Осипов Г.С.

Исследование нечеткой задачи назначения

Сахалинский государственный университет

(Россия, Южно-Сахалинск)

doi10.18411/gq-31-03-2018-06

idsp000001:gq-31-03-2018-06

Аннотация

Исследуется трудноформализуемая обратная задача назначения в нечеткой постановке. Предлагается методология получения и анализа решения прямой и обратных задач при различных нечетких импликациях в виде наиболее часто используемых на практике треугольных норм. Практическая апробация разработанных методов решения задачи о назначениях с нечеткими соответствиями выполнена в среде пакета символьной математики Wolfram Mathematica.

Ключевые слова: задача назначения, нечеткие соответствия, композиция соответствий, нечеткий рейтинг.

Abstract

A difficultly formalizable inverse problem about assignments in a fuzzy formulation is investigated. The methodology of obtaining and analyzing the solution of direct and inverse problems is proposed with various fuzzy implications in the form of the most commonly used triangular norms. Practical approbation of the developed methods for solving the assignment problem with fuzzy correspondences is performed in the environment of the package of symbolic mathematics Wolfram Mathematica.

Keywords: assignment problem, fuzzy match, composition of matches, fuzzy rating.

Введение

Очевидно, решение прямых задач, заключающихся в определении будущего состояния системы по ее текущему состоянию и действующему оператору достаточно тривиально. Особой сложностью формализации и решения обладают именно обратные задачи, суть которых в том, чтобы определить какие факторы (предпосылки, условия) привели к текущему состоянию системы (выводам, заключению). Кроме того, необходимо учитывать, что решения приходится принимать в нечетких условиях при неполной, неточной и часто противоречивой информации.

Такие проблемы характерны для большинства сложных (в смысле, определяемом системным подходом и анализом) систем, например, при синтезе экспертных и диагностических комплексов в технике, медицине, образовании и экономике в целом.

Поэтому настоящее исследование посвящено анализу влияния вида используемой импликации в системах нечеткого вывода на решение обобщенной задачи о назначениях на базе экспертных нечетких соответствий.

Основные понятия и определения

Пусть A , B и C – непустые четкие множества.

Определение 1. Нечетким соответствием X называется нечеткое подмножество декартова произведения $A \times B$.

Пусть на $A \times B$ и $B \times C$ заданы нечеткие соответствия X и R :

$$X = \int \int_{A \times B} \frac{\mu(a,b)}{(a,b)}, R = \int \int_{B \times C} \frac{\mu(b,c)}{(b,c)}.$$

Определение 2. Композицией соответствий называется нечеткое соответствие

$$X \circ R = \iint_{A \times C} \frac{\mu_{XR}(a, c)}{(a, c)},$$

задана на $A \times C$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{XR}(a, c) = \sup_{b \in B} T(\mu_X(a, b), \mu_R(b, c)), \quad (1)$$

где T – t -норма.

Постановка задачи

Пусть $X(A, B), R(B, C), Y(A, C)$ – нечеткие соответствия

Используя композицию $X \circ R$ составим нечеткое реляционное уравнение (НРУ)

$X \circ R = Y$, которое для удобства исследования представим в матричном виде:

$$X \circ R = Y. \quad (2)$$

Очевидно могут возникать две задачи:

прямая – нахождение представления нечеткого соответствия Y при заданных X , R и правиле композиции;

обратная:

нахождение представления нечеткого соответствия X при заданных R , Y и правиле композиции (левое НРУ);

нахождение представления нечеткого соответствия R при заданных X , Y и правиле композиции (правое НРУ).

Требуется исследовать решения прямой и обратной задач о назначениях в нечеткой постановке (1), (2) при различных типах композиции в виде t -норм.

Методология и методы решения

Используем в качестве t -нормы три наиболее распространённые:

1. логическое произведение $M(a, b) = \min(a, b)$;

2. алгебраическое произведение $P(a, b) = a \cdot b$;

3. граничное произведение $W(a, b) = \max(a + b - 1, 0)$;

Очевидно, решение прямой задачи (2) тривиально:

$$\mu_Y(y) = \sup T(\mu_X(x), \mu_R(r)).$$

Обратная задача при использовании $\max$ - T композиции сводится к нечеткому уравнению общего вида,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} x_{11} & x_{12} & x_{1n} & r_{11} & r_{12} & r_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & x_{2n} & r_{21} & r_{22} & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{mn} & r_{n1} & r_{n2} & r_{nk} \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} y_{11} & y_{12} & y_{1k} \\ y_{21} & y_{22} & y_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & y_{mk} \end{array} \right),$$

распадается на независимых систем полиномиальных уравнений (по определению [1]), решения которых находятся в виде:

$$\left\{ \max_j (T(x_{ij}, r_{jl})) = y_{il} \mid l = 1, \overline{k}; j = 1, \overline{n}; i = 1, \overline{m} \right\}.$$

Теоретические основы и методология решения уравнений с нечеткими соответствиями вводится к публикации [1] и достаточно полно изложены в работах [2–4].

Практическая реализация

В соответствии с исследованием определяем базовые множества:

$A = (a)_i \quad i = \overline{1, m}$ – содержит фамилию, имя и отчество претендента;

$B = (b)_j \quad j = \overline{1, n}$ – перечень групп навыков и умений, по которым должен быть определен уровень компетентности и подготовленности каждого претендента;

$C = (c)_l \quad l = \overline{1, k}$ – перечень видов возможной профессиональной деятельности.

Решение прямой задачи

композиция $(a, c) = \sup_{b \in B} T(\mu(a, b), \mu(b, c))$ при

Пусть известны [5]:

$$X = \begin{array}{c|ccccc} & (b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5) \\ \hline \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.7 & 0.7 & 0.8 \\ 0.5 & 0.8 & 0.6 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 0.6 & 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & 0.5 & 0.9 & 0.8 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 & 0.5 & 0.7 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}; \quad R = \begin{array}{c|cccc} & (c_1 & c_2 & c_3 & c_4) \\ \hline \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 & 0.7 & 0.8 \\ 0.9 & 0.5 & 0.8 & 0.6 \\ 0.7 & 0.8 & 0.7 & 0.9 \\ 0.5 & 0.9 & 0.7 & 0.6 \\ 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Решения прямой задачи для уравнения (1) при различных t -нормах приведены в табл. 1

Таблица 1.

Решения уравнения при различных импликациях

t -норма	Решение уравнения
$M(a, b) = \min(a, b)$	$Y = \begin{array}{c cccc} & (c_1 & c_2 & c_3 & c_4) \\ \hline \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.7 & 0.7 & 0.8 \\ 0.8 & 0.7 & 0.8 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 0.8 & 0.7 & 0.9 \\ 0.6 & 0.7 & 0.7 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}$
$P(a, b) = a \cdot b$	$Y = \begin{array}{c cccc} & (c_1 & c_2 & c_3 & c_4) \\ \hline \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.64 & 0.63 & 0.56 & 0.64 \\ 0.72 & 0.63 & 0.64 & 0.56 \\ 0.64 & 0.72 & 0.56 & 0.56 \\ 0.63 & 0.72 & 0.63 & 0.81 \\ 0.48 & 0.63 & 0.49 & 0.48 \end{pmatrix} \end{array}$
$W(a, b) = \max(a + b - 1, 0)$	$Y = \begin{array}{c cccc} & (c_1 & c_2 & c_3 & c_4) \\ \hline \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.5 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 & 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 & 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 & 0.6 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array}$

Решения уравнений дают нечеткие рейтинги (см. рис. 1 и рис. 2) претендентов на занятие имитой или иной должности в соответствующем виде профессиональной деятельности.

Рисунок 1. Нечеткие рейтинги при использовании нормы $P(a, b)$

Рисунок 2. График нечетких рейтингов

Решение обратной задачи

Общий вид уравнений с нечеткими соответствиями для обратной задачи представлен в табл. 2

Таблица 2

Нечеткие уравнения при различных импликациях

t -норма	уравнение
$M(a, b)$	$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 & 0.7 & 0.8 \\ 0.9 & 0.5 & 0.8 & 0.6 \\ 0.7 & 0.8 & 0.7 & 0.9 \\ 0.5 & 0.9 & 0.7 & 0.6 \\ 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.7 & 0.7 & 0.8 \\ 0.8 & 0.7 & 0.8 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 0.8 & 0.7 & 0.9 \\ 0.6 & 0.7 & 0.7 & 0.6 \end{pmatrix}$
$P(a, b)$	$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 & 0.7 & 0.8 \\ 0.9 & 0.5 & 0.8 & 0.6 \\ 0.7 & 0.8 & 0.7 & 0.9 \\ 0.5 & 0.9 & 0.7 & 0.6 \\ 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.63 & 0.56 & 0.64 \\ 0.72 & 0.63 & 0.64 & 0.56 \\ 0.64 & 0.72 & 0.56 & 0.56 \\ 0.63 & 0.72 & 0.63 & 0.81 \\ 0.48 & 0.63 & 0.49 & 0.48 \end{pmatrix}$

$W(a,b)$	$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 & 0.7 & 0.8 \\ 0.9 & 0.5 & 0.8 & 0.6 \\ 0.7 & 0.8 & 0.7 & 0.9 \\ 0.5 & 0.9 & 0.7 & 0.6 \\ 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.5 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 & 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 & 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 & 0.6 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$
----------	--

Для сокращения выкладки рассмотрим решение уравнений для обратной задачи только для первого претендента. В табл. 3 представлены соответствующие нечеткие полиномиальные уравнения.

Таблица 3

Нечеткие уравнения при различных нормах

t -норма	Системы уравнений
$M(a,b)$	$\begin{cases} \max(\min(x_{11}, 0.6), \min(x_{12}, 0.9), \min(x_{13}, 0.7), \min(x_{14}, 0.5), \min(x_{15}, 0.8)) = 0.8 \\ \max(\min(x_{11}, 0.5), \min(x_{12}, 0.5), \min(x_{13}, 0.8), \min(x_{14}, 0.9), \min(x_{15}, 0.7)) = 0.7 \\ \max(\min(x_{11}, 0.7), \min(x_{12}, 0.8), \min(x_{13}, 0.7), \min(x_{14}, 0.7), \min(x_{15}, 0.6)) = 0.7 \\ \max(\min(x_{11}, 0.8), \min(x_{12}, 0.6), \min(x_{13}, 0.9), \min(x_{14}, 0.6), \min(x_{15}, 0.7)) = 0.8 \end{cases}$
$P(a,b)$	$\begin{cases} \max((x_{11} \cdot 0.6), (x_{12} \cdot 0.9), (x_{13} \cdot 0.7), (x_{14} \cdot 0.5), (x_{15} \cdot 0.8)) = 0.64 \\ \max((x_{11} \cdot 0.5), (x_{12} \cdot 0.5), (x_{13} \cdot 0.8), (x_{14} \cdot 0.9), (x_{15} \cdot 0.7)) = 0.63 \\ \max((x_{11} \cdot 0.7), (x_{12} \cdot 0.8), (x_{13} \cdot 0.7), (x_{14} \cdot 0.7), (x_{15} \cdot 0.6)) = 0.56 \\ \max((x_{11} \cdot 0.8), (x_{12} \cdot 0.6), (x_{13} \cdot 0.9), (x_{14} \cdot 0.6), (x_{15} \cdot 0.7)) = 0.64 \end{cases}$
$W(a,b)$	$\begin{cases} \max(\max(x_{11} + 0.6 - 1.0), \max(x_{12} + 0.9 - 1.0), \max(x_{15} + 0.8 - 1.0)) = 0.6 \\ \max(\max(x_{11} + 0.5 - 1.0), \max(x_{12} + 0.5 - 1.0), \max(x_{15} + 0.7 - 1.0)) = 0.6 \\ \max(\max(x_{11} + 0.7 - 1.0), \max(x_{12} + 0.8 - 1.0), \max(x_{15} + 0.6 - 1.0)) = 0.5 \\ \max(\max(x_{11} + 0.8 - 1.0), \max(x_{12} + 0.6 - 1.0), \max(x_{15} + 0.7 - 1.0)) = 0.6 \end{cases}$

Решения этих уравнений приведены в табл. 4.

Таблица 4

Решения уравнений при различных импликациях

t -норма	Решения обратной задачи
$M(a,b)$	$(0.8 \leq x_{11} \leq 1 \quad ; \quad 0 \leq x_{12} \leq 0.7 \quad ; \quad 0 \leq x_{13} \leq 0.7 \quad ; \quad 0 \leq x_{14} \leq 0.7 \quad ; \quad 0.8 \leq x_{15} \leq 1)$
$P(a,b)$	$\begin{array}{ c c c c c } \hline 0 \leq x_{11} < 0.8 & x_{12} = 0.7 & \begin{array}{ c c c } \hline 0 \leq x_{13} < 0.7875 & x_{14} = 0.7 & x_{15} = 0.8 \\ \hline x_{13} = 0.7875 & 0 \leq x_{14} < 0.7 & x_{15} = 0.8 \\ \hline \end{array} \\ \hline x_{11} = 0.8 & 0 \leq x_{12} < 0.7 & \begin{array}{ c c c } \hline 0 \leq x_{13} < 0.7875 & x_{14} = 0.7 & x_{15} = 0.8 \\ \hline x_{13} = 0.7875 & 0 \leq x_{14} < 0.7 & x_{15} = 0.8 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$
$W(a,b)$	$\begin{array}{ c c c c c } \hline 0 \leq x_{11} < 0.8 & x_{12} = 0.7 & x_{13} = 0.7 & x_{14} = 0.7 & 0 \leq x_{15} < 0.8 \\ \hline x_{11} = 0.8 & \begin{array}{ c c c c } \hline 0 \leq x_{12} < 0.7 & 0 \leq x_{13} < 0.7 & x_{14} = 0.7 & x_{15} = 0.8 \\ \hline x_{12} = 0.7 & 0 \leq x_{13} < 0.7 & x_{14} = 0.7 & 0 \leq x_{15} < 0.8 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$

Выводы

Проведенное исследование позволило выработать унифицированный методологический подход к решению обобщенной задачи о назначениях при

различных импликациях в виде треугольных норм. Решения обратной задачи по семантике интерпретации полученного результата практически «совпадают» с исходными данными, используемыми при решении прямой задачи, что свидетельствует об устойчивости используемых методов.

Практическая апробация выполнялась в среде пакета символьной математики Wolfram Mathematica [6].

1. Блюмин С.Л., Шуйкова И. А., Сараев П.В., Черпаков И.В. Нечеткая логика: алгебраические основы и приложения. Липецк: ЛЭГИ. 2002. 111 с.
2. Осипов Г.С. Исследование влияния функций пересечения множеств в задаче нечеткой диагностики // Научные тенденции: Вопросы точных и технических наук. Сборник научных трудов по материалам XIV международной научно-практической конференции. Санкт-Петербург, 12 февраля 2018 г. Изд. ЦНKMНИФ «Общественная наука», 2018. С. 14–19. DOI: 10.18411/spc-12-02-2018-06, idSP: <http://sp-identifier.ru/000001spc-12-02-2018-06>
3. Осипов Г.С. Влияние вида импликатора на решение обратной задачи нечеткой диагностики // Постулат. 2018. №2. С. 55. DOI: 10.18411/Postulat-2018-2, idSP: <http://sp-identifier.ru/000001postulat-2018-2/>
4. Осипов Г.С. Использование функции логического произведения в обратной задаче для нечетких реляционных уравнений // Материалы сборника научных трудов XXXI международной научно-практической конференции «MODERN SCIENCE: THEORETICAL AND PRACTICAL LOOK» [Электронный ресурс]. М.: Издательство: «Олимп», 29 января 2018. С. 18–22. URL: <http://olimpiks.ru/d/1340546/d/mst-31.pdf>. (Дата обращения: 19.03.2018). DOI: 10.18411/Olimp-2018-1, idSP: <http://sp-identifier.ru/000001olimp-2018-1/>
5. Айзинов С.Д., Сазонов А.Е., Солодовниченко М.Б. Разработка нечеткой модели выбора вида профессиональной деятельности выпускника мивуза // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. 2017. Т. 9. № 6. С. 1330–1337. DOI: 10.21821/2309-5180-2017-9-6-1330-1337
6. Осипов Г. С., Вашакидзе Н. С., Филиппова Г. В. О решении обратных задач для нечетких соответствий в среде Wolfram Mathematica // Постулат. 2018. №1. С. 42. DOI: 10.18411/Postulat-2018-1, idSP: <http://sp-identifier.ru/000001postulat-2018-1/>