SECTION I. MATHEMATICS

Чочиев Т.З.

О нелинейном уравнении, обобщающего уравнения класса Риккати

Юго - Осетинский государственный университет
(Южная Осетия, Цхинвал)

doi10.18411/gq-31-03-2018-01

idsp000001:gq-31-03-2018-01

Аннотация:

Изучается нелинейное уравнение от двух независимых переменных, обобщающее нелинейное уравнение класса Риккати [1,2]. Метод рассуждений соответствует способу исследования уравнения Риккати. Решение строим в явной форме [3,4,5].

Ключевые слова: уравнение, нелинейность, решение, выполнимость, класс Риккати, тождественность, порядок.

П. 1. Обобщенное нелинейное уравнение.

Известно, что решение линейного уравнения второго порядка переменными коэффициентами тесно связано с решением уравнения Риккати [5]. В аналогичном случае сталкиваемся при изучении уравнения в частных производных второго порядка гиперболического класса, где всплывает нелинейное уравнение,

$$— () () () ()$$

обойти решение которого невозможно, ибо искомая функция упомянутого уравнения непосредственно зависит от (). Если допустить в (1.1), то оно есть уравнение Риккати. В связи с этим, естественно, (1.1) можно назвать обобщенным случаем уравнения Риккати.

Исследование (1.1) проведем согласно [3,5]. Доказывается теорема

Теорема 1. Если () решение не линейного уравнения

$$\frac{()}{()} () () () () ()$$

где

$$\begin{aligned} & - (\sqrt{\quad}) \\ & () () () \frac{()}{()} \\ & () () \frac{()}{()} () () \\ & \{ (\sqrt{\quad}) \end{aligned}$$

то (), определенная формулой

$$f() (f() f())$$

$$f(\varphi(x)) \in (\varphi(x)) \quad f(\varphi(x)) \quad f(\varphi(x)) \quad)$$

$$(\quad)$$

$$\{ f(\varphi(x)) \in (\varphi(x)) \quad f(\varphi(x)) \quad f(\varphi(x)) \quad)$$

удовлетворяет уравнению (1.1), причем, $(\varphi(x))$ неизвестная функция.

Действительно, равенство (1.1) можно еще записать в форме

$$— (\varphi(x))(\varphi(x)) \quad (\quad)$$

Умножив его на $(\varphi(x))$ и представив в виде

$$— — (\varphi(x)) — (\varphi(x))(\varphi(x))(\varphi(x))$$

после группировки левой части оно переходит:

$$(\varphi(x)) — (\varphi(x)) — (\varphi(x))(\varphi(x))(\varphi(x)) \quad (\quad)$$

Или

$$\frac{—}{—} \quad \frac{—}{—} \quad (\quad) \quad (\quad)$$

С другой стороны, из (1.3) замечаем, что

$$— \{ \begin{pmatrix} (\varphi(x)) & (\varphi(x)) & (\varphi(x))(\varphi(x)) \\ (\varphi(x)) & (\varphi(x)) & (\varphi(x))(\varphi(x)) \end{pmatrix}$$

Или

$$\frac{—}{—} \quad (\quad) \quad \frac{—}{—} \quad (\quad)$$

С учетом этих значений равенство $(\varphi(x))$ переходит в тождество:

$$(\varphi(x)) \quad (\varphi(x))$$

То есть, формула (1.3) есть решение (1.4), или что одно и то же, уравнение (1.1).

Содержащуюся в (1.1) произвольную функцию $(\varphi(x))$ будем допускать равной

$$(\quad) \quad (\quad)$$

Вторую часть теоремы 1 докажем, если построим функцию $(\varphi(x))$, удовлетворяющую (1.2). Его решение будем задавать в форме

$$(\quad)$$

$$f(\varphi(x)) \in (\varphi(x)) \quad f(\varphi(x)) \quad f(\varphi(x)) \quad)$$

$$(\quad)$$

$$f(\varphi(x)) \in (\varphi(x)) \quad f(\varphi(x)) \quad f(\varphi(x)) \quad)$$

{

где $(\quad)$ $(\quad)$ – искомые функции, $(\quad)$ – неизвестна,
Из (1.6) замечаем:

$$\begin{aligned} & (\quad) (\quad) (\quad) (\quad) f(\quad) (\quad) \frac{(\quad)}{(\quad)} \\ & \frac{(\quad)}{(\quad)} (\quad) (\quad) (\quad) (\quad) f(\quad) (\quad) \frac{(\quad)}{(\quad)} (\quad) \\ & \{ \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} & \frac{(\quad)}{(\quad)} (\quad) \frac{(\quad)}{(\quad)} f(\quad) (\quad) \\ & \frac{(\quad)}{(\quad)} (\quad) \frac{(\quad)}{(\quad)} f(\quad) (\quad) (\quad) \\ & \{ \end{aligned}$$

Уравнение (1.2) допускает представление

$$\frac{(\quad)}{(\quad)} (\quad) (\quad) (\quad) (\quad) (\quad)$$

где (см. $(\quad)$).

Отсюда легко заметить, что

$$\frac{(\quad)}{(\quad)} \frac{(\quad)}{(\quad)} (\quad)$$

Или, приняв во внимание (1.7), соотношение (1.8) перейдет к виду

$$\frac{(\quad)}{(\quad)} f(\quad) (\quad) \frac{(\quad)}{(\quad)} f(\quad) (\quad) (\quad)$$

Чтобы удовлетворялось равенство $(\quad)$, или (1.8), соотношение (1.9) должно быть тождеством.

Поскольку $(\quad)$ $(\quad)$ неизвестны, то условившись, что

$$\frac{(\quad)}{(\quad)} f(\quad) \frac{(\quad)}{(\quad)} f(\quad) (\quad)$$

(1.9) будет удовлетворять тождественно. Но, чтобы сами (1.10) выполнялись тождественно $(\quad)$ $(\quad)$, с учетом (1.6), соответственно должны быть решениями следующих дифференциальных равенств:

$$\begin{aligned} & \frac{(\quad)}{(\quad)} f(\quad) (\quad) (\quad) (\quad) \\ & \{ \frac{(\quad)}{(\quad)} f(\quad) (\quad) (\quad) (\quad) (\quad) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} & (\quad) f(\quad) (\quad) f(\quad) (\quad) f(\quad) (\quad) \\ & (\quad) f(\quad) (\quad) f(\quad) (\quad) f(\quad) (\quad) \end{aligned}$$

То есть

$$\begin{aligned} & \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \\ & \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \\ & \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

Установленные для () () формулы (1.12) обеспечивают тождественную выполнимость равенств (1.11); то есть, соотношения (1.10) выполняются тождественно. Установлена тождественность равенств (1.9) и этим доказано удовлетворение (1.8) или (). Но () есть уравнение (1.2). Этим теорема 1 доказана полностью.

Остается уточнить неизвестные () (), чтобы () () () стали вполне определенными функциями.

Из (1.11) и (1.12) при следует:

$$\begin{aligned} & \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \\ & \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

Из () в точке имеем (см. также (1.13)):

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \\ & \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned} \right.$$

Предполагается, что эти два значения совпадают при :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \\ & \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned} \right.$$

Или раскрывая скобки, после группировки записываем:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \\ & \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned} \right.$$

Приняв, что () (), для () получаем вполне определенное значение

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

В силу произвольности () допускается, что () ().

Следовательно, из (1.14) находим

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

На основании формулы (1.3) и условия () () ()

Напоминаем, что для обобщенного уравнения Риккати (1.1) построено точное решение, удовлетворяющее формуле (1.3). Данное уравнение (1.8), вполне определенная функция (см. соответственно формулы (1.12) и удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.11), () () выражаются через (1.15) и (1.16). ()

Таким образом, известно, что [5], решение любого линейного дифференциального уравнения порядка n не непосредственно зависит от решения нелинейного уравнения класса Риккати, так и здесь; решение любого

дифференциального уравнения в частных производных второго порядка зависит от решения нелинейного дифференциального уравнения первого порядка класса (1.1).

1. Чочиев Т.З. Решение уравнения Риккати и его применение к линейным уравнениям второго порядка // XIV МНК, ЕНО итоги науки в теории и практике 2015, ISSN 2411-1899. Москва 13-18 с.
2. Чочиев Т.З. Обыкновенные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, LAP LAMBERT Академик Publishing/ Германия 2015 – 157 с.
3. Чочиев Т.З. Дифференциальные уравнения высшего порядка // XII МНК «Отечественная наука в эпоху изменений постулаты прошлого и теории нового времени» ISSN 3385 – 8879 НАУ, ч.3. Екатеринбург 2015 – 18-24 с.
4. Чочиев Т.З. Нелинейное уравнение второго порядка и линейное уравнение третьего порядка // МЦИИ «ОмегаСАЙНС», научное обозрение и инновации, сборник статей МНПК, 28.XII.15. часть 5, Челябинск 23-31 с.
5. Чочиев Т.З. Нелинейное уравнение Риккати и линейное уравнение второго порядка. XXXIV МНК «Актуальные проблемы в современной науке и пути их решения» №1 (34) ч. I. Москва 30.01.2017.