v)x = \\ &= H_u(\psi, x)u + H_v(\psi, x)v + x \end{aligned}$$

и сопряженное уравнение

$$\dot{\psi} = \rho\psi - H_x = (1 - \psi rc)u + (1 - \psi r)v + \rho\psi - 1$$

с условием $\psi(T) = 0$.

Пусть $u(t), v(t) \in W, t \in [0, T], x(t, u, v), \psi(t, u, v)$ – соответствующие решения фазового и сопряженного уравнений. Экстремальные управления задачи относительно принципа максимума имеют вид

$$\begin{aligned} u(t) &= \arg \max_{w \in [0, 1]} H_u(\psi(t, u, v), x(t, u, v))w, \\ v(t) &= \arg \max_{w \in [0, 1]} H_v(\psi(t, u, v), x(t, u, v))w. \end{aligned} \quad (2)$$

Конкретизируем понятие сильно экстремальных управлений применительно к задаче (1).

Определение 1. Экстремальные управления $u(t), v(t), t \in [0, T]$ назовем *сильно экстремальными*, если

$$\begin{aligned} u(t) &= \arg \max_{w \in [0, 1]} H_u(\psi(t, u, v), x(t))w, \quad \forall x(t) \in X, \quad t \in [0, T], \\ v(t) &= \arg \max_{w \in [0, 1]} H_v(\psi(t, u, v), x(t))w, \quad \forall x(t) \in X, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Таким образом, сильно экстремальное управление $(u(t), v(t))$ максимизирует функцию H на соответствующей ему сопряженной траектории $\psi(t, u, v)$ и множестве X фазовых траекторий.

Имеет место следующее утверждение, применительно к рассматриваемой задаче [9]: *любое сильно экстремальное управление является оптимальным в задаче (1).*

В нашем случае общие задачи на поиск экстремальных управлений представляются в виде

$$\begin{aligned} H_u(\psi, x)w &\rightarrow \max, \quad w \in [0, 1], \\ H_v(\psi, x)w &\rightarrow \max, \quad w \in [0, 1] \end{aligned}$$

и решаются аналитически. В частности, для экстремальных управлений $u(t)$ и $v(t)$ согласно (2) получаем явное выражение

$$\begin{aligned} u(t) &= \begin{cases} 0, & (\psi(t, u, v)rc - 1)x(t, u, v) \leq 0 \\ 1, & (\psi(t, u, v)rc - 1)x(t, u, v) > 0 \end{cases}, \\ v(t) &= \begin{cases} 0, & (\psi(t, u, v)r - 1)x(t, u, v) \leq 0 \\ 1, & (\psi(t, u, v)r - 1)x(t, u, v) > 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку, все фазовые траектории в задаче (1) положительны, то экстремальные управления в силу формулы (3) представляются в виде

$$u(t) = \begin{cases} 0, & (\psi(t, u, v)rc - 1)x(t) \leq 0 \\ 1, & (\psi(t, u, v)rc - 1)x(t) > 0 \end{cases},$$

$$v(t) = \begin{cases} 0, & (\psi(t, u, v)r - 1)x(t) \leq 0 \\ 1, & (\psi(t, u, v)r - 1)x(t) > 0 \end{cases},$$

для любой траектории $x(t) \in X$.

Это значит, что в данной задаче любое экстремальное управление является сильно экстремальным.

Следовательно, в данном случае любое экстремальное управление является оптимальным (принцип максимума – достаточное условие оптимальности).

Общие задачи на поиск экстремального управления конкретизируются в виде

$$\begin{aligned} (\psi rc - 1)xw &\rightarrow \max, & w &\in [0, 1], \\ (\psi r - 1)xw &\rightarrow \max, & w &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Таким образом, максимизирующее управления в поставленной задаче можно записать по формуле

$$u^*(\psi, x) = \begin{cases} 0, & (\psi rc - 1)x \leq 0 \\ 1, & (\psi rc - 1)x > 0 \end{cases}, \quad v^*(\psi, x) = \begin{cases} 0, & (\psi r - 1)x \leq 0 \\ 1, & (\psi r - 1)x > 0 \end{cases}.$$

С учетом условия $x > 0$ получаем максимизирующие управления, не зависящие от фазовой переменной

$$u^*(\psi) = \begin{cases} 0, & \psi rc - 1 \leq 0 \\ 1, & \psi rc - 1 > 0 \end{cases}, \quad v^*(\psi) = \begin{cases} 0, & \psi r - 1 \leq 0 \\ 1, & \psi r - 1 > 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим задачу Коши для сопряженного уравнения

$$\dot{\psi} = \psi(\rho - r(cu^* + v^*)) + (u^* + v^* - 1), \quad \psi(T) = 0$$

с управлениями

$$u^* = u^*(\psi), \quad v^* = v^*(\psi).$$

Пусть $\psi(t)$, $t \in [0, T]$ – решение этого уравнения. Тогда управления $u^*(\psi(t))$, $v^*(\psi(t))$, $t \in [0, T]$ являются оптимальными в поставленной задаче.

Введем гладкие функции переключения, по которым будем отслеживать поведение управлений

$$s_1(t) = \psi(t)rc - 1, \quad s_2(t) = \psi(t)r - 1.$$

Заметим, что при $r \in (0, 1]$, $c \in (0, 1)$

- если $\psi(t) > 0$, то $\psi(t)rc - 1 < \psi(t)r - 1 \Leftrightarrow s_1(t) < s_2(t)$;
- если $\psi(t) < 0$, то $\psi(t)rc - 1 > \psi(t)r - 1 \Leftrightarrow s_1(t) > s_2(t)$.

Начнем движение влево из терминальной точки T . Поскольку $\psi(T) = 0$, то $s_1(T) = s_2(T) = -1$. Это означает, что $u^*(\psi(T)) = 0$, $v^*(\psi(T)) = 0$.

Следовательно, для $t \in (T - \varepsilon, T)$, $\varepsilon > 0$ имеем $s_1(t) < 0$, $s_2(t) < 0$. Отсюда вытекает, что $u^*(t) = 0$, $v^*(t) = 0$.

Подставляя в ψ -уравнение, получаем

$$\dot{\psi} = \psi\rho - 1, \quad \psi(T) = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\psi(t) = \frac{1}{\rho}(1 - e^{\rho(t-T)}), \quad t \in (T - \varepsilon, T].$$

Продифференцируем полученное решение

$$\dot{\psi}(t) = \frac{1}{\rho}(-\rho)e^{\rho(t-T)} = -e^{\rho(t-T)} < 0, \quad t \in (T - \varepsilon, T].$$

Отсюда следует, что функция $\psi(t)$ – монотонно убывает на $(T - \varepsilon, T]$. Это означает, что $\psi(t) > 0 \Rightarrow s_1(t) < s_2(t)$, $t \in (T - \varepsilon, T]$.

Таким образом, при движении по t влево из T первой обратится в нуль функция $s_2(t)$.

Решим уравнение $s_2(t) = 0$

$$\frac{r}{\rho}(1 - e^{\rho(t-T)}) - 1 = 0.$$

$$\text{Решением является точка } \theta_1 = T + \frac{\ln\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)}{\rho}.$$

Убедимся в «правильности» найденной точки. Поскольку $1 - \frac{\rho}{r} \in (0, 1)$

(исходное условие $\rho < r$), то $\ln\left(1 - \frac{\rho}{r}\right) < 0$.

Следовательно $\theta_1 < T$. Отметим также, что $\psi(\theta_1) = \frac{1}{r}$.

Рассмотрим *особый случай*.

Пусть $\theta_1 \leq 0$. Это означает, что $T \leq \frac{1}{\rho} \left| \ln\left(1 - \frac{\rho}{r}\right) \right|$ (случай краткосрочного планирования). Тогда

$$s_1(t) < 0, \quad t \in [0, T], \quad s_2(t) < 0, \quad t \in (0, T].$$

Следовательно, оптимальное управление в таком случае имеет вид

$$u^*(t) = 0, \quad v^*(t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

Пусть $\theta_1 > 0$. Тогда справедливо $s_1(\theta_1) < 0$, $s_2(\theta_1) = 0$.

Предположим, что $s_2(t) > 0$, $t \in (\theta_1 - \varepsilon, \theta_1)$, тогда

$$u^*(t) = 0, \quad v^*(t) = 1, \quad t \in (\theta_1 - \varepsilon, \theta_1).$$

Подставляя в ψ -уравнение, получаем

$$\dot{\psi} = \psi(\rho - r), \quad \psi(\theta_1) = \frac{1}{r}.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\psi(t) = \frac{1}{r} e^{(r-\rho)(\theta_1-t)}, \quad t \in (\theta_1 - \varepsilon, \theta_1).$$

Заметим, что $\dot{\psi}(t) = \psi(t)(\rho - r) < 0$. Отсюда следует, что $\psi(t) > 0$, $t < \theta_1$.

Проверим предположение $s_2(t) > 0$, $t \in (\theta_1 - \varepsilon, \theta_1)$.

Согласно определению

$$s_2(t) = \psi(t)r - 1 = e^{(r-\rho)(\theta_1-t)} - 1.$$

Исследуем ее поведение. Функция $s(t) = e^{(r-\rho)(\theta_1-t)}$ монотонно убывает по $t \in [0, \theta_1]$, поскольку $\dot{s}(t) < 0$, причем $s(\theta_1) = 1$. Следовательно, $s(t) > 1$ для всех $t \in [0, \theta_1)$. Отсюда вытекает, что $s_2(t) > 0$, $t \in [0, \theta_1)$.

Поскольку $\psi(t) > 0$, $t \in [\theta_1 - \varepsilon, \theta_1]$, то $s_1(t) < s_2(t)$. Найдем решение уравнения $s_1(t) = 0$

$$c e^{(r-\rho)(T-t)} = 1.$$

Решением является точка

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\ln c}{r - \rho}.$$

Очевидно, что $\theta_2 < \theta_1$. Отметим, что $s_1(t) < 0$, $t \in (\theta_2, \theta_1)$.

Выделим **особый случай**.

Пусть $\theta_2 \leq 0$. Следовательно, $\theta_1 \leq \frac{|\ln c|}{r - \rho}$. Тогда оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad v^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \theta_1) \\ 0, & t \in [\theta_1, T] \end{cases}.$$

Пусть $\theta_2 > 0$. Отметим, что $s_1(\theta_2) = 0$, $\psi(\theta_2) = \frac{1}{rc}$.

Предположим, что $s_1(t) > 0$, $t \in (\theta_2 - \varepsilon, \theta_2)$, тогда $u^*(t) = 1$, $v^*(t) = 1$, $t \in (\theta_2 - \varepsilon, \theta_2)$.

Решаем ψ -уравнение

$$\dot{\psi} = \psi(\rho - r(c+1)) + 1, \quad \psi(\theta_2) = \frac{1}{rc}.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\psi(t) = e^{(\theta_2-t)(r(c+1)-\rho)} \left[\frac{1}{rc} - \frac{1}{r(c+1)-\rho} \right] + \frac{1}{r(c+1)-\rho}.$$

Проверим предположение $s_1(t) > 0$, $t \in (\theta_2 - \varepsilon, \theta_2)$

$$\begin{aligned} s_1(t) &= cr \psi(t) - 1 = \\ &= e^{(\theta_2-t)(r(c+1)-\rho)} \left[1 - \frac{rc}{r(c+1)-\rho} \right] + \frac{rc}{r(c+1)-\rho} - 1 = \\ &= e^{(\theta_2-t)(r(c+1)-\rho)} \left[\frac{r-\rho}{r(c+1)-\rho} \right] + \frac{\rho-r}{r(c+1)-\rho} = \\ &= \frac{r-\rho}{r(c+1)-\rho} \left(e^{(\theta_2-t)(r(c+1)-\rho)} - 1 \right). \end{aligned}$$

Так как $r - \rho > 0$ и $r(c+1) - \rho > 0$, то получим

$$\frac{r - \rho}{r(c+1) - \rho} > 0.$$

Функция $e^{(\theta_2 - t)(r(c+1) - \rho)}$, $t \in (0, \theta_2]$ в точке θ_2 равна единице и монотонно убывает, поскольку ее производная меньше нуля. Следовательно, $e^{(\theta_2 - t)(r(c+1) - \rho)} > 1$. Проверим знак функции $\psi(t)$, $t \in (0, \theta_2)$

$$\dot{\psi}(t) = e^{(\theta_2 - t)(r(c+1) - \rho)} \left(\frac{\rho - r}{rc} \right) < 0, \quad \psi(\theta_2) = \frac{1}{rc} > 0.$$

Следовательно, $\psi(t) > 0$, $t \in (0, \theta_2)$. Тогда $s_2(t) > s_1(t) > 0$, $t \in (0, \theta_2)$.

Таким образом, знаки функций переключения $s_2(t)$, $s_1(t)$ на отрезке $[0, T]$ изменяются следующим образом,

1) функция $s_1(t)$

- для всех $t \in (0, \theta_2)$ функция $s_1(t) > 0$;
- для всех $t \in (\theta_2, T)$ функция $s_1(t) < 0$.

2) функция $s_2(t)$

- для всех $t \in (0, \theta_1)$ функция $s_2(t) > 0$;
- для всех $t \in (\theta_1, T)$ функция $s_2(t) < 0$.

Здесь $\theta_1 = T + \frac{\ln(1 - \frac{\rho}{r})}{\rho}$, $\theta_2 = \theta_1 + \frac{\ln c}{r - \rho}$.

Итоговое условие $\theta_2 > 0$ приводит к неравенству для конечного времени

$$T > \frac{\left| \ln \left(1 - \frac{\rho}{r} \right) \right|}{\rho} + \frac{|\ln c|}{r - \rho}.$$

Это случай долгосрочного планирования.

В этом случае оптимальное управление выражается по формулам

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \theta_2) \\ 0, & t \in [\theta_2, T] \end{cases}, \quad v^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \theta_1) \\ 0, & t \in [\theta_1, T] \end{cases},$$

Оптимальная фазовая траектория, соответствующая найденному управлению, имеет вид

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 e^{tr(c+1)}, & t \in [0, \theta_2) \\ x_0 e^{r\theta_2(c+1) + (t-\theta_2)r}, & t \in [\theta_2, \theta_1) \\ x_0 e^{r\theta_2(c+1) + (\theta_1-\theta_2)r}, & t \in [\theta_1, T] \end{cases}$$

Содержательная интерпретация оптимального управления:

- первый период $[0, \theta_2)$ – вся прибыль идет на инвестиции, берется кредит в размере прибыли;
- второй период $[\theta_2, \theta_1)$ – вся прибыль идет на инвестиции, кредит обнуляется;
- третий период $[\theta_1, T]$ – вся прибыль идет на потребление, кредит равен нулю.

1. Антипина Н. В. Линейные функции Ляпунова-Кротова и достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума / Н. В. Антипина, В. А. Дыхта // Известия вузов. Математика. — 2002. — №12. — С. 11–22.
 2. Аргучинцев А. В. Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума / А. В. Аргучинцев, В. А. Дыхта, В. А. Срочко // Известия вузов. Математика. — 2009. — № 1. — С. 3–43.
 3. Габасов Р. Принцип максимума в теории оптимального управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — М. : Книжный дом «Либроком», 2011. — 272 с.
 4. Кротов В. Ф. Методы и задачи оптимального управления / В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. — М. : Наука, 1973. — 446 с.
 5. Никольский М. С. О достаточности принципа максимума Понтрягина в некоторых оптимизационных задачах / М. С. Никольский // Вестник Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. матем. и киберн. — 2005. — №1. — С. 35–43.
 6. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. — М. : Физматлит, 1961. — 388 с.
 7. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления / В. А. Срочко. — М. : Физматлит, 2000. — 160 с.
 8. Срочко В. А. Достаточные условия оптимальности экстремальных управлений на основе формул приращения функционала / В. А. Срочко, В. Г. Антоник // Известия вузов. Математика. — 2014. — № 8. — С. 96–102.
 9. Срочко В. А. Достаточные условия оптимальности в задачах управления на основе формул приращения функционалов / В. А. Срочко, В. Г. Антоник, Е. В. Аксёнюшкина // Известия Иркутского государственного университета. Сер. «Математика». — 2014. — Том 8. — С. 125–140.
-