Федотов А.И., Лисин С.К.

СПб политехнический университет Петра Великого

СПб национальный минерально-сырьевой университет «Горный»

Санкт-Петербург, Россия

doi 10.18411/gdsn-28-02-2017-21

idsp 000001:gdsn-28-02-2017-21

О повышении точности измерительных систем

Fedotov A. Lisin S.

On improving the accuracy of measuring systems

Article summary

The article presents the concept of constructing a theoretical model of the determination and analysis of the results of experiments on the conformity of experimental data with analytical equations. Studies implement procedures for the reproduction and verification of the functions of the dials and converters for measurement and control. The theoretical model establishes a link between the readings of the measuring instrument with the size information size. This procedure provides the calibration scale of a measuring instrument determines the measured value. Calibration scale is provided of the continuity of values. The calibration procedure in the individual points of the measuring range contains their characteristics.

Для выполнения физических, физико-технических измерений широко используются волновые акустические, вибрационные, виброударные, вибрационно-контактные и другие системы. Для определения и анализа результатов опытов, а также для установления соответствия экспериментальных данных соответствующим аналитическим зависимостям используют соответствующие регрессии. Подобные исследования возникают при необходимости воспроизведения или проверки закона построения шкалы приборов и преобразователей по полученным результатам измерений и контроля.

Для представления, воспроизведения и анализа результатов опытов с учетом влияющих факторов используют линейные и нелинейные многочлены. Пусть значениям $v_1, v_2, \dots, v_n$ контролируемых переменных соответствуют линейные или нелинейные многочлены относительно неизвестных параметров $b_1, b_2, \dots, b_n$. Такие функциональные многочлены называются регрессионными многочленами, воспроизводящими свойства объектов. Роль метода наименьших

квадратов заключается в реализации одного из видов линейного или нелинейного описания экспериментальных зависимостей, отражающих статистическую направленность задачи регрессионного анализа.

В общем виде процедура измерения может быть представлена многочленом вида

$$z = b_0 + b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n. \quad (1)$$

Матричная модель системы линейных уравнений (1) записывается в виде

$$Z = B V,$$

где Z – вектор зависимых переменных системы;

B – матрица параметров в контролируемых точках;

V – вектор независимых переменных системы.

В подобной метрологической задаче неизвестные параметры системы подлежат определению. Однако цель процесса измерений заключается в построении системы уравнений измерений. При этом процедура измерений, содержащая m опытов при n неизвестных параметрах, представляется системой уравнений вида

$$\begin{aligned} z_1 &= b_{11} v_1 + b_{12} v_2 + \dots + b_{1n} v_n, \\ z_2 &= b_{21} v_1 + b_{22} v_2 + \dots + b_{2n} v_n, \\ z_m &= b_{m1} v_1 + b_{m2} v_2 + \dots + b_{mn} v_n. \end{aligned} \quad (2)$$

Для решения сформированной в процессе измерений системы уравнений используем метод наименьших квадратов определения значений неизвестных параметров в контролируемых точках v_i по измеренным значениям z_i . С точки зрения повышения точности является важным вопрос о достоверности представления процесса измерений при оптимальном числе m . Система (2) считается статистически определенной при $m = n$. Вектор Z решений определенной системы приобретает вид

$$Z = B^{-1} V. \quad (3)$$

Построение обратной матрицы B^{-1} обусловлено образованием промежуточной матрицы, состоящей из алгебраических дополнений элементов матрицы B

$$B^* = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix}.$$

При этом матрица B^{**} вычисляется транспонированием матрицы B^*

$$B^{**} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{21} & \dots & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & \dots & B_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{1n} & B_{2n} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix}.$$

С учетом B^{**} выражение обратной матрицы B^{-1} записывается в виде

$$B^{-1} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{21} & \dots & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & \dots & B_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{1n} & B_{2n} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix} / D(B), \quad (4)$$

где $D(B)$ – определитель матрицы B .

В соответствии с методом наименьших квадратов предусматривается рассмотрение невязок заданной или устанавливаемой функции в каждой контролируемой точке массива. Метод наименьших квадратов позволяет определить оценки значений неизвестных $b_1 \dots b_n$, при которых сумма квадратов невязок C_i является минимальной

$$\sum_{i=1}^n C_i^2 = \min.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^n C_i^2 = \sum_{i=1}^n (z_i - b_{i1}v_1 - b_{i2}v_2 - b_{in}v_n)^2 = \min. \quad (5)$$

В соответствии с правилом суммы квадратов невязок функционал (5) достигает минимума во всех точках, в которых частные производные по искомым неизвестным b_i равны нулю. Таким образом, для определения оценок

$\hat{b}_i$ искомым неизвестных необходимо решить систему уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n=m} \frac{\partial}{\partial b_{11}} (z_i - b_{i1}v_1 - b_{i2}v_2 - b_{in}v_n)^2 = 0, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{n=m} \frac{\partial}{\partial b_{nn}} (z_i - b_{i1}v_1 - b_{i2}v_2 - b_{in}v_n)^2 = 0.$$

Здесь оценки коэффициентов $b_0, b_1, b_2, \dots b_m$, определяют оптимальную по критерию наименьших квадратов искомую функцию.

Теоретическая модель (1-6) позволяет установить связь показаний средства измерений с информацией о размере величины, представленной функцией этой величины. Такая процедура в теории измерений называется градуировкой шкалы средства измерений и позволяет по контролируемым переменным судить о значении измеряемой величины. Градуировка шкалы выполняется при соблюдении условия непрерывности измеряемой величины или её изменением можно пренебречь. При этом быстроедействие средства измерений позволяет фиксировать показания после того, как указатель отсчётного устройства установится на отметке шкалы. Процедура градуировки в отдельных точках диапазона измерений обусловлена построением графика характеристики.

Если вид функции характеристики градуировки неизвестен, то подобная задача сводится к отысканию наилучшей аппроксимации экспериментальных данных аналитической зависимостью. Решение её методом наименьших квадратов отличается от решения предыдущей задачи только тем, что степень полинома неизвестна. Степень аппроксимирующего полинома устанавливается из требований к точности градуировки.

Список используемых источников информации

1. Федотов, А.И. Теория измерений /А.И. Федотов, С.К. Лисин, Г.С. Морокина. – СПб.: Изд-во Политех. ун-та Петра Великого, 2013. – 325 с.
2. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико–статистической теории обработки наблюдений. Л. Физматгиз, 1962. – 352 с.
3. Лисин, С.К. Метрология и стандартизация /С.К. Лисин, К.А. Соловейчик, А.И. Федотов. – СПб.: Изд-во Политех. ун-та Петра Великого, 2016. – 238 с.
4. Victor Wowk. Machinery Vibration: Measurement and Analysis. McGraw – Hill Professional, 1991, 358 p.