В.Ш. Бурд, В.Л. Крупенин

УСРЕДНЕНИЕ В КВАЗИКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

МАЯТНИКОВЫЕ И ВИБРОУДАРНЫЕ СИСТЕМЫ

Москва
2016

УДК 517.9+534.1
ББК 22.213
Б 912

**Подготовлено и издано при поддержке Российского Научного
Фонда (грант № 15-19-30026)**

Р е ц е н з е н т ы:

В.И. Ерофеев – доктор физико-математических наук,
директор Института проблем машиностроения РАН;
Д.А. Новиков – доктор технических наук, член-корреспондент РАН,
заместитель директора Института проблем управления РАН;
С.Ю. Мисюрин – доктор физико-математических наук,
заведующий лабораторией Института машиноведения РАН

Б 912

Бурд В.Ш., Крупенин В.Л. Усреднение в квазиконсервативных системах:
маятниковые и виброударные системы / В.Ш. Бурд, В.Л. Крупенин. —
Библиотека ВНТР. — М.: «Белый Ветер», 2016. — 172 с.

В книге приведены результаты исследований квазиконсервативных колебательных систем при помощи метода усреднения. Изложены вспомогательные математические вопросы и результаты общей теории.

Дано описание маятниковых и виброударных систем с одной степенью свободы при различных способах возбуждения колебаний, в частности, почти периодическими силами. Приведены примеры решения ряда конкретных задач теории нелинейных колебаний.

Книга адресована научным работникам и инженерам-исследователям, занимающимся расчетом и анализом сложных динамических систем, а также преподавателям, аспирантам и учащимся магистратур по физико-математическим и инженерным специальностям, интересующимся теорией нелинейных колебаний.

Печатается в авторской редакции.

Рис.: 47. Библиогр.: 125 назв.

DOI: 10.18411/d-2016-057
ISBN 978-5-905714-96-2

**Библиотека журнала «Вестник Научно-Технического Развития»
(<http://www.vntr.ru>)**

УДК 517.9+534.1
ББК 22.213

© Бурд В.Ш., Крупенин В.Л., 2016
Обложка: © Саламандра К.Б., 2016.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта небольшая книжка могла бы называться "усреднение в неквазилинейных системах при несинусоидальном возбуждении". То есть речь ведется об аналитических исследованиях достаточно сложных динамических систем. При рассмотрении конкретных примеров мы ограничиваемся системами второго порядка.

Уже стало общим местом утверждение, что для проведения исследований конкретных моделей весьма полезно иметь возможность получать обозримые рабочие формулы, позволяющие выяснить взаимосвязь между параметрами систем, а также сделать необходимые качественные выводы о характере и свойствах исследуемых динамических процессов. Этот круг вопросов, по крайней мере частично, и рассматривается далее. Причем исследуются модели с одной степенью свободы, однако структура возбуждающих колебания факторов оказывается достаточно сложной. Рассматриваются как параметрические, так и вынужденные колебания за счет полигармонических периодических или почти периодических сил. Подобные задачи пока не слишком распространены, хотя, для расчета реальных вибрационных процессов умение проводить анализ систем такого рода – безусловно важно.

Одним из наиболее популярных методов исследования нелинейных процессов оказывается метод усреднения. Этот метод для нас и является базовым. В обзоре книг о методе усреднения Дж. Мардок [107, с. 337] написал: "Предмет усреднения обширен и возможно прочитать четыре или пять книг, целиком посвященных усреднению, и найти очень небольшое пересечение в материале, который они покрывают". Еще одна книга по усреднению предлагается читателю. Она имеет не много общего с другими книгами, посвященными этому предмету. Исключение составляют лишь книги [16, 77].

Небольшая книга Н.Н. Боголюбова [13] заложила основы теории метода усреднения. Дальнейшее развитие теории содержится в книгах Н.Н. Боголюбова и Ю.А. Митропольского [15] и И.Г. Малкина [47]. В последующие годы было получено много новых результатов, упрощены доказательства известных теорем и найдены новые применения метода усреднения. В этой книге строго изложены основные результаты теории в современном виде, а также приводятся примеры анализа двух весьма представительных классов механических систем: маятниковых и виброударных (а также систем, родственным им). В последнем случае изложение во многом опирается на книги [7, 72, 77]. Краткий экскурс в теорию виброударных систем делается в Приложении А.

Представляемая книга состоит из четырех глав и трех приложений. В Первой главе рассматриваются вспомогательные вопросы математического характера и приводятся расчетные примеры ряда линейных систем, таких, например, как возбуждаемые периодическими ударами маятники.

Вторая глава посвящена изложению ряда результатов, относящихся к методу усреднения. При этом, в связи с необходимостью исследовать достаточно тонкие нелинейные эффекты, приводимые сведения касаются таких, например, вопросов, как нахождение второго приближения метода усреднения и некоторых других. Один из акцентов – трактовка метода усреднения с точки зрения обеспечения эффективной замены переменных в исходных уравнениях. Это обстоятельство используется в двух последующих главах.

В Третьей главе рассматриваются маятниковые системы. Метод усреднения здесь применяется для изучения устойчивости состояний равновесия в случаях различных типов вибрирования подвесов. Кратко излагается история исследований, относящихся к проблеме стабилизации верхнего состояния равновесия маятника. Затем анализируется устойчивость состояний равновесия маятника с почти периодически колеблющимся подвесом. Излагается некоторые результаты, полученные в последние годы. Например, рассматриваются проблемы стабилизации в верхнем положении маятника Челомея. (Развитие этой задачи за счет перехода к модели с распределенными параметрами описано в Приложении С).

Четвертая глава посвящена виброударным системам (им же посвящено Приложение А), основная особенность которых – возникновение разрывов скоростей при принятии наиболее распространенной в механике гипотезы о мгновенности соударения (см. также Приложение В, в котором рассматриваются виброударные системы, в которых колебания, в свою

очередь, возбуждаются ударами). Замена переменных, приводящая к системе с быстрыми фазами – негладкая и это, в частности, порождает существенное усложнение анализа. Вместе с тем эта проблема оказывается преодолимой. Так что появляется возможность дать методы анализа основных и субгармонических резонансных режимов при полигармоническом силовом воздействии. Кроме того, удалось, по-видимому, впервые предложить метод анализа почти периодических виброударных процессов.

Результаты, помещенные в Приложения, частично были описаны выше. Заметим, что изложение здесь ведется на физическом уровне строгости. Часть материала нуждается в тщательном обосновании. По причине, связанной с отсутствием обоснования существующих формальных алгоритмов, в книге не рассматриваются виброударные системы при принятии гипотезы о коэффициенте восстановления (п.4.3.4).

В. Бурд, В. Крупенин,
San Diego, CA – Москва,
июль, 2016

Оглавление

Предисловие	2
1 Линейные системы	9
1.1 Периодические и почти периодические функции. Краткое введение в теорию	9
1.1.1 Периодические функции	9
1.1.2 Почти периодические функции	11
1.2 Дельта-функция Дирака	15
1.3 Уравнения второго порядка	22
1.3.1 Теория Флоке - Ляпунова для уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами	22
1.3.2 Периодические функции Грина	25
1.4 Возбуждение параметрических колебаний ударами	28
1.4.1 Применение периодических функций Грина	28
1.4.2 Маятник с вибрирующим подвесом	30
1.4.3 Распространение вибрации	35
2 Метод усреднения	41
2.1 Усреднение дифференциальных уравнений в стандартной форме. Первое приближение	41
2.1.1 Системы в стандартной форме на конечном промежутке. Постановка задачи	41
2.1.2 Первая теорема Боголюбова	42
2.1.3 Усреднение на бесконечном интервале	43
2.1.4 Случай периодических коэффициентов	44
2.1.5 Исследование устойчивости почти периодического решения	46

2.1.6	Усреднение системы уравнений с быстрым и медленным временем	47
2.1.7	Применение метода усреднения к одному классу сингулярно возмущенных систем	48
2.2	Второе приближение метода усреднения	49
2.2.1	Формализм метода усреднения для систем в стандартной форме	49
2.2.2	Основной результат о втором приближении в периодическом случае	52
2.3	Системы уравнений с быстро вращающейся фазой	54
2.3.1	Квазиконсервативные системы с одной степенью свободы. Переменные действие-угол	54
2.3.2	Формальная схема усреднения для систем с быстрой фазой	58
2.3.3	Возбуждение параметрических колебаний ударами в нелинейных системах	62
3	Маятниковые системы с колеблющимся подвесом	69
3.1	История и физические применения	69
3.2	Уравнение движения простого маятника с вибрирующим подвесом	72
3.3	Введение малого параметра и приведение уравнений к стандартной форме	74
3.4	Исследование устойчивости состояний равновесия	75
3.5	Плоские вибрации точки подвеса	78
3.6	Маятник с исчезающей во времени амплитудой колебаний точки подвеса	81
3.7	Многочастотные колебания подвеса маятника	85
3.8	Система шайба-маятник с вибрирующим основанием (маятник Челомея)	89
3.9	Плоские вибрации маятника и сопряженность резонансов	96
4	Квазиконсервативные виброударные системы	101
4.1	Автоколебания ударного осциллятора	101
4.1.1	Введение	101

4.1.2	Ударный осциллятор: консервативная модель	102
4.1.3	Уравнения движения в переменных импульс-фаза	105
4.1.4	Ударный осциллятор: авторезонанс	109
4.2	Ударный осциллятор: субгармонический резонанс .	112
4.2.1	Возмущенный ударный осциллятор	112
4.2.2	Применение метода усреднения	113
4.2.3	Существование и устойчивость периодических решений	115
4.2.4	Субгармонические резонансные колебания ударного осциллятора при полигармоническом возбуждении	118
4.3	Ударный осциллятор: почти периодические колебания	121
4.3.1	Постановка задачи	121
4.3.2	Построение усредненных уравнений	122
4.3.3	Существование и устойчивость почти периодических колебаний	124
4.3.4	О неупругом ударе	131
	Приложение А	133
	Приложение В	143
	Приложение С	151
	Литература	161

Глава 1

Линейные системы

1.1 Периодические и почти периодические функции. Краткое введение в теорию

В этом разделе описываются основные классы функций, которые мы в дальнейшем используем. Функции из этих классов определены при всех $t \in (-\infty, \infty)$ (будем писать $t \in \mathbb{R}$).

1.1.1 Периодические функции

Мы будем каждой периодической функции $f(t)$ с периодом T (не обязательно непрерывной) сопоставлять ряд Фурье

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi}{T} kt + b_k \sin \frac{2\pi}{T} kt,$$

который часто удобно записывать в комплексной форме. Представляя $\cos \frac{2\pi}{T} kt$ и $\sin \frac{2\pi}{T} kt$ в комплексной форме и полагая $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$, $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$, получим

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{2\pi}{T} kt},$$

где $c_0 = a_0$. Число a_0 определяется формулой

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

и называется средним значением периодической функции. Для нас в дальнейшем среднее значение имеет первостепенное значение. Отметим следующее свойство периодической функции. Неопределенный интеграл от периодической функции $f(t)$ с точностью до постоянной представим в виде

$$\int f(t)dt = a_0 t + g(t),$$

где $g(t)$ - периодическая функция. Ряд Фурье функции $g(t)$ получается почленным интегрированием ряда Фурье функции $f(t)$.

Чтобы получить ряд Фурье для суммы или разности двух периодических функций, ряды Фурье которых известны, достаточно произвести сложение или вычитание соответствующих рядов. Здесь не предполагается сходимости рядов Фурье.

Если функция $f(t)$ абсолютно интегрируема (т.е. интегрируема ее абсолютная величина), то ряд Фурье функции $f'(t)$ с нулевым средним значением получается почленным интегрированием ряда Фурье функции $f(t)$.

Если периодическая функция и ее производная абсолютно интегрируемы (производная может не существовать в отдельных точках), то ряд Фурье $f'(t)$ получается почленным дифференцированием ряда Фурье функции $f(t)$.

Наряду с непрерывными периодическими функциями мы будем также рассматривать периодические функции, которые имеют конечное число точек разрыва первого рода (конечных скачков) на периоде. Нас будут интересовать ряды Фурье произведения таких функций (см., например, [61]). Если $f(t)$ и $g(t)$ - две периодические функции, которые интегрируемы с квадратом на периоде и с рядами Фурье

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{int}, \quad g(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} d_n e^{int},$$

то ряд Фурье произведения таких функций имеет вид

$$f(t)g(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \gamma_n e^{int},$$

где $\gamma_n = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k d_{n-k}$. Отметим, что формула для коэффициентов Фурье произведения функций получается путем формального перемножения рядов Фурье функций $f(t)$ и $g(t)$ и объединением подобных членов. В частности, можно вычислить ряд Фурье функции $f^2(t)$. В качестве

примера рассмотрим ряд Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)}{2k-1}.$$

Он является рядом Фурье функции, получающейся в результате периодического продолжения функции, определяемой на периоде 2π соотношениями

$$\begin{aligned} f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0, \quad f(t) = \frac{\pi}{4}, \quad 0 < t < \pi, \\ f(t) = -\frac{\pi}{4}, \quad \pi < t < 2\pi. \end{aligned}$$

Ряд Фурье функции $f^2(t)$ сходится абсолютно и среднее значение этой функции равно

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{16}.$$

1.1.2 Почти периодические функции

Тригонометрическим многочленом будем называть выражение

$$T_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t,$$

где a_k, b_k, ω_k - вещественные числа. Это выражение удобно записывать в комплексной форме

$$T_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i\omega_k t}.$$

Существуют тригонометрические многочлены, которые не являются периодическими функциями. Действительно, возьмем многочлен $f(t) = e^{it} + e^{i\pi t}$. Предположим, что $f(t)$ - периодическая функция с некоторым периодом T . Тожество $f(t+T) = f(t)$ имеет вид

$$(e^{iT} - 1)e^{it} + (e^{i\pi T} - 1)e^{i\pi t} \equiv 0.$$

Так как функции e^{it} и $e^{i\pi t}$ линейно независимы, то

$$e^{iT} - 1 = 0, \quad e^{i\pi T} - 1 = 0.$$

Следовательно, $T = 2k\pi$ и $\pi T = 2h\pi$, где k и h - целые числа. Одновременное выполнение этих равенств невозможно.

Функцию $f(t)$, определенную при $t \in \mathbb{R}$, будем называть почти периодической, если она является пределом в смысле равномерной сходимости на всей вещественной оси последовательности $T_n(t)$ тригонометрических многочленов, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N , что при $n > N$

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |f(t) - T_n(t)| < \varepsilon.$$

Очевидно, любая непрерывная периодическая функция будет почти периодической в смысле данного выше определения. Опишем свойства почти периодических функций (сокращенно пп функций), которые необходимы в дальнейшем (см. [46, 89]).

1) Каждая пп функция равномерно непрерывна и ограничена на всей вещественной оси.

2) Если $f(t)$ - пп функция и c - постоянная, то $cf(t)$, $f(t+c)$, $f(ct)$ - пп функции.

3) Если $f(t)$ и $g(t)$ - пп функции, то $f(t) \pm g(t)$ и $f(t) \cdot g(t)$ - пп функции.

Из свойства 3) вытекает, что, если $P(z_1, z_2, \dots, z_k)$ - многочлен от переменных $z_1, z_2, \dots, z_k$, и $f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)$ - пп функции, то функция $F(t) = P(f_1, f_2, \dots, f_k)$ будет пп функцией.

4) Если $f(t)$ и $g(t)$ - пп функции и $\sup_{-\infty < t < \infty} |g(t)| > 0$, то $f(t)/g(t)$ - пп функция.

5) Предел равномерно сходящейся последовательности, составленной из пп функций, является пп функцией.

Пусть $\Phi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ - функция непрерывная на замкнутом ограниченном множестве Π пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $f_1(t), \dots, f_n(t)$ - пп функции и $(f_1(t), \dots, f_n(t)) \in \Pi$ при $t \in \mathbb{R}$. Тогда из свойства 5) следует, что $F(t) = \Phi(f_1(t), \dots, f_n(t))$ - пп функция.

Следующее свойство пп функции для нас особенно важно.

6) Для пп функции $f(t)$ существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt = \langle f(t) \rangle$$

равномерно по a . Число $\langle f(t) \rangle$ не зависит от выбора a и называется средним значением пп функции $f(t)$.

Пусть $f(t)$ - периодическая функция с периодом T . Представим вещественное число T в виде $T = n\eta + \alpha_n$, где n - целое, а α_n удовлетворяет неравенству

$$0 \leq \alpha_n \leq \eta.$$

Когда $T \rightarrow \infty$, то $n \rightarrow \infty$. Вычислим среднее значение функции $f(t)$:

$$\begin{aligned} \langle f(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\eta + \alpha_n} \int_0^{n\eta + \alpha_n} f(t) dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\eta + \alpha_n} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \int_{i\eta}^{(i+1)\eta} f(t) dt + \int_{n\eta}^{n\eta + \alpha_n} f(t) dt \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\eta + \alpha_n} \left\{ n \int_0^\eta f(t) dt + \int_0^{\alpha_n} f(t) dt \right\} = \frac{1}{\eta} \int_0^\eta f(t) dt. \end{aligned}$$

Таким образом, для периодических функций введенное среднее значение совпадает с обычным средним значением периодической функции.

Существование среднего значения позволяет построить для пп функции ряд Фурье. Пусть $f(t)$ - пп функция. Так как при любом действительном ω функция $e^{i\omega t}$ - периодическая, то произведение $f(t)e^{i\omega t}$ - пп функция. Поэтому существует среднее значение

$$c(\omega) = \langle f(t)e^{i\omega t} \rangle.$$

Фундаментальное значение имеет тот факт, что функция $c(\omega)$ может отличаться от нуля самое большее только для счетного множества значений ω . Числа $\omega_1, \dots, \omega_n, \dots$ называются показателями Фурье, а числа $c_1, \dots, c_n, \dots$ - коэффициентами Фурье функции $f(t)$.

Итак, каждой пп функции $f(t)$ сопоставляется ряд Фурье:

$$f(t) \sim \sum_n a_n e^{i\lambda_n t}.$$

Над рядами Фурье можно производить формальные операции. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ - пп функции и

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \sum_n a_n e^{i\lambda_n t} = \sum_\lambda a(\lambda) e^{i\lambda t}, \\ g(t) &\sim \sum_n b_n e^{i\mu_n t} = \sum_\lambda b(\lambda) e^{i\lambda t}. \end{aligned}$$

Тогда:

- 1) $kf(t) \sim \sum_n k a_n e^{i\lambda_n t}$ ($k = \text{const}$),
- 2) $e^{i\lambda t} f(t) \sim \sum_n a_n e^{i(\lambda_n + \lambda)t}$,

- 3) $f(t + \alpha) \sim \sum_n a_n e^{i\lambda_n \alpha} e^{i\lambda_n t} \quad (\alpha \in \mathbb{R}),$
 4) $\bar{f}(t) \sim \sum_n \bar{a}_n e^{-i\lambda_n t},$
 5) $f(t) + g(t) \sim \sum_n (a_n + b_n) e^{i\lambda_n t},$
 6) $f(t) \cdot g(t) \sim \sum_n c_n e^{i\nu_n t},$ где

$$c_n = \sum_{\lambda_p + \mu_q = \nu_n} a_p b_q.$$

Если производная пп функции $f(t)$ является пп функцией, то ее ряд Фурье получается из ряда Фурье $f(t)$ почленным дифференцированием. Если неопределенный интеграл пп функции $f(t)$ является пп функцией, то

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt \sim c + \sum_n \frac{a_n}{i\lambda_n} e^{i\lambda_n t} (\lambda_n \neq 0).$$

Остановимся подробнее на интегрировании пп функций. Если $f(t)$ - периодическая функция с ненулевым средним значением, то для нее справедливо равенство

$$\int_0^t f(t) dt = \langle f \rangle t + g(t),$$

где $g(t)$ - периодическая функция. Для пп функций последнее равенство, вообще говоря, не имеет места. Существуют пп функции с нулевым средним значением, интеграл от которых неограничен и, следовательно, не является пп функцией. Такова, например, функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{i \frac{1}{k^2} t}.$$

Если существует конечное множество чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ такое, что каждый показатель Фурье пп функции является линейной комбинацией этих чисел

$$\lambda_n = n_1 \lambda_1 + \dots + n_m \lambda_m,$$

где $n_1, \dots, n_m$ - целые числа, то эта пп функция называется квазипериодической. Квазипериодические функции можно получать из периодических функций многих переменных. Например, пусть $F(x, y)$ - функция периодическая по каждой из переменных с периодом 2π . Тогда $F(\omega_1 t, \omega_2 t)$ - квазипериодическая функция, если числа ω_1, ω_2 несоизмеримы.

Отметим еще, что среднее значение обладает следующими свойствами:

- 1) $\langle cf(t) \rangle = c\langle f(t) \rangle$ ($c = const$),
- 2) $\langle (f(t) + g(t)) \rangle = \langle f(t) \rangle + \langle g(t) \rangle$,
- 3) Если последовательность пп функций $f_1(t), \dots, f_n(t), \dots$ сходится равномерно при $t \in \mathbb{R}$ к пп функции $f(t)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n(t) \rangle = \langle f(t) \rangle.$$

Мы определили почти периодическую функцию как равномерный предел на бесконечном промежутке последовательности тригонометрических многочленов. Такое определение принято за основу в книге [83]. Исторически первым было определение Г. Бора, которое мы не будем здесь приводить. Часто удобным является определение С. Бохнера.

Введем это определение. Непрерывная на вещественной оси функция $f(t)$ называется почти периодической, если из каждой бесконечной последовательности функций

$$f(t + h_1), f(t + h_2), \dots, f(t + h_k), \dots$$

можно выбрать равномерно сходящуюся на всей вещественной оси подпоследовательность.

На следующем рисунке приведен график функции $\sin t + \sin \sqrt{2}t$.

Рис.1.1: Пример графика пп функции

1.2 Дельта-функция Дирака

В этом разделе весьма кратко излагаются необходимые фрагменты теории обобщенных функций, следуя книгам [1] и [64].

Дельта-функция обозначается через $\delta(t)$ и определяется следующим образом

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.1)$$

Дельта-функцию можно представить как "предел" обычных функций.

Рис.1.2: δ -образная последовательность ступенчатых функций

Пусть $\delta_a(t)$ - ступенчатая функция

$$\delta_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |t| \leq a, \\ 0, & |t| > a \end{cases}$$

Очевидно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t) dt = 1.$$

Последовательность $\delta_a(t)$ при $a \rightarrow +0$ сходится к $\delta(t)$ в следующем смысле. Для любой непрерывной на всей оси функции $\psi(t)$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{a \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t) \psi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \psi(t) dt = \psi(0).$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t) \psi(t) dt = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \psi(t) dt,$$

то в силу теоремы о среднем для интегралов

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a \psi(t) dt = \psi(0) + o(1)$$

при $a \rightarrow +0$. Отсюда следует предельное равенство.

Мы взяли последовательность ступенчатых функций, "сходящихся" к дельта-функции $\delta(t)$. Можно было взять последовательность гладких функций с теми же свойствами. Например, последовательности

$$g_n(t) = \frac{1}{1 + e^{-nt}}, \quad f_n(t) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-(nt)^2}.$$

Дельта-функция не является функцией в обычном смысле слова. Она принадлежит к классу обобщенных функций.

Введем класс обобщенных функций. Обозначим через K совокупность бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$. Причем каждая функция из K финитна, то есть обращается в нуль вне некоторого конечного интервала. Обобщенной функцией f над пространством K называется линейный функционал, который каждой основной функции $\varphi(t) \in K$ ставит в соответствие число $f(\varphi)$. Будем представлять этот функционал в виде

$$f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt. \quad (1.2)$$

В обобщенные функции попадают все обычные функции.

Две обобщенные функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ равны, если равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) \varphi(t) dt$$

справедливо для любой функции $\varphi(t) \in K$.

Введем понятие производных для обобщенных функций. Пусть $f(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция и $\varphi(t) \in K$. Тогда интегрируя по частям и принимая во внимание, что функция $\varphi(t)$ финитна, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi'(t) dt. \quad (1.3)$$

Формула (1.3) принимается за определение обобщенной функции $f'(t)$. Аналогично определяются производные высших порядков

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(t)\varphi(t)dt = -(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi^{(n)}(t)dt. \quad (1.4)$$

Теперь приведем основные формулы для дельта-функции. Следующая формула может быть принята за определение дельта-функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\varphi(t)dt = \varphi(a). \quad (1.5)$$

Таким образом, $\delta(t)$ каждой функции из пространства K ставит в соответствие значение этой функции в нуле.

Обозначим через $H(t)$ ступенчатую функцию Хевисайда

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Тогда

$$H'(t) = \delta(t). \quad (1.7)$$

Это утверждение следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H'(t)\varphi(t)dt &= - \int_{-\infty}^{\infty} H(t)\varphi'(t)dt = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} H'(t)\varphi(t)dt = \\ &= - \int_0^{\infty} \varphi'(t)dt = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)dt, \end{aligned}$$

где $\varphi \in K$.

Пусть $f(t)$ непрерывно дифференцируемая функция на интервалах $t < a$ и $t > a$, а в точке a у нее имеется разрыв (скачок). Тогда

$$f'(t) = \{f'(t)\} + (f(a+0) - f(a-0))\delta(t-a). \quad (1.8)$$

Здесь $\{f'(t)\}$ - обычная (классическая) производная. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)dt &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)dt = - \int_{-\infty}^a f(t)\varphi'(t)dt - \\ &\quad \int_a^{\infty} f(t)\varphi'(t)dt. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{f'(t)\}\varphi(t)dt + (f(a+0) - f(a-0))\varphi(a).$$

Далее, справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-a)\varphi(t)dt = (-1)^n \varphi^{(n)}(a). \quad (1.9)$$

Для $a \neq 0$ справедливо равенство

$$\delta(at) = |a|^{-1}\delta(t). \quad (1.10)$$

Если $a > 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\varphi(t)dt = a^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi\left(\frac{t}{a}\right)dt = a^{-1}\varphi(0).$$

Пусть $f(t)$ - гладкая функция, у которой конечное число нулей $t_1, t_2, \dots, t_n$ и все нули простые, т.е. $f'(t_j) \neq 0$ ($j = 1, \dots, n$). Тогда

$$\delta(f(t)) = \sum_{j=1}^n \frac{\delta(t-t_j)}{|f'(t_j)|} \quad (1.11)$$

Предположим, что функция $f(t)$ обращается в нуль в одной точке t_0 и $f'(t_0) > 0$ в некоторой ε -окрестности точки t_0 . Рассмотрим интеграл

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(f(t))\varphi(t)dx. \quad (1.12)$$

В интеграле (1.12) сделаем замену переменных $y = f(t)$. Тогда существует обратная функция $t = g(y)$ и

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(f(t))\varphi(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(y)\varphi(g(y))g'(y)dy =$$

$$\varphi(g(0))g'(0) = \frac{\varphi(t_0)}{f'(t_0)} = \frac{\delta(t-t_0)}{f'(t_0)},$$

так как $f'(t)g'(y) = 1$. При $f'(t_0) < 0$ получим

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(y)\varphi(g(y))g'(y)dy = -\frac{\varphi(t_0)}{f'(t_0)}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(t))\varphi(t)dt = \frac{\delta(t-t_0)}{|f'(t_0)|}.$$

Так как $\delta(f(t)) = 0$ при $t \neq t_j$, справедлива формула (1.12). Формула (1.12) справедлива при определенных условиях для функций с бесконечным множеством нулей. Например,

$$\delta(\sin t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\pi).$$

Эта функция называется дираковской гребенкой. Функция

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\pi)$$

является примером периодической обобщенной функции. В общем случае обобщенная функция $f(t)$ называется периодической с периодом T , если $f(t+T) = f(t)$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t+T)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt$$

для $\varphi(t) \in K$. Каждая 2π -периодическая обобщенная функция является суммой тригонометрического ряда

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (1.13)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt, \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Разложение (1.13) единственно.

В качестве примера снова рассмотрим обобщенную T -периодическую функцию

$$\delta^T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + nT).$$

Коэффициенты разложения в тригонометрический ряд функции $\delta^{2\pi}(t)$ определяются формулами

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta^{2\pi}(t) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} \cos 0 = \frac{1}{\pi},$$

и аналогично,

$$b_n = 0.$$

Следовательно,

$$\delta^{2\pi}(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots \right).$$

Аналогично,

$$\delta^T(t) = \frac{2}{T} \left(\frac{1}{2} + \cos \omega t + \cos 2\omega t + \dots \right),$$

где $\omega = 2\pi T^{-1}$.

Часто удобно использовать тригонометрические ряды в комплексной форме

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}. \quad (1.14)$$

Каждую обобщенную 2π -периодическую функцию можно представить в виде суммы ряда (1.14) с

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int} dt.$$

Ряд (1.14) сходится в обобщенном смысле тогда и только тогда, когда существует целое число k , такое, что

$$\frac{c_n}{n^k} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Поэтому для периодических дельта-функций тригонометрический ряд сходится. Приведем еще одну формулу для дельта-функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t} dt = 2\pi\delta(\alpha). \quad (1.15).$$

Симметрическая периодическая дельта-функция с периодом T и частотой ω может быть определена следующим образом

$$\begin{aligned} \delta^{T/2}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\delta(t - kT) - \delta\left(t - kT - \frac{1}{2}T\right) \right] = \\ &= \frac{2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[(2k+1)i\omega t]. \end{aligned}$$

1.3 Уравнения второго порядка

В этом разделе приводятся необходимые далее сведения о свойствах дифференциальных уравнений второго порядка и методы их исследования.

1.3.1 Теория Флоке - Ляпунова для уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0, \quad (1.16)$$

где $p(t)$ и $q(t)$ - T -периодические и непрерывные функции. Пусть $x_1(t)$ некоторое решение уравнения (1.16), то-есть

$$\ddot{x}_1(t) + p(t)\dot{x}_1(t) + q(t)x_1(t) \equiv 0.$$

Очевидно, функция $x_1(t+T)$ также является решением уравнения (1.16). Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ два линейно независимых решения уравнения (1.16).

Тогда функции $y_1(t+T)$ и $y_2(t+T)$ будут также решениями уравнения (1.16). Поэтому эти функции выражаются через $y_1(t)$ и $y_2(t)$:

$$y_1(t+T) = a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t)$$

$$y_2(t+T) = a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t)$$

где a_{ij} ($i, j = 1, 2$) - некоторые постоянные. Если ввести вектор $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$, то предыдущие равенства можно записать в векторном виде

$$y(t+T) = Qy(t), \quad (1.17)$$

где матрица:

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

называется матрицей монодромии. Поведение решений уравнения (1.16) зависит от ее собственных значений. Эти собственные значения называются мультипликаторами.

Обозначим мультипликаторы через ρ_1, ρ_2 . Пусть $\eta_1(t), \eta_2(t)$ - линейно независимые решения уравнения (1.16). Пусть мультипликаторы ρ_1, ρ_2 различны. Тогда линейно независимые решения уравнения (1.16) имеют вид

$$\eta_1(t) = \rho_1^{t/T} \phi_1(t), \quad \eta_2(t) = \rho_2^{t/T} \phi_2(t)$$

Здесь $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ - периодические функции с периодом T .

Если мультипликаторы равны, то

$$\eta_1(t) = \rho_1^{t/T} \phi_1(t), \quad \eta_2(t) = \rho_1^{t/T} \left[\frac{c}{T} t \phi_1(t) + \phi_2(t) \right].$$

Здесь $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ периодические функции с периодом T , c - некоторая постоянная.

Полученные представления решений уравнения с периодическими коэффициентами и составляет содержание теории Флоке-Ляпунова.

Отметим, что возможен случай, когда мультипликаторы равны и линейно независимые решения имеют вид

$$\eta_1(t) = \rho^{t/T} \phi_1(t), \quad \eta_2(t) = \rho^{t/T} \phi_2(t).$$

Рассмотрим теперь уравнение Хилла

$$\ddot{x} + q(t)x = 0. \quad (1.18),$$

где $q(t)$ - вещественная непрерывная T -периодическая функция. Определим линейно независимые решения уравнения (1.18) следующими начальными условиями:

$$x_1(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 1.$$

Тогда уравнение для мультипликаторов имеет вид

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0, \quad (1.19)$$

где

$$2A = x_1(T) + \dot{x}_2(T).$$

Постоянная A называется постоянной Ляпунова. В силу вещественности функции $q(t)$ постоянная Ляпунова будет вещественной.

При $|A| > 1$ уравнение (1.19) имеет два различных вещественных корня ρ_1, ρ_2 . Так как $\rho_1\rho_2 = 1$, то один из корней по абсолютной величине больше 1, а другой по абсолютной величине меньше 1. Пусть $|\rho_1| > 1$, а $|\rho_2| < 1$. Линейно независимые решения уравнения (1.18) имеют вид

$$\eta_1(t) = e^{\frac{t}{T} \ln \rho_1} \phi_1(t), \quad \eta_2(t) = e^{\frac{t}{T} \ln \rho_2} \phi_2(t),$$

где $\phi_1(t), \phi_2(t)$ - T -периодические функции. Решение $\eta_1(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow +\infty$, Решение $\eta_2(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Если $|A| < 1$, то уравнение (1.19) имеет комплексно сопряженные корни по модулю равные единице. $\ln \rho_1$ и $\ln \rho_2$ имеют нулевые вещественные части, а функции

$$e^{\frac{t}{T} \ln \rho_1}, \quad e^{\frac{t}{T} \ln \rho_2}$$

при всех вещественных t равны по модулю единице. Поэтому решения $\eta_1(t), \eta_2(t)$ будут ограниченными при $t \rightarrow \infty$.

Остается еще случай, когда $A = \pm 1$. Уравнение (1.19) имеет кратные корни. Если $A = 1$, то $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Одно из линейно независимых решений будет периодическим, а другое, вообще говоря, неограниченным. Это следует из представления решений

$$\eta_1(t) = \phi_1(t), \quad \eta_2(t) = \phi_2(t) + ct\phi_1(t).$$

Пусть теперь $A = -1$, то есть $\rho_1 = \rho_2 = -1$. Можно взять главное значение логарифма $\ln \rho_1 = i\pi$. Тогда у уравнения (1.18) ограниченное решение имеет вид

$$\eta_1(t) = e^{i\frac{\pi t}{T}} \phi_1(t).$$

Отсюда

$$\eta_1(t + T) = -\eta_1(t),$$

то есть $\eta_1(t)$ - $2T$ -периодическая функция.

Таким образом, при $A = 1$ уравнение (1.19) имеет T -периодическое решение, а при $A = -1$ - $2T$ -периодическое решение.

Если уравнение Хилла содержит параметр λ :

$$\ddot{x} + \lambda q(t)x = 0,$$

то постоянная Ляпунова A зависит от параметра λ . Оказывается, что при изменении параметра чередуются интервалы ограниченных (устойчивых) и неограниченных (нестойчивых) решений.

1.3.2 Периодические функции Грина

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = f(t), \quad (1.20)$$

где Ω - собственная частота, $f(t)$ - T -периодическая функция. Если для однородного уравнения

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0$$

$\Omega \neq 2\pi/T$, то уравнение (1.20) имеет единственное T -периодическое решение, которое определяется формулой

$$x(t) = \int_0^T \chi(t-s)f(s)ds. \quad (1.21)$$

Функция $\chi(t)$ называется периодической функцией Грина.

Приведем формулу для периодической функции Грина дифференциального уравнения (1.20).

Получить интегральное представление T -периодического решения уравнения (1.20) можно следующим образом.

Общее решение уравнения (1.20) имеет вид

$$x(t) = a \cos \Omega t + b \sin \Omega t + \int_0^t \sin \Omega(t-s)f(s)ds.$$

Постоянные a и b для T -периодического решения находятся из условий периодичности

$$x(0) = x(T), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T).$$

Получим, что T -периодическое решение уравнения (1.21) имеет вид

$$x(t) = \int_0^T \chi(t-s)f(s)ds,$$

где

$$\chi(t-s) = \begin{cases} \frac{\sin \Omega(t-s) + \sin \Omega(T-t+s)}{2\Omega(1-\cos \Omega T)}, & 0 \leq s \leq t \leq T, \\ \frac{\sin \Omega(s-t) + \sin \Omega(T-s+t)}{2\Omega(1-\cos \Omega T)}, & 0 \leq t \leq s \leq T. \end{cases}$$

Функцию $\chi(t-s)$ можно записать в более простом виде

$$\chi(t-s) = \begin{cases} \frac{\cos \Omega(t-s-T/2)}{2\Omega \sin \Omega T/2}, & 0 \leq s \leq t \leq T, \\ \frac{\cos \Omega(s-t-T/2)}{2\Omega \sin \Omega T/2}, & 0 \leq t \leq s \leq T. \end{cases}$$

Следовательно, периодическая функция Грина для уравнения (1.21) имеет вид

$$\chi(t) = \frac{1}{2\Omega} \frac{\cos[\Omega(t - \frac{T}{2})]}{\sin \frac{\Omega T}{2}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Дифференцируя функцию Грина, получим

$$\dot{\chi}(t) = -\frac{1}{2} \frac{\sin[\Omega(t - \frac{T}{2})]}{\sin \frac{\Omega T}{2}}, \quad 0 < t < T,$$

причем в концевых точках интервала функция $\dot{\chi}(t)$ имеет разрыв первого рода: $\dot{\chi}(+0) = -\dot{\chi}(-0) = 1/2$.

Для второй производной будем иметь

$$\ddot{\chi}(t) = \{\ddot{\chi}(t)\} + \delta^T(t),$$

где $\{\ddot{\chi}(t)\}$ - классическая часть обобщенной функции (см. формулу (1.8)). При $0 < t < T$

$$\{\ddot{\chi}(t)\} = -\frac{\Omega}{2} \frac{\cos[\Omega(t - \frac{T}{2})]}{\sin \frac{\Omega T}{2}}.$$

Следовательно, периодическая функция Грина является решением уравнения

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = \delta^T(t).$$

Укажем другой способ вычисления периодической функции Грина. Если искать решение уравнения (1.21) в виде

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ik\omega t},$$

то решение будет представимо в виде абсолютно сходящегося ряда

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{b_k}{\Omega^2 - k^2\omega^2} e^{ik\omega t},$$

Если

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega t} \equiv \delta^T(t),$$

то

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Omega^2 - k^2\omega^2} e^{ik\omega t}.$$

Из всего предыдущего следует, что периодическая функция Грина разлагается в ряд Фурье

$$\chi(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\Omega^2 - k^2\omega^2},$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

В случае, если уравнение (1.21) имеет вид

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = \delta^{T/2}(t),$$

где $\delta^{T/2}(t)$ - симметричная периодическая δ функция (см. п.2.1), то получим

$$x(t) = \chi^*(t) = \frac{2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2k+1)\omega t}}{\Omega^2 - (2k+1)^2\omega^2}.$$

Имеют место представления

$$\chi^*(t) = \frac{1}{2\Omega} \frac{\sin[\Omega(t - T/4)]}{\cos \Omega T/4}, \quad 0 \leq t \leq T/2;$$

$$x(t) = \int_0^{T/2} \chi^*(t-s)f(s)ds,$$

если $f(t + T/2) = -f(t)$. Функция $\chi^*(t)$ разлагается в ряд Фурье

$$\chi^*(t) = \frac{2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2k+1)\omega t}}{\Omega^2 - (2k+1)^2\omega^2}.$$

Примеры графиков периодической функции Грина даны на рис. 1.3.

Рис. 1.3: Графики периодической функции Грина в зависимости от соотношений между величинами ω и Ω . Рис. а - $\omega < \Omega$; б - $\Omega < \omega < 2\Omega$; в - $\omega = 2\Omega$; г - $\omega > 2\Omega$; д - симметричная функция, $\omega > \Omega$.

1.4 Возбуждение параметрических колебаний ударами

1.4.1 Применение периодических функций Грина

Здесь описывается метод анализа параметрических колебаний в одном специальном классе систем с помощью периодических функций Грина (см. [8, 38, 39, 57, 72]). Рассмотрим скалярное линейное дифференциальное уравнение

$$Lx + \mu c(t)x = 0, \quad (1.22)$$

где Lx - линейный дифференциальный оператор вида

$$Lx = \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_2 x$$

с постоянными коэффициентами, $c(t)$ - периодическая обобщенная функция, определяемая формулой

$$c(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} c_k \delta(t - t_k - qT) = \delta_c^T(t)$$

и $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$. Если уравнение $Lx = 0$ не имеет T -периодических решений, кроме нулевого, то получаем интегральное уравнение для отыскания T -периодических колебаний

$$x(t) = \mu \int_0^T \chi(t-s) \delta_c^T(s) x(s) ds = \mu \sum_{k=1}^{n-1} c_k \chi(t-t_k) x(t_k),$$

где $\chi(t)$ - периодическая функция Грина для оператора L .

Последовательно полагая $t = t_j$, получим систему линейных уравнений относительно $x(t_j)$

$$x(t_j) = \mu \sum_{k=1}^{n-1} c_k \chi(t_j - t_k) x(t_k), \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (1.23)$$

Система линейных однородных уравнений (1.23) имеет нетривиальное решение, если определитель этой системы равен нулю. В этом случае существуют нетривиальные T -периодические решения уравнения (1.22). На основании материала п. 1.3 можно заключить, что эти решения находятся на границе существования устойчивых (ограниченных) и неустойчивых (неограниченных) решений.

Более подробно остановимся на уравнении

$$\ddot{x} + [k^2 - U\delta^T(t)]x = 0,$$

где $U \neq 0$ - постоянная. На интервале $0 < t < T$ всякое решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = ae^{ikt} + be^{-ikt},$$

где a и b - постоянные. Будем искать решение, которое удовлетворяет равенству $x(t+T) = \rho x(t)$. Следовательно,

$$x(t) = \rho[ae^{ik(t-T)} + be^{-ik(t-T)}]$$

при $T < t < 2T$. В точке $t = T$ должно выполняться условие $x(T+0) = x(T-0)$, и $\dot{x}(T+0) = \dot{x}(T-0) + Ux(T-0)$. Получим систему уравнений относительно неизвестных a и b :

$$\begin{aligned} \rho(a+b) &= ae^{ikT} + be^{-ikT}, \\ ik\rho(a-b) &= ik(ae^{ikT} - be^{-ikT}) + U(ae^{ikT} + be^{-ikT}). \end{aligned}$$

Система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю. Отсюда получим уравнение для мультипликаторов

$$\rho^2 - 2f(k)\rho + 1 = 0,$$

где $f(k) = \cos Tk + \frac{U}{2k} \sin Tk$ (См. п.1.3.1).

1.4.2 Маятник с вибрирующим подвесом

Рассмотрим маятник (рис. 1.4а) с вибрирующей по пилообразному закону точкой подвеса (рис. 1.4б). Пусть x - угол отклонения маятника от вертикали.

Рис.1.4: Маятник с вибрирующим подвесом

Предполагаем, что угол x мал и присутствует вязкое трение. Получим уравнение движения маятника

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \mu \ddot{u}(t)x + 2b\dot{x} = 0. \quad (1.24)$$

Здесь $\Omega^2 = g/l$, b - коэффициент демпфирования, $\mu = \text{const}$ - параметр, характеризующий амплитуду T -периодической вибрации $u(t)$, которая описывается "пилообразной" функцией (рис. 1.4.б), т.е. $\mu u(t) = [t/2 -$

$T/8]$ при $t \in [0, T/2]$, а далее продолжается по периодичности, исходя из условия симметрии $u(t + T/2) = -u(t)$; $\mu_1 = u(T/2) = T/8$.

На рис. 1.4в изображен "график" параметрического воздействия, определенного переносной силой инерции, пропорциональной $\ddot{u}(t)$.

(Мы берем слово график в кавычки, так как, конечно, никакого графика сингулярной обобщенной функции построить нельзя. Стрелками обозначаются δ -импульсы). Оказывается,

$$\mu \ddot{u}(t) = \mu \delta^{T/2}(t) = \frac{4\mu}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \cos[(2k+1)\omega t].$$

В качестве второго примера рассмотрим модель механизма, изображенного на рис. 1.5.

Рис.1.5: "Прыгающая" каретка

Тело массы m абсолютно жестким стержнем шарнирно прикреплено к подвижной каретке, масса которой много больше m . Каретка совершает движения с ударами о неподвижный ограничитель при $t = kT$, $k \in Z$, а ее закон движения состоит из фрагментов парабол

$$\mu_1 u(t) = -\frac{\mu_1}{2}(t^2 - Tt), \quad t \in [0, T],$$

и далее идет продолжение по периодичности (рис. 1.4). Уравнение дви-

жения тела массы m легко приводится к виду (1.24). При этом

$$\mu_1 \ddot{u}(t) = -\mu_1 + \mu_1 T \delta^T(t),$$

в чем легко убедиться путем обобщенного дифференцирования скорости $\dot{u}(t)$ (рис.1.3.в).

Исследуем сначала вторую задачу, для чего перепишем (1.24) в следующем виде

$$\ddot{x} + [1 - \mu + \mu T \delta^T(t)]x = 0, \quad \mu = \mu_1 l^{-1}. \quad (1.25)$$

Согласно теории Флоке - Ляпунова, которую мы можем формально использовать для уравнений с δ -функциями возможно появление периодических решений с периодом T и $2T$. Для T -периодических решений имеем интегральное уравнение

$$x(t) = -\mu T \int_0^T \chi(t-s) \delta^T(s) x(s) ds.$$

Из этого интегрального уравнения получим соотношение

$$x(0) = -\mu T \chi(0) x(0). \quad (1.26)$$

Периодическая функция Грина определяется формулой [8,72]

$$\chi(t) = \begin{cases} \chi_{01}(t), & \mu \in]0, 1[, \\ \chi_{11}(t), & \mu > 1, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \chi_{01}(t) &= \frac{1}{2\sqrt{1-\mu}} \frac{\cos[\sqrt{1-\mu}(t-T/2)]}{\sin(\sqrt{1-\mu}T/2)}, \\ \chi_{11}(t) &= -\frac{1}{2\sqrt{\mu-1}} \frac{\text{ch}[\sqrt{\mu-1}(t-T/2)]}{\text{sh}(\sqrt{\mu-1}T/2)}. \end{aligned}$$

Условия существования T -периодического решения для $\mu \in (0, 1)$ следуют из (1.23) и имеют вид

$$\frac{\mu\pi}{\omega\sqrt{1-\mu}} = -\text{tg} \frac{\pi\sqrt{1-\mu}}{\omega}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Если $\mu = 1$, то периодическая функция Грина не определена; нетривиальные периодические режимы здесь не существуют. При $\mu > 1$ получим

$$\frac{\mu\pi}{\omega\sqrt{\mu-1}} = \text{th} \frac{\pi\sqrt{\mu-1}}{\omega}.$$

Уравнение для вычисления мультипликаторов имеет вид (ср. п.1.4.1)

$$\rho^2 - A\rho + 1 = 0.$$

Постоянная A определяется формулой

$$A = 2 \cos(T\sqrt{1-\mu}) - \mu T \sqrt{1-\mu}^{-1/2} \sin(T\sqrt{1-\mu}).$$

Величина A определяет неравенства, обеспечивающие устойчивость (неустойчивость) решений уравнения (1.25) в зависимости от параметра μ (см. п.1.3.1). Соответствующие неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\mu\pi}{\sqrt{1-\mu}\omega} &> -\operatorname{tg} \frac{\pi\sqrt{1-\mu}}{\omega} > 0, \\ \frac{\mu\pi}{\sqrt{1-\mu}\omega} &> \operatorname{ctg} \frac{\pi\sqrt{1-\mu}}{\omega} > 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Первое соотношение соответствует (на границе) T -периодическим режимам, второе - режимам с периодом $2T$.

Пусть теперь $\mu > 1$. Характеристическое уравнение $1 = -\mu T \chi(0)$ принимает вид

$$\rho^2 - [2 \operatorname{ch}(\sqrt{\mu-1}T) - \mu T(\mu-1)^{-1/2} \operatorname{sh}(\sqrt{\mu-1}T)]\rho + 1 = 0,$$

и условия параметрического резонанса будут такими:

$$\begin{aligned} \frac{\mu\pi}{\sqrt{\mu-1}\omega} &< \operatorname{th} \frac{\pi\sqrt{\mu-1}}{\omega}, \\ \frac{\mu\pi}{\sqrt{\mu-1}\omega} &> \operatorname{cth} \frac{\pi\sqrt{\mu-1}}{\omega}, \quad \mu > 1. \end{aligned}$$

Здесь второму условию снова соответствует режим периода $2T$.

Для их отыскания надо составить уравнение $2T$ -периодических колебаний. Так как возбуждение имеет вдвое меньший период, то мы вправе ожидать, что эти режимы окажутся симметричными, т.е. $x(t+T) = -x(t)$. Поэтому запишем интегральное уравнение симметричных колебаний периода $2T$

$$x(t) = -\mu T \int_0^T \chi^*(t-s) \delta^T(s) x(s) ds,$$

где периодическая функция Грина имеет вид (см.[8, 72])

$$\chi^*(t) = \begin{cases} \chi_{20}^*(t), & \mu \in]0, 1], \\ \chi_{21}^*(t), & \mu = 1, \\ \chi_{22}^*(t), & \mu > 1, \end{cases},$$

причем при $t \in [0, T]$, (а не $t \in [0, T/2]$)

$$\chi_{20}^*(t) = \frac{1}{2\sqrt{1-\mu}} \frac{\sin \sqrt{1-\mu}(t-T/2)}{\cos(\sqrt{1-\mu}T/2)}, \quad \chi_{21}^*(t) = \frac{t}{2} - \frac{T}{4},$$

$$\chi_{22}^*(t) = \frac{1}{2\sqrt{\mu-1}} \frac{\text{sh} \sqrt{\mu-1}(t-T/2)}{\text{ch}(\sqrt{\mu-1}T/2)}.$$

Отсюда получаем условия существования $2T$ -периодических режимов соответственно при $\mu \in]0, 1[$, $\mu > 1$ и $\mu = 1$

$$\frac{\mu\pi}{\sqrt{1-\mu}\omega} = \text{ctg} \frac{\pi\sqrt{1-\mu}}{\omega}, \quad \frac{\mu\pi}{\sqrt{\mu-1}\omega} = \text{cth} \frac{\pi\sqrt{\mu-1}}{\omega}, \quad \omega = \pi. \quad (1.28)$$

Для случая $\mu = 1$ условием параметрического резонанса является неравенство $\omega < \pi$.

Формулы (1.27) и (1.28) вместе с последним неравенством и определяют зоны параметрической неустойчивости механизма, изображенного на рис. 1.4.а.

Заметим, что при $\mu > 1$ система может трактоваться как система с отрицательной собственной частотой, что соответствует "опрокинутому" маятнику. Полученные результаты поэтому соответствуют хорошо известному факту о возможности стабилизации режимов движения такого маятника при колебании точки подвеса [9, 17].

Рассмотрим теперь кратко модель, изображенную на рис.1.5, описываемую уравнением (1.24) при $\mu\ddot{u}(t) = \mu\delta^{T/2}(t)$.

Положим снова $\Omega = 1$, $b = 0$. Для T -периодических режимов при $\mu \in]-\infty, \infty[$ найдем $x(t) = \mu\chi(t)x(0) - \mu\chi(t-T/2)x(T/2)$.

Последовательно полагая $t = 0, T/2$, приходим к однородной линейной алгебраической системе, состоящей из уравнений $x(0)[1 - \chi(0)] + \mu\chi(T/2)x(T/2) = 0$ и $x(0)[- \mu\chi(T/2)] + x(T/2)[1 + \chi(0)] = 0$, главный определитель которой $1 - \mu^2\chi^2(0) + \mu^2\chi^2(T/2) \neq 0$, так как $\chi(t) = \frac{1}{2}\cos(t-T/2)[\sin(T/2)]^{-1}$ и $\chi^2(T/2) \geq \chi^2(0)$. Поэтому T -периодических режимов здесь нет, а для $2T$ -периодических симметричных режимов, проделав аналогичные простые выкладки, получим следующее условие существования: $\mp 2 \text{ctg}(\pi/\omega)$.

После составления по предыдущему образцу характеристического уравнения читатель убедится, что условием параметрического резонанса является неравенство $\mu^2 > 4 \text{ctg}^2(\pi/\omega)$ (ср. с [7, 52, 72]).

На рис. 1.6 показаны соответствующие диаграмма устойчивости. Об-

ласти неустойчивости штрихуются.

Рис.1.6.: Диаграммы устойчивости

Аналогично рассматривается случай опрокинутого маятника. Показывается, что если $4 < \mu^2 < \text{cth}^2(\pi/\omega)$, то его верхнее положение равновесия устойчиво.

При наличии демпфирования ($b \neq 0$) вычисления аналогичные проделанным, убеждают, что области параметрической неустойчивости сужаются (рис. 1.6.б). Мы не проводим соответствующих выкладок ввиду их громоздкости.

1.4.3 Распространение вибрации

Распространение вибрации в элементах машинных конструкций осуществляется, в частности, при посредстве упругих волн, распространяющихся в телах, представляющих собой составные конструкции (см. [2, 42]).

Одной из распространенных типов моделей таких конструкций являются прямые тонкие стержни с включениями в виде массивных точечных тел. На рис. 1.7 показан простейший пример такой системы - бесконечный стержень с регулярными точечными включениями.

Рис.1.7: Вибровод с точечными включениями

При этом число a - расстояние между соседними включениями. В общем случае наличия N типов точечных включений в линейном при-

ближении соответствующие уравнения движения могут иметь вид

$$\rho u_{tt} - E u_{xx} = - \left[\sum_{j=1}^N \delta^a(j, x) m_j \right] u_{tt}, \quad (1.29)$$

причем u - искомое поле перемещений и предполагается, структура системы - регулярная. Введены обозначения: $\delta^a(j, x)$ - a_j -периодические последовательности обобщенных функций, которые определяются как

$$\delta^a(j, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - a_j n), \quad (1.30)$$

где индексы j нумеруют серии точечных включений с массами m_j . Здесь также ρ - погонная плотность, E - модуль Юнга материала стержня. Предполагается, что единицы измерения выбраны так, что площадь его поперечного сечения - единица. Полагая распространяющуюся волну синусоидальной с частотой ω , ищем решение в виде

$$u(x, t) = A(x) e^{i\omega t}. \quad (1.31)$$

После подстановки этого выражения в уравнение (1.29) получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$A'' + \Omega^2 A + \mu C(x) A = 0, \quad (1.32)$$

где $\Omega^2 = \omega^2 c^{-2}$, $c^2 = E\rho^{-1}$, $\mu = m\omega^2 E^{-1}$. Функция $C(x)$ определяется формулой

$$C(x) = \sum_{j=1}^N \delta^a(j, x) m_j = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N c_k \delta(x - x_k - qD).$$

Здесь $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_N = D$. Число D - "пространственный период" вибровода.

Мы получили уравнение второго порядка с T -периодическими коэффициентами, которые являются δ -периодическими функциями.

Рассмотрим уравнение (1.32). При замене $x \rightarrow t$ имеем уравнение с периодическими коэффициентами подобное рассмотренному выше.

Известно [2], что рассматриваемые виброводы при некоторых значениях параметров закрываются и вибрация рассеивается на неоднородностях, а при некоторых значениях параметров открываются и вибрация свободно проходит. Этот эффект связан с появлением в системе дисперсии, приводящий, в частности, к сильной связанности двух бегущих по

виброводу навстречу друг другу волн. Известно, также, что запертому виброводу отвечают зоны параметрической неустойчивости, а прозрачному - устойчивости. При переходе от одного состояния к другому наблюдаются периодические решения.

Займемся вначале отысканием этих пограничных периодических режимов.

Перейдем от дифференциального уравнения к интегральному. Периодическая функция Грина стационарной системы имеет вид

$$g(x) = \left[2\Omega \sin \left(\frac{1}{2}\Omega D \right) \right]^{-1} \cos \Omega(x - D/2).$$

При этом последнее равенство имеет место только на интервале периодичности $[0, D]$. Если переменная x оказывается вне этого интервала, то данное конечное соотношение модифицируется (см. п.1.3.2 и [8, 72]).

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} A(x) &= \mu \int_0^D g(t-s) \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{N-1} c_k \delta(x - x_k - qD) A(s) ds = \\ &= \mu \sum_{k=1}^{N-1} c_k g(x - x_k) A(x_k). \end{aligned}$$

Последовательно полагая здесь $x = x_j$ приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно $A(x_j)$:

$$A(x_j) = \mu \sum_{k=1}^N c_k g(x_j - x_k) A(x_k), \quad j = 1, \dots, N.$$

Так что нетривиальные периодические режимы будут существовать тогда и только тогда, когда

$$\text{Det}[X_{l,m}] = 0, \quad l, m = 1, 2, \dots, N,$$

$$X_{l,m} = \mu c_m g(x_l - x_m), \quad l \neq m; \quad X_{l,l} = I - \mu c_l g(0).$$

В соответствии с общей теорией (п.1.3.1) произвольное решение уравнения (1.32) будем искать в виде

$$A(x) = \exp(\lambda x) Y(x),$$

где $Y(x) = Y(x + D)$, а λ - характеристический показатель. Если вещественная часть всех показателей будет отрицательна, то вибровод будет

прозрачен (соответствующая линейная параметрическая система оказывается устойчивой).

Выкладки, приводящие к характеристическому уравнению совершенно аналогичны приведенным выше.

Ограничимся для наглядности случаем, показанным на рис. 1.7, когда в виброводе используются включения только одного типа.

С учетом сделанных переобозначений переменных, проделанные выше вычисления дают условия непрозрачности волновода:

$$\frac{\mu_0}{2\Omega} > -tg \frac{\pi\Omega}{\omega_a} > 0, \quad \frac{\mu_0}{2\Omega} > ctg \frac{\pi\Omega}{\omega_a} > 0, \quad \omega_a = \frac{2\pi}{a}.$$

Динамическая диаграмма вибровода показана на рис. 1.8. Здесь заштрихованным зонам отвечают состояния закрытия вибровода (или с учетом введенных обозначений - зонам параметрического резонанса соответствующей системы с переменными коэффициентами).

Рис. 1.8: Динамическая диаграмма вибровода

Структура зон диаграммы демонстрирует, что вблизи прямых

$$\omega_a/\Omega = \frac{2}{2k+1}; \omega_a/\Omega = \frac{1}{k}$$

прохождение вибрации отличается существенной неустойчивостью; малое изменение значений параметров может вызвать качественные изменения процесса. Например, при переходе от точки "0" к близкой точке "*" вибровод внезапно открывается. Таким образом, данная система эффективно задерживает вибрацию только тогда, когда ее определяющие параметры лежат глубоко внутри заштрихованных зон диаграммы.

Заметим, что к анализу уравнения типа (1.29) сводится также и анализ стационарного уравнения Шредингера при рассмотрении в качестве потенциала дираковской гребенки (T -периодической δ - функции). (см. [66]).

Глава 2

Метод усреднения

Одним из наиболее эффективных асимптотических методов исследования нелинейных колебательных систем является метод усреднения. Изложению этого метода посвящена настоящая глава.

2.1 Усреднение дифференциальных уравнений в стандартной форме. Первое приближение

В этом разделе для нелинейных дифференциальных уравнений описываются результаты, касающиеся соответствия между свойствами решений точных и усредненных уравнений первого приближения.

2.1.1 Системы в стандартной форме на конечном промежутке. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \quad (2.1)$$

где x — n -мерный вектор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, изменяющийся в промежутке $(0, \varepsilon_0)$, вектор-функция $X(t, x)$ определена при $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$, где D — ограниченное множество в n -мерном пространстве. Правая часть системы (2.1) пропорциональна малому параметру. Согласно терминологии, введенной Н.Н. Боголюбовым [13], такие системы называются системами в стандартной форме. К исследованию систем в стандартной форме приводят многие прикладные задачи.

Если существует равномерно по $x \in D$ среднее значение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \xi) dt = X_0(\xi), \quad \xi \in D,$$

то системе (2.1) можно сопоставить усредненную систему

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi). \quad (2.2)$$

Отметим (см. п.1.1), что для T -периодической по переменной t вектор-функции введенное среднее значение совпадает со средним значением периодической функции:

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(s) ds.$$

Ставится вопрос при каких условиях система (2.1) имеет решение $x(t, \varepsilon)$, близкое к решению $\xi(t)$ усредненной системы (2.2) на достаточно большом временном интервале $0 < t < T$?

Решение $\xi(t)$ системы (2.2) зависит от t через медленное время $\tau = \varepsilon t$. Чтобы в течение временного промежутка $0 < t < T$ решение $\xi(\tau)$ могло успеть значительно отойти от своего начального значения, то есть, для того чтобы этот интервал оказался достаточно длительным следует за величину T принимать величину порядка L/ε , где число L может быть сколь угодно большим при достаточно малом ε .

2.1.2 Первая теорема Боголюбова

Следующая теорема называется первой теоремой Боголюбова [15, 50]. В дальнейшем через $|\cdot|$ обозначим некоторую норму в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.1. Пусть вектор-функция $X(t, x)$ удовлетворяет условиям:

а) она в области D имеет непрерывные частные производные по переменным x_i , $i = 1, \dots, n$ и удовлетворяет неравенству

$$|X(t, x)| \leq M,$$

где $M > 0$ - постоянная.

б) равномерно по $x \in D$ существует среднее значение

$$\frac{1}{T} \int_0^T X(s, x) ds = X_0(x).$$

Тогда сколь угодно малым числом $\rho > 0$ и η и сколь угодно большому числу L можно сопоставить такое положительное число ε_0 , что если $\xi(t)$ - решение системы

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi)$$

определенное на интервале $0 < t < \infty$ и лежащее в области D вместе с ρ -окрестностью, то для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в интервале $0 < t < \frac{L}{\varepsilon}$ справедливо равенство

$$|x(t) - \xi(t)| < \eta, \quad (2.3)$$

где $x(t)$ - решение уравнения (2.1), для которого $x(0) = \xi(0)$.

Замечание 2.1 Если $X(t, x)$ периодическая по t вектор-функция, то существует среднее значение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \xi) dt = X_0(\xi), \quad \xi \in D.$$

Тогда теорема 2.1 справедлива в этом случае, но равенство (2.3) заменяется соотношением

$$|x(t) - \xi(t)| < O(\varepsilon).$$

2.1.3 Усреднение на бесконечном интервале

Теперь перейдем к случаю бесконечного промежутка. Теоремы 2.2 и 2.4 представляют собой содержание второй теоремы Боголюбова [13, 15, 17, 50, 77].

Пусть алгебраическая система уравнений

$$X_0(\xi) = 0$$

имеет решение $\xi = \xi_0$, которое, очевидно, будет стационарным решением системы (2.2).

Зададимся вопросом при каких условиях система (2.1) имеет решение $x(t, \varepsilon)$, близкое к стационарному решению ξ_0 усредненной системы (2.2) на бесконечном промежутке?

Для упрощения формулировки теоремы предположим, что ξ_0 - нулевой вектор.

Теорема 2.2 Пусть выполняются следующие условия:

1) вектор-функция $X(t, x)$ - почти периодична по t равномерно относительно $x \in D$;

2) существует производная $X_x(t, 0) = A(t)$, причем при $t \in \mathbb{R}$, $|x_1|, |x_2| \leq r \leq a$ выполняется неравенство

$$|X(t, x_1) - X(t, x_2) - A(t)(x_1 - x_2)| \leq p(r)|x_1 - x_2|,$$

где $p(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$;

3) матрица

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T A(s) ds$$

не имеет собственных значений с нулевой вещественной частью;

4) Величина

$$\frac{1}{T} \int_0^T X(\sigma, 0) d\sigma = 0.$$

Тогда существуют такие числа $a_0, \varepsilon_1 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ система (2.1) имеет единственное, лежащее в шаре $|x| \leq a_0$ при всех t , почти периодическое решение $x(t, \varepsilon)$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{-\infty < t < \infty} |x(t, \varepsilon)| = 0.$$

Сделаем некоторые замечания.

Условие 2) заведомо выполняется, если вектор-функция $X(t, x)$ имеет непрерывные частные производные $X_{x_i}(t, x)$, ($i = 1, \dots, n$) в некоторой окрестности точки $x = 0$ и эти производные непрерывны по x равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$. Условие 4) просто означает, что усредненная система (2.1) имеет стационарное решение $\xi = 0$. Наиболее существенным является условие 3). Матрица линейной системы, которая получается при линеаризации усредненной системы на стационарном решении, не имеет собственных значений с нулевой вещественной частью.

2.1.4 Случай периодических коэффициентов

Для системы с периодическими коэффициентами условие 3) можно ослабить [17, 77]. Вместо условия 3) достаточно потребовать, чтобы у матрицы A не было нулевого собственного значения.

Сформулируем теорему для периодического случая.

Теорема 2.3. Пусть вектор-функция $X(t, x)$

- 1) T -периодична и непрерывна по t ;
- 2) имеет непрерывные частные производные $X_{x_i}(t, x)$, $(i = 1, \dots, n)$ в некоторой окрестности точки $x = 0$ и эти производные непрерывны по x равномерно относительно t ;
- 3) Производная $X_x(t, 0) = A(t)$, причем матрица

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T A(s) ds$$

не имеет нулевого собственного значения;

- 4) величина

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T X(\sigma, 0) d\sigma \right| = 0.$$

Тогда существуют такие числа $a_0, \varepsilon_1 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ система (2.1) имеет единственное, лежащее в шаре $|x| \leq a_0$ при всех t , T -периодическое решение $x(t, \varepsilon)$ и произвольная норма в $\mathbb{R}^n$ этого решения стремится к 0 при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $t \in [0, T]$.

Замечание 2.2. Отметим, что можно было предположить, что вектор-функции $X(t, x)$, имеет по t конечное число точек разрыва (скачков) на периоде.

Замечание 2.3. В периодическом случае можно оценить порядок относительно ε разности между периодическим решением точной системы и стационарным решением усредненной системы. Именно, справедливо соотношение

$$|x(t, \varepsilon) - x_0| = O(\varepsilon).$$

Здесь $x(t, \varepsilon)$ - периодическое решение исходной системы.

Замечание 2.4. Требования к спектру матрицы A линеаризованной системы сильно отличаются в периодическом и почти периодическом случае. В периодическом случае матрица A не должна иметь нулевое собственное значение. В почти периодическом случае матрица A не должна иметь нулевое и чисто мнимых собственных значений.

2.1.5 Исследование устойчивости почти периодического решения

Пусть существует почти периодическое решение исходной системы (2.1), которое обозначим через $x_0(t, \varepsilon)$. Опишем условия устойчивости этого решения в зависимости от устойчивости нулевого решения усредненной системы.

Теорема 2.4 Пусть выполнены условия существования почти периодического решения системы (2.1). Вектор-функция $X(t, x)$ имеет непрерывные частные производные $X_{x_i}(t, x)$ ($i = 1, \dots, n$) в некоторой окрестности точки $x = 0$ и эти производные непрерывны по x равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$.

Тогда

- 1) Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то при достаточно малых ε решение $x(t, \varepsilon)$ системы (2.1) асимптотически устойчиво.
- 2) Если же у матрицы A есть по крайней мере одно собственное значение с положительной вещественной частью, то решение $x(t, \varepsilon)$ при достаточно малых ε неустойчиво.

В случае устойчивости решения точного и усредненного уравнений с близкими начальными условиями близки на бесконечном промежутке.

Сформулируем соответствующую теорему [17, 77].

Теорема 2.5. Пусть решение системы (2.1) асимптотически устойчиво. Пусть $\psi(t, t_0, x_0)$, ($\psi(t_0, t_0, x_0) = x_0$) - решение усредненной системы (2.2), из области притяжения решения $x = 0$ вместе с его некоторой ρ ($\rho > 0$)-окрестностью. Тогда для любого α , ($0 < \alpha < \rho$) существуют числа $\varepsilon_1(\alpha)$ ($0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$) и $\beta(\alpha)$ такие, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ решение $\varphi(t, t_0, \xi_0)$ системы (2.1), лежащее в области притяжения решения $x_0(t, \varepsilon)$, когда $|x_0 - \xi_0| < \beta$, удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(t, t_0, \xi_0) - \psi(t, t_0, x_0)| < \alpha, \quad t \geq t_0.$$

Замечание 2.5. Естественно, аналогичная теорема справедлива для систем уравнений с периодическими коэффициентами, когда рассматривается вопрос об устойчивости периодического решения исходной системы в стандартной форме.

Замечание 2.6. Если система в стандартной форме имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x, \varepsilon),$$

то ей сопоставляется усредненная система

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X(\xi, 0),$$

где

$$X(\xi, 0) = \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \xi, 0) dt.$$

Все вышеприведенные утверждения справедливы и для этой системы.

2.1.6 Усреднение системы уравнений с быстрым и медленным временем

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, \tau, x) \tag{2.4}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, ε - малый положительный параметр, $\tau = \varepsilon t$ - медленное время. Предполагается, что вектор-функция $X(t, \tau, x)$ периодична по переменным t и τ с периодами T и T_1 . Системе (2.4) сопоставляется усредненная система

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon Y(\tau, y),$$

где

$$Y(\tau, y) = \frac{1}{T} \int_0^T X(s, \tau, y) ds.$$

Усредненная система является системой с периодическими коэффициентами во времени τ

$$\varepsilon \frac{dy}{d\tau} = Y(\tau, y). \tag{2.5}$$

Пусть система (2.5) имеет периодическое решение $y_0(\tau)$. Если выполняются условия, аналогичные условиям теоремы 2.2, то решения точной и усредненной систем близки на бесконечном промежутке при достаточно малых значениях параметра ε [17, 77, 59, 112].

Основное предположение - у матрицы линеаризованной системы

$$A(\tau) = Y_y(\tau, y_0(\tau))$$

все характеристические показатели должны иметь отличные от нуля вещественные части.

2.1.7 Применение метода усреднения к одному классу сингулярно возмущенных систем

Система дифференциальных уравнений называется сингулярно возмущенной, если старшая производная системы множится на малый параметр.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, \tau, x, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.6)$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $\tau = \varepsilon^2 t$ - медленное время. Система (2.6) при переходе к медленному времени τ является сингулярно возмущенной. Будем предполагать, что $X(t, \tau, x, \varepsilon)$ - периодическая по t с периодом T функция. Пусть эта функция - периодическая по τ с периодом T_1 равномерно относительно остальных переменных и имеет непрерывные частные производные по x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ в некоторой ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывна по ε равномерно относительно остальных переменных. Системе (2.6) сопоставим усредненную по времени t систему

$$\frac{dy}{d\tau} = \varepsilon Y(\tau, y), \quad (2.7)$$

где

$$Y(\tau, y) = \frac{1}{T} \int_0^T X(s, \tau, y, 0) ds.$$

Усредненная система (2.7) является сингулярно возмущенной системой во времени τ с периодическими коэффициентами:

$$\varepsilon \frac{dy}{d\tau} = Y(\tau, y). \quad (2.8)$$

Справедлива следующая теорема [17, 77].

Теорема 2.6. Пусть существует такая дифференцируемая периодическая функция $y_0(\tau)$, что $Y(\tau, y_0(\tau)) \equiv 0$ при $\tau \in \mathbb{R}$; пусть спектр матрицы

$$A(\tau) = Y_y(\tau, x_0(\tau))$$

строго отделен от нуля, т.е. все ее собственные значения $\lambda(\tau)$ удовлетворяют неравенству

$$|\operatorname{Re} \lambda(\tau)| \geq \gamma_0 > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Тогда можно указать такие числа a_0 и ε_0 , что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ система (2.6) имеет в шаре $|x - x_0(\tau)| \leq a_0$ единственное периодическое решение $x_0(t, \varepsilon)$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|x_0(t, \varepsilon) - x_0(\tau)\| = 0.$$

Решение $x(t, \varepsilon)$ будет асимптотически устойчивым, если все собственные значения матрицы $A(\tau)$ имеют отрицательные вещественные части, и неустойчивым, если у матрицы $A(\tau)$ есть хотя бы одно собственное значение с положительной вещественной частью.

2.2 Второе приближение метода усреднения

В этом разделе мы изложим необходимые для дальнейшего сведения о втором приближении метода усреднения, при этом используются методы приближенного построения решений дифференциальных уравнений с помощью асимптотических разложений по степеням малого параметра [15, 17, 50, 77].

2.2.1 Формализм метода усреднения для систем в стандартной форме

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в стандартной форме

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x, \varepsilon), \quad (2.9)$$

где x — n -мерный вектор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Вектор-функция $X(t, x, \varepsilon)$ определена при $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$ и малых ε , где D — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$.

Будем предполагать, что в (2.9) правые части $\varepsilon X(t, x, \varepsilon)$ могут быть разложены по степеням малого параметра ε :

$$\varepsilon X(t, x, \varepsilon) = \varepsilon X_1(t, x) + \varepsilon^2 X_2(t, x).$$

Далее, предполагаем, что вектор-функции $X_j(t, x)$, $j = 1, 2$ периодические по t равномерно относительно $x \in D$. Для построения высших приближений метода усреднения мы используем нелинейное, близкое к тождественному, преобразование.

Функции $X_j(t, x)$ допускают разложение в ряд Фурье

$$X_j(t, x) \sim X_{j0}(x) + \sum_{\nu \neq 0} X_{j\nu}(x) e^{i\nu t}, \quad j = 1, 2.$$

Так как рассматриваются лишь вещественные вектор-функции $X_j(t, x)$, то приведенное выше разложение в комплексный ряд Фурье эквивалентно разложению в вещественный ряд Фурье (п. 1.1.1)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu \neq 0} (a_{j\nu} \cos \nu t + b_{j\nu} \sin \nu t).$$

При этом коэффициенты Фурье будут комплексно сопряжены, т.е.

$$\begin{aligned} X_{j(-\nu)} &= \bar{X}_{j\nu}, \quad \frac{a_0}{2} = X_{j0}, \quad a_{j\nu} = X_{j\nu} + \\ X_{j(-\nu)}, \quad b_{j\nu} &= i(X_{j\nu} - X_{j(-\nu)}). \end{aligned}$$

Система (2.9) содержит медленную переменную x , ($\frac{dx}{dt} \sim \varepsilon$) и быструю переменную t . Н.Н. Боголюбов [13, 15] показал, что существует замена переменных, которая позволяет исключить быструю переменную t из правых частей системы (2.9) с любой степенью точности по ε . Опишем этот метод.

Будем искать замену переменных

$$x = \xi + \varepsilon u_1(t, \xi) + \varepsilon^2 u_2(t, \xi) + O(\varepsilon^3), \quad (2.10)$$

где $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ - новая неизвестная вектор-функция, которая удовлетворяет усредненной системе вида

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \Sigma_1(\xi) + \varepsilon^2 \Sigma_2(\xi) + O(\varepsilon^3), \quad (2.11)$$

не содержащей явно времени t , а $u_i(t, \xi)$ - некоторые периодические по t вектор-функции. Нам необходимо определить неизвестные вектор-функции $u_i(t, \xi)$, $i = 1, 2$, которые являются коэффициентами преобразования (2.10), а также вектор-функции $\Sigma_i(\xi)$, $i = 1, 2, \dots$, входящие в правые части усредненной системы (2.11). Подставим формулу замены (2.10) в систему (2.9). Получим

$$\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u_1(t, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon \frac{\partial u_1(t, \xi)}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2(t, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} +$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon^2 \frac{\partial u_2(t, \xi)}{\partial t} + O(\varepsilon^3) = \\
& = \varepsilon X_1(t, \xi + \varepsilon u_1(t, \xi) + \varepsilon^2 u_2(t, \xi) + \varepsilon^3 \dots) + \\
& \varepsilon^2 X_2(t, \xi + \varepsilon u_1(t, \xi) + \varepsilon^2 u_2(t, \xi) + O(\varepsilon^3)).
\end{aligned}$$

Отметим, что производные типа $\frac{\partial u_i}{\partial \xi}$ понимаются как матрицы. Заменяя в последнем равенстве производную $\frac{d\xi}{dt}$ на правую часть системы (2.11), получаем

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \Sigma_1(\xi) + \varepsilon \Sigma_2(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_1(t, \xi)}{\partial \xi} \Sigma_1(\xi) + \varepsilon \frac{\partial u_1(t, \xi)}{\partial t} + \\
& \varepsilon^2 \frac{\partial u_2(t, \xi)}{\partial t} = \\
& = \varepsilon X_1(t, \xi) + \varepsilon^2 \frac{\partial X_1(t, \xi)}{\partial \xi} u_1(t, \xi) + \varepsilon X_2(t, \xi)
\end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях последнего равенства, получим соотношения

$$\Sigma_1(\xi) + \frac{\partial u_1(t, \xi)}{\partial t} = X_1(t, \xi), \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
& \Sigma_2(\xi) + \frac{\partial u_1(t, \xi)}{\partial \xi} \Sigma_1(\xi) + \frac{\partial u_2(t, \xi)}{\partial t} = \\
& \frac{\partial X_1(t, \xi)}{\partial \xi} u_1(t, \xi) + X_2(t, \xi).
\end{aligned} \quad (2.13)$$

Из тождеств (2.12) и (2.13) определяются последовательно вектор-функции $\Sigma_1(\xi)$, $\Sigma_2(\xi)$ и $u_1(t, \xi)$, $u_2(t, \xi)$. Запишем (2.12) в виде

$$\frac{\partial u_1(t, \xi)}{\partial t} = X_1(t, \xi) - \Sigma_1(\xi). \quad (2.14)$$

Вектор-функцию $u_1(t, \xi)$ можно определить как периодическую по t , если среднее значение периодической вектор-функции, стоящей в правой части системы (2.14), равно нулю. Отсюда **однозначно** определяется вектор-функция $\Sigma_1(\xi)$ как среднее значение периодической функции $X_1(t, \xi)$:

$$\Sigma_1(\xi) = \frac{1}{T} \int_0^T X_1(t, \xi) dt.$$

Теперь, интегрируя систему дифференциальных уравнений (2.14), находим с точностью до произвольной вектор-функции от переменной ξ вектор-функцию $u_1(t, \xi)$:

$$u_1(t, \xi) = \int_0^t [X_1(t, \xi) - \Sigma_1(\xi)] dt + u_{10}(\xi).$$

Отметим, что вектор-функции $u_1(t, \xi)$ соответствует следующий ряд Фурье

$$\sum_{\nu \neq 0} X_{1\nu}(\xi) \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} + u_{10}(\xi).$$

Подставляем вектор-функции $\Sigma_1(\xi)$, $u_1(t, \xi)$ в тождество (2.13) и записываем его в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2(t, \xi)}{\partial t} &= \frac{\partial X_1(t, \xi)}{\partial \xi} u_1(t, \xi) + X_2(t, \xi) - \\ &\frac{\partial u_1(t, \xi)}{\partial \xi} \Sigma_1(\xi) - \Sigma_2(\xi). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Далее, чтобы определить $u_2(t, \xi)$ как периодическую вектор-функцию t нужно выбрать $\Sigma_2(\xi)$ так, чтобы среднее значение правой части системы (2.15) обратилось в нуль.

Подчеркнем, что $\Sigma_2(\xi)$ уже **не определяется однозначно**.

Затем находится вектор-функция $u_2(t, \xi)$. Придем к системе вида

$$\frac{\partial u_k(t, \xi)}{\partial t} = F(t, \xi, u_1(t, \xi)),$$

где $F(t, \xi, u_1(t, \xi))$ - уже известная периодическая по t вектор-функция.

Таким образом, мы показали, что существует замена переменных вида (2.10) с периодическими коэффициентами, которая преобразует систему (2.9) в систему (2.11).

2.2.2 Основной результат о втором приближении в периодическом случае

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в пространстве $\mathbb{R}^n$

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon), \quad (2.16)$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, вектор-функция $f(t, x, \varepsilon)$ определена при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ и малых ε . Эта функция периодична по t с периодом T , не зависящим от (x, ε) и достаточно гладкая по x и ε .

Предположим, что система (2.16) представима в виде

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f_1(t, x) + \varepsilon^2 f_2(t, x) + O(\varepsilon^3), \quad (2.17)$$

где каждая вектор-функция $f_i(t, x)$, $i = 1, 2$, периодическая по t с периодом T .

Используя замену (2.10) с T -периодическими коэффициентами, исключим переменную t из первых двух членов в правой части системы (2.17). Получим

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon \bar{f}_1(y) + \varepsilon^2 \bar{f}_2(y) + \varepsilon^3 \tilde{f}(t, y, \varepsilon) \quad (2.18)$$

где $\tilde{f}(t, y, \varepsilon)$ имеет те же свойства, что и $f(t, x, \varepsilon)$. Если существует такой постоянный вектор y_0 , что $\bar{f}(y_0) = 0$ и матрица

$$A = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(y_0) \quad (2.19)$$

не имеет собственных значений с нулевой вещественной частью, то существует при достаточно малых ε единственное T -периодическое решение $x^*(t, \varepsilon)$ и его свойства устойчивости совпадают со свойствами устойчивости стационарного решения $y = y_0$ усредненной системы первого приближения

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon \bar{f}_1(y).$$

Сейчас мы рассмотрим более общую ситуацию [17, 77, 90].

Будем предполагать, что матрица A имеет собственные значения с нулевой вещественной частью, но не имеет нулевого собственного значения. Тогда T -периодическое решение системы (2.18) существует при достаточно малых ε , но вопрос об устойчивости этого решения не определяется в первом приближении. Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon F(y, \varepsilon), \quad (2.20)$$

где $F(y, \varepsilon) = \bar{f}_1(y) + \varepsilon^2 \bar{f}_2(y)$ и запишем исходную систему (2.18) в виде

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon F(y, \varepsilon) + \varepsilon^3 \tilde{f}(t, y, \varepsilon). \quad (2.21)$$

Теорема 2.7 Пусть существует y_0 такое, что $F(y_0, 0) = 0$ и матрица A , которая определена формулой (2.19) не имеет нулевого собственного значения. Тогда существуют $\varepsilon_1 > 0$ и вектор-функции $y_2(\varepsilon)$ и $y^*(t, \varepsilon)$ такие, что $y_2(\varepsilon)$ - состояние равновесия системы (2.20), $y^*(t, \varepsilon)$ - T -периодическое решение системы (2.21), $y_2(0) = y^*(t, 0) = y_0$ и $|y^*(t, \varepsilon) - y_2(\varepsilon)| = O(\varepsilon^2)$. Кроме того, свойства устойчивости решений $y_2(\varepsilon)$ и $y^*(t, \varepsilon)$ одинаковы.

Имеется ввиду, что из асимптотической устойчивости состояния равновесия $y_2(\varepsilon)$ системы (2.20) следует при достаточно малых ε асимптотическая устойчивость периодического решения $y^*(t, \varepsilon)$ системы (2.21), а из неустойчивости $y_2(\varepsilon)$ - неустойчивость $y^*(t, \varepsilon)$ при достаточно малых ε .

Подобные построения могут быть проделаны с любой степенью точности по параметру ε .

2.3 Системы уравнений с быстро вращающейся фазой

Когда в систему обыкновенных дифференциальных уравнений входит малый параметр, то это может привести к разделению переменных на быстрые и медленные. Принцип усреднения позволяет исключить быстрые переменные и написать уравнения, содержащие только медленные переменные. Основную роль во всех вопросах, связанных с принципом усреднения, играют замены переменных, позволяющие с заданной точностью исключить из уравнений движения быстрые переменные и, таким образом, отделить медленное движение от быстрого.

Будем рассматривать уравнения, которые называются уравнениями с быстро вращающейся фазой [23]. Такие уравнения возникают, например, при описании движения консервативных систем с одной степенью свободы, подверженных малым возмущениям.

2.3.1 Квазиконсервативные системы с одной степенью свободы. Переменные действие-угол

Рассмотрим дифференциальное уравнение квазиконсервативной системы [17, 24, 77]

$$\ddot{z} + f(z) = \varepsilon G(z, \dot{z}), \quad (2.22)$$

где ε - малый параметр. Будем предполагать, что для невозмущенной системы

$$\ddot{z} + f(z) = 0 \quad (2.23)$$

известно общее решение (общий интеграл) и оно может быть записано в виде

$$z = q_0(x, t + t_0), \quad (2.24)$$

где x и t_0 - произвольные постоянные. Кроме того, мы будем предполагать, что $f(0) = 0$ и рассматривать ту область в фазовой плоскости переменных $z, \dot{z}$, в которой все решения невозмущенного уравнения (2.23) - периодические функции времени. Тогда функция $q_0(x, t + t_0)$ будет периодической функцией времени t с периодом T , зависящим от x (в общем случае). Теперь вместо переменной t введем новую переменную таким образом, чтобы получить периодическое решение с постоянным периодом. Положим

$$y = \omega(x)(t + t_0).$$

Здесь множитель $\omega(x)$ выбран так, что функция

$$q(x, y) = q_0(x, t + t_0)$$

будет периодической с периодом 2π . Этим условием величина $\omega(x)$ определяется однозначно. Она является нормирующим множителем. По аналогии с линейным случаем будем называть x амплитудой, $\omega(x)$ частотой, а переменную y - фазой.

Отметим, что функция $q(x, y)$ тождественно удовлетворяет уравнению (2.23), то есть

$$\ddot{z} + f(z) = \omega^2(x)q_{yy}(x, y) + f(q(x, y)) \equiv 0. \quad (2.25)$$

Теперь от уравнения (2.22) перейдем к системе дифференциальных уравнений, используя метод вариации произвольных постоянных. Этот переход к системе аналогичен переходу к системе в стандартной форме от уравнения второго порядка.

Мы перейдем к переменным I и y , где переменная I является функцией переменной x . Вид этой зависимости мы укажем позднее. Итак, делаем замену

$$z = q(I, y), \quad (2.26)$$

$$\dot{z} = \omega(x)q_y(I, y), \quad (2.27)$$

где I, y - новые переменные. Дифференцируем (2.26) и приравниваем полученное выражение (2.27). Находим первое соотношение

$$q_I \dot{x} + q_y \dot{y} = \omega q_y. \quad (2.28)$$

Это уравнение представляет собой условие совместности формул замены (2.26), (2.27). Второе уравнение получим, подставляя (2.27) в уравнение (2.22):

$$(\dot{\omega}(x)q_y + \omega(x)q_{Iy})\dot{I} + \omega(x)q_{yy}\dot{y} = -f(q) + \varepsilon G(q, \omega(x)q_y), \quad (2.29)$$

где $\omega'(x) = \frac{d\omega}{dx}$. Нам удобно записать уравнение (2.29) в виде

$$-(\dot{\omega}(x)q_y + \omega(x)q_{Iy})\dot{I} - \omega(x)q_{yy}\dot{y} = f(q) - \varepsilon G(q, \omega(x)q_y), \quad (2.30)$$

Система (2.29), (2.30) представляет собой систему двух дифференциальных уравнений относительно I , y . Относительно производных $\dot{I}$, $\dot{y}$ эта система является линейной алгебраической системой уравнений с определителем

$$\Delta(I) = \begin{vmatrix} q_I & q_y \\ -(\omega'(x)q_y + \omega(x)q_{Iy}) & -\omega(x)q_{yy} \end{vmatrix}.$$

Показывается, что величина I выбрана из условия

$$\Delta(I) = 1.$$

Раскрывая определитель, получаем соотношение

$$-\omega(x)q_Iq_{yy} + (\dot{\omega}(x)q_y^2 + \omega(x)q_{Iy})q_y = 1 \quad (2.31)$$

Левая часть уравнения (2.31) является периодической функцией переменной y периода 2π . Вычислим среднее значение обеих частей (2.31). Получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-\omega(x)q_Iq_{yy} + \dot{\omega}(x)q_y^2 + \omega(x)q_{Iy}q_y] dy = 1 \quad (2.32)$$

Выпишем интеграл, соответствующий первому слагаемому левой части

$$-\int_0^{2\pi} \omega(x)q_Iq_{yy} dy.$$

Выполнив интегрирование по частям, получим

$$-\omega(x)q_Iq_y \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \omega(x)q_{Iy}q_y dy.$$

Внеинтегральный член равен нулю, так как $q_I q_y - 2\pi$ - периодическая функция. Уравнение (2.32) запишется в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [2\omega(x)q_{Iy}q_y + \dot{\omega}(x)q_y^2] dy = 1. \quad (2.33)$$

Формулу (2.33) можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dI} (\omega(x)q_y^2) dy = \frac{d}{dI} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(x)q_y^2 dy \right].$$

Поэтому равенство (2.33) будет справедливо, если положить

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(x)q_y^2 dy. \quad (2.34)$$

Переменная I называется действием.

Отметим, что действие можно вычислять по формуле

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{z} dz. \quad (2.35)$$

Разрешим систему (2.28), (2.29) относительно $\dot{I}$, $\dot{y}$ по правилу Крамера. Вычислим два определителя. Для первого получаем:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \omega q_y & q_y \\ f(q) - \varepsilon G & -\omega(x)q_{yy} \end{vmatrix} = -\omega^2 q_y q_{yy} - f(q)q_y +$$

$$\varepsilon G q_y = \varepsilon G q_y,$$

так как

$$f(q) = -\omega^2 q_{yy}.$$

Для второго:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} q_I & \omega q_y \\ -(\omega'(x)q_y + \omega(x)q_{Iy}) & f(q) - \varepsilon G \end{vmatrix} =$$

$$q_I f(q) - \varepsilon G q_y + \omega \dot{\omega} q_y^2 + \omega^2 q_{Iy} q_y =$$

$$= \omega[-\omega q_I q_{yy} + \dot{\omega} q_y^2 + \omega q_{Iy} q_y] - \varepsilon G q_I = \omega \Delta(I) - \varepsilon G q_I = \omega - \varepsilon G q_I.$$

Таким образом, получим искомую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \varepsilon G(q, \omega q_y) q_y = \varepsilon X(I, y), \\ \frac{dy}{dt} &= \omega(I) - \varepsilon G(q, \omega q_y) q_I = \omega(I) - \varepsilon Y(I, y), \end{aligned} \quad (2.36)$$

где $\omega(I) = \omega(x(I))$. Говорят, что исходная система в окрестности периодического решения записана в переменных действие-угол. Система (2.36) называется системой с быстрой фазой или системой с быстро вращающейся фазой. Действие является медленно меняющейся переменной, так как $\frac{dI}{dt} \approx \varepsilon$, а переменная угол (фаза) меняется быстро ($\frac{dy}{dt} \approx \omega(I) = \omega(x(I))$).

Усредняя первое уравнение системы (2.36), получим уравнение

$$\frac{dS}{dt} = \varepsilon F(S),$$

где

$$F(S) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(I, y) dy.$$

Различие между медленным движением $I(t)$ точной системы и $S(t)$ в усредненной системе в течение времени $1/\varepsilon$ удовлетворяет неравенству

$$|I(t) - S(t)| < c\varepsilon, \quad c = \text{const},$$

если $I(0) = S(0)$ и $0 \leq t \leq 1/\varepsilon$ (см. [17]).

Отметим, что периодическое решение невозмущенного уравнения (2.23) в переменных действие-угол имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= 0, \\ \frac{dy}{dt} &= \omega(I). \end{aligned}$$

Следовательно, на периодической орбите $I = I_0 = \text{const}$, $q = \omega(I_0)t$.

2.3.2 Формальная схема усреднения для систем с быстрой фазой

Мы ограничимся системой второго приближения.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varepsilon X(x, \psi, \varepsilon), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(x) + \varepsilon \Psi(x, \psi, \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Здесь x и ψ - скалярные переменные, $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $\omega(x)$ - скалярная функция, которая в области изменения переменной x удовлетворяет неравенству

$$|\omega(x)| > c > 0.$$

Предполагаем, что правые части системы (2.37) разлагаются по степеням параметра ε

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varepsilon X_1(x, \psi) + \varepsilon^2 X_2(x, \psi) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(x) + \varepsilon \Psi_1(x, \psi) + \varepsilon^2 \Psi_2(x, \psi) + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (2.38)$$

Далее, будем предполагать, что функции $X_i(x, \psi)$, $\Psi_i(x, \psi)$ периодичны по ψ с периодом 2π . В системе (2.37) переменные x_i изменяются медленно (скорость их изменения пропорциональна малому параметру ε), а фаза ψ изменяется относительно быстро, так как, вообще говоря, $\dot{\psi} \sim 1$. Опишем формальную схему усреднения системы (2.37). Будем рассматривать решение системы (2.37), удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0) = x_0$, $\psi(t_0) = \psi_0$ на асимптотически большом промежутке времени t порядка $1/\varepsilon$. Медленная переменная x за время $\Delta t \sim 1/\varepsilon$ получит некоторое ограниченное приращение, быстрая фаза ψ может за это время получить, вообще говоря, большое приращение. Задача об усреднении системы (2.37) заключается в получении более простой усредненной системы, в которой медленные переменные x_i и быстрая фаза ψ будут разделены. Кроме того, быстрая фаза ψ должна быть исключена из правых частей усредненной системы.

Для получения усредненной системы и разделения быстрых и медленных переменных выполним замену переменных

$$\begin{aligned} x &= \xi + \varepsilon u_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 u_2(\xi, \eta) + O(\varepsilon^3), \\ \eta &= \psi + \varepsilon v_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 v_2(\xi, \eta) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Естественно предполагается, что при $\varepsilon = 0$ старые переменные x , ψ и новые переменные ξ , η соответственно совпадают. Поскольку в усредненной системе переменные ξ и η должны быть разделены, то усредненную систему ищем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \varepsilon \Sigma_1(\xi) + \varepsilon^2 \Sigma_2(\xi) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{d\eta}{dt} &= \omega(\xi) + \varepsilon \Phi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Phi_2(\xi) + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (2.39)$$

где $\Sigma_i(\xi)$, $\Phi_i(\xi)$ подлежат определению.

Усредненная система (2.39) существенно проще исходной системы (2.37), так как в (2.39) система медленных движений интегрируется независимо

от быстрой переменной η , а после определения медленных переменных ξ_i быстрая переменная η находится квадратурой.

Продифференцируем формулы замены переменных (2.38) в силу системы (2.37). Затем заменим производные $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ правыми частями усредненной системы (2.39) и разложим все функции в ряд по степеням ε . Приравнявая в левой и правой частях полученного равенства коэффициенты при одинаковых степенях ε , находим рекуррентную систему уравнений для определения неизвестных функций $u_i(\xi, \eta)$, $v_i(\xi, \eta)$, $\Sigma_i(\xi)$, $\Phi_i(\xi)$, $i = 1, 2$. Выпишем первые два уравнения, полученные приравнивая коэффициенты при первой степени ε :

$$\Sigma_1(\xi) + \frac{\partial u_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} \omega(\xi) = X_1(\xi, \eta), \quad (2.40)$$

$$\Phi_1(\xi) + \frac{\partial v_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} \omega(\xi) = \frac{\partial \omega(\xi)}{d\xi} u_1(\xi, \eta) + \Psi_1(\xi, \eta). \quad (2.41)$$

Определим функции $\Sigma_1(\xi)$ и $u_1(\xi, \eta)$. Напомним, что функция $X_1(\xi, \eta)$ периодична по η с периодом 2π . Для 2π -периодической функции $f(\eta)$ запишем ее разложение в ряд Фурье в виде

$$f(\eta) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\eta}.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{d\eta} = f(\eta).$$

Очевидно, это уравнение имеет периодические решения только в случае, если среднее значение периодической функция $f(\eta)$:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\eta) d\eta$$

равно нулю, причем периодическое решение определяется с точностью до произвольной постоянной и имеет вид

$$x(\eta) \sim \sum_{n \neq 0} \frac{f_n}{in} e^{in\eta} + const.$$

Обратимся к уравнению (2.41). Попытаемся определить функцию $u_1(\xi, \eta)$ как 2π -периодическую функцию переменной η . Перепишем равенство

(2.41) в виде

$$\frac{\partial u_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} \omega(\xi) = X_1(\xi, \eta) - \Sigma_1(\xi). \quad (2.42)$$

Если положить

$$\Sigma_1(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_1(\xi, \eta) d\eta, \quad (2.43)$$

то среднее значение, стоящей в правой части системы (2.43) периодической функции будет равно нулю. Поэтому, если справедливо равенство (2.43), то функция $u_1(\xi, \eta)$ определяется как 2π -периодическая функция переменной η . Отметим, что определяется она с точностью до произвольной функции переменной ξ :

$$u_1(\xi, \eta) = \sum_{n \neq 0} \frac{f_n(\xi)}{in} \frac{e^{in\eta}}{\omega(\xi)} + u_{10}(\xi). \quad (2.44)$$

Таким образом, формула (2.41) однозначно определяет функцию $\Sigma_1(\xi)$, а формула (2.42) - вектор-функцию $u_1(\xi, \eta)$ (**неоднозначно**).

Перейдем теперь к уравнению (2.41). Перепишем его в следующем виде

$$\frac{\partial v_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} \omega(\xi) = \frac{\partial \omega(\xi)}{d\xi} u_1(\xi, \eta) + \Psi_1(\xi, \eta) - \Phi_1(\xi). \quad (2.45)$$

Уравнение (2.45) имеет такую же форму, как и уравнение (2.42). Правая часть системы - это известная 2π -периодическая функция переменной η , так как функция $u_1(\xi, \eta)$ уже определена. Поэтому, если мы положим

$$\Phi_1(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \omega(\xi)}{d\xi} u_1(\xi, \eta) + \Psi_1(\xi, \eta) \right] d\eta,$$

то определится 2π -периодическая по η функция $v_1(\xi, \eta)$. Отметим, что функции $\Phi_1(\xi)$ и $v_1(\xi, \eta)$ определяются **неоднозначно**. Для вычисления $\Sigma_2(\xi)$, $\Phi_2(\xi)$, $u_2(\xi, \eta)$, $v_2(\xi, \eta)$ при $i \geq 2$ получаются уравнения аналогичные (2.40) и (2.41):

$$\frac{\partial u_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} \omega(\xi) = F_2(\xi, \eta) - \Sigma_2(\xi), \quad \frac{\partial v_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} \omega(\xi) = G_2(\xi, \eta) - \Phi_2(\xi),$$

где функции $F_2(\xi, \eta)$ и $G_2(\xi, \eta)$ зависят от функций $\Sigma_1(\xi)$, $\Phi_1(\xi)$ и $u_1(\xi, \eta)$, $v_1(\xi, \eta)$. вектор-функции $\Sigma_2(\xi)$ и $\Phi_2(\xi)$ определяются как средние значения $F_1(\xi, \eta)$ и $G_1(\xi, \eta)$ соответственно. Таким образом, последовательно определяются коэффициенты в формуле замены переменных

(2.39) и коэффициенты усредненной системы с любой степенью точности относительно малого параметра ε .

Отметим, что на практике обычно удается вычислить только коэффициенты при первой и второй степенях ε .

2.3.3 Возбуждение параметрических колебаний ударами в нелинейных системах

Параметрический резонанс в линейной колебательной системе приводит к неустойчивости состояния равновесия системы.

Иначе обстоит дело в нелинейных системах. В таких системах параметрическое возбуждение может привести к возникновению устойчивых стационарных колебаний.

Рассмотрим задачу о параметрических колебаниях в системе с уравнением движения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon \delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 [1 + \varepsilon f(t)]x + \varepsilon \gamma x^3 = 0, \quad (2.46)$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $f(t)$ - обобщенная периодическая функция, являющаяся производной периодической функции, имеющей конечное число точек разрыва (скачков) на периоде, ω, δ, γ - положительные числа. В линейной постановке задачи такого рода рассматривались в п. 1.4.2. В данном случае задача усложнилась за счет введения нелинейной восстанавливающей силы, отвечающей потенциальной энергии, содержащей члены четвертого порядка

Введем переменную $y(t)$ с помощью соотношения

$$\frac{dx}{dt} = y - \varepsilon \omega^2 g(t)x,$$

где $g(t)$ - периодическая функция, которая удовлетворяет равенству

$$\dot{g}(t) = f(t)$$

и, следовательно, имеет конечное число точек разрыва первого рода (скачков) на периоде. Тогда вместо уравнения (2.46) получим эквивалентную систему двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - \varepsilon \omega^2 g(t)x, \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega^2 x + \varepsilon \omega^2 g(t)y - \varepsilon \delta y - \varepsilon \gamma x^3 + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.47)$$

В правой части системы (2.47) нет обобщенных периодических функций, а есть только периодические функции с конечным числом точек разрыва первого рода на периоде. Теперь перейдем к новым переменным с помощью замены

$$x = a \cos \nu t + b \sin \nu t, \quad y = -a\nu \sin \nu t + b\nu \cos \nu t, \quad (2.48)$$

где частоту ν выберем позднее. Выполняя замену, получим

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} \cos \nu t + \frac{db}{dt} \sin \nu t &= -\varepsilon \omega^2 g(t)x, \\ -\frac{da}{dt} \nu \sin \nu t + \frac{db}{dt} \nu \cos \nu t - \nu^2 [a \cos \nu t + b \sin \nu t &= \\ -\omega^2 [a \cos \nu t + b \sin \nu t] + (\varepsilon \omega^2 g(t) - \varepsilon \delta) [-a\nu \sin \nu t + b\nu \cos \nu t] - \\ \varepsilon \gamma [a \cos \nu t + b \sin \nu t]^3 + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Разрешая последнюю систему относительно $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$ приходим к системе

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\nu^2 - \omega^2}{\nu} \left[\frac{a}{2} \sin 2\nu t + b \sin^2 \nu t \right] - \\ &- \varepsilon \omega^2 g(t) [a(\cos^2 \nu t - \sin^2 \nu t + b \sin 2\nu t) + \\ &+ \varepsilon \delta [-a \sin^2 \nu t + \frac{b}{2} \sin 2\nu t] + \\ &\varepsilon \gamma \nu [a \cos \nu t + b \sin \nu t]^3 \sin \nu t + O(\varepsilon^2), \\ \frac{db}{dt} &= \frac{\nu^2 - \omega^2}{\nu} \left[a \cos^2 \nu t + \frac{b}{2} \sin 2\nu t \right] \\ &- \varepsilon \omega^2 g(t) [-a \sin 2\nu t + b(\cos^2 \nu t - \sin^2 \nu t)] - \\ &- \varepsilon \delta [-\frac{a}{2} \sin 2\nu t + b \cos^2 \nu t] - \\ &\varepsilon \gamma \nu [a \cos \nu t + b \sin \nu t]^3 \cos \nu t + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Будем предполагать, что расстройка $\nu^2 - \omega^2 = \varepsilon h$, где $h = \text{const}$ - некоторое число. Тогда система (2.49) имеет стандартную форму и можно использовать утверждения предыдущего раздела для исследования существования и устойчивости периодических решений системы (2.49). Возьмем в качестве функции $f(t)$ обобщенную периодическую функцию $\delta^{2\pi}(t)$, которой соответствует ряд Фурье (п.1.2)

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \cos(2k-1)t.$$

Функция $g(t)$ представляется следующим рядом:

$$g(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}.$$

Положим $\nu = \frac{2k-1}{2}$, ($k = 1, 2, \dots$). Зафиксируем k и усредним по t правую часть системы (2.49). Усредненная система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon \left[\left(-\frac{h}{2\nu} - \frac{\omega^2}{4\nu} \right) b - \frac{\delta}{2} a + \frac{3\gamma}{8\nu} b(a^2 + b^2) \right], \\ \frac{db}{dt} &= \varepsilon \left[\left(\frac{h}{2\nu} - \frac{\omega^2}{4\nu} \right) a - \frac{\delta}{2} b - \frac{3\gamma}{8\nu} a(a^2 + b^2) \right], \end{aligned} \quad (2.50)$$

где напомним, что $\nu = \frac{2k-1}{2}$. В системе (2.50) перейдем к полярным координатам $a = \rho \cos \varphi$, $b = \rho \sin \varphi$. Получим (после разрешения преобразованной системы относительно $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$)

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \varepsilon \left[-\frac{\omega^2}{4\nu} \rho \sin 2\varphi - \frac{\delta}{2} \rho \right], \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \varepsilon \left[\frac{h}{2\nu} - \frac{\omega^2}{4\nu} \cos 2\varphi - \frac{3\gamma}{8\nu} \rho^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Состояния равновесия (ρ_0, φ_0) системы (2.50) определяются из системы уравнений

$$-\frac{\omega^2}{4\nu} \rho \sin 2\varphi - \frac{\delta}{2} \rho = 0, \quad (2.52)$$

$$\frac{h}{2\nu} - \frac{\omega^2}{4\nu} \cos 2\varphi - \frac{3\gamma}{8\nu} \rho^2 = 0.$$

Исследуем устойчивость состояний равновесия, определяемых системой (2.52). Линеаризуя усредненную систему (2.52) на состоянии равновесия (ρ_0, φ_0) , получим линейную систему с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \frac{\omega^2}{2\nu} \rho_0 \cos 2\varphi_0 \\ -\varepsilon \frac{3\gamma}{4\nu} \rho_0 & \varepsilon \frac{\omega^2}{2\nu} \sin 2\varphi_0 \end{pmatrix}$$

Как хорошо известно [17], собственные значения матрицы второго порядка имеют отрицательные вещественные части, если след матрицы отрицательный, а определитель положительный. В нашем случае след матрицы A всегда отрицательный (справедливость неравенства $\sin 2\varphi_0 < 0$ следует из первого из равенств (2.52)). Положительность определителя матрицы A и, следовательно, устойчивость состояния равновесия определяется неравенством $\cos 2\varphi_0 < 0$, из которого, с учетом второго уравнения системы (2.51), получим неравенство

$$h - \frac{3\gamma}{4} \rho_0^2 < 0. \quad (2.53)$$

Итак, из неравенства (2.53) следует асимптотическая устойчивость соответствующего состояния равновесия усредненной системы. В силу утверждений, приведенных в предыдущем разделе получаем, что исходная система уравнений (2.47), а, следовательно, и уравнение (2.46) при достаточно малых ε имеет асимптотически устойчивое периодическое решение с периодом $T = \frac{4\pi}{2k-1}$. Аналогично, если выполняется неравенство $h - \frac{3\gamma}{4}\rho_0^2 > 0$, то при достаточно малых ε уравнение (2.46) имеет неустойчивое периодическое решение. Исключим из системы (2.52) переменную φ . Получим соотношение между амплитудой ρ и частотой модуляции ν :

$$\rho^2 = \frac{4}{3\gamma\varepsilon}[\nu^2 - \omega^2 \mp \frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{\omega^4 - 4\nu^2\delta^2}].$$

Рис.2.1: $\gamma=1, \nu=0,5$

Рассмотрим сначала случай, когда $\gamma > 0$. Амплитудная кривая состоит из двух ветвей. Знак плюс соответствует ветви асимптотически устойчивых состояний равновесия, а знак минус - ветви неустойчивых состояний равновесия. При изменении расстройки $\nu^2 - \omega^2$ от больших отрицательных значений до положительных колебания будут отсутствовать пока расстройка не достигнет некоторого значения. Затем в системе возникнут асимптотически устойчивые периодические колебания и будут нарастать по амплитуде, а затем они сорвутся - перейдут в неустойчивые колебания.

Когда расстройка будет уменьшаться от больших положительных значений, устойчивые колебания возбуждятся скачком (жесткое возбуждение колебаний) и затем при уменьшении расстройки плавно будут уменьшаться по амплитуде. При $\gamma < 0$ получим аналогичную картину, только возбуждение устойчивых колебаний скачком будет происходить при увеличении расстройки. Следующие графики построены при значениях $\varepsilon = 0,1, \delta = 0,2, \gamma = 1, \nu = 0,5$ (рис. 2.1). и при значениях $\varepsilon = 0,1, \delta = 0,2, \gamma = -1, \nu = 0,5$ (рис.2.2) соответственно. По оси абсцисс откладывается расстройка $\nu^2 - \omega^2$, а по оси ординат амплитуда

ρ . На графике (рис. 2.1) АВ - ветвь устойчивых неподвижных точек, а ВС - ветвь неустойчивых неподвижных точек, на графике (рис. 2.2) ВС -

Рис.2.2: $\gamma = -1, \nu = 0,5$

ветвь устойчивых неподвижных точек, а АВ - ветвь неустойчивых неподвижных точек. Аналогичный вид имеют графики (рис. 2.3) и (рис. 2.4), где изменено только значение частоты - вместо $\nu = 0,5$ взято $\nu = 1,5$.

Рис.2.3: $\gamma = 1, \nu = 1,5$

Для определения границ зоны синхронизации нужно приравнять нулю правую часть соотношения, определяющего соотношение между амплитудой ρ и частотой модуляции ν . Зона резонанса в первом приближении будет

$$\omega^2 - \frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{\omega^4 - 4\omega^2\delta^2} < \nu^2 < \omega^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{\omega^4 - 4\omega^2\delta^2}.$$

Следовательно, ширина резонансной зоны

$$\Delta = \frac{1}{2}\varepsilon\omega\sqrt{\omega^2 - 4\delta^2}.$$

Наличие затухания уменьшает интервал, внутри которого возникает параметрический резонанс.

Если $f(t)$ не обобщенная, а обычная периодическая функция, то зона резонанса, вообще говоря, сужается [15]. Пусть, например, функции $f(t)$

соответствует ряд Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)t}{2k-1}.$$

Тогда ширина резонансной зоны

$$\Delta = \frac{1}{4} \varepsilon \omega^2 \sqrt{1 - 16\delta^2}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о возникновении параметрических колебаний под действием малого периодического возмущения в системе с нелинейным трением. Соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon[(\delta + \gamma x^2) \frac{dx}{dt}] + \omega^2[1 + \varepsilon f(t)]x = 0, \quad (2.54)$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $f(t)$ - обобщенная периодическая функция, которая является производной периодической функции с конечным числом точек разрыва (скачков) на периоде, ω, δ, γ - положительные числа. Положительность δ означает, что в автоколебательной системе при отсутствии параметрического возбуждения асимптотически устойчиво нулевое состояние равновесия и нет колебательного режима. Введем переменную $y(t)$ с помощью соотношения

$$\frac{dx}{dt} = y - \varepsilon \omega^2 g(t)x,$$

где $g(t)$ - периодическая функция, которая удовлетворяет равенству

$$\dot{g}(t) = f(t).$$

Далее, переходим к системе дифференциальных уравнений относительно переменных x, y аналогичной системе (2.55). Затем вводим новые переменные по формулам (2.48), полагаем $\nu^2 - \omega^2 = \varepsilon h$. В качестве функции $g(t)$ выберем функцию с рядом Фурье (п.1.1.1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}.$$

Положим $\nu = \frac{2k-1}{2}$, ($k = 1, 2, \dots$). Зафиксируем k и усредним по t соответствующую систему в стандартной форме. Получим систему

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\varepsilon \left[\frac{h}{2\nu} b + \frac{\omega^2}{4\nu} b + \frac{\delta}{2} a + \frac{\gamma}{8} a(a^2 + b^2) \right], \\ \frac{db}{dt} &= \varepsilon \left[\frac{h}{2\nu} b - \frac{\omega^2}{4\nu} a + \frac{\delta}{2} b - \frac{\gamma}{8} b(a^2 + b^2) \right]. \end{aligned}$$

Переходим к полярным координатам. Усредненная система принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= -\varepsilon\left[\frac{\delta}{2}\rho + \frac{\omega^2}{4\nu}\rho \sin 2\varphi + \frac{\gamma\rho^3}{8}\right], \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \varepsilon\left[\frac{h}{2\nu} - \frac{\omega^2}{4\nu} \cos 2\varphi\right].\end{aligned}$$

Находим состояния равновесия системы, приравняв правые части последней системы нулю. Легко видеть, что все состояния равновесия усредненной системы асимптотически устойчивы. Поэтому при достаточно малых ε данная система имеет асимптотически устойчивые периодические решения, возникающие в результате параметрического возбуждения. Исключая из этой системы переменную φ , получаем соотношение между амплитудой ρ и частотой модуляции ν :

$$\rho^2 = \frac{2}{\varepsilon\gamma\nu} \sqrt{\varepsilon^2\omega^4 - 4(\nu^2 - \omega^2)^2} - 4\frac{\delta}{\gamma}.$$

График амплитудной кривой при значениях параметров $\varepsilon = 0,1$, $\delta = 0,2$, $\gamma = 1$, $\nu = 0,5$ дан на рис. 2.5 (по оси абсцисс откладывается расстройка, а по оси ординат амплитуда ρ).

Рис.2.4: $\gamma=1$, $\nu=0,5$

Рис.2.5: Система с нелинейным трением; $\gamma=1$, $\nu=0,5$

Глава 3

Маятниковые системы с колеблющимся подвесом

Мы применим результаты об усреднении на бесконечном интервале к исследованию устойчивости состояний равновесия маятниковых систем с вибрирующим подвесом.

3.1 История и физические применения

Стабилизирующий эффект вибрации подвеса маятника стал известен уже в 1908 году. Стефенсон [114] теоритически и экспериментально показал, что можно стабилизировать верхнее состояние равновесия маятника с вертикально осциллирующим подвесом. Он исследовал случай маятника, у которого подвес получает ряд импульсов, поддерживающих его движение с постоянной скоростью вдоль линии, составляющей малый угол со стержнем маятника. Стефенсон определил "среднее" движение, которое устойчиво. Он также получил условия устойчивости верхнего состояния равновесия маятника, точка подвеса которого совершает быстрые вертикальные простые гармонические колебания. Аналогичным методом Стефенсон [115] определил условия устойчивости двух и трех стержней, которые связаны вместе в концах, если точка подвеса совершает быстрые вертикальные колебания.

Теория уравнения Матье в этой задаче была использована в статьях Ван дер Поля [122], Стретта [117]. Ван дер Поль и Стретт [123] (см. также [94, 116]) рассмотрели проблему устойчивости решений уравнения Матье и получили диаграмму устойчивости решений в плоскости двух параметров. Они также обсудили условия, при которых колебательное воздействие может сделать устойчивой систему, которая вначале была неустойчива.

Хирш [92] рассмотрел задачу о движении маятника, точка подвеса которого совершает малые колебания высокой частоты в плоскости маятника.

В работе Эрдеи [86] проведено полное исследование малых колебаний маятника с периодически колеблющимся подвесом. Автор учел затухание и использовал теорию Флоке и теорию уравнения Хилла.

Ловенстерн [104] в 1932 году изучил эффект высокочастотных движений с малой амплитудой в одном классе динамических систем и впервые получил весьма общие результаты. Он нашел уравнения движения для общих Лагранжевых систем, которые подвергаются быстрым колебаниям, и уравнения для малых колебаний около состояний равновесия. Ловенстерн рассмотрел только периодические возбуждения.

Анализ задачи об устойчивости верхнего состояния равновесия маятника с колеблющимся подвесом в линейном приближении был изложен в книге Джеффрис и Свирлс [95] в издании 1950 года.

Капица [33, 34] исследовал проблему движения маятника с колеблющейся точкой подвеса в нелинейной постановке. Капица изучил устойчивость обращенного маятника с помощью введенного им понятия эффективного потенциала (см. также Ландау и Лифшиц [45]). Он также выдвинул идею применить вибрационную стабилизацию к другим механическим объектам, которые отличаются от маятника, таким, например, как большие молекулы.

Боголюбов [14] получил строгое математическое доказательство устойчивости верхнего состояния равновесия маятника с вертикально осциллирующим подвесом. Он предположил, что амплитуда вибраций мала, а частота вибраций велика. Доказательство основывается на очень интересном преобразовании, которое позволяет получить ответ в первом приближении метода усреднения.

Богданов [75] обобщил результаты Ловенстерна на случай малых, быстрых квазипериодических параметрических возбуждений, но его анализ ограничивается линейными уравнениями. Богданов и Ситрон [76] продемонстрированы на эксперименте различные эффекты в поведении маятника с осциллирующим подвесом (см. также [105]).

Хемп и Сетна [91] рассмотрели нелинейные динамические системы с параметрическими возбуждениями. Проведен анализ влияния "быстрых" параметрических возбуждений, а также исследован эффект одновременного воздействия "медленных" и "быстрых" параметрических возбуждений. Рассмотрен случай, когда некоторые из частот "быстрых" параметрических возбуждений близки друг другу.

Ачесон [71] исследовал вопрос о стабилизации верхнего состояния

равновесия N-звенного маятника с помощью малых вертикальных колебаний подвеса.

В [37] (см. также [55]) Бурд, Забрейко, Колесов, Красносельский изучили проблему бифуркации почти периодических колебаний из верхнего состояния равновесия маятника с вертикально осциллирующим подвесом.

Леви [101] нашел топологическое доказательство стабилизации верхнего состояния равновесия маятника с вертикально осциллирующим подвесом (см. также [102]). Он (см. [99, 100]) дал также очень простое физическое объяснение стабилизации верхнего состояния равновесия маятника вибрациями подвеса. Основной момент его статей - это наблюдение, что за стандартной процедурой усреднения лежат некоторые простые геометрические факты.

Открытие устойчивых π -кинков в уравнении синус-Гордон под действием быстро осциллирующей силы (см. [124, 125]) основывается на той же идее.

Идея поднятия заряженных частиц в осциллирующем электрическом поле ("ловушка Пола") восходит к 1958 году. (см. [109, 110]). За эту работу Пол (Paul) получил Нобелевскую премию в 1989. Открытию ловушки Пола предшествовала идея сильной фокусировки в синхротронах (см. [84]). Не так давно (см. [113]) было представлено новое применение таких стабилизационных механизмов к производству ярких солитонов в двумерном конденсате Бозе - Эйнштейна (под "ярким" солитоном подразумевается устойчивая уединенная волна, плотность которой больше, чем плотность конденсата).

Отметим еще работы Зеньковской, Симоненко, Шлейкеля, в которых исследуется влияние высокочастотных вибрации на возникновение конвекции в жидкости (см. [30–32]).

Описанию примечательных явлений, происходящих при действии вибраций на нелинейные механические системы, посвящена книга Блехмана [9], а также значительное число его книг и статей. К ним автор относит изменение состояния системы под воздействием быстрых вибраций, изменение физико-механических свойств и характеристик под действием вибрации по отношению к медленным воздействиям, трансформацию положений равновесия, в частности, их стабилизацию и дестабилизацию под действием вибрации и многое другое. Блехман предложил общий подход к описанному кругу явлений, который он назвал "вибрационной механикой".

Не так давно возобновился интерес к использованию высокочастотных вибраций для управления низкочастотными свойствами структур,

т.е. их равновесными состояниями, устойчивостью, эффективными натуральными частотами и амплитудами вибраций [82, 87, 88, 118–121].

Отметим еще работы Юдовича [69–70], посвященные вибродинамике систем со связями и книгу Стрижак [60], посвященную методам исследования маятниковых систем.

3.2 Уравнение движения простого маятника с вибрирующим подвесом

Рассмотрим одну из простейших колебательных систем: материальная точка массы m , связанная невесомым абсолютно твердым стержнем длины l с неподвижной точкой (точкой подвеса). Очевидно, траектория движения материальной точки будет дугой окружности. Можно также говорить о физическом маятнике, представляющем собой твердое тело, которое может вращаться в вертикальной плоскости вокруг своей точки подвеса.

Рис. 3.1: Маятник

Предполагается, что вязкая среда, в которой движется маятник, создает сопротивление, пропорциональное скорости, а точка подвеса периодически или почти периодически колеблется.

Мы сначала предположим, что точка подвеса маятника может двигаться только вдоль вертикальной оси. Уравнения движения маятника удобно записать в гамильтоновой форме. Введем следующие обозначения: c - коэффициент демпфирования, g - ускорение свободного падения, q - угловое отклонение маятника от вертикали, функция $f(t)$ задает закон движения точки подвеса. Декартовы координаты точечного тела $x = l \sin q$, $y = l \cos q + f(t)$. Кинетическая энергия маятника определя-

ется формулой

$$\mathbb{T} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m[l^2\dot{q}^2 + 2l\dot{q}\dot{f}\sin q + \dot{f}^2],$$

где $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{q}$, $\dot{f}$ - производные функций $x(t)$, $y(t)$, $q(t)$, $f(t)$ соответственно, потенциальная энергия

$$\mathbb{V}(q) = -mgl \cos q,$$

диссипативная функция

$$R(\dot{q}) = cl^2\dot{q}^2.$$

Уравнение Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial q} = 0, \quad \mathbb{L} = \mathbb{T} - \mathbb{V}.$$

Поэтому уравнение движения маятника с учетом диссипативной силы, определяемой функцией $R(\dot{q})$ выглядит следующим образом

$$\frac{d^2 q}{dq^2} + \frac{2c}{m} \frac{dq}{dt} + \left[\frac{g}{l} + \frac{\ddot{f}}{l} \right] \sin q = 0. \quad (3.1)$$

Это уравнение преобразуем к гамильтоновой форме. Имеем

$$p = \frac{\partial \mathbb{T}}{\partial \dot{q}} = m(l^2\dot{q} + l\dot{f}\sin q).$$

Обращая последнее равенство, получим

$$\dot{q} = \frac{1}{ml^2}p - \frac{\dot{f}}{l}\sin q. \quad (3.2)$$

Дифференцируя (3.2) и используя уравнение (3.1), приходим к равенству

$$\dot{p} = ml^2 \left[-\frac{2c}{ml^2}p + \frac{2c}{ml}\dot{f}\sin q + \frac{\dot{f}}{ml^3}p\cos q - \frac{\ddot{f}}{l^2}\sin q \cos q \right].$$

Окончательно получим искомую систему уравнений

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{ml^2}p - \frac{\dot{f}}{l}\sin q, \quad (3.3)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{2c}{m}p + [2cl\sin q + \frac{p}{l}\cos q]\dot{f} - mgl\sin q - \frac{m}{2}\dot{f}^2\sin 2q.$$

3.3 Введение малого параметра и приведение уравнений к стандартной форме

Мы будем рассматривать перемещения $f(t)$ точки подвеса, которые задаются тремя различными законами.

Во-первых, определяемые почти периодическим многочленом с помощью формулы

$$f(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \cos \nu_k t + \beta_k \sin \nu_k t, \quad (3.4)$$

где α_k, β_k, ν_k ($k = 1, 2, \dots, N$) - вещественные числа. Будем предполагать, что амплитуды α_k, β_k достаточно малы, а частоты ν_k достаточно велики в следующем смысле. Существует такой малый положительный параметр ε , что

$$\alpha_k = \varepsilon a_k, \beta_k = \varepsilon b_k, \nu_k = \frac{\omega_k}{\varepsilon},$$

где a_k, b_k, ω_k ($k = 1, 2, \dots, N$) - величины порядка $O(1)$ относительно ε . Тогда $f(t)$ можно записать в виде

$$f(t) = \varepsilon \sum_{k=1}^N a_k \cos \omega_k \frac{t}{\varepsilon} + b_k \sin \omega_k \frac{t}{\varepsilon} = \varepsilon \phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Во-вторых, закон, определяемый периодической функцией

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \alpha \sin(2k-1)\nu t. \quad (3.5)$$

Вводим малый параметр ε , полагая $\alpha = \varepsilon a$, $\nu = \frac{\omega}{\varepsilon}$. Тогда $f(t)$ запишется в виде

$$f(t) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} a \sin(2k-1)\omega \frac{t}{\varepsilon} = \varepsilon \phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

В-третьих, синусоидальный закон вибрации подвеса

$$f(t) = \alpha \sin \nu t. \quad (3.6)$$

Полагая $\alpha = \varepsilon a$, $\nu = \frac{\omega}{\varepsilon}$, получим

$$f(t) = \varepsilon a \sin \frac{\omega}{\varepsilon} t = \varepsilon \phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

Отметим, что в случае, когда закон движения подвеса $f(t)$ определяется формулой (3.5), параметрическое возбуждение - обобщенная периодическая функция $\dot{f}(t)$, которой соответствует ряд Фурье

$$\ddot{f}(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \sin(2k-1)t.$$

Поэтому в уравнение (3.1) входит обобщенная периодическая функция в качестве коэффициента (см. п.1.4.2 и 2.3.3). Однако, при использовании гамильтоновой записи (3.3), получаем систему, в которую входит только переносная скорость $\dot{f}(t)$, которая является кусочно-непрерывной периодической функцией.

Отметим, что другие пути исследования параметрического резонанса в системах, содержащих обобщенные периодические функции, были предложены в работах [7, 8, 38, 39, 52, 72].

Перейдем в системе (3.2) к быстрому времени τ по формуле $\varepsilon\tau = t$ и обозначим дифференцирование по τ штрихом. Получим

$$\begin{aligned} q' &= \varepsilon \left(\frac{1}{ml^2} p - \frac{1}{l} \phi'(\tau) \sin q \right), \\ p' &= \varepsilon \left[-mgl \sin q - \frac{2\varepsilon}{m} p + \left(2cl \sin q + \frac{p}{l} \cos q \right) \phi'(\tau) - m\dot{\phi}^2(\tau) \cos q \sin q \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким образом, в описанных выше предположениях система уравнений движения маятника имеет стандартную форму.

3.4 Исследование устойчивости состояний равновесия

Усредним систему (3.7). Получим:

$$\begin{aligned} \xi' &= \varepsilon \frac{1}{ml^2} \eta, \\ \eta' &= \varepsilon \left[-mgl \sin \xi - \frac{2\varepsilon}{m} \eta - \frac{m}{2} \langle \dot{\phi}^2(\tau) \rangle \sin 2\xi \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$\langle \dot{\phi}^2(\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\phi}^2(\tau) d\tau.$$

У системы (3.8) четыре стационарных решения

$$I - (0, 0), \quad II - (\pi, 0), \quad III, IV - \left(\pm \arccos \left(-\frac{gl}{\langle \dot{\phi}^2(\tau) \rangle} \right), 0 \right).$$

Последние два стационарных решения существуют только при выполнении неравенства

$$gl \leq \langle \dot{\phi}^2(\tau) \rangle. \quad (3.9)$$

Система (3.8) также имеет стационарные решения I и II - нижнее и верхнее состояния равновесия маятника.

Исследуем устойчивость стационарных решений системы (3.8). Для решения I линеаризованная система имеет вид

$$\begin{aligned} \psi' &= \varepsilon \frac{1}{ml^2} \varphi, \\ \varphi' &= \varepsilon [-mgl\psi - \frac{2c}{m}\varphi - m\langle \dot{\phi}^2(\tau) \rangle \psi], \end{aligned} \quad (3.10)$$

а для решения II (полагаем $\sigma = \xi - \pi$)

$$\begin{aligned} \sigma' &= \varepsilon \frac{1}{ml^2} \delta \\ \delta' &= \varepsilon [mgl\sigma - \frac{2c}{m}\delta - m\langle \dot{\phi}^2(\tau) \rangle \sigma]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Легко видеть, что у матрицы системы (3.10) след отрицательный, а определитель - положительный. Поэтому нулевое состояние равновесия усредненной системы асимптотически устойчиво (см. [17]). Из теоремы об усреднении на бесконечном промежутке вытекает, что при достаточно малых ε нижнее состояние равновесия маятника асимптотически устойчиво.

У матрицы системы (3.11) след отрицательный, а определитель положительный, если выполняется неравенство

$$gl < \langle \dot{\phi}^2(\tau) \rangle.$$

Следовательно, при выполнении этого неравенства состояние равновесия $(0, \pi)$ усредненной системы асимптотически устойчиво. Из теоремы об усреднении следует, что при достаточно малых ε асимптотически устойчиво верхнее состояние равновесия маятника.

Отметим, что неравенство, определяющее устойчивость верхнего состояния равновесия, в исходном времени t имеет вид

$$gl < \langle \dot{f}^2 \rangle.$$

Для почти периодического закона движения точки подвеса (3.4) (см. п. 1.1.2) получаем

$$\langle \dot{\phi}^2(\tau) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (a_k^2 + b_k^2) \omega_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \nu_k^2.$$

Для периодической функции (3.5) (см. п.1.1.1) имеем

$$\langle \dot{\phi}^2(\tau) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a^2 \omega^2 \frac{1}{(2k-1)^2} = a^2 \omega^2 \frac{\pi^2}{16},$$

а для функции (3.6) получаем

$$\langle \dot{\phi}^2(\tau) \rangle = \frac{a^2 \omega^2}{2}.$$

Поэтому верхнее состояние равновесия маятника асимптотически устойчиво при выполнении неравенства

$$\sum_{k=1}^N (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \nu_k^2 > 2gl \quad (3.12)$$

для функции (3.4) при выполнении неравенства

$$a^2 \omega^2 \frac{\pi^2}{8} > 2gl \quad (3.13)$$

для функции (3.5) и при выполнении неравенства

$$a^2 \omega^2 > 2gl \quad (3.14)$$

для функции (3.6).

Сравнение неравенств (3.13) и (3.14) показывает, что область устойчивости верхнего состояния равновесия маятника при законе вибрации точки подвеса, определяемом формулой (3.5) шире, чем при синусоидальном законе вибрации точки подвеса. Неравенство (3.14) в исходных переменных имеет вид

$$\alpha^2 \nu^2 > 2gl. \quad (3.15)$$

Именно неравенство (3.15) было получено различными методами (см. Стефенсон [114], Эрдеи [86], Капица [33, 34], Боголюбов [14]. При отсутствии вибраций точки подвеса, как известно, нижнее состояние равновесия маятника устойчиво, а верхнее состояние равновесия неустойчиво. Предыдущий анализ привел нас к следующему результату: если точка подвеса вибрирует по синусоидальному закону и частота вибраций точки подвеса маятника достаточно велика, а амплитуда вибраций достаточно мала, то верхнее состояние равновесия маятника может стать устойчивым. Этот результат многократно проверен экспериментально.

Напомним, что этот результат был установлен Стеффенсоном еще в 1908 году, и его строгое обоснование с помощью метода усреднения было получено Н.Н. Боголюбовым. Здесь мы рассмотрели более общие законы движения точки подвеса и получили аналогичные результаты.

Для стационарных решений III, IV усредненной системы, которые существуют при выполнении неравенства (3.9), линеаризованная система имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi' &= \varepsilon \frac{1}{ml^2} \psi, \\ \psi' &= \varepsilon [(-mgl \cos \xi_0 - m \langle \dot{\phi}^2(\tau) \rangle \cos 2\xi_0) \varphi - \frac{2c}{m} \psi],\end{aligned}$$

где

$$\cos \xi_0 = -\frac{gl}{\langle \phi^2(\tau) \rangle}.$$

Легко видеть, что нулевое решение этой системы при выполнении неравенства (3.9) неустойчиво.

Таким образом, если существуют состояния равновесия III и IV, то маятник имеет четыре стационарных состояний равновесия, два из которых асимптотически устойчивы, а два неустойчивы.

Из приведенных выше результатов об усреднении на бесконечном промежутке (п. 2.1.3) следует, что стационарным решениям III и IV усредненной системы при достаточно малых ε соответствуют неустойчивые почти периодические или периодические решения (в зависимости от выбора закона вибрации точки подвеса) системы (3.7).

Сделаем еще некоторые замечания к рассмотренной задаче. Усредненную систему (3.8) можно записать в виде одного дифференциального уравнения второго порядка. Это уравнение в исходном времени t имеет вид (для синусоидального закона вибраций точки подвеса)

$$\ddot{\xi} + \frac{2c}{m} \dot{\xi} + \left[\frac{g}{l} + \frac{\alpha^2 \nu^2}{2l^2} \cos \xi \right] \sin \xi = 0. \quad (3.16)$$

Как отметили Боголюбов и Митропольский [15] уравнение (3.16) определяет колебательную систему, которая подобна маятнику с неподвижной точкой подвеса, но восстанавливающая сила определяется не функцией $\sin \xi$, а $[\frac{g}{l} + \frac{\alpha^2 \nu^2}{2l^2} \cos \xi] \sin \xi$. Частота малых колебаний без учета затухания будет равна $\frac{g}{l} + \frac{\alpha^2 \nu^2}{2l^2}$.

3.5 Плоские вибрации точки подвеса

Рассмотрим теперь маятник с колеблющимся подвесом при более общих предположениях о движении точки подвеса. Пусть точка подвеса совер-

шает колебания одновременно в горизонтальном и вертикальном направлениях по закону

$$x = s(t), \quad y = r(t).$$

Рассмотрим случай, когда она совершает синусоидальные гармонические колебания с амплитудой α и частотой ν вдоль прямой, составляющей угол θ с осью y . Тогда

$$\begin{aligned} s(t) &= \alpha \sin \nu t \sin \theta, \\ r(t) &= \alpha \sin \nu t \cos \theta. \end{aligned}$$

Декартовы координаты точечного тела $x = l \sin q + s(t)$, $y = -l \cos q + r(t)$. Кинетическая энергия определяется формулой

$$\mathbb{T} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}[l^2\dot{q}^2 + 2l\dot{q}(\dot{s} \cos q + \dot{r} \sin q) + \dot{s}^2 + \dot{r}^2],$$

потенциальная энергия имеет вид $\mathbb{V}(q) = -mgl \sin q$, а диссипативная функция по предложению есть $R(\dot{q}) = cl^2\dot{q}^2$; уравнение движения

$$\ddot{q} + \frac{2c}{m}\dot{q} + \left[\frac{g}{l} + \frac{\ddot{r}}{l} \right] \sin q + \frac{\ddot{s}}{l} \cos q = 0.$$

Переходим, как и в п.3.3, к системе в гамильтоновой форме с учетом сил трения

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{1}{ml^2}p - \frac{\dot{s}}{l} \cos q - \frac{\dot{r}}{l} \sin q \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{2c}{m}p + (2cl \cos q - \frac{p}{l} \sin q)\dot{s} + (2cl \sin q + \frac{p}{l} \cos q)\dot{r} + \\ &+ \frac{m}{2}(\dot{s}^2 - \dot{r}^2) \sin 2q - m\dot{s}\dot{r} \cos 2q - mgl \sin q. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Предполагаем, что существует такой малый положительный параметр ε , для которого $\alpha = \varepsilon a$, $\nu = \frac{\omega}{\varepsilon}$. Тогда

$$s(t) = \varepsilon a \sin \frac{\omega}{\varepsilon} t \sin \theta, \quad r(t) = \varepsilon a \sin \frac{\omega}{\varepsilon} t \cos \theta.$$

Переходя к быстрому времени $\varepsilon\tau = t$ и обозначая дифференцирование по τ штрихом, получим

$$\begin{aligned} q' &= \varepsilon \left[\frac{1}{ml^2}p - \frac{s'(\tau)}{l} \cos q - \frac{r'(\tau)}{l} \sin q \right], \\ p' &= \varepsilon \left[-\frac{2c}{m}p + s'(\tau)(2cl \cos q - \frac{p}{l} \sin q) + r'(\tau)(2cl \sin q + \frac{p}{l} \cos q) + \right. \\ &\left. \frac{m}{2}(s'^2(\tau) - r'^2(\tau)) \sin 2q - ms'(\tau)r'(\tau) \cos 2q - mgl \sin q \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Усредненная система имеет вид

$$\begin{aligned}\xi' &= \varepsilon \frac{1}{ml^2} \eta, \\ \eta' &= \varepsilon \left[-\frac{2c}{m} \eta - mgl \sin \xi + \frac{m}{2} (\langle s'^2(\tau) \rangle - \langle r'^2(\tau) \rangle) \sin 2\xi - \right. \\ &\quad \left. - m \langle s'(\tau) r'(\tau) \rangle \cos 2\xi \right].\end{aligned}\tag{3.19}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned}\langle s'^2(\tau) \rangle &= \frac{a^2 \omega^2}{2} \sin^2 \theta = \frac{\alpha^2 \nu^2}{2} \sin^2 \theta, \quad \langle r'^2(\tau) \rangle = \frac{\alpha^2 \nu^2}{2} \cos^2 \theta, \\ \langle s'(\tau) r'(\tau) \rangle &= \frac{\alpha^2 \nu^2}{4} \sin 2\theta.\end{aligned}$$

Система (3.19) может иметь несколько стационарных решений. Например, она имеет стационарное решение $(\frac{\pi}{2}, 0)$, если

$$\frac{\alpha^2 \nu^2}{4} \sin 2\theta = gl.\tag{3.20}$$

Линеаризованная на этом состоянии равновесия система имеет вид

$$\begin{aligned}\xi' &= \varepsilon \frac{1}{ml^2} \eta, \\ \eta' &= \varepsilon (m\xi \cos 2\theta - \frac{2c}{m} \eta).\end{aligned}$$

Следовательно, состояние равновесия $(\frac{\pi}{2}, 0)$ асимптотически устойчиво при выполнении неравенства

$$\cos 2\theta < 0.\tag{3.21}$$

Из теорем об усреднении на бесконечном интервале (п.2.1.3) следует, что при достаточно малых ε и выполнении условий (3.20), (3.21) система (3.18) имеет асимптотически устойчивое периодическое решение, которое находится в малой окрестности точки $(\frac{\pi}{2}, 0)$, т.е. маятник будет совершать устойчивые периодические колебания в окрестности горизонтального положения равновесия.

Если закон движения точки подвеса определяется формулами

$$\begin{aligned}s(t) &= g(t) \sin \theta, \\ r(t) &= g(t) \cos \theta,\end{aligned}$$

где

$$g(t) = \varepsilon a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\frac{\omega}{\varepsilon} t}{(2k+1)^2},$$

то усредненное уравнение имеет стационарное решение $(\frac{\pi}{2}, 0)$ при выполнении равенства

$$a^2 \omega^2 \pi^2 \sin 2\theta = 32gl.$$

Это решение асимптотически устойчиво, если выполняется неравенство (3.21).

3.6 Маятник с исчезающей во времени амплитудой колебаний точки подвеса

Напомним еще раз основной результат, относящийся к устойчивости верхнего состояния равновесия маятника с вибрирующим подвесом. Пусть точка подвеса математического маятника может свободно двигаться вдоль вертикальной оси и закон движения точки подвеса определяется формулой

$$f(t) = a \sin \omega t.$$

Если амплитуда колебаний точки подвеса a достаточно мала, а частота ω достаточно велика, то верхнее состояние равновесия маятника будет устойчивым, если выполняется неравенство

$$a^2 \omega^2 > 2gl. \quad (3.22)$$

g - ускорение свободного падения

В этом пункте будет рассмотрен (см. [16], [17]) вопрос об устойчивости верхнего состояния равновесия маятника в случае, когда закон движения точки подвеса задается формулой

$$f(t) = \frac{a}{t^{\alpha-1}} \sin \omega t^{\alpha}, \quad (3.23)$$

где a, ω, α - постоянные и $\alpha > 1$, т.е. амплитуда движения точки подвеса стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Как мы видели уравнение движения маятника с движущимся вдоль вертикальной оси подвесом имеет вид

$$\ddot{q} + \frac{2c}{m} \dot{q} + \left(\frac{g}{l} + \frac{1}{l} \ddot{f} \right) \sin q = 0, \quad (3.24)$$

где m - масса маятника, c - коэффициент демпфирования, $q(t)$ - угловое отклонение маятника от вертикали, $f(t)$ - закон движения подвеса.

Нам снова удобно записать уравнение движения в гамильтоновой форме. Соответствующая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{1}{ml^2}p - \frac{1}{l}\dot{f}\sin q, \\ \dot{p} &= -\frac{2c}{m}p + [2cl\sin q + \frac{p}{l}\cos q]\dot{f} - mgl\sin q - \frac{m}{2}\dot{f}^2\sin 2q.\end{aligned}\quad (3.25)$$

Система (3.25) имеет два стационарных решения $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$ - нижнее и верхнее состояния равновесия маятника соответственно.

Исследуем устойчивость верхнего состояния равновесия маятника. Линеаризуя систему (3.25) на состоянии равновесия $(\pi, 0)$, получаем линейную систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{ml^2}x_2 + \frac{1}{l}\dot{f}x_1, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{2c}{m}x_2 + [-2clx_1 + \frac{1}{l}x_2]\dot{f} + mglx_1 - \frac{m}{2}\dot{f}^2x_1.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Изучим поведение решений этой системы при $t \rightarrow \infty$. Введем новое время τ по формуле

$$\tau = t^\alpha$$

и учтем, что во времени τ

$$\frac{df}{dt} = \alpha a \omega \cos \omega \tau + \frac{(1-\alpha)a}{\tau} \sin \omega \tau.$$

В результате получим систему ($z = (x_1, x_2)$)

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{\tau^{1-\beta}}A_1(\tau)z + \frac{1}{\tau^{2-\beta}}F(\tau)z, \quad (3.27)$$

где $\beta = \frac{1}{\alpha} < 1$,

$$A_1(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{a\omega}{l}\cos\omega\tau & \frac{\beta}{ml^2} \\ -2a\omega cl\cos\omega\tau + mgl\beta - \frac{ma^2\cos^2\omega\tau}{\beta} & -\frac{2c\beta}{m} + \frac{a\omega\cos\omega\tau}{l} \end{pmatrix},$$

а вид матрицы $F(\tau)$ для дальнейшего несущественен. Следует только отметить, что элементы матрицы $F(\tau)$ являются ограниченными функциями при $0 < \tau_0 \leq \tau < \infty$.

Предположим сначала, что $\alpha > 2$. Тогда $1 - \beta > \frac{1}{2}$. В системе (3.27) выполним замену переменных

$$z = y + \frac{1}{\tau^{1-\beta}}Y_1(\tau)y, \quad (3.28)$$

где матрица $Y_1(\tau)$ определяется как матрица, элементы которой - периодические функции с нулевым средним значением, из уравнения

$$\frac{dY_1}{d\tau} = A_1(\tau) - B_1, \quad (3.29)$$

а постоянная матрица B_1 также подлежит определению. Очевидно, матрица B_1 должна быть составлена из средних значений элементов матрицы $A_1(\tau)$, т.е. B_1 имеет вид

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta}{m\dot{g}^2} \\ mgl\beta - \frac{ma^2\omega^2}{2\beta} & -\frac{2c\beta}{m} \end{pmatrix}.$$

После замены (3.28) система (3.27) переходит при достаточно больших τ в систему

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\tau^{1-\beta}} B_1 y + \frac{1}{\tau^{2-2\beta}} G(\tau) y, \quad (3.30)$$

где элементы матрицы $G(\tau)$ - ограниченные при $0 < \tau_0 \leq \tau < \infty$ функции. В исходном времени t система (3.30) принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = \alpha B_1 y + \frac{\alpha}{t^{\alpha-1}} G(t) y. \quad (3.31)$$

Так как $\alpha > 2$, то второе слагаемое в правой части систем (3.31) абсолютно интегрируемо на бесконечном промежутке. В силу известной теоремы Левинсона [17, 77] главный член асимптотики решений системы (3.31) определяется системой

$$\frac{dy}{dt} = \alpha B_1 y.$$

Поэтому линейно независимые решения системы (3.31) при $t \rightarrow \infty$ представимы в виде

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} (p_1 + o(1)), \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t} (p_2 + o(1)), \quad (3.32)$$

где λ_1 и λ_2 - собственные значения матрицы αB_1 , а p_1, p_2 - собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям. Легко видеть, что при выполнении неравенства

$$2gl < \alpha^2 a^2 \omega^2 \quad (3.33)$$

собственные значения матрицы αB_1 имеют отрицательные вещественные части. Поэтому, если выполнено неравенство (3.33), то нулевое решение

системы (3.31) в силу формул (3.32) асимптотически устойчиво, а, следовательно, нулевое решение системы (3.27) асимптотически устойчиво. Отсюда следует, что при выполнении неравенства (3.33) нулевое решение системы (3.26) асимптотически устойчиво. В силу теоремы об устойчивости по первому приближению (см. [17]) верхнее состояние равновесия маятника при $\alpha > 2$ и выполнении неравенства (3.33) асимптотически устойчиво.

Если $\frac{3}{2} < \alpha \leq 2$, то $\frac{1}{3} < 1 - \beta \leq \frac{1}{2}$. В этом случае, чтобы привести систему к форме, к которой применима теорема Левинсона, нужно вместо замены (3.28) сделать замену

$$z = y + \frac{1}{\tau^{1-\beta}} Y_1(\tau) y + \frac{1}{\tau^{2-2\beta}} Y_2(\tau) y, \quad (3.34)$$

где матрица $Y_1(\tau)$ определяется тем же уравнением (3.29), а матрица $Y_2(\tau)$ и постоянная матрица B_2 определяются из уравнения

$$\frac{dY_2}{d\tau} = A_1(\tau) Y_1(\tau) - B_2,$$

причем элементы матрицы $Y_2(\tau)$ - периодические функции с нулевым средним значением. Замена (3.34) переводит систему (3.27) в систему

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\tau^{1-\beta}} B_1 y + \frac{1}{\tau^{2-2\beta}} B_2 y + \frac{1}{\tau^{3-3\beta}} L(\tau) y, \quad (3.35)$$

где элементы матрицы $L(\tau)$ ограниченные при $\tau_0 \leq \tau < \infty$ функции. Простой подсчет показывает, что $B_2 = 0$ и поэтому для линейно независимых решений системы (3.35) во времени t справедливы асимптотические формулы (3.32). Следовательно, при $\frac{3}{2} < \alpha \leq 2$ и выполнении неравенства (3.33) нулевое решение системы (3.26) асимптотически устойчиво. При $1 < \alpha \leq \frac{3}{2}$ асимптотические формулы (3.32) могут измениться, но главный член асимптотики будет иметь тот же вид, что и в (3.32). Показатель α влияет на скорость сходимости решений к состоянию равновесия.

Таким образом, при движении точки подвеса математического маятника вдоль вертикальной оси по закону (3.23) и при выполнении неравенства (3.33) верхнее состояние равновесия маятника будет асимптотически устойчивым.

3.7 Многочастотные колебания подвеса маятника

В этом пункте предполагается, что закон движения подвеса маятника - почти периодический тригонометрический многочлен, некоторые частоты которого близки друг к другу. Хемп и Сетна [91] рассмотрели случай двух частот.

Как обычно уравнения движения маятника удобно записать в гамильтоновой форме. Мы получим систему (п. 3.3)

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= \frac{2}{ml^2}p - \frac{\dot{f}}{l} \sin q, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{2c}{m}p + [2cl \sin q + \frac{p}{l} \cos q] \dot{f} - mgl \sin q - \frac{m}{2} \dot{f}^2 \sin 2q.\end{aligned}\tag{3.36}$$

Движение подвеса определяется формулой (3.4), то есть имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \cos \nu_k t + \beta_k \sin \nu_k t.$$

Функция $f(t)$ может быть записана в виде

$$f(t) = \varepsilon \sum_{k=1}^N a_k \cos \omega_k \frac{t}{\varepsilon} + b_k \sin \omega_k \frac{t}{\varepsilon} = \varepsilon \zeta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Мы будем говорить, что закон движения подвеса одночастотный, если все разности $\omega_k - \omega_j$, $j \neq k$ имеют порядок $O(1)$ по отношению к ε . Если же некоторые из этих разностей имеют порядок $O(\varepsilon)$, то мы будем говорить, что закон движения подвеса многочастотный.

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда закон движения подвеса маятника является многочастотным.

В одночастотном случае (см. п.3.4) метод усреднения дает возможность получить хорошо известные результаты об устойчивости нижнего и верхнего состояний равновесия маятника при достаточно малых ε . Нижнее состояние равновесия всегда устойчиво, верхнее состояние равновесия будет устойчивым, если

$$\langle (\dot{\zeta}^2(\tau)) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\zeta}^2(\tau) d\tau > gl.$$

Это следует из анализа усредненных уравнений и соответствующих теорем об усреднении.

Усредненные уравнения имеют форму

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \varepsilon p / m l^2, \\ \dot{p} &= \varepsilon \left[-m g l \sin q - \frac{2c}{m} p - \frac{m}{2} \langle (\dot{\zeta}^2(\tau)) \rangle \sin 2q \right].\end{aligned}$$

В многочастотном случае усредненные уравнения будут вообще говоря уравнениями с почти периодическими коэффициентами.

Мы ограничимся рассмотрением случая, когда две частоты ω_1 и ω_2 связаны соотношением

$$\omega_2 - \omega_1 = \varepsilon \Delta, \quad \Delta > 0, \quad \Delta = O(1). \quad (3.37)$$

Пусть для простоты

$$f(t) = \varepsilon \left[a_1 \cos \omega_1 \frac{t}{\varepsilon} + a_2 \cos \omega_2 \frac{t}{\varepsilon} \right] = \varepsilon \zeta \left(\frac{t}{\varepsilon} \right).$$

Из (3.37) получим

$$\varepsilon \zeta \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) = \varepsilon \left[a_1 \cos \omega_1 \frac{t}{\varepsilon} + a_2 \cos (\omega_1 + \varepsilon \Delta) \frac{t}{\varepsilon} \right]. \quad (3.38)$$

Введем быстрое время τ с помощью формулы $t = \varepsilon \tau$ и обозначим штрихом дифференцирование по отношению к τ . Тогда из системы (3.36) мы получим следующую систему в стандартной форме

$$\begin{aligned}q' &= \varepsilon \left(\frac{1}{m l^2} p - \frac{1}{l} \zeta'(\tau) \sin q \right) \\ p' &= \varepsilon \left[-m g l \sin q - \frac{2c}{m} p + \left(\frac{p}{l} \cos q + 2c l \sin q \right) \zeta'(\tau) - \right. \\ &\quad \left. - m \zeta'^2(\tau) \cos q \sin q \right].\end{aligned} \quad (3.39)$$

Учитывая выражение (3.38), мы получим в правой части системы (3.39) члены, содержащие быстрое время τ и медленное время $\varepsilon \tau$. Усредним систему (3.39) по быстрому времени τ . Получим усредненную систему

$$\begin{aligned}q' &= \varepsilon \frac{1}{m l^2} p, \\ p' &= \varepsilon \left[-m g l \sin q - \frac{2c}{m} p - \frac{m}{4} p(\tau) \sin 2q \right],\end{aligned} \quad (3.40)$$

где $p(\tau) = \omega_1^2(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \Delta \tau)$. Усредненная система (40) может быть записана в виде уравнения второго порядка по отношению к переменной q . Это уравнение во времени t имеет форму

$$\ddot{q} + \frac{2c}{m} \dot{q} + \frac{g}{l} \sin q + \frac{p(t)}{4l^2} \sin 2q = 0, \quad (3.41)$$

где $p(t) = \nu_1^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \cos \Delta t)$. Из теорем 2.1.6 и 2.1.7 следует, что вопрос об устойчивости нижнего состояния равновесия маятника при достаточно малых ε сводится к исследованию устойчивости нулевого решения уравнения

$$\ddot{q} + \frac{2c}{m}\dot{q} + \frac{1}{2l^2}(2gl + p(t))q = 0. \quad (3.42)$$

Для верхнего состояния равновесия маятника получим уравнение

$$\ddot{q} + \frac{2c}{m}\dot{q} + \frac{1}{2l^2}(-2gl + p(t))q = 0. \quad (3.43)$$

Из анализа уравнения (3.43) следует, что движение подвеса маятника по закону, определяемому формулой (3.38), может привести к дестабилизации верхнего состояния равновесия маятника, которое было бы устойчиво, если бы частоты не были близки. Богданов и Ситрон [76] показали экспериментально, что такие дестабилизационные эффекты быстрых параметрических возбуждений, у которых частоты близки друг к другу, имеют место.

Отметим также, что анализ уравнения (3.42) показывает, что близость двух частот может дестабилизировать нижнее состояние равновесия маятника.

Следовательно, колебания подвеса маятника под действием двух периодических сил с близкими частотами могут привести к новым эффектам в поведении маятника.

Пусть теперь вместо соотношения (3.37) удовлетворяется соотношение

$$\omega_2 - 2\omega_1 = \varepsilon\Delta. \quad (3.44)$$

Соотношение (3.44) не оказывает влияния на уравнения первого приближения. Следовательно, оно может оказать влияние на устойчивость состояний равновесия маятника, если проблема устойчивости не решается в первом приближении.

Пусть закон движения подвеса, зависящий от времени τ определяется формулой

$$\zeta(\tau) = a_1 \cos \omega_1 \tau + a_2 \cos \omega_2 \tau + a_3 \cos \omega_3 \tau$$

и

$$\omega_1 - \omega_2 = \varepsilon\Delta_1, \quad \omega_1 - \omega_3 = \varepsilon\Delta_2.$$

Тогда вопрос об устойчивости нижнего и верхнего состояний равновесия маятника при достаточно малых ε сводится к исследованию устойчивости нулевого решения для уравнений (3.42) и (3.43) соответственно. Но теперь $p(t)$ будет почти периодической функцией.

Предположим теперь, что

$$\omega_1 - \omega_2 = \varepsilon^2 \Delta \quad (\Delta = \text{const}, \Delta > 0) \quad (3.45)$$

и

$$f(t) = \varepsilon \left[a_1 \cos \omega_1 \frac{t}{\varepsilon} + a_2 \cos(\omega_1 + \varepsilon^2 \Delta) \frac{t}{\varepsilon} \right] = \varepsilon \zeta \left(\frac{t}{\varepsilon} \right). \quad (3.46)$$

Снова перейдем к быстрому времени $\tau = t/\varepsilon$ в системе (3.36). Мы получим систему в стандартной форме, которая во времени $\tau_1 = \varepsilon^2 \tau$ будет сингулярно возмущенной системой (п.2.1.7). Усредняя систему (3.36) по быстрому времени τ . Получим усредненную сингулярно возмущенную систему во времени τ_1 :

$$\begin{aligned} \varepsilon q' &= \frac{1}{ml^2} p, \\ \varepsilon p' &= \left[-mgl \sin q - \frac{2c}{m} p - \frac{m}{4} b(\tau_1) \sin 2q \right], \end{aligned} \quad (3.47)$$

где

$$b(\tau_1) = \frac{1}{2} \omega_1^2 (a_1^2 + a_2^2) + a_1 a_2 \omega_1^2 \cos \Delta \tau_1.$$

Вырожденная система (мы полагаем $\varepsilon = 0$ в (3.47))

$$\begin{aligned} \frac{1}{ml^2} p &= 0, \\ -mgl \sin q - \frac{2c}{m} p - \frac{m}{4} b(\tau_1) \sin 2q &= 0 \end{aligned}$$

имеет четыре решения:

$$\begin{aligned} 1) \quad q_1 &\equiv 0, \quad p_1 \equiv 0, \quad 2) \quad q_2 \equiv \pi, \quad p_2 \equiv 0, \\ 3, 4) \quad q_{3,4} &= \pm \arccos \left(\frac{-gl}{b(\tau_1)} \right), \quad p_{3,4} \equiv 0. \end{aligned}$$

Два последних решения существуют, если только удовлетворяется неравенство

$$\inf_{-\infty < \tau_1 < \infty} b(\tau_1) > gl. \quad (3.48)$$

Легко вычислить, что

$$\begin{aligned} \inf_{-\infty < \tau_1 < \infty} b(\tau_1) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \omega_2^2 (a_1 - a_2)^2, & a_1 a_2 > 0, \\ \frac{1}{2} \omega_2^2 (a_1 + a_2)^2, & a_1 a_2 < 0, \end{cases} \\ \sup_{-\infty < \tau_1 < \infty} b(\tau_1) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \omega_2^2 (a_1 + a_2)^2, & a_1 a_2 > 0, \\ \frac{1}{2} \omega_2^2 (a_1 - a_2)^2, & a_1 a_2 < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

Линеаризуем усредненную систему на состояниях равновесия 1), 2) возбужденной системы. Получим системы

$$\varepsilon q'_1 = \frac{1}{ml^2} p_1,$$

$$\varepsilon p'_1 = \left[-mglq_1 - \frac{2c}{m}p_1 - \frac{m}{2}b(\tau_1)q_1 \right],$$

и

$$\varepsilon q'_2 = \frac{1}{ml^2} p_2,$$

$$\varepsilon p'_2 = \left[-mglq_2 - \frac{2c}{m}p_2 + \frac{m}{2}b(\tau_1)q_2 \right]$$

соответственно. Из анализа этих систем и теоремы 2.1.7 следует, что при достаточно малых ε нижнее состояние равновесия маятника асимптотически устойчиво. Верхнее состояния равновесия асимптотически устойчиво, если $\inf_{-\infty < \tau_1 < \infty} b(\tau_1) > gl$ и неустойчиво, если $\sup_{-\infty < \tau_1 < \infty} b(\tau_1) < gl$ (см. [62, 63]).

3.8 Система шайба-маятник с вибрирующим основанием (маятник Челомея)

Под **маятником Челомея** (см. [67]) понимается система, состоящая из стержня, который может поворачиваться вокруг определенной оси ("оси подвеса"), и твердого тела ("шайбы"), которая может перемещаться вдоль стержня.

Рис. 3.2: Маятник Челомея.

Челомеем [67] было экспериментально обнаружено, что вследствие вертикальной вибрации оси подвеса устойчивым при определенных условиях оказывается верхнее положение стержня. При этом шайба занимает

на стержне некоторое фиксированное положение. Статья Челомея привлекла внимание. И появилось несколько статей, в которых исследовалась эта система. Меняйлов и Мовчан [49] изучили поведение маятника Челомея с помощью метода усреднения. Они предполагали, что ось подвеса совершает как горизонтальные, так и вертикальные вибрации. Блехман и Малахова [12] при тех же предположениях рассмотрели поведение шайбы на абсолютно жестком стержне, а также на упругом стержне, вибрирующим заданным образом в режиме стоячей волны. Рагульскис и Нагянавичюс [56] также изучали поведение шайбы на вибрирующем упругом стержне. Киргетов [35] получил условия устойчивости шайбы в верхнем положении стержня другим аналитическим методом. Во всех перечисленных работах было показано, что стабилизация верхнего состояния равновесия маятника достигается за счет горизонтальной составляющей вибраций точки подвеса. В работе Томсена и Черняка [117] предпринята новая попытка объяснить эксперименты Челомея. Они показали, что небольшой дефект нарушения симметрии, такой как небольшое отклонение от точного вертикального возбуждения, может обеспечить механизм для появления стационарных вибраций гибкого стержня. В работе Асташева, Бабицкого, Веприка, Крупенина [26] (см. также Приложение С) рассмотрено поведение шайбы на струне или упругом стержне при возбуждении их колебаний заданной распределенной нагрузкой. Показано, что подвижную шайбу можно использовать в качестве гасителя колебаний. Это утверждение было также проверено экспериментально. Для исследования маятника Челомея мы применим тот же метод, который использовался при изучении простого маятника п. 3.3.

Рассмотрим физический маятник в виде шарнирно закрепленного за один конец неоднородного стержня массы M , совершающего движения в вертикальной плоскости вокруг точки подвеса. Пусть на стержень надета шайба массы m , внутренний диаметр которой равен толщине стержня и которая свободно перемещаться вдоль него. Точка подвеса маятника совершает периодические колебания с высокой частотой, имеющие вертикальную и горизонтальную составляющие. Уравнения движения описываемой системы имеет вид (см. [49])

$$(I_0 + I_1 + mx^2)\ddot{\varphi} + 2mx\dot{x}\dot{\varphi} + k_1\dot{\varphi} - (ML + mx)(g + \ddot{f}_1(t)) \sin \varphi +$$

$$(ML + mx)\ddot{f}_2(t) \cos \varphi = 0,$$

$$\ddot{x} - x\dot{\varphi}^2 + k_2\dot{x} + (g + \ddot{f}_1(t)) \cos \varphi + \ddot{f}_2(t) \sin \varphi = 0.$$

(3.49)

Здесь I_0 - момент инерции стержня без шайбы относительно оси враще-

ния, $I_1 + mx^2$ - момент инерции шайбы, I_1 - собственный момент инерции шайбы, x - текущая координата шайбы, отсчитываемая вдоль стержня, φ - текущий угол поворота стержня при колебаниях, отсчитываемый от вертикали, L - расстояние от центра массы стержня до точки подвеса, g - ускорение свободного падения, $k_1\dot{\varphi}$ - момент трения, создаваемый движением всей системы, $k_1\dot{x}$ - сила трения шайбы о стержень, $f_1(t)$ - вертикальная составляющая колебаний точки подвеса, $f_2(t)$ - горизонтальная составляющая колебаний точки подвеса, Пока не будем уточнять вид функций $f_1(t)$, $f_2(t)$. Положим $p(x) = I_0 + I_1 + mx^2$, $r(x) = ML + mx$ и перейдем от системы (3.49) к системе четырех уравнений первого порядка. Сделаем замену

$$\dot{\varphi} = \frac{\psi}{p(x)} + \frac{r(x)}{p(x)}[\dot{f}_1(t) \sin \varphi - \dot{f}_2(t) \cos \varphi], \quad (3.50)$$

$$\dot{x} = \xi - \dot{f}_1(t) \cos \varphi - \dot{f}_2 \sin \varphi.$$

Замена (3.50) вводит две новые переменные ψ и ξ и является по существу заменой, которая дает возможность записать систему (3.49) в гамильтоновой форме при наличии сил трения. В силу первой из формул (3.50)

$$\frac{d}{dt}(p(x)\dot{\varphi}) = p(x)\ddot{\varphi} + 2mx\dot{x}\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}(\psi + r(x)\dot{f}_1(t) \sin \varphi - r(x)\dot{f}_2(t) \cos \varphi).$$

Подставляя последнее выражение в первое уравнение системы (3.49) и учитывая вторую формулу замены (3.50), получим

$$\dot{\psi} = -\frac{k_1\psi}{p(x)} - \left[\left(m\xi + \frac{k_1r(x)}{p(x)} \right) \sin \varphi + \frac{r(x)\psi}{p(x)} \cos \varphi \right] \dot{f}_1(t) -$$

$$\left[\left(-m\xi + \frac{k_1r(x)}{p(x)} \right) \cos \varphi + \right.$$

$$\left. \frac{r(x)\psi}{p(x)} \sin \varphi \right] \dot{f}_2(t) +$$

$$\left(m - \frac{r^2(x)}{p(x)} \right) \left[\dot{f}_1^2(t) \sin \varphi \cos \varphi - \dot{f}_2^2(t) \sin \varphi \cos \varphi - \right.$$

$$\left. \dot{f}_1(t)\dot{f}_2(t) \cos 2\varphi \right] + r(x)g \sin \varphi.$$

Подставляя вторую формулу замены (3.50) во второе уравнение системы

(3.49), получим

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} = & -k_2\xi - \left[\frac{1}{p(x)} \left(1 - \frac{2xr(x)}{p(x)} \right) \sin \varphi - k_2 \cos \varphi \right] \dot{f}_1(t) - \\
& \left[-\frac{\psi}{p(x)} \left(1 - \frac{2xr(x)}{p(x)} \right) \cos \varphi \right. \\
& \left. - k_2 \sin \varphi \right] \dot{f}_2(t) - \frac{r(x)}{p(x)} \left(1 - \frac{xr(x)}{p(x)} \right) [\dot{f}_1^2(t) \sin^2 \varphi + \dot{f}_2^2(t) \cos^2 \varphi - \\
& - \dot{f}_1(t) \dot{f}_2(t) \sin 2\varphi] - g \cos \varphi + x \frac{\psi^2}{p^2(x)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем систему четырех уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} = & \frac{\psi}{p(x)} + \frac{r(x)}{p(x)} [\dot{f}_1(t) \sin \varphi - \dot{f}_2(t) \cos \varphi], \\
\dot{\psi} = & -\frac{k_1\psi}{p(x)} - \left[\left(m\xi + \frac{k_1r(x)}{p(x)} \right) \sin \varphi + \frac{r(x)\psi}{p(x)} \cos \varphi \right] \dot{f}_1(t) - \\
& \left[\left(-m\xi + \frac{k_1r(x)}{p(x)} \right) \cos \varphi + \right. \\
& \left. \frac{r(x)\psi}{p(x)} \sin \varphi \right] \dot{f}_2(t) + \\
& \left(m - \frac{r^2(x)}{p(x)} \right) [\dot{f}_1^2(t) \sin \varphi \cos \varphi - \dot{f}_2^2(t) \sin \varphi \cos \varphi - \\
& \dot{f}_1(t) \dot{f}_2(t) \cos 2\varphi] + r(x)g \sin \varphi, \\
\dot{x} = & \xi - \dot{f}_1(t) \cos \varphi - \dot{f}_2(t) \sin \varphi, \\
\dot{\xi} = & -k_2\xi - \left[\frac{1}{p(x)} \left(1 - \frac{2xr(x)}{p(x)} \right) \sin \varphi - k_2 \cos \varphi \right] \dot{f}_1(t) - \\
& \left[-\frac{\psi}{p(x)} \left(1 - \frac{2xr(x)}{p(x)} \right) \cos \varphi \right. \\
& \left. - k_2 \sin \varphi \right] \dot{f}_2(t) - \frac{r(x)}{p(x)} \left(1 - \frac{xr(x)}{p(x)} \right) [\dot{f}_1^2(t) \sin^2 \varphi + \dot{f}_2^2(t) \cos^2 \varphi - \\
& - \dot{f}_1(t) \dot{f}_2(t) \sin 2\varphi] - g \cos \varphi + x \frac{\psi^2}{p^2(x)}.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Будем предполагать, что функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ определяются формулами

$$f_1(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \cos \nu_k t + \beta_k \sin \nu_k t,$$

$$f_2(t) = \sum_{k=1}^N \gamma_k \cos \nu_k t + \delta_k \sin \nu_k t,$$

где $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k, \nu_k$ ($k = 1, \dots, N$) - вещественные постоянные. Далее, будем предполагать, что амплитуды $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ достаточно малы, а частоты ν_k достаточно велики:

$$\alpha_k = \varepsilon a_k, \beta_k = \varepsilon b_k, \gamma_k = \varepsilon c_k, \delta_k = \varepsilon d_k, \nu_k = \frac{\omega_k}{\varepsilon},$$

где $a_k, b_k, c_k, d_k, \omega_k$ ($k = 1, \dots, N$) - величины порядка $O(1)$ относительно ε . Тогда функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ можно записать в виде

$$f_1(t) = \varepsilon \sum_{k=1}^N a_k \cos \omega_k \frac{t}{\varepsilon} + b_k \sin \omega_k \frac{t}{\varepsilon} = \varepsilon g_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),$$

$$f_2(t) = \varepsilon \sum_{k=1}^N d_k \cos \omega_k \frac{t}{\varepsilon} + c_k \sin \omega_k \frac{t}{\varepsilon} = \varepsilon g_2\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

В системе (3.51) как обычно перейдем к быстрому времени τ по формуле $\varepsilon \tau = t$ и обозначим дифференцирование по τ штрихом. Получим систему

$$\varphi' = \frac{\psi}{p(x)} + \frac{r(x)}{p(x)} [g_1'(\tau) \sin \varphi - g_2'(\tau) \cos \varphi],$$

$$\psi' = -\frac{k_1 \psi}{p(x)} - \left[\left(m\xi + \frac{k_1 r(x)}{p(x)} \right) \sin \varphi + \frac{r(x) \psi}{p(x)} \cos \varphi \right] g_1'(\tau) -$$

$$\left[\left(-m\xi + \frac{k_1 r(x)}{p(x)} \right) \cos \varphi + \right.$$

$$\left. \frac{r(x) \psi}{p(x)} \sin \varphi \right] g_2'(\tau) +$$

$$\left(m - \frac{r^2(x)}{p(x)} \right) [g_1'^2(\tau) \sin \varphi \cos \varphi - g_2'^2(\tau) \sin \varphi \cos \varphi -$$

$$g_1'(\tau) g_2'(\tau) \cos 2\varphi] + r(x) g \sin \varphi,$$

(3.52)

$$x' = \xi - g_1'(\tau) \cos \varphi - g_2'(\tau) \sin \varphi,$$

$$\xi' = -k_2 \xi - \left[\frac{\psi}{p(x)} \left(1 - \frac{2xr(x)}{p(x)} \right) \sin \varphi - k_2 \cos \varphi \right] g_1'(\tau) -$$

$$\left[-\frac{\psi}{p(x)} \left(1 - \frac{2xr(x)}{p(x)} \right) \cos \varphi \right.$$

$$\left. -k_2 \sin \varphi \right] g_2'(\tau) - \frac{r(x)}{p(x)} \left(1 - \frac{xr(x)}{p(x)} \right) [g_1'^2(\tau) \sin^2 \varphi + g_2'^2(\tau) \cos^2 \varphi -$$

$$-g_1'(\tau) g_2'(\tau) \sin 2\varphi] - g \cos \varphi + x \frac{\psi^2}{p^2(x)}.$$

Система (3.52) имеет стандартную форму. Усредним ее и сохраним те же обозначения для переменных. Получим систему

$$\begin{aligned}\varphi' &= \varepsilon \frac{\psi}{p(x)}, \\ \psi' &= \varepsilon \left\{ -\frac{k_1 \psi}{p(x)} + P(x, \varphi) \right\}, \\ x' &= \varepsilon \xi, \\ \xi' &= \varepsilon \{ -k_2 \xi - Q(x, \varphi) \},\end{aligned}\tag{3.53}$$

где

$$\begin{aligned}P(x, \varphi) &= \left(m - \frac{r^2(x)}{p(x)} \right) [(\langle g_1'^2(\tau) \rangle - \langle g_2'^2(\tau) \rangle) \sin \varphi \cos \varphi - \\ &\langle g_1'(\tau) g_2'(\tau) \rangle \cos 2\varphi] + r(x) g \sin \varphi, \\ Q(x, \varphi) &= \frac{r(x)}{p(x)} \left(1 - \frac{x r(x)}{p(x)} \right) [\langle g_1'^2(\tau) \rangle \sin^2 \varphi + \langle g_2'^2(\tau) \rangle \cos^2 \varphi - \\ &\langle g_1'(\tau) g_2'(\tau) \rangle \sin 2\varphi] + g \cos \varphi,\end{aligned}$$

а $\langle g(\tau) \rangle$ - среднее значение функции $g(\tau)$. Усредненную систему (3.53) можно записать в виде двух уравнений второго порядка

$$p(x)\varphi'' + 2mx\varphi' + \varepsilon k_1\varphi' - \varepsilon^2 P(x, \varphi) = 0,\tag{3.54}$$

$$x'' - x\varphi'^2 + \varepsilon k_2 x' + \varepsilon^2 Q(x, \varphi) = 0.$$

Состояния равновесия усредненной системы (3.54) определяются из уравнений

$$P(x, \varphi) = 0, \quad Q(x, \varphi) = 0.\tag{3.55}$$

Система (3.55) имеет несколько решений. Исследуем, случаи когда существует и устойчиво решение $\varphi = 0$, т.е. устойчиво верхнее состояние равновесия маятника. Из первого уравнения системы (3.55) следует, что для существования решения $\varphi = 0$ необходимо выполнение равенства

$$\langle g_1'(\tau) g_2'(\tau) \rangle = 0.$$

Из второго уравнения системы (3.55) следует, что для существования решения $\varphi = 0$ необходимо выполнение неравенства

$$\langle g_2'^2(\tau) \rangle \neq 0.$$

Последнее неравенство означает, что усредненная система имеет состояния равновесия $\varphi = 0$, если отлична от нуля горизонтальная составляющая вибрации подвеса маятника.

Найдем теперь такое состояние равновесия $x = x_0$ усредненной системы, что $x = x_0$, $\varphi = 0$ устойчивое равновесие системы (3.55). Отметим,

что

$$P_\varphi(x_0, 0) = Q_x(x_0, 0) = 0.$$

Характеристическое уравнение линеаризованной на состоянии равновесия $(x_0, 0)$ системы (3.55) имеет вид

$$\left(\lambda^2 + \frac{k_1}{p(x)} \lambda - \frac{P_\varphi(x_0, 0)}{p(x)} \right) (\lambda^2 + k_2 \lambda - Q_x(x_0, 0)) = 0.$$

Поэтому условия устойчивости состояния равновесия $(x_0, 0)$ имеют вид

$$P_\varphi(x_0, 0) < 0, \quad Q_x(x_0, 0) < 0.$$

Выпишем уравнение для отыскания состояния равновесия $x = x_0$ при $\varphi = 0$:

$$-\frac{r(x)}{p(x)} \left(1 - \frac{xr(x)}{p(x)} \right) \langle g_2^2(\tau) \rangle = g. \quad (3.56)$$

Уравнение (3.56) можно записать следующим образом

$$\frac{(ML + mx)(MLx - I)}{(I + mx^2)^2} \langle g_2^2(\tau) \rangle = g, \quad (3.57)$$

где $I = I_0 + I_1$. Наконец, если положить

$$\zeta = \frac{MLx}{I}, \quad \mu = \frac{mI}{M^2 L^2}, \quad \sigma = \frac{ML \langle g_2^2(\tau) \rangle}{gI},$$

то уравнение (3.57) можно записать в виде

$$\Phi(\zeta) = \frac{(1 + \mu\zeta)(\zeta - 1)}{(1 + \mu\zeta^2)^2} = \frac{1}{\sigma}. \quad (3.58)$$

В зависимости от величины σ (следовательно, величины $\langle g_2^2(\tau) \rangle$) уравнение (3.58) может иметь одно решение, два решения или вовсе не иметь решений. Заметим еще, что из (3.58) следует, что должно выполняться неравенство

$$\zeta > 1. \quad (3.59)$$

Точка экстремума $\zeta = \zeta^*$ функции $\Phi(\zeta)$ при фиксированном μ определяется из уравнения

$$\mu^2 \zeta^2 (3 - 2\zeta) - \mu (3\zeta^2 - 6\zeta + 1) + 1 = 0, \quad (3.60)$$

причем, следует учесть (3.59). Уравнение (3.60) относительно μ не имеет решений, если $\zeta < 3/2$, и имеет единственное положительное относительно μ решение, если $\zeta > 3/2$. Если выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sigma} < \zeta^*,$$

то уравнение (3.58) имеет два решения ζ_1, ζ_2 . При этом

$$\Phi'(\zeta_1) > 0, \quad \Phi'(\zeta_2) < 0.$$

Учитывая, что

$$Q(\zeta, 0) = \Phi(\zeta) - \frac{1}{\sigma},$$

получаем

$$Q_\zeta(\zeta_1) > 0, \quad Q_\zeta(\zeta_2) < 0.$$

Отсюда следует, что состояние равновесия $(x_{01}, 0)$, где $x_{01} = \frac{I\zeta_1}{ML}$ неустойчиво. Состояние равновесия $(x_{02}, 0)$, где $x_{02} = \frac{I\zeta_2}{ML}$, устойчиво, если выполняется неравенство

$$P_\varphi(x_{02}, 0) = -\frac{M^2L^2 + 2MLx_{02} - mI}{I + mx_{02}^2}(\langle g_1^2(\tau) \rangle - \langle g_2^2(\tau) \rangle) + (ML + mx_{02})g < 0.$$

Для выполнения последнего неравенства необходимо, чтобы при колебании подвеса амплитуда колебаний вертикальной составляющей превышала амплитуду колебаний горизонтальной составляющей.

Таким образом, при существенных дополнительных условиях можно добиться стабилизации вертикального положения стержня с шайбой. При этом следует заметить, что для стержня конечной длины L должно быть выполнено неравенство $0 \leq x \leq L$.

3.9 Плоские вибрации маятника и сопряженность резонансов

Мы рассмотрели в п. 3.5 плоские вибрации маятника, когда точка подвеса совершает синусоидальные гармонические колебания вдоль прямой, составляющей угол с вертикалью.

В работах [10, 11, 74] на физическом уровне строгости проведено теоретическое исследование эффектов действия на нелинейные системы двухчастотного возбуждения с существенно различающимися частотами.

В [11] рассматривался маятник с вибрирующим подвесом. Исследование выполнено с помощью метода прямого разделения движений [9].

Результаты с соответствующих экспериментальных исследования содержатся в [73, 98].

Ниже исследование этой задачи проводится с помощью метода усреднения (п. 2.1.6) для систем с быстрыми и медленными возбуждениями. Дается строгий вывод усредненного уравнения.

Рассмотрим простой маятник. Пусть ось маятника совершает колебания в взаимно перпендикулярных направлениях под действием двухчастотного возбуждения с существенно различающимися частотами. Пусть эти колебания определяются следующими формулами

$$\begin{aligned} x(t) &= F_1(t) = H_\omega \sin \omega t, \\ y(t) &= F_2(t) = G_\Omega \cos(\Omega t + \theta_\Omega) \end{aligned}$$

Уравнение Лагранжа данной задачи имеет вид

$$\ddot{q} + \frac{2c}{m}\dot{q} + \left[\frac{g}{l} + \frac{\dot{F}_2}{l} \right] \sin q + \frac{\dot{F}_1}{l} \cos q = 0.$$

Снова переходим к системе в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{1}{ml^2}p - \frac{\dot{F}_1}{l} \cos q - \frac{\dot{F}_2}{l} \sin q, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{2c}{m}p + (2cl \cos q - \frac{p}{l} \sin q)\dot{F}_1 + (2cl \sin q + \frac{p}{l} \cos q)\dot{F}_2 + \\ &+ \frac{m}{2}[(\dot{F}_1)^2 - (\dot{F}_2)^2] \sin 2q - mF_1'F_2' \cos 2q - mgl \sin q. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Будем предполагать, что частота Ω достаточно велика, а амплитуда высокочастотных вибраций достаточно мала. А именно, предположим, что существует такой малый положительный параметр ε , для которого

$$G_\Omega = \varepsilon a_1, \quad \Omega = \frac{\nu}{\varepsilon}.$$

Законы движения точки подвеса имеют вид

$$F_1(t) = H_\omega \sin \omega t,$$

$$F_2(t) = a_1 \nu \sin(\frac{\nu}{\varepsilon}t + \theta_\Omega)$$

Перейдем к быстрому времени $\tau = t/\varepsilon$ и обозначим дифференцирование по τ штрихом. Получим

$$\begin{aligned} q' &= \varepsilon \left[\frac{1}{ml^2}p - \frac{F_1'}{l} \cos q - \frac{F_2'}{l} \sin q \right], \\ p' &= \varepsilon \left[-\frac{2c}{m}p + (2cl \cos q - \frac{p}{l} \sin q)F_1' + (2cl \sin q + \frac{p}{l} \cos q)F_2' + \right. \\ &\left. + \frac{m}{2}(F_1'^2 - F_2'^2) \sin 2q - mF_1'F_2' \cos 2q - mgl \sin q \right]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Здесь

$$F_1'(\tau) = H_\omega \omega \cos \omega \varepsilon \tau,$$

$$F_2'(\tau) = -a_1 \nu \sin(\nu \tau + \theta_\Omega).$$

Система (3.62) представляет собой систему стандартную для применения метода усреднения. Правые части системы содержат слагаемые с быстрым временем τ и медленным временем $\varepsilon \tau$. Усредняя правые части системы (3.62) по быстрому времени, получим систему

$$\begin{aligned}
q' &= \varepsilon \left[\frac{1}{ml^2} p - \frac{f_1(\tau)}{l} \cos q - \frac{f_2(\tau)}{l} \sin q \right], \\
p' &= \varepsilon \left[-\frac{2c}{m} p + (2cl \cos q - \frac{p}{l} \sin q) f_1(\tau) + \right. \\
&\quad (2cl \sin q + \frac{p}{l} \cos q) f_2(\tau) + \frac{m}{2} (f_3(\tau) - f_4(\tau)) \sin 2q \\
&\quad \left. - m f_5(\tau) \cos 2q - mgl \sin q \right],
\end{aligned} \tag{3.63}$$

где $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$, $f_3(\tau)$, $f_4(\tau)$, $f_5(\tau)$ - средние значения по быстрому времени функций $F_1'(\tau)$, $F_2'(\tau)$, $F_1'^2(\tau)$, $F_2'^2(\tau)$, $F_1'(\tau)F_2'(\tau)$ соответственно. Выполнив вычисления, получим систему

$$\begin{aligned}
q' &= \varepsilon \left[\frac{1}{ml^2} p - \frac{H_\omega \omega \cos \varepsilon \omega \tau}{l} \cos q \right], \\
p' &= \varepsilon \left[-\frac{2c}{m} p + \left(2cl \cos q - \frac{p}{l} \sin q \right) H_\omega \cos \varepsilon \omega \tau + \right. \\
&\quad \left. + \frac{m}{2} \left(H_\omega^2 \omega^2 \cos^2 \varepsilon \omega \tau - \frac{a_1^2 \nu^2}{2} \right) \sin 2q - mgl \sin q \right].
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Правые части системы (3.64) зависят от медленного времени. Усредненная система (3.64) - это система с периодическими коэффициентами. Как известно (см. п. 9.4 в [17]), если усредненная система (3.64) имеет равномерно асимптотически устойчивое решение, то решения системы (3.62) с достаточно близкими к этому решению начальными условиями, близки к нему на бесконечном промежутке.

Вернемся к исходному времени t и вспомним, что $\nu = \varepsilon \Omega$. Получим

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{1}{ml^2} p - \frac{H_\omega \omega \cos \omega t}{l} \cos q, \\
\dot{p} &= -\frac{2c}{m} p + \left(2cl \cos q - \frac{p}{l} \sin q \right) H_\omega \omega \cos \omega t + \\
&\quad \frac{m}{2} \left(H_\omega^2 \omega^2 \cos^2 \omega t - \frac{G_0^2 \Omega^2}{2} \right) \sin 2q - mgl \sin q.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Проанализируем малые колебания в системе (3.65) в окрестности нижнего состояния равновесия невозмущенного маятника, т.е. рассмотрим линейную систему

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{1}{ml^2}p - \frac{H_\omega \omega \cos \omega t}{l}, \\ \dot{p} &= -\frac{2c}{m}p + 2clH_\omega \cos \omega t + m \left(H_\omega^2 \omega^2 \cos^2 \omega t - \frac{G_\Omega^2 \Omega^2}{2} \right) q - mglq.\end{aligned}\quad (3.66)$$

Упростим систему (3.66), пренебрегая затуханием. Получим:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{1}{ml^2}p - \frac{H_\omega \omega \cos \omega t}{l}, \\ \dot{p} &= m \left(H_\omega^2 \omega^2 \cos^2 \omega t - \frac{G_\Omega^2 \Omega^2}{2} \right) q - mglq.\end{aligned}\quad (3.67)$$

Систему (3.67) можно записать в виде уравнения второго порядка

$$\ddot{q} = \frac{1}{l^2} \left(\frac{H_\omega^2 \omega^2}{2} + \frac{H_\omega^2 \omega^2}{2} \cos 2\omega t - \frac{G_\Omega^2 \Omega^2}{2} \right) q - \frac{g}{l}q + \frac{1}{l}H_\omega \omega \sin \omega t,$$

или,

$$\ddot{q} + \frac{1}{l^2} \left(-\frac{H_\omega^2 \omega^2}{2} + \frac{G_\Omega^2 \Omega^2}{2} + gl - \frac{1}{2}H_\omega^2 \omega^2 \cos 2\omega t \right) q - \frac{1}{l}H_\omega \omega \cos \omega t = 0.\quad (3.68)$$

Будем предполагать, что выполнено неравенство

$$-\frac{H_\omega^2 \omega^2}{2} + \frac{G_\Omega^2 \Omega^2}{2} + gl > 0,$$

которое означает, что собственные колебания системы (3.68) носят устойчивый характер.

Уравнение (3.68) представляет собой периодически возмущенное уравнение Матье.

В системе (3.68) силовой резонанс происходит при

$$\omega^2 = \frac{1}{l^2} \left(-\frac{H_\omega^2 \omega^2}{2} + \frac{G_\Omega^2 \Omega^2}{2} + gl \right).$$

Отсюда следует, что

$$\omega = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\frac{G_\Omega^2 \Omega^2}{2} + gl}{1 + \frac{H_\omega^2}{2l^2}}}.\quad (3.69)$$

Будем понимать под резонансами явление достижения максимальных амплитуд колебаний и варьирование параметрами системы. Резонансы, частоты которых связаны соотношением типа (3.69), в работах [10, 12, 74] названы сопряженными, так как они могут возникать и при варьировании низкой частоты ω , если зафиксировать большую частоту Ω , и при варьировании высокой частоты, когда зафиксирована низкая.

Усредненные уравнения малых колебаний в окрестности верхнего состояния равновесия невозмущенного маятника имеют вид

$$\ddot{q} + \frac{1}{l^2} \left(-\frac{H_\omega^2 \omega^2}{2} + \frac{G_\Omega^2 \Omega^2}{2} - gl + \frac{1}{2} H_\omega^2 \omega^2 \cos 2\omega t \right) q - \frac{1}{l} H_\omega \omega \cos \omega t = 0.$$

Таким образом при выполнении неравенства

$$-\frac{H_\omega^2 \omega^2}{2} + \frac{G_\Omega^2 \Omega^2}{2} - gl > 0$$

резонансная частота имеет вид

$$\omega = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\frac{G_\Omega^2 \Omega^2}{2} - gl}{1 + \frac{H_\omega^2}{2l^2}}}. \quad (3.70)$$

В случае параметрического резонанса [см. [9], [25)] в системе (3.68) сказанное выше, можно повторить учитывая значения частот параметрического резонанса.

Глава 4

Квазиконсервативные виброударные системы

4.1 Автоколебания ударного осциллятора

4.1.1 Введение

В этом и следующих разделах рассматриваются виброударные системы с одной степенью свободы (см. Приложение А). Будут использованы представления виброударных процессов через интегралы движения виброударных систем. Выбираемые переменные (импульс-фаза) физически естественны для колебательных процессов, сопровождающихся ударами. Импульс удара является важнейшей характеристикой удара, а фаза - суть момент соударения. Можно показать, что переменные импульс-фаза эквивалентны переменным действие-угол (п. 2.3.1) и являются канонически сопряженными переменными.

Пусть система линейна между соударениями. В случае мгновенного удара представления периодических виброударных процессов могут быть записаны через периодические функции Грина (п. 1.3.2), определяемые только параметрами линейного осциллятора, соударяющегося с ограничителями, а также при помощи интегралов движения импульс-фаза.

В данном разделе рассматриваются применения метода усреднения к изучению вопроса о существовании и устойчивости периодических автоколебаний квазиконсервативного ударного осциллятора. Задача сводится к исследованию двумерной системы дифференциальных уравнений с быстро вращающейся фазой и разрывами по фазе.

4.1.2 Ударный осциллятор: консервативная модель

Здесь мы следуем книгам [8, 72].

Рассмотрим линейную колебательную систему с уравнением движения $\ddot{x} + \Omega^2 x = 0$, описывающую гармонические колебания тела единичной массы, укрепленного на пружине с жесткостью Ω^2 . Фазовый портрет системы - эллипсы

$$H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \Omega^2 x^2) = E = \text{const.}$$

Установим в точке $x = \Delta$ неподвижный ограничитель (рис. 4.1) и будем

Рис.4.1: Ударный осциллятор с зазором

предполагать, что по достижении координатой x значения Δ в системе происходит мгновенный упругий удар, так что если $x = \Delta$ в момент времени t_α , то выполняется соотношение

$$\dot{x}(t_\alpha - 0) = -\dot{x}(t_\alpha + 0). \quad (4.1)$$

При наличии зазора, когда $\Delta > 0$, эллипсы, соответствующие линейной системе, “разрезаются” вертикальной прямой $x = \Delta$ и истинным траекториям соответствуют их левые части (рис. 4.2). Если уровень энергии в линейной системе недостаточен для выхода на уровень $x = \Delta$, происходят линейные колебания с частотой Ω . При наличии соударений частота колебаний $\omega > \Omega$ и с увеличением энергии возрастает, но не может быть больше значения 2Ω , так что

$$\Omega < \omega < 2\Omega, \quad \Delta > 0. \quad (4.2)$$

Рис. 4.2: Фазовый портрет ударного осциллятора с зазором.
Жесткий аназохронизм

При натяге $\Delta < 0$ частота колебаний ω удовлетворяет неравенству

(рис. 4.3)

$$2\Omega < \omega < \infty, \quad \Delta < 0. \quad (4.3)$$

Рис. 4.3: Фазовый портрет ударного осциллятора с натягом.
Мягкий анизохронизм

При $\Delta = 0$ получаем эллипс, “разрезанный” точно пополам (рис. 4.4). Поэтому для всех значений энергии изображающая точка проходит любую фазовую траекторию за одно и то же время с удвоенной скоростью 2Ω , так что

$$\omega = 2\Omega, \quad \Delta = 0. \quad (4.4)$$

Рис. 4.4: Фазовый портрет ударного осциллятора с нулевым зазором.
Изохронизм

Условие (4.1) говорит о том, что изменение импульса силы удара Φ_0 в окрестности момента удара t_α имеет вид

$$J = \dot{x}_- - \dot{x}_+ = 2\dot{x}_-, \quad \dot{x}_- > 0,$$

где $\dot{x}_\alpha = \dot{x}(t_\alpha \mp 0)$.

Результирующая сила оказывается локализованной при $t = t_\alpha$. Поэтому

$$\Phi_0|_{t=t_\alpha} = J\delta(t - t_\alpha) \quad (4.5)$$

причем

$$\int_{t_\alpha-0}^{t_\alpha+0} \Phi_0 dt = J.$$

Удары происходят периодически, когда $t_\alpha = t_0 + \alpha T$, где α - целое число, а T - период между ударами, вычисляемый при помощи равенства

$T = 2\pi\omega^{-1}$ и (4.1)-(4.4). Поэтому при $t \in \mathbb{R}$ получаем T -периодическое продолжение (4.5)

$$\Phi_0 = J\delta^T(t - t_0),$$

где $\delta^T(t)$ - T -периодическая δ -функция (п. 1.2).

Под решением уравнения

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \Phi_0(x, \dot{x}) = 0 \quad (4.6)$$

будем понимать T -периодическую функцию $x(t)$, которая, будучи подставленной в это уравнение, обращает его в верное (в смысле теории обобщенных функций) равенство вида

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + J\delta^T(t - t_0) = 0,$$

где t_0 - произвольная постоянная, и для всех $\alpha = 0, \pm 1, \dots$

$$x(t_0 + \alpha T) = \Delta, \quad J = 2\dot{x}_-(t_0 + \alpha T).$$

При этом выполняются ограничения

$$x(t) \leq \Delta, \quad \dot{x}_- > 0.$$

а периоды колебаний в зависимости от знака Δ соответствуют частотным диапазонам (4.2)-(4.4).

Для аналитического описания решения положим $t_0 = 0$. Тогда при $0 \leq t < T_0$ решение уравнения (4.6) имеет вид (ср. п.1.3.2)

$$x(t) = -J\chi[\omega_0(J)(t - t_0), \omega_0(J)],$$

$$\chi(t, \omega_0) = \frac{1}{2\Omega} \frac{\cos[\Omega(t - T_0/2)]}{\sin(\Omega T_0/2)}, \quad (4.7)$$

$$J(\omega_0) = -2\Omega\Delta \operatorname{tg} \frac{\Omega T_0}{2}, \quad J \geq 0,$$

причем третье соотношение определяет здесь при $\Delta \neq 0$ гладкую зависимость $\omega_0(J)$, а при $\Delta = 0$ получаем $\omega_0 = 2\Omega$.

Найденное представление следует продолжить по периодичности. Имеет (п.1.3.2):

$$\chi(t, \omega_0) = \frac{\omega_0}{2\pi\Omega^2} + \frac{\omega_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\omega_0 t}{\Omega^2 - k^2\omega_0^2}.$$

Геометрические условия удара приводят к частотным интервалам (4.2)-(4.4). Отметим, что в случае $\Delta = 0$, решение $x(t)$ при $0 \leq t < \pi/\Omega$ имеет вид

$$x(t) = -\frac{J}{2\Omega} \sin \Omega t,$$

причем J - произвольная постоянная, не зависящая от частоты. Аналогично рассматриваются симметричные виброударные системы (рис. 4.5,

4.6). Характер законов движения рассмотренных систем дан в Приложе-

Рис. 4.5: Ударный осциллятор с двусторонними симметричными ограничителями

Рис. 4.6: Фазовый портрет ударного осциллятора с симметричными ограничителями. Жесткий аназохронизм

нии А (рис.А.10-А.13).

4.1.3 Уравнения движения в переменных импульс-фаза

Рассмотрим теперь уравнение автоколебаний ударного осциллятора

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \Phi_0(x, \dot{x}) = \varepsilon g(x, \dot{x}), \quad (4.8)$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $g(x, y)$ - достаточно гладкая функция переменных y и имеющая конечное число разрывов первого рода по y . Функция $g(x, \dot{x})$ ограничена в некоторой ограниченной области этих переменных.

Решение уравнения (4.8) при $\varepsilon = 0$ дано в п.4.1.2. Уравнение (4.8) преобразуем с помощью замены, следующей из формул (4.7) (см. [6])

$$x = -J\chi[\psi, \omega_0(J)], \quad (4.9)$$

$$\dot{x} = -J\omega_0(J)\chi_\psi[\psi, \omega_0(J)],$$

где $\omega_0 = \omega_0 t$. Замена (4.9) - негладкая; при $\omega_0 = 2l\pi$, где l - целое число, функция χ_ψ имеет конечные разрывы, поэтому в новых переменных удары происходят, когда $\psi = 2l\pi$. Замена (4.9) обратима, так как переменные J, ψ описывают систему однозначно.

Решение уравнения (4.8) при $\varepsilon = 0$ теперь дает тождество

$$-J\omega_0^2 [\{\chi_{\psi\psi}\} + \delta^{2\pi}(\psi)] - J\Omega^2 \chi(\psi) + \\ \Phi_0[-J\chi(\psi), -J\omega_0\chi_\psi(\psi)] \equiv 0.$$

Для определения J, ψ получим систему уравнений

$$(-J\chi)_J \dot{J} - J\chi_\psi \dot{\psi} = -J\omega_0\chi_\psi, \\ [-J\chi_\psi\omega'_0 + \omega_0(-J\chi_\psi)_J] \dot{J} - \omega_0 J[\{\chi_{\psi\psi}\delta^{2\pi}(\psi)] \dot{\psi} = \\ \Omega^2 J\chi - \Phi_0(-J\chi, -J\omega_0\chi_\psi) + \varepsilon g(J\chi, -J\omega_0\chi_\psi) \quad (4.10)$$

Периодическая функция Грина $\chi[\psi, \omega_0(J)]$ неявно зависит от J . Следовательно, $\chi_J = \chi_\psi\omega'_0(J)$, где штрих обозначает дифференцирование. Главный детерминант системы не содержит функцию $\delta^{2\pi}(\psi)$, так как

$$d_0 = -[(-J\chi_{J\psi})(-J\chi)_\psi - (-J\chi)_{\psi\psi}(-J\chi)_J] - J^2\chi_\psi^2\omega'_0$$

и второе слагаемое имеет вид

$$(-J\chi)_{\psi\psi}(-J\chi)_J = -J\omega_0[\{\chi\}_{\psi\psi} + \delta^{2\pi}(\psi)](-J\chi)_J$$

Из свойств δ -функции следует, что

$$\delta(\psi)[-J\chi(\psi, \omega_0)]_J = [-J\chi(0, \omega_0)]_J \delta(\psi) = 0,$$

поскольку $-J\chi(0, \omega_0) = \Delta = \text{const}$. Из формулы для полной энергии $E = 1/8J^2 + 1/2\Omega^2 = \delta^2$ и (4.7) следует, что $d_0 = -\frac{1}{4}J\omega_0^{-1}(J)$. Производя замену (4.9), приходим к системе

$$\frac{dJ}{dt} = -4\varepsilon\omega_0(J)g(-J\chi[\psi, \omega_0(J)], -J\omega_0(J)\chi_\psi[\psi, \omega_0(J)]) \times \\ \chi_\psi(\psi, J) = \varepsilon H_1(J, \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega_0(J) - 4\varepsilon\omega_0(J)J^{-1} \times \\ g(-J\chi[\psi, \omega_0(J)], -J\omega_0(J)\chi_\psi[\psi, \omega_0(J)])(-J\chi(\psi, J))_J = \\ \omega_0(J) - \varepsilon H_2(J, \psi).$$

Получили систему с быстро вращающейся фазой, где правые части периодичны по ψ и имеют конечные разрывы в точках $\psi = 2l\pi$. Зависимости

$\omega_0(J)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\omega_0(J) &= \frac{\pi\Omega}{\pi - \arctg[J/(2\Omega\Delta)]}, & \Delta > 0, & \quad \Omega < \omega_0 < 2\Omega, \\ \omega_0(J) &= -\frac{\pi\Omega}{\arctg[J/(2\Omega\Delta)]}, & \Delta < 0, & \quad 2\Omega < \omega_0 < \infty, \\ \omega_0(J) &= 2\Omega = \text{const}, & \Delta &= 0.\end{aligned}$$

Переменная J (импульс) является медленной, а переменная ψ (фаза) - быстрой.

Первому уравнению системы (4.11) сопоставим усредненное уравнение

$$\frac{dK}{dt} = \varepsilon L(K),$$

где

$$L(K) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(K, \psi) d\psi.$$

Различие между медленно изменяющимся импульсом $J(t)$ и решением усредненной системы $K(t)$ остается в течении времени $1/\varepsilon$ малым:

$$|J(t) - K(t)| < c\varepsilon, \quad c = \text{const}.$$

если $J(0) = K(0) = 0$.

Отметим два обстоятельства, которые важны в последующем. Во-первых, $\omega(J) > 0$. Во-вторых, функция $\chi_\psi(\psi, J)$, которая представима в виде ряда Фурье

$$\chi_\psi(\psi, J) = -\frac{\omega_0(J)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin k\psi}{\Omega^2 - k^2\omega_0^2(J)}$$

дифференцируема во внутренних точках отрезков $[2l\pi, 2(l+1)\pi]$, что следует из теории рядов Фурье (см., [61]).

Разделим первое уравнение системы (4.11) на второе. Получим уравнение первого порядка

$$\frac{dJ}{d\psi} = \varepsilon \frac{H_1(J, \psi)}{\omega_0(J) + \varepsilon H_2(J, \psi)} = \varepsilon \omega_0(J)^{-1} [H_1(J, \psi) - O(\varepsilon)]. \quad (4.12)$$

Уравнение (4.12) - это уравнение в стандартной форме для применения метода усреднения. Кроме того, правая часть уравнения (4.12) периодична по ψ с периодом 2π . Усредненное уравнение первого приближения имеет вид

$$\frac{d\bar{J}}{d\psi} = \varepsilon H_0(\bar{J}),$$

где

$$H_0(\bar{J}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega^{-1}(\bar{J}) H_1(\bar{J}, \psi) d\psi = \\ - \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} g(-\bar{J} \chi[\psi, \omega_0(\bar{J})], -\bar{J} \omega_0(\bar{J}) \chi_\psi[\psi, \omega_0(\bar{J})]) \chi_\psi(\psi, \bar{J}) d\psi.$$

Из второй теоремы Боголюбова (п. 2.1.3) об усреднении на бесконечном промежутке следует, что каждому стационарному решению $\bar{J} = J_0$ уравнения

$$H_0(\bar{J}) = 0,$$

для которого $H_{0\bar{J}}(J_0) \neq 0$ соответствует 2π -периодическое решение уравнения (4.10). Это решение асимптотически устойчиво, если

$$H_{0\bar{J}}(J_0) < 0$$

и неустойчиво, если

$$H_{0\bar{J}}(J_0) > 0.$$

Пусть $J^*(\psi, \varepsilon)$ - 2π -периодическое решение уравнения (4.11), соответствующее стационарному решению J_0 усредненного уравнения. Перейдем снова к переменной t и рассмотрим функции

$$x^*(t, \varepsilon) = -J^* \chi[\psi, \omega_0(J^*)],$$

$$\dot{x}^*(t, \varepsilon) = -J^* \omega_0(J^*) \chi_\psi[\psi, \omega_0(J^*)],$$

Покажем, что полученные таким образом функции будут также периодическими, но период будет зависеть от параметра ε и начальных условий (см. [17, 47, 77]). С этой целью обратимся ко второму уравнению системы (4.11), определяющему ψ как функцию t . Предположим, что t и ψ одновременно обращаются в нуль. Тогда

$$t(\psi) = \int_0^\psi \frac{d\phi}{\omega_0(J^*) + \varepsilon H_2(J^*, \phi, \varepsilon)}. \quad (4.13)$$

Отсюда получаем, что

$$t(\psi + 2\pi) - t(\psi) = \int_\psi^{\psi+2\pi} \frac{d\phi}{\omega_0(J^*) + \varepsilon H_2(J^*, \phi, \varepsilon)}. \quad (4.14)$$

Так как $J^*(\psi, \varepsilon)$ - 2π -периодическая функция, то производная интеграла (4.13) равна нулю. Поэтому

$$t(\psi + 2\pi) - t(\psi) = T(\varepsilon), \quad (4.15)$$

где $T(\varepsilon)$ зависит только от ε и начального условия. Соотношение (4.15) показывает, что при изменении t на величину $T(\varepsilon)$ величина ψ изменяется на величину 2π , и, следовательно, функции $x^*(t, \varepsilon)$ и $\dot{x}^*(t, \varepsilon)$ не

изменяются. Поэтому $x^*(t, \varepsilon)$ и $\dot{x}^*(t, \varepsilon)$ - периодические функции с периодом $T(\varepsilon)$. Мы выбрали $\psi(0) = 0$. Отсюда заключаем, что $x^*(0, \varepsilon) = J^*(0, \varepsilon)$, $\dot{x}^*(0, \varepsilon) = 0$.

Следовательно, уравнение (4.8) при выполнении условия $H_{0J}(J_0) \neq 0$ для стационарного решения J_0 имеет при достаточно малых ε периодическое решение $x^*(t, \varepsilon)$ с периодом $T(\varepsilon)$. При $\varepsilon = 0$ это решение превращается в периодическое решение уравнения

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \Phi_0(x, \dot{x}) = 0.$$

Заметим, что функция $x^*(t + h, \varepsilon)$ при любом вещественном h также является решением уравнения (4.8). Следовательно, в силу автономности уравнения (4.8) существует однопараметрическое семейство периодических решений.

Исследуем теперь вопрос об устойчивости решения $x^*(t, \varepsilon)$. Как было замечено, если уравнение (4.11) имеет периодическое решение, то существует однопараметрическое семейство периодических решений и, следовательно, это периодическое решение не может быть асимптотически устойчиво, а только устойчиво по Ляпунову (см. [48]). Очевидно, устойчивость периодического решения $J^*(\psi, \varepsilon)$ уравнения (4.11) влечет устойчивость периодического решения $x^*(t, \varepsilon)$ уравнения (4.8). Аналогично утверждение справедливо в случае неустойчивости периодического решения $J^*(\psi, \varepsilon)$.

Таким образом, неравенство

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} g(-J\chi[\psi, \omega_0(J)], -J\omega_0(J)\chi_\psi[\psi, \omega_0(J)])\chi_\psi(\psi, J)d\psi < 0$$

влечет устойчивость периодического решения $x^*(t, \varepsilon)$, а неравенство

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} g(-J\chi[\psi, \omega_0(J)], -J\omega_0(J)\chi_\psi[\psi, \omega_0(J)])\chi_\psi(\psi, J)d\psi > 0$$

влечет неустойчивость этого решения.

Замечание. Кроме устойчивости по Ляпунову периодического решения можно утверждать, что каждое решение уравнения (4.8), достаточно близкое к периодическому решению, стремится при $t \rightarrow \infty$ к одному из решений семейства $x^*(t + h, \varepsilon)$.

4.1.4 Ударный осциллятор: авторезонанс

На рисунках 4.7 и 4.8 для примера даны схемы двух автоколебательных систем рассматриваемого типа. На рис. 4.7 показан маятник Фроуда, соударяющийся с ограничителем. Здесь восполнение потерянной энергии

происходит за счет вращения вала, на котором установлен с проскальзы-

Рис.4.7: Маятник Фруда с ограничителями хода

ванием маятник. В системе, представленной на рис. 4.8 внешняя энергия попадает в систему за счет движения транспортирующей ленты. В обоих случаях восполнение энергии происходит за счет трения поверхностей. Возможны и другие механизмы возбуждения автоколебаний [8, 72].

Рис.4.8: Автоколебательная виброударная система

Исследование автоколебательных систем ограничим случаем движений резонансного типа - авторезонансами, которые могут быть эффективно исследованы при помощи метода усреднения, так как происходят

вблизи свободных колебаний консервативных систем.

Рис.4.9: Вынужденные колебания виброударных систем с одной степенью свободы

В качестве примера (см. [8, 72]) рассмотрим авторезонансную систему, в которой механизм возбуждения и установление автоколебаний описывается при помощи силы ван-дер-полевского типа

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \Phi_0(x, \dot{x}) = \varepsilon(\alpha - \beta x^2)\dot{x},$$

Здесь α, β - положительные постоянные, обобщенная функция $\Phi_0(x, \dot{x})$ описывает упругий удар. В этом случае первое уравнение системы уравнений (4.10) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} = & -4\varepsilon\omega_0(J)\{[\alpha - \beta(-J\chi[\psi, \omega_0(J)]\chi_\psi(\psi, J))^2 \times \\ & \{-J\omega_0(J)\chi_\psi[\psi, \omega_0(J)]\chi_\psi(\psi, J)\}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Чтобы получить усредненное уравнение нам нужно вычислить среднее значение по периоду 2π правой части уравнения (4.16). В соответствующем интеграле сделаем замену переменных. От переменной $\psi = \omega t$ перейдем к переменной t . Мы получим интеграл по промежутку $[0, T = \frac{2\pi}{\omega}]$. Используя представление решений невозмущенной системы на этом промежутке, вычисляем интеграл. Получим усредненное уравнение

$$\frac{d\bar{J}}{dt} = \varepsilon(\bar{J}\alpha A - \bar{J}^3\beta B), \quad (4.17)$$

где

$$A = \frac{1}{2 \sin^2(1/2\Omega T)} \left(1 - \frac{\sin \Omega T}{\Omega T} \right),$$

$$B = \frac{T}{16\Omega \sin^2(1/2\Omega T)} \left(1 - \frac{\sin \Omega T}{\Omega T} \right).$$

Для определения стационарных решений уравнения (4.17) получаем трансцендентное уравнение. При некоторых физически осмысленных упрощающих предположениях усредненное уравнение (4.17) можно записать в виде

$$\frac{d\bar{J}}{dt} = \frac{1}{3}\varepsilon\bar{J} \left(\alpha - \frac{1}{4}\beta\bar{J}^2\Omega^{-2} - \beta\Delta^2 \right). \quad (4.18)$$

Приравнявая нулю правую часть (4.18), получим уравнение для определения стационарных решений. Получаем стационарное решение $J_0 = 0$ при всех значениях параметров и стационарное решение $J_1 = 2\Omega\sqrt{\alpha - \beta\Delta^2}$ при выполнении неравенства

$$\alpha - \beta\Delta^2 > 0. \quad (4.19)$$

Неравенство (4.19) обеспечивает неустойчивость состояния равновесия J_0 и асимптотическую устойчивость состояния равновесия J_1 . Следовательно, при достаточно малых ε состоянию равновесия J_1 усредненного уравнения (4.16) соответствует устойчивый по Ляпунову периодический режим исходной авторезонансной системы.

4.2 Ударный осциллятор: субгармонический резонанс

Резонансные режимы в гладких системах с одной степенью свободы изучались, в частности, [15, 17, 24, 77, 106].

Наша цель - дать корректное описание резонансных режимов движения виброударных система с одной степенью свободы.

Мы исследуем движение ударного осциллятора под действием малого периодического и полигармонического возбуждения [79, 80, 81].

Эта задача сводится к исследованию двумерной системы с двумя быстрыми фазами и с разрывами по одной из них.

4.2.1 Возмущенный ударный осциллятор

Рассмотрим вынужденные колебания ударного осциллятора (рис. 4.9)

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \Phi_0(x, \dot{x}) = \varepsilon[f(t) - \gamma\dot{x}], \quad (4.20)$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $f(t) = a \sin(\nu t + \beta)$, $\gamma > 0$, a , ν , β - вещественные постоянные.

Положим $\psi = \omega_0 t$ и от уравнения (4.20) перейдем с помощью замены (4.9) к системе

$$\begin{aligned} \dot{J} &= -4\varepsilon\omega_0(J)[f(t) + \gamma J\omega_0(J)\chi_\psi(\psi, J)]\chi_\psi(\psi, J), \dot{t} = 1, \\ \dot{\psi} &= \omega_0(J) - 4\varepsilon\omega_0(J)J^{-1}[f(t) + J\omega_0(J)\chi_\psi(\psi, J)](-J\chi(\psi, J))_J. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Имеем систему с двумя быстро вращающимися фазами, где правые части периодичны по ψ и имеют конечные разрывы в точках $\psi = 2l\pi$. Зависимости $\omega_0(J)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_0(J) &= \frac{\pi\Omega}{\pi - \arctg[J/(2\Omega\Delta)]}, \quad \Delta > 0, \quad \Omega < \omega_0 < 2\Omega, \\ \omega_0(J) &= -\frac{\pi\Omega}{\arctg[J/(2\Omega\Delta)]}, \quad \Delta < 0, \quad 2\Omega < \omega_0 < \infty, \\ \omega_0 &= 2\Omega = const, \quad \Delta = 0. \end{aligned}$$

Существование и устойчивость стационарных резонансных режимов в таких системах и будет исследоваться далее.

4.2.2 Применение метода усреднения

Мы будем использовать метод усреднения на бесконечном интервале (см. п.2.1.3). Основная проблема, возникающая при применении метода усреднения - это выбрать подходящие замены переменных. Замены переменных дают возможность исключить быстрые переменные из уравнений движения с заданной точностью и затем разделить быстрые и медленные движения.

Пусть J_{pq} является решением уравнения

$$\omega_0(J_{pq}) = \frac{q}{p}\nu.$$

где p , q - взаимно простые целые числа. Сделав замену $\psi = \varphi + \frac{q}{p}\nu t$, мы преобразуем систему (4.21) в систему

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= -4\varepsilon\omega_0(J)[f(t) + \gamma J\omega_0(J)\chi_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J)]\chi_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_0(J) - \frac{q}{p}\nu - 4\varepsilon\omega_0(J)J^{-1}[f(t) + \gamma J\omega_0(J)\chi_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J)] \times \\ &\quad (-J\chi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J))_J. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Точка $J = J_{pq}$ является резонансной точкой в системе (4.22).

Предположим, что резонанс невырожденный, т.е.

$$\left. \frac{d\omega_0}{dJ} \right|_{J=J_{pq}} = \omega'_0(J_{pq}) \neq 0. \quad (4.23)$$

Исследуем поведение решений системы (4.22) в $\mu = \sqrt{\varepsilon}$ -окрестности резонансной точки J_{pq} . Выполним замену

$$J = J_{pq} + \mu z$$

и разложим правую часть системы (4.22) по степеням параметра μ . В результате получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \mu F_0(t, \varphi, J_{pq}) + \mu^2 F_1(t, \varphi, J_{pq})z + O(\mu^3), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \mu \omega'_0(J_{pq})z + \frac{1}{2}\mu^2 \omega''_0(J_{pq})z^2 + \mu^2 G_0(t, \varphi, J_{pq}) + O(\mu^3) \end{aligned} \quad (4.24)$$

где

$$F_0(t, \varphi, J_{pq}) = -4\omega_0(J_{pq})[f(t) + \gamma J_{pq}\omega_0(J_{pq})\chi_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J + pq)] \times$$

$$\chi_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J_{pq}),$$

$$F_1(t, \varphi, J_{pq}) = -4\frac{d}{dJ} \left\{ \omega_0(J)[f(t) + \gamma J\omega_0(J)\chi_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J)] \times \right.$$

$$\left. \chi_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J) \right\} \Big|_{J=J_{pq}}.$$

$$G_0(t, \varphi, J_{pq}) = -4\omega_0(J_{pq})J_{pq}^{-1}[f(t) + \gamma J_{pq}\omega_0(J_{pq})\chi_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J_{pq})] \times$$

$$(-\chi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J_{pq}) - J_{pq}\chi_J(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J_{pq})).$$

Система (4.24) содержит только одну быструю переменную t . Теперь сделаем стандартную замену метода усреднения для того чтобы исключить быструю переменную из правой части системы (4.24) с точностью до членов порядка μ^2 . Эта замена ищется в виде

$$z = \xi + \mu u_1(\eta, t) + \mu^2 u_2(\eta, t)\xi, \quad \varphi = \eta + \mu^2 v_2(\eta, t),$$

где функции $u_i(\eta, t)$, ($i = 1, 2$), $v_2(\eta, t)$ - периодические по t с периодом $2\pi/\nu$.

Выполнив замену, получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \mu f_0(\eta) + \mu^2 f_1(\eta)\xi + O(\mu^3), \\ \frac{d\eta}{dt} &= \mu \omega'_0(J_{pq})\xi + \frac{1}{2}\mu^2 \omega''_0(J_{pq})\xi^2 + \mu^2 g_0(\eta) + O(\mu^3), \end{aligned} \quad (4.25)$$

где $f_0(\eta)$, $f_1(\eta)$, $g_0(\eta)$ определяются как средние значения по t функций $F_0(t, \eta, J_{pq})$, $F_1(t, \eta, J_{pq})$, $G_0(t, \eta, J_{pq})$ соответственно:

$$\begin{aligned}
f_0(\eta) &= \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi/\nu} F_0(t, \eta, J_{pq}) dt, \\
f_1(\eta) &= \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi/\nu} F_1(t, \eta, J_{pq}) dt, \\
g_0(\eta) &= \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi/\nu} G_0(t, \eta, J_{pq}) dt.
\end{aligned}$$

Функции $u_i(\eta, t)$, ($i = 1, 2$), $v_2(\eta, t)$ определяются как периодические решения по t с нулевыми средним значением из уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} &= F_0(t, \eta, J_{pq}) - f_0(\eta), \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} &= F_1(t, \eta, J_{pq}) - u_{1\eta}(\eta, t)\omega_0(J_{pq}) - f_1(\eta), \\
\frac{\partial v_2}{\partial t} &= G_0(t, \eta, J_{pq}) - u_1(\eta, t)\omega_0(J_{pq}) - g_0(\eta).
\end{aligned}$$

Таким образом, необходимая для использования метода усреднения замена проведена.

4.2.3 Существование и устойчивость периодических решений

Пусть существует такая постоянная η_0 , что

$$f_0(\eta_0) = 0, \quad 0 < \eta_0 < 2\pi. \quad (4.26)$$

и η_0 - простой корень уравнения (4.26), т.е.

$$f'_{0\eta}(\eta_0) \neq 0. \quad (4.27)$$

В этом случае усредненная система первого приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \mu f_0(\eta), \quad \frac{d\eta}{dt} = \mu \omega'_0(J_{pq})\xi \quad (4.28)$$

имеет решение

$$\xi = 0, \quad \eta = \eta_0. \quad (4.29)$$

Линеаризуя правую часть системы (4.25) на решении (4.29), получим матрицу

$$A_0(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & \mu f_{0\eta}(\eta_0) \\ \mu \omega'_0(J_{pq}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Если

$$\omega'_0(J_{pq})f_{0\eta}(\eta_0) > \sigma_0 > 0, \quad \sigma_0 = const, \quad (4.30)$$

то матрица $A_0(\mu)$ имеет вещественные собственные значения различных знаков. Тогда из второй теоремы Боголюбова об усреднении на бесконечном интервале (см. п. 2.1.4) вытекает следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть существует такое число η_0 , что имеет место равенство (4.26) и неравенство (4.27). Тогда в $\sqrt{\varepsilon}$ -окрестности резонансной точки J_{pq} для достаточно малых ε существует единственное неустойчивое периодическое решение системы (4.25) с периодом $\frac{2\pi r}{\nu}$.*

Предположим теперь, что вместо неравенства (4.30) справедливо неравенство

$$\omega_0(J_{pq})f_{0\eta}(\eta_0) < \sigma_1 < 0, \quad \sigma_1 = \text{const.} \quad (4.31)$$

В этом случае собственные значения матрицы $A_0(\mu)$ будут чисто мнимыми. Чтобы исследовать задачу существования и устойчивости периодических решений системы (4.25) в окрестности резонансной точки J_{pq} , мы должны использовать усредненные уравнения второго приближения

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \mu f_0(\eta) + \mu^2 f_1(\eta)\xi, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \mu \omega'_0(J_{pq})\xi + \frac{1}{2}\mu^2 \omega''_0(J_{pq})\xi^2 + \mu^2 g_0(\eta). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Из условий (4.27), (4.31) и теоремы о неявной функции следует, что для достаточно малых μ существует такая единственная функция

$$w(\mu) = (\xi(\mu), \eta_0)$$

что $\xi(0) = 0$ и $w(\mu)$ - состояние равновесия системы (4.32). Линеаризуя систему (4.32) на этом состоянии равновесия, получим следующую матрицу

$$A_1(\mu) = \begin{pmatrix} \mu^2 f_1(\eta_0) & \mu f_{0\eta}(\eta_0) \\ \mu \omega'_0(J_{pq}) & \mu^2 g_{0\eta}(\eta_0) \end{pmatrix}.$$

Легко показать, что собственные значения матрицы $A_1(\mu)$ для достаточно малых μ имеют отрицательные вещественные части, если выполняется неравенство

$$f_1(\eta_0) + g_{0\eta}(\eta_0) < 0, \quad (4.33)$$

и положительные вещественные части, если выполняется неравенство

$$f_1(\eta_0) + g_{0\eta}(\eta_0) > 0. \quad (4.34)$$

Из теоремы о втором приближении в периодическом случае (см. п. 2.2.2) следует, что для достаточно малых μ существует единственное периодическое решение $w(t, \mu) = (\xi(t, \mu), \eta(t, \mu))$ системы (4.25) с периодом $\frac{2\pi p}{\nu}$; это решение асимптотически устойчиво, если выполняется неравенство (4.33), и неустойчиво, если выполняется неравенство (4.34), причем $|w(t, \mu) - w(\mu)| = O(\mu^3)$. Сформулируем полученный результат применительно к системе (4.25).

Теорема 4.2. Пусть η_0 удовлетворяет равенству (4.26) и неравенству (4.30). Пусть справедливо неравенство

$$f_1(\eta_0) + g_{0\eta}(\eta_0) \neq 0.$$

Тогда для достаточно малых ε система (4.25) имеет единственное непериодическое решение с периодом $\frac{2\pi p}{\nu}$ в ε -окрестности резонансной точки J_{pq} . Это решение асимптотически устойчиво, если выполняется неравенство (4.33), и неустойчиво, если выполняется неравенство (4.34).

Теоремы 4.1 и 4.2 применимы к изучению резонансных решений в системе (4.22) с $f(t) = a \sin(\nu t + \beta)$. Резонансная точка определяется из уравнения

$$\omega_0(J_{pq}) = -\frac{\pi\Omega}{\pi - \operatorname{arctg} J_{pq}/2\Omega\Delta} = \frac{q}{p}\nu. \quad (4.35)$$

Из уравнения (4.35) следует, что

$$\omega'_0(J_{pq}) > 0.$$

Чтобы вычислить величину $f_{0\eta}(\eta_0)$, нужно усреднить функцию $F_0(t, \eta, J_{pq})$. Первое слагаемое этой функции имеет вид

$$-4\omega_0(J_{pq})a \sin(\nu t + \beta)\chi_\psi(\eta + \frac{q}{p}\nu t). \quad (4.36)$$

Так как

$$\chi_\psi(\eta + \frac{q}{p}\nu t) = -\omega_0(J_{pq})^{-1} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin k(\eta + \frac{q}{p}\nu t)}{\Omega_0^2 - k^2}, \quad \Omega_0 = \Omega[\omega_0(J_{pq})]^{-1},$$

то мы должны усреднить слагаемые вида

$$a \sin(\nu t + \beta) \sin k(\eta + \frac{q}{p}\nu t), \quad k = 1, 2, \dots$$

Легко видеть, что среднее значение этой функции будет ненулевым тогда и только тогда, когда $q = 1, p = n$ ($n = 1, 2, \dots$). В этом случае оно равно

$$\frac{2a\nu^2}{\pi n(\Omega^2 - \nu^2)} \cos(n\eta - \beta).$$

Среднее значение второго слагаемого

$$-4\gamma J_{pq}\omega_0^2(J_{pq})\chi_\psi(\eta + \frac{q}{p}\nu t)\chi_\psi(\eta + \frac{q}{p}\nu t)$$

равно

$$-\frac{\gamma J_{pq}}{2} \left(1 + \frac{4\Omega^2\Delta^2}{J_{pq}^2} \right).$$

При вычислении среднего значения использовано следующее из третьего выражения (4.7) равенство

$$\sin^{-2} \pi\Omega_0 = 1 + 4J^{-2}\Omega^2\Delta^2.$$

Следовательно, постоянная η_0 определяется как решение уравнения

$$\cos(n\eta - \beta) = \frac{\gamma J_{pq}\pi n}{4a\nu^2}(\Omega^2 - \nu^2) \left(1 + \frac{4\Omega^2\Delta^2}{J_{pq}^2} \right) = A_n. \quad (4.37)$$

Так как $A_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то уравнение (4.37) может иметь решения только для конечного числа значений n . Если уравнение (4.37) имеет решения для данного значения n ($|A_n| < 1$), то эти решения определяются следующими формулами

$$\eta_{0l} = \frac{\beta}{n} \pm \frac{\arccos A_n}{n} + \frac{2l\pi}{n}, \quad l = 0, \dots, n-1.$$

Вычисляя производную функции $f_0(\eta)$ в точках η_{0l} , получим

$$f_{0\eta}(\eta_{0l}) = \pm \frac{2a\nu^2}{\pi(\Omega^2 - \nu^2)} \sqrt{1 - A_n^2}. \quad (4.38)$$

Выражение (4.38) имеет положительные и отрицательные знаки в n точках. Простые вычисления аналогичные предыдущим показывают, что

$$f_1(\eta_0) + g_{0\eta}(\eta_0) < 0.$$

Теоремы 4.1 и 4.2 приводят к следующему результату.

Если резонансная точка J_{n1} является решением уравнения

$$\omega(J_{n1}) = \frac{\nu}{n},$$

то для достаточно малых ε уравнение (4.21) имеет n неустойчивых резонансных решений с периодом $\frac{2\pi n}{\nu}$ в $\sqrt{\varepsilon}$ -окрестности резонансной точки J_{n1} и n асимптотически устойчивых резонансных периодических решений с периодом $\frac{2\pi n}{\nu}$ в ε -окрестности резонансной точки J_{n1} .

Таким образом, неустойчивые периодические решения существуют в более широкой области, чем устойчивые.

4.2.4 Субгармонические резонансные колебания ударного осциллятора при полигармоническом возбуждении

Рассмотрим вопросы существования и устойчивости стационарных резонансных режимов в системе с периодическим полигармоническим возбуждением.

Применим теоремы 4.1 и 4.2 к рассматриваемой системе в случае, когда в уравнении ударного осциллятора (4.20) периодическая вынуждающая сила имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^L a_k \sin(kvt + \beta_k).$$

Резонансная точка определяется из уравнения

$$\omega_0(J_{pq}) = -\frac{\pi\Omega}{\pi - \arctg J_{pq}/2\Omega\Delta} = \frac{q}{p}\nu. \quad (4.39)$$

Из уравнения (4.39) следует, что

$$\omega'_0(J_{pq}) > 0.$$

Для получения величины $f_0(\eta)$ нужно усреднить функцию $F_0(t, \eta, J_{pq})$ в случае полигармонического силового воздействия. Первое слагаемое этой функции имеет теперь вид

$$-4\omega_0(J_{pq}) \sum_{l=1}^L a_l \sin(l\nu t + \beta_l) \chi_\psi\left(\eta + \frac{q}{p}\nu t\right). \quad (4.40)$$

Поскольку

$$\chi_\psi\left(\eta + \frac{q}{p}\nu t\right) = -\omega_0(J_{pq})^{-1} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin k\left(\eta + \frac{q}{p}\nu t\right)}{\Omega_0^2 - k^2}, \quad \Omega_0 = \Omega[\omega_0(J_{pq})]^{-1},$$

то мы должны усреднить слагаемые вида

$$a_l \sin(l\nu t + \beta_l) \sin k\left(\eta + \frac{q}{p}\nu t\right), \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad k = 1, 2, \dots$$

Как и ранее, среднее значение функции (4.40) будет ненулевым тогда и только тогда, когда $q = 1$, $p = n$ ($n = 1, 2, \dots$), то есть когда оно равно

$$\sum_{l=1}^L \frac{2a_l \nu^2 l}{\pi n (\Omega^2 - \nu^2 l^2)} \cos(\ln \eta - \beta_l).$$

Среднее значение второго слагаемого, как было показано равно

$$-4\gamma J_{pq} \omega_0^2(J_{pq}) \chi_\psi\left(\eta + \frac{q}{p}\nu t\right) \chi_\psi\left(\eta + \frac{q}{p}\nu t\right)$$

Таким образом, постоянная η_0 определяется как решение тригонометрического уравнения

$$\sum_{l=1}^L \frac{2a_l \nu^2 l}{(\Omega^2 - \nu^2 l^2)} \cos(\ln \eta - \beta_l) = \frac{\gamma J_{n1} \pi n}{2} \left(1 + \frac{4\Omega^2 \Delta^2}{J_{n1}^2}\right). \quad (4.41)$$

Так как правая часть уравнения (4.41) неограниченно возрастает при $n \rightarrow \infty$, то уравнение (4.41) может иметь решения только для конечного числа значений n .

Отметим, что в том случае, когда точка $J_{n1} = 1/n$ является резонансной, то резонансными точками будут и точки $J_{ln1} = 1/ln$, $l = 2, 3, \dots, L$. Для любой из них среднее значение функции (4.40) отлично от нуля. Наиболее простое уравнение для определения постоянной η_0 получается для резонанса $J_{Ln1} = 1/Ln$. Соответствующее уравнение имеет вид

$$\cos(Ln\eta - \beta_L) = \frac{\gamma J_{1Ln} \pi n}{4a_L \nu^2 L} (\Omega^2 - \nu^2 L^2) \left(1 + \frac{4\Omega^2 \Delta^2}{J_{1Ln}^2}\right) = A_n. \quad (4.42)$$

Если уравнение (4.42) имеет решения для данного значения n ($|A_n| < 1$), то они определяются следующими формулами

$$\eta_{0m} = \frac{\beta_L}{Ln} \pm \frac{\arccos A_n}{Ln} + \frac{2m\pi}{Ln}, \quad m = 0, \dots, n-1.$$

Вычисляя производную функции $f_0(\eta)$ в точках η_{0m} , получим

$$f_{0\eta}(\eta_{0m}) = \pm \frac{2a_L\nu^2}{\pi(\Omega^2 - \nu^2 L^2)} \sqrt{1 - A_n^2}, \quad (4.43).$$

Это выражение - положительно в n точках и в n точках - отрицательно.

Простые вычисления аналогичные проделанным выше показывают, что

$$f_1(\eta_{0m}) + g_{0\eta}(\eta_{0m}) < 0.$$

Теоремы 4.1 и 4.2 приводят к следующему результату.

Пусть резонансная точка J_{Ln1} является решением уравнения

$$\omega(J_{Ln1}) = \frac{\nu}{Ln},$$

тогда для достаточно малых ε уравнение движения (4.20) имеет n неустойчивых резонансных решений с периодом $2\pi Ln/\nu$ в $\sqrt{\varepsilon}$ -окрестности резонансной точки J_{Ln1} и n асимптотически устойчивых резонансных периодических решений с периодом $2\pi Ln/\nu$ в ε -окрестности резонансной точки J_{Ln1} .

При $L = 1$ получаем результат из предыдущего пункта. При $L > 1$ для резонансных периодических решений получаются более сложные тригонометрические уравнения.

Пример. Кратко остановимся на случае $L = 2$. Предположим, что функция $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = a_1 \sin(\nu t + \beta) + a_2 \sin(2\nu t + 2\beta).$$

Если $J_{n1} = 1/n$ - резонансная точка, то резонансной будет и точка $J_{2n1} = 2/n$. Для резонансной точки J_{2n1} справедливы результаты, которые получены выше для резонансной точки J_{Ln1} . Для отыскания точки η_0 соответствующей резонансу $J_{n1} = 1/n$ получим уравнение

$$\frac{2a_1\nu^2}{(\Omega^2 - \nu^2)} \cos(n\eta - \beta) + \frac{4a_2\nu^2}{(\Omega^2 - 4\nu^2)} \cos(2n\eta - 2\beta) = \frac{\gamma J_{1n}\pi n}{2} \left(1 + \frac{4\Omega^2\Delta^2}{J_{1n}^2} \right).$$

Это уравнение можно записать в виде

$$A \cos^2(n\eta - \beta) + B \cos(n\eta - \beta) + C = 0.$$

В постоянную A входит амплитуда a_2 второй гармоники, а в постоянную B - амплитуда a_1 первой гармоники. Если величина a_2 достаточно велика по сравнению с величиной a_1 , то могут существовать две серии периодических решений соответствующих резонансу J_{n1} . Если амплитуда a_2 мала по сравнению с амплитудой a_1 , то может существовать только одна серия периодических решений.

Отметим, что в [42] в достаточно общем виде исследуется задача об оценке числа нелинейных резонансных периодических режимов в систе-

мах общего вида, линейная часть которых задана оператором динамической податливости общего вида.

4.3 Ударный осциллятор: почти периодические колебания

Дадим корректное описание резонансных почти периодических режимов в виброударной системе с одной степенью свободы.

Будет исследована квазиконсервативная виброударная система с одной степенью свободы, находящаяся под действием малой бигармонической силы. Задача сводится к изучению двумерной системы с двумя быстрыми фазами и медленно меняющимися коэффициентами.

Необходимые для дальнейшего чтения сведения о почти периодических функциях содержатся в п. 1.1.2. Изложенное ниже основано на пп. 2.1.3 и 2.1.7., а также книге [77].

4.3.1 Постановка задачи

Видоизменим уравнение вынужденных колебаний ударного осциллятора. Вместо (4.20) рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \Phi_0(x, \dot{x}) = \varepsilon[f(t, \tau) - \gamma \dot{x}], \quad (4.44)$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $\tau = \varepsilon t$ - медленное время.

Рассмотрим силовые бигармонические воздействия двух типов. Первое - в виде суммы двух малых периодических сил с близкими частотами. Данное воздействие имеет вид

$$f(t, \tau) = a_1 \sin \nu t + a_2 \sin(\nu t + \Gamma \tau), \quad \tau = \varepsilon t$$

где a_1, a_2, ν, Γ - положительные числа. Вынуждающая сила $f(t, \tau)$ может быть записана в форме

$$f(t, \tau) = E(\tau) \sin(\nu t + \beta(\tau)), \quad \tau = \varepsilon t, \quad (4.45)$$

где

$$E(\tau) = \sqrt{a_1^2 + 2a_1 a_2 \cos \Gamma \tau + a_2^2}, \quad \cos \beta(\tau) = \frac{a_1 + a_2 \cos \Gamma \tau}{E(\tau)},$$

$$\sin \beta(\tau) = a_2 \sin \Gamma \tau / E(\tau).$$

Функция (4.45) - периодическая по t с периодом $2\pi/\nu$ и периодическая по τ с периодом $2\pi/\Gamma$. Функция $E(\tau)$ строго положительная, если $a_1 \neq a_2$, что и будет предполагаться. В этом случае функция $f(t, \varepsilon t)$ является функцией с двумя базисными частотами ν и $\varepsilon\Gamma$, которые вообще говоря, несоизмеримы. Поэтому функция $f(t, \varepsilon t)$ не является периодической.

Второй тип внешнего воздействия - это бигармоническая сила с существенно различающимися частотами, которая имеет вид

$$f(t, \tau) = A \sin(\nu t + \theta) + B \sin \Gamma \tau, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (4.46)$$

Преобразуем уравнение (4.44) в переменных импульс-фаза, сделав замену (4.9). Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= -4\varepsilon\omega_0(J)[f(t, \tau) + \gamma J\omega_0(J)\chi_\psi(\psi, J)]\chi_\psi(\psi, J), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0(J) - 4\varepsilon\omega_0(J)J^{-1}[f(t, \tau) + J\omega_0(J)\chi_\psi(\psi, J)](-J\chi(\psi, J))_J. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Система (4.47) содержит две медленные переменные J, τ и две быстрые переменные ψ, t .

Проблемы существования и устойчивости стационарных резонансных режимов в таких системах и будут исследоваться.

4.3.2 Построение усредненных уравнений

Снова воспользуемся методом усреднения на бесконечном интервале (п.2.2.3). Основная проблема, возникающая при применении метода усреднения - это выбор подходящей замены переменных, которая дает возможность исключить быстрые переменные из уравнений движения с заданной точностью и затем разделить быстрые и медленные движения. В случае бигармонического почти периодического возмущения возникают дополнительные трудности, связанные с исключением быстрых переменных в системе (4.47)

Пусть J_{pq} является решением уравнения

$$\omega_0(J_{pq}) = \frac{q}{p}\nu.$$

где p, q - взаимно простые целые числа. Сделав замену $\psi = \varphi + \frac{q}{p}\nu t$, мы преобразуем систему (4.47) в систему

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= -4\varepsilon\omega_0(J)[f(t, \tau) + \gamma J\omega_0(J)\chi_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J)]\chi_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_0(J) - \frac{q}{p}\nu - 4\varepsilon\omega_0(J)J^{-1}[f(t, \tau) + \gamma J\omega_0(J)\chi_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J)] \times \\ &\quad (-J\chi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J))_J. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Точка $J = J_{pq}$ представляет собой резонансную точку в системе (4.48).

Будем предполагать, что резонанс невырожденный, т.е.

$$\left. \frac{d\omega_0}{dJ} \right|_{J=J_{pq}} = \omega'_0(J_{pq}) \neq 0. \quad (4.49)$$

Исследуем поведение решений системы (4.48) в $\mu = \sqrt{\varepsilon}$ -окрестности резонансной точки. Сделаем замену

$$J = J_{pq} + \mu z$$

и разложим правую часть системы (4.48) по степеням параметра μ . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \mu F_0(t, \tau, \varphi, J_{pq}) + \mu^2 F_1(t, \tau, \varphi, J_{pq})z + O(\mu^3), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \mu \omega'_0(J_{pq})z + \frac{1}{2}\mu^2 \omega''_0(J_{pq})z^2 + \mu^2 G_0(t, \tau, \varphi, J_{pq}) + O(\mu^3) \end{aligned} \quad (4.50)$$

где

$$F_0(t, \tau, \varphi, J_{pq}) = -4\omega_0(J_{pq})[f(t, \tau) + \gamma J_{pq}\omega_0(J_{pq})\chi_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J + pq)] \times$$

$$\chi_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J_{pq}),$$

$$F_1(t, \tau, \varphi, J_{pq}) = -4\frac{d}{dJ} \left\{ \omega_0(J)[f(t, \tau) + \gamma J\omega_0(J)\chi_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J)] \times \right.$$

$$\left. \chi_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J) \right\} \Big|_{J=J_{pq}}.$$

$$G_0(t, \tau, \varphi, J_{pq}) = -4\omega_0(J_{pq})J_{pq}^{-1}[f(t, \tau) + \gamma J_{pq}\omega_0(J_{pq})\chi_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J_{pq})] \times$$

$$(-\chi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J_{pq}) - J_{pq}\chi_J(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J_{pq})).$$

Система (4.50) содержит только одну быструю переменную t . Для того чтобы с точностью до членов порядка μ^2 исключить эту переменную из ее правой части совершим стандартную замену метода усреднения, которая ищется в виде

$$z = \xi + \mu u_1(\eta, t, \tau) + \mu^2 u_2(\eta, t, \tau)\xi, \quad \varphi = \eta + \mu^2 v_2(\eta, t, \tau),$$

где функции $u_i(\eta, t, \tau)$, ($i = 1, 2$), $v_2(\eta, t, \tau)$ - периодические по t , τ с периодами $2\pi/\nu$ и $2\pi/\Gamma$ соответственно.

После замены получим

$$\frac{d\xi}{dt} = \mu f_0(\eta, \tau) + \mu^2 f_1(\eta, \tau)\xi + O(\mu^3), \quad (4.51)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \mu \omega'_0(J_{pq})\xi + \frac{1}{2}\mu^2 \omega''_0(J_{pq})\xi^2 + \mu^2 g_0(\eta, \tau) + O(\mu^3),$$

где $f_0(\eta, \tau)$, $f_1(\eta, \tau)$, $g_0(\eta, \tau)$ определяются как средние значения по t :

$$f_0(\eta, \tau) = \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi/\nu} F_0(t, \tau, \eta, J_{pq}) dt,$$

$$f_1(\eta, \tau) = \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi/\nu} F_1(t, \tau, \eta, J_{pq}) dt,$$

$$g_0(\eta, \tau) = \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi/\nu} G_0(t, \tau, \eta, J_{pq}) dt.$$

Функции $u_i(\eta, t, \tau)$, ($i = 1, 2$), $v_2(\eta, t, \tau)$ определяются как периодические решения по t с нулевым средним значением из уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = F_0(t, \tau, \eta, J_{pq}) - f_0(\eta, \tau),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = F_1(t, \tau, \eta, J_{pq}) - u_{1\eta}(\eta, t, \tau)\omega_0(J_{pq}) - f_1(\eta, \tau),$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = G_0(t, \tau, \eta, J_{pq}) - u_1(\eta, t, \tau)\omega_0(J_{pq}) - g_0(\eta, \tau).$$

Функции $f_0(\eta, \tau)$, $f_1(\eta, \tau)$, $g_0(\eta, \tau)$ для рассматриваемых воздействий являются гладкими по η . Функция $f_0(\eta, \tau)$ - это среднее значение по t функции $F_0(t, \tau, \varphi, J_{pq})$. После усреднения от бесконечной суммы остается только один член. Вычисление $f_0(\eta, \tau)$ будет продемонстрировано ниже. Подобные утверждения справедливы и для функций $f_1(\eta, \tau)$, $g_0(\eta, \tau)$.

Система (4.51) во времени τ оказалась теперь сингулярно возмущенной системой следующего вида (п.2.1.7)

$$\mu \frac{d\xi}{d\tau} = f_0(\eta, \tau) + \mu f_1(\eta, \tau)\xi + O(\mu^2), \quad (4.52)$$

$$\mu \frac{d\eta}{d\tau} = \omega'_0(J_{pq})\xi + \frac{1}{2}\mu\omega''_0(J_{pq})\xi^2 + \mu g_0(\eta, \tau) + O(\mu^2),$$

4.3.3 Существование и устойчивость почти периодических колебаний

Пусть существует такая периодическая функция $\eta_0(\tau)$, что

$$f_0(\eta_0(\tau), \tau) \equiv 0, \quad 0 < \eta_0(\tau) < 2\pi. \quad (4.53)$$

В этом случае вырожденная система, которая получается из (4.52) при $\mu = 0$, имеет решение

$$\xi = 0, \quad \eta = \eta_0(\tau). \quad (4.54)$$

Линеаризуя правую часть системы (4.52) на решении (4.54), получим матрицу

$$A_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & f_{0\eta}(\eta_0, \tau) \\ \omega'_0(J_{pq}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Если

$$\omega'_0(J_{pq})f_{0\eta}(\eta_0, \tau) > \sigma_0 > 0, \quad \sigma_0 = \text{const}, \quad \tau \in (-\infty, \infty), \quad (4.55)$$

то матрица $A_0(\tau)$ имеет вещественные собственные значения разных знаков. В этом случае (см. [17, глава 8]) в системе

$$\mu \frac{du}{d\tau} = A_0(\tau)u \quad (4.56)$$

для достаточно малых μ пространство решений $U(\mu)$ может быть представлено в виде

$$U(\mu) = U_+(\mu) + U_-(\mu).$$

Для решений $u_+(\tau, \mu) \in U_+(\mu)$ справедливо неравенство

$$\|u_+(\tau, \mu)\| \leq M_+ \exp \left[-\frac{\gamma_+}{\mu}(\tau - s) \right] \|u_+(s, \mu)\|, \quad (-\infty < s < \tau < \infty),$$

а для решений $u_-(\tau, \mu) \in U_-(\mu)$ справедливо следующее неравенство:

$$\|u_-(\tau, \mu)\| \leq M_- \exp \left[-\frac{\gamma_-}{\mu}(\tau - s) \right] \|u_-(s, \mu)\|, \quad (-\infty < \tau < s < \infty).$$

Здесь $M_+, M_-, \gamma_+, \gamma_-$ - положительные постоянные и $\|\cdot\|$ - произвольная норма в $\mathbb{R}^2$. Из оценок решений системы (4.56) следует, что решение этой системы неустойчиво для достаточно малых μ , если пространство $X_-(\mu)$ начальных условий решений из $U_-(\mu)$ является нетривиальным. Следовательно, неоднородная система

$$L(\mu) = \mu \frac{dz}{d\tau} - A_0(\tau)z = f(\tau),$$

где $f(\tau)$ - периодическая двумерная функция, для достаточно малых μ имеет единственное периодическое решение. Это решение представимо в виде (см. [17, 77]).

$$z(\tau, \mu) = L^{-1}(\mu)f = \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau, s, \mu)f(s)ds,$$

где

$$\|K(\tau, s, \mu)\| \leq M \exp \left(-\frac{\gamma}{\mu}|\tau - s| \right) \quad (-\infty < \tau, s < \infty), \quad (4.57)$$

и M, γ - положительные постоянные.

Преобразуем систему (4.52), используя замену

$$u = \eta - \eta_0(\tau),$$

и записав полученную систему в векторной форме ($z = (\xi, u)$)

$$\mu \frac{dz}{d\tau} = A_0(\tau)z + H(z, t, \tau, \mu). \quad (4.58)$$

Компоненты вектора $H(z, t, \tau, \mu)$ имеют вид

$$f_0(u + \eta_0, \tau) - f_{0\eta}(\eta_0, \tau)u + \mu f_1(u + \eta_0, \tau)\xi + O(\mu^2),$$

$$-\mu \frac{d\eta_0}{d\tau} + \frac{1}{2}\mu\omega_{xx}(x_0, \tau)\xi^2 + \mu g_0(u + \eta_0, \tau) + O(\mu^2).$$

Очевидно, справедливо следующее неравенство

$$||H(0, t, \tau, \mu)|| \leq p(\mu), \quad (4.59)$$

где $p(\mu) \rightarrow 0$, при $\mu \rightarrow 0$. Компоненты вектор-функции $H(z, t, \tau, \mu)$ дифференцируемы по z в достаточно малой окрестности точки $(0, 0)$. Поэтому справедливо следующее неравенство

$$||H(z_1, t, \tau, \mu) - H(z_2, t, \tau, \mu)|| \leq p_1(r, \mu)|z_1 - z_2|, \quad (4.60)$$

где $p_1(r, \mu) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$.

Вектор-функция $H(z, t, \varepsilon t, \mu)$ является почти периодической функцией переменной t . Задача о почти периодических решениях системы (4.58) эквивалентна задаче о разрешимости векторного интегрального уравнения

$$z(\tau, \mu) = \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau, s, \mu) H(z, s, \mu) ds \equiv \Pi(z, \mu). \quad (4.61)$$

Из неравенств (4.59), (4.60) следует, что последовательные приближения (см., например, [47])

$$z_0(\tau, \mu) = \Pi(z, 0), \quad z_j(\tau, \mu) = \Pi(z_{j-1}(\tau, \mu), \mu), \quad j = 1, 2, \dots$$

для достаточно малых μ сходятся равномерно на интервале $(-\infty, \infty)$ к единственному почти периодическому решению $z^*(\tau, \mu)$ векторного интегрального уравнения (4.61). Решение $z^*(\tau, \mu)$ стремится к вектору $(0, 0)$ равномерно по t при $\mu \rightarrow 0$. Следовательно, система (4.58) для достаточно малых μ имеет единственное почти периодическое решение $z_*(\tau, \mu)$. В свою очередь, система (4.52) для достаточно малых μ имеет единственное почти периодическое решение. Поэтому система (4.51) для достаточно малых μ имеет единственное почти периодическое решение.

Чтобы исследовать устойчивость почти периодического решения $z_*(\tau, \mu)$ системы (4.58), сделаем замену $z = z_*(\tau, \mu) + y(\tau, \mu)$. Получим систему

$$\mu \frac{dy}{d\tau} = A_0(\tau)y + H_1(y, t, \tau, \mu), \quad (4.62)$$

где

$$H_1(y, \psi, \tau, \mu) = H(z_*(\tau, \mu) + y(\tau, \mu), t, \tau, \mu) - H(z_*(\tau, \mu), \psi, \tau, \mu).$$

Задача устойчивости почти периодического решения $z_*(\tau, \mu)$ сводится к задаче устойчивости нулевого решения системы (4.62). Учитывая экспоненциальные оценки решений системы (4.56), из теоремы Ляпунова [48]

о неустойчивости по первому приближению получим, что для достаточно малых μ нулевое решение системы (4.52) неустойчиво. Следовательно, почти периодическое решение $z_*(\tau, \mu)$ системы (4.58) неустойчиво. Сформулируем этот результат как теорему применительно к системе (4.47).

Теорема 4.3. Пусть J_{pq} такая постоянная, что

$$\omega_0(J_{pq}) = 0, \quad \omega'_0(J_{pq}) \neq 0.$$

Пусть существует такая периодическая функция $\eta_0(\tau)$ ($0 < \eta_0(\tau) < 2\pi$), что

$$f_0(\eta_0(\tau), \tau) = 0$$

и справедливо неравенство (4.55):

$$\omega'_0(J_{pq})f_{0\eta}(\eta_0, \tau) > \sigma_0 > 0, \quad \sigma_0 = \text{const}, \quad \tau \in (-\infty, \infty).$$

Тогда система (4.47) для достаточно малых μ имеет единственное неустойчивое почти периодическое решение.

При выполнении условий теоремы 4.3 в μ -окрестности резонансной точки J_{pq} существует единственное неустойчивое почти периодическое решение.

Теперь пусть вместо неравенства (4.55) выполняется противоположное неравенство

$$\omega_0(J_{pq})f_{0\eta}(\eta_0, \tau) < \sigma_1 < 0, \quad \sigma_1 = \text{const}, \quad -\infty < \tau < \infty. \quad (4.63)$$

Если неравенство (4.63) справедливо, то собственные значения матрицы $A_0(\tau)$ для всех τ будут чисто мнимыми. Ранее при выполнении неравенства (4.55) мы использовали только первое приближение. Теперь оказывается необходимым рассмотреть уравнения второго приближения.

Будем рассматривать более узкую окрестность резонансной точки J_{pq} . Сделаем замену в системе (4.51)

$$\begin{aligned} \xi &= \mu u(t) + \mu \xi_0(\tau) + \mu^3 u_3(t, \tau), \\ \eta &= \eta_0(\tau) + \mu v(t) + \mu^2 v_0(\tau), \end{aligned}$$

где $\eta_0(\tau)$ удовлетворяет уравнению (4.53), периодические функции $\xi_0(\tau)$ и $v_0(\tau)$ являются решениями уравнений

$$\frac{d\eta_0}{d\tau} = \omega'_0(J_{pq})\xi_0(\tau) + g_0(\eta_0(\tau), \tau),$$

$$\frac{d\xi_0}{d\tau} = f_{0\eta}(\eta_0(\tau), \tau)v_0(\tau) + f_1(\eta_0(\tau), \tau)\xi_0(\tau)$$

$$\langle F_1(t, \tau, \eta_0(\tau), J_{pq})u_1(\eta_0(\tau), t, \tau) \rangle_t + \langle F_{0\varphi}(t, \tau, \eta_0(\tau), J_{pq})v_2(\eta_0(\tau), t, \tau) \rangle_t$$

соответственно. Здесь $\langle \cdot \rangle_t$ - среднее значение по t при фиксированном τ . Из неравенств (4.49) и (4.63) следует, что эти уравнения можно разрешить. Функция $u_3(t, \tau)$ определяется как периодическое решение с нулевым средним значением из уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial t} &= F_{0\varphi}(t, \tau, \eta_0(\tau), J_{pq})v_2(\eta_0(\tau), t, \tau) + F_1(t, \tau, \eta_0(\tau), J_{pq})u_1(\eta_0(\tau), t, \tau) - \\ &\langle F_{0\varphi}(t, \tau, \eta_0(\tau), J_{pq})v_2(\eta_0(\tau), t, \tau) \rangle_t - \langle F_1(t, \tau, \eta_0(\tau), J_{pq})u_1(\eta_0(\tau), t, \tau) \rangle_t. \end{aligned}$$

Сделанная замена преобразует систему (4.52) в систему

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \mu a(\tau)v + \mu^2[b(\tau)u + e(\tau)v^2] + O(\mu^3), \\ \frac{dv}{dt} &= \mu c(\tau)u + \mu^2 d(\tau)v + O(\mu^3), \end{aligned} \quad (4.64)$$

где

$$\begin{aligned} a(\tau) &= f_{0\eta}(\eta_0(\tau), \tau), \quad b(\tau) = f_1(\eta_0(\tau), \tau), \quad c(\tau) = \frac{1}{2}f_{0\eta\eta}(\eta_0(\tau), \tau), \\ d(\tau) &= \omega'_0(J_{pq}), \quad e(\tau) = g_{0\eta}(\eta_0(\tau), \tau). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Условие (4.63) в новых обозначениях принимает вид

$$a(\tau)c(\tau) < \sigma_1 < 0.$$

Как было отмечено, из этого условия следует, что собственные значения матрицы первого приближения являются чисто мнимыми для всех τ . Мы приведем систему (4.64) к “стандартной форме”, т.е. к форме, где матрица первого приближения будет нулевой. Детальное описание редукции системы (4.64) содержится в [17, глава 16].

Имеем

$$\frac{dA}{d\tau} = \frac{1}{2} \left[b(\tau) + e(\tau) - \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right] A + f_1(A, B, \kappa, \tau) + O(\mu), \quad (4.66)$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{2} \left[b(\tau) + e(\tau) - \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right] B + f_2(A, B, \kappa, \tau) + O(\mu),$$

где

$$h(\tau) = \left[-\frac{d(\tau)}{a(\tau)} \right]^{1/2}, \quad \kappa(\tau, \mu) = \frac{1}{\mu} \int_0^\tau [-a(s)c(s)]^{1/2} ds.$$

Функции $f_1(A, B, \kappa, \tau)$, $f_2(A, B, \kappa, \tau)$ являются периодическими по κ с периодом 2π . Они содержат члены не ниже чем квадратические по A и B . Анализ системы (4.66) дает следующую теорему для системы (4.50) (см. подобную теорему 16.2 в [17]). (Ниже среднее значение периодической функции $f(\tau)$ обозначается $\langle f(\tau) \rangle$.)

Теорема 4.4. Пусть резонансная точка J_{pq} удовлетворяет условиям теоремы 4.3. Пусть выполняются неравенства

$$a(\tau)d(\tau) < \sigma_1 < 0, \quad t \in (-\infty, \infty)$$

и

$$\langle b(\tau) + e(\tau) \rangle \neq 0.$$

Тогда система (4.50) в ε -окрестности резонансной точки для достаточно малых ε , имеет единственное почти периодическое решение. Это решение асимптотически устойчиво, если

$$\langle b(\tau) + e(\tau) \rangle < 0,$$

и неустойчиво, если

$$\langle b(\tau) + e(\tau) \rangle > 0.$$

Теоремы 4.3 и 4.4 применимы к изучению резонансных решений в виброударной системе (4.47). Резонансная точка определяется из уравнения

$$\omega_0(J_{pq}) = -\frac{\pi\Omega}{\pi - \arctg J_{pq}/2\Omega\Delta} = \frac{q}{p}\nu. \quad (4.67)$$

Из уравнения (4.67) следует, что

$$\omega'_0(J_{pq}) > 0.$$

Чтобы вычислить остальные коэффициенты уравнения (4.66) необходимо специфицировать функцию $f(t, \tau)$.

Пусть функция $f(t, \tau)$ определяется формулой (4.45).

Чтобы вычислить $a(\tau) = f_{0\eta}(\eta_0, \tau)$ необходимо усреднить $F_0(t, \tau, \varphi, J_{pq})$. Первый член этой функции есть

$$-4\omega_0(J_{pq})E(\tau)\sin(\nu t + \beta(\tau))\chi_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t). \quad (4.68)$$

Так как

$$\chi_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t) = -\omega_0(J_{pq})^{-1} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin k(\varphi + \frac{q}{p}\nu t)}{\Omega_0^2 - k^2}, \quad \Omega_0 = \Omega[\omega_0(J_{pq})]^{-1},$$

то необходимо усреднять слагаемые вида

$$E(\tau)\sin(\nu t + \beta(\tau))\sin k(\varphi + \frac{q}{p}\nu t), \quad k = 1, 2, \dots$$

Легко видеть, что среднее значение функции (4.68) будет ненулевым, если и только если $q = 1, p = n (n = 1, 2, \dots)$. В этом случае оно равно

$$\frac{2E(\tau)\nu^2}{\pi n(\Omega^2 - \nu^2)} \cos(n\eta - \beta(\tau)).$$

Среднее значение второго слагаемого

$$-4\gamma J_{pq}\omega_0^2(J_{pq})\chi_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t)\chi_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t)$$

равно

$$-\frac{\gamma J_{pq}}{2} \left(1 + \frac{4\Omega^2\Delta^2}{J_{pq}^2} \right).$$

Далее, функция $\eta_0(\tau)$ определяется как решение уравнения

$$\cos(n\eta - \beta(\tau)) = \frac{\gamma J_{pq}\pi n}{4E(\tau)\nu^2}(\Omega^2 - \nu^2) \left(1 + \frac{4\Omega^2\Delta^2}{J_{pq}^2} \right) = A_n(\tau). \quad (4.69)$$

Так как $A_n(\tau) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то уравнение (4.69) может иметь решения только для конечного числа значений n . Если уравнение имеет решения для данного значения n . При $|A_n(\tau)| < 1$ эти решения определяются формулами

$$\eta_{0l}(\tau) = \frac{\beta(\tau)}{n} \pm \frac{\arccos A_n(\tau)}{n} + \frac{2l\pi}{n}, \quad l = 0, \dots, n-1.$$

Вычисляя производную функции $f_0(\eta, \tau)$ в точках $\eta_{0l}(\tau)$, получим

$$f_{0\eta}(\eta_{0l}(\tau), \tau) = \pm \frac{2E(\tau)\nu^2}{\pi(\Omega^2 - \nu^2)} \sqrt{1 - A_n^2(\tau)}, \quad (4.70)$$

и, следовательно, выражение (4.68) имеет положительный и отрицательные знаки в n точках. Прямые вычисления подобные проведенным ранее показывают, что

$$\langle b(\tau) + e(\tau) \rangle = \langle f_1(\eta_0, \tau) + g_{0\eta}(\eta_0, \tau) \rangle < 0.$$

Теоремы 4.3 и 4.4 влекут следующий результат. Если резонансная точка J_{1n} является решением уравнения (4.67), то, если ε достаточно мало и $|A_n(\tau)| < 1$, уравнение (4.47) имеет n решений в $\sqrt{\varepsilon}$ -окрестности резонансной точки, которые оказываются неустойчивыми резонансными почти периодическими решениями по t , а также n решений, которые представляют собой асимптотически устойчивые резонансные почти периодические решения по t в ε -окрестности резонансной точки.

Случай, когда сила определяется формулой (4.46), является более простым. Функции $f_0(\eta, \tau)$, $f_1(\eta, \tau)$, $g_0(\eta, \tau)$ не зависят от τ . Тогда $\eta_0(\tau) \equiv \eta_0 = \text{const}$. Получим

$$\cos(n\eta - \theta) = \frac{\gamma J_{pq} \pi n}{4A\nu^2} (\Omega^2 - \nu^2) \left(1 + \frac{4\Omega^2 \Delta^2}{J_{pq}^2} \right) = A_n$$

и

$$\eta_{0l} = \frac{\theta}{n} \pm \frac{\arccos A_n}{n} + \frac{2l\pi}{n}, \quad l = 0, \dots, n-1.$$

Переменная τ содержится только в членах $O(\mu^3)$ в системах (4.51) и (4.64). И мы получим результат аналогичный полученному для возмущения (4.45).

Таким образом показано, что в рассмотренной виброударной системе с одной степенью свободы при малых бигармонических возмущениях с близкими и сильно различающимися частотами могут появиться устойчивые и неустойчивые почти периодические резонансные режимы движения.

Использованные методы могут быть применены для изучения резонансных режимов, возникающих под действием бигармонических возмущений в различных задачах теории колебаний, описываемых уравнениями с непрерывными и разрывными коэффициентами.

4.3.4 О неупругом ударе

В этой главе всюду предполагалось, что удары - абсолютно упругие. То есть в момент каждого соударения скорость точечного тела мгновенно меняет свой знак на противоположный, а ее абсолютная величина не меняется (Приложение А).

В теории виброударных систем для решения прикладных задач часто используют гипотезу Ньютона о коэффициенте восстановления скорости после удара (см. п. А.5). В соответствии с этой гипотезой абсолютная величина скорости мгновенно уменьшается. Если при упругом ударе импульс $J = 2m|\dot{x}_-|$, где $\dot{x}_-$ - значение скорости соударяющегося тела в момент времени $t = t_\alpha - 0$, $x(t_\alpha) = \Delta$, то при ньютоновском ударе $J = (1 + R)m|\dot{x}_-|$, где R - коэффициент восстановления, $0 \leq R \leq 1$. То есть импульс мгновенно теряет некоторое значение пропорциональное величине $r = 1 - R$. Гипотеза Ньютона позволяет учесть диссипацию энергии при соударениях.

Для квазиконсервативных систем $r = 1 - R = O(\varepsilon)$. Тогда, если рассмотреть систему (4.11), то в ее первое уравнение должен быть добавлен член, описывающий мгновенное уменьшение импульса. Моменты удара отвечают значениям фазы $\psi = 2k\pi$. И в этих же точках имеет скачок функция χ_ψ , определяющая правую часть уравнения (4.11). Таким образом, в принципе мы приходим к некорректной записи, требующей домножение δ -функции на разрыв. Эта некорректность снимается после перехода к усредненным уравнениям [8, 72], однако соответствующая процедура нуждается в отдельном обосновании. Сделанное замечание касается всех систем, записанных в переменных "импульс-фаза".

По этой причине, мы не рассматривали здесь задачи с неупругим ударом. Пример рассмотрения на физическом уровне строгости дан в Приложении В.

Отметим, что рассмотрение этой проблемы было проведено еще в книге [29].

ПРИЛОЖЕНИЕ А

СИСТЕМЫ С УДАРАМИ

А.1 Виброударные системы и виброударные процессы. *Системы с ударами* — один из самых распространенных и развитых разделов теории негладких динамических систем. Системы с ударами могут условно делиться на две представительные группы.

Во-первых, системы, в которых параметры ударных воздействий заданы. Такие воздействия, как правило, возбуждают колебания в линейных и нелинейных объектах. Некоторые вопросы, связанные с анализом таких систем, рассматривались в п.п.1.4 и 2.3.

Во-вторых, виброударные системы (глава 4.). Если в механической системе устанавливается некоторый вибрационный процесс, оказывающий следствием систематических соударений элементов конструкций, то этот процесс называется виброударным, а сама система - виброударной. Имеется достаточно много хорошо известных книг и обзоров [3 - 8, 22, 23, 27, 36, 40, 51, 53, 54, 65, 68, 71, 93, 111], посвященных этим системам. Здесь будут лишь резюмированы их основные свойства.

В виброударных системах параметры систематически возникающих соударений заранее неизвестны, а среди действующих

нелинейных сил как раз и присутствуют силы удара. Для практики весьма важно эффективно рассчитывать виброударные системы различных структур, при различных видах внешних воздействий.

В Приложении В рассмотрен класс параметрических виброударных систем, возбуждаемых посредством систематических ударов.

Большие силы, возникающие при соударении твердых тел, используются в технике для создания интенсивных воздействий на обрабатываемые материалы и среды. Соударяющиеся системы после одного или, некоторого числа ударов могут перейти в другое состояние или разрушиться. Цель деятельности большинства традиционных машин ударного действия состоит в организации соударений, в результате которых обрабатываемые материалы и среды претерпевают с точки зрения механики достаточно радикальные изменения.

А.2. Базовые модели виброударных систем. Реальные виброударные системы, например, упомянутые машины ударного действия [3, 5, 40, 54], для большей эффективности работы организованы так, что систематические удары наносятся через равные промежутки времени T_1 . Возможный вид эскиза графика силового воздействия $F(t)$, на обрабатываемую среду дан на рис. А.1. Это T_1 - периодическая последовательность «импульсных» функций. Возрастающая ветвь каждого «импульса» соответствует нагрузочному акту удара, убывающая — разгрузочному.

Показанный эскиз графика «импульсной» функции может трактоваться как член δ -образной последовательности (ср. п. 1.2), слабо сходящийся к обобщенной δ -функции Дирака.

Рис. А.1

Время отличия «импульсов» от нуля и есть время продолжительности удара. Для реальных технических систем оно изменяется в диапазоне 10^{-3} - 10^{-5} с. Удары, конечно, не обязательно должны следовать периодически и

Рис. А.2

(или) изображаться на графике столь просто; возможны и другие случаи. На рис. А.2 показана конструкция, состоящая из упругой балочки-пружины и массивного шара. Если по шару,

находящемуся в равновесии, нанести удар, то он начнет двигаться согласно закону, эскиз графика которого дан на рис. А.3.

Это переходный процесс, носящий из-за рассеяния энергии затухающий характер. Показанная величина T_0 (период собственных колебаний системы) при определенных условиях постоянна и приближенно дается формулой $T_0 = \sqrt{mc^{-1}}$, где m — масса, а c — упругость системы. Величина $\omega_0 = 2\pi T_0^{-1}$ — собственная частота.

Рис. А.3

В реальных устройствах организация внешнего силового воздействия определяется их спецификой. Если сила возбуждения оказывается синусоидальной, с периодом T (частотой $\omega = 2\pi T^{-1}$) и трение в

в системе, например, вязкое, и настолько малое, чтобы сама система может совершать колебательные движения, то эскиз графика $x(t)$ — установившийся процесс — также синусоида того же периода (рис.А.4). Зависимость $A(\omega)$ — амплитуды синусоидальных колебаний от частоты ω имеет стандартный вид (рис. А.5).

Рис.А.4

Рис.А.5

Если вблизи конструкции (рис.А.2) установить один или два неподвижных ограничителя, то как раз и получаются системы, которые называют виброударными. Для виброударных систем резонансные колебания происходят в других частотных диапазонах, так что настройка системы с ударами в резонанс на собственной частоте «шарика на пружине» для получения максимальных амплитуд – не эффективна.

Система, показанная на рис. А.6, называется системой с зазором $\Delta > 0$, на рис.А.7 – с симметричными ограничителями, на рис.А.8 – с нулевым зазором. Наконец, на рис.А.9 балочка – пружина оказывается предварительно натянутой, так что здесь $\Delta < 0$ и система называется системой с натягом (п.4.1.2).

Рис.А.6

Рис.А.7

Рис. А.8

Рис. А.9

К описанным сейчас базовым моделям «линейная система + ограничители», приводятся динамические схемы многих реальных технических объектов [3, 5, 22, 23, 25, 36, 40, 68].

А.3. Законы движения. Пусть к шарам приложены периодические синусоидальные силы частоты ω , под действием которых устанавливаются периодические режимы с соударениями – виброударные процессы. Когда рассуждения – достаточно общие, сказать что-либо однозначное о характере виброударного процесса нельзя. Ибо даже в такой «простой» системе, как «шарик на пружине», многообразие всех возможных режимов движения весьма велико.

Однако виброударные процессы, чаще всего (но далеко не всегда!) встречающиеся на практике, характеризуются известной «правильностью»: в случае односторонних ограничителей на один период внешней силы приходится один удар, в случае двухсторонних — два, и удары следуют поочередно [3 - 8].

Если трение в системе невелико, то интенсивные колебания можно поддержать при помощи не очень больших сил возбуждения.

В этом случае, типичные примеры виброударных процессов в системах, показанных на рис. А.6—А.9, приведены на рис.А.10—А.13. Интересно подчеркнуть, что столь простые на вид режимы получаются в результате сложного взаимодействия переходных процессов (см. рис. А.2).

Рис.А.10

Рис. А.11

Рис. А.12

Рис. А.13

На рис. А.14—А.17 показаны возможные варианты зависимостей амплитуд колебаний для процессов, изображенных на рис. А.10—А.13, от частоты внешней вынуждающей силы [3-5, 7, 72], предполагаемой синусоидальной.

Теперь ввиду существенной несинусоидальности виброударных процессов амплитудой называют полуразмах колебаний — половину

расстояния, проходимого центром шара от крайнего нижнего до крайнего верхнего положения.

Рис. А.14

Рис. А.15

Для системы рис. А.6 при достаточно большом значении зазора зависимость $A(\omega)$ может иметь вид, показанный на рис. А.14. Теперь имеем многозначную функцию частоты и её максимум лежит вблизи удвоенного значения собственной частоты линейной системы. Кроме того, здесь появляется ветвь неустойчивых режимов, обозначенная пунктиром. Соответствующие режимы движения в обычных условиях – физически нереализуемы.

Участок кривой $A(\omega)$ вплоть до отмеченного цифрой 1 соответствует безударным колебаниям системы. Здесь движение тождественно установившемуся режиму, показанному на рис. А.4. Точка 1 соответствует касанию ограничителя колеблющимся шаром и появлению режимов с ударами; касание происходит на частотах, близких к собственной частоте линейной системы. Вплоть до точки 2 (частота $\omega = \omega_0$) движение носит довольно вялый характер: полуразмах колебаний может даже оказаться меньше зазора (показано В.К. Асташевым). На следующем участке колебания начинают резко нарастать, и это нарастание происходит до тех пор, пока не придем в точку 3, после чего происходит внезапный срыв виброударного режима (точка 4), и дальше вновь начинается безударный режим. Если теперь попытаться плавно изменять частоту в обратном направлении, то вернуться сразу на участок 2–3 невозможно. Сначала будет снова происходить нарастание

безударного режима (участок 4–5), а появление интенсивных соударений произойдет только после дополнительного толчка колеблющегося тела (жесткий запуск виброударного процесса) или прохода левее точки 5.

Интересный вид имеет функция $A(\omega)$ симметричной системы рис. А.7. Здесь полуразмах колебаний не может превосходить значения Δ ; если учесть это обстоятельство, то можно понять, что данная кривая во многом аналогична рис. А.14. Так участок 1–2 соответствует вялым движениям с ударами об один из ограничителей; точка 4 отвечает наиболее интенсивному высокочастотному виброударному режиму, который может сорваться и т. д.

Для систем с нулевым или близким к нулю зазором зависимость $A(\omega)$ (рис. А.16) напоминает представленную на рис. А.5. Только теперь резонанс наступает вблизи частоты $\omega = 2\omega_0$.

Рис. А.16.

Рис. А.17.

Для системы с натягом график $A(\omega)$ будет иметь вид, показанный на рис. А.17. Здесь опять-таки имеется не реализуемая неустойчивая ветвь. Естественно, для того чтобы запустить подобную систему, необходимо преодолеть статическую силу натяжения, для чего снова не обойтись без жесткого запуска.

Наряду с виброударными, в технике используются и редкоударные процессы [40]. Такие процессы возникают в случае, когда при нанесении систематических ударов переходные процессы, возникающие вследствие некоего соударения, успевают затухнуть и уже не влияют на динамику системы к моменту последующего соударения. Закон движения дается прямой «склеенкой» переходных процессов, типа данных на рис. А.3.

А.4. Главные свойства простейших виброударных систем.

Резюмируя сказанное, пользуясь упоминаемыми выше работами, а также результатами главы 4, можно прийти к выводу, что важнейшие свойства виброударных систем могут быть описаны следующим образом.

А. Возможно возникновение нескольких ветвей амплитудно-частотных характеристик, а также чередование - устойчивая ветвь, отвечающая устойчивым режимам движения, неустойчивая ветвь, отвечающая неустойчивым режимам движения.

Б. В системах с зазором проявляется жесткий, а с натягом - мягкий анизохронизм колебаний, в то время как системы с нулевым зазором - изохронны.

В. Оказывается, что если возбуждение периодическое, но полигармоническое, то возможна ситуация, при которой в резонансной области будет существовать несколько пар устойчивых периодических виброударных процессов.

Г. Проявляются явления затягивания колебаний по частоте или амплитуде (при плавном изменении частоты или зазора).

Д. Проявляются возможности срыва колебаний после достижения некоторых значений амплитуд. Кроме того возникает необходимость жесткого запуска, состоящего в том, что для того, чтобы возобновить движения с соударениями после срыва колебаний, необходимо не только уменьшить (увеличить) частоту возбуждения, но и придать системе дополнительный (запускающий) импульс.

А.5. Гипотеза Ньютона. В настоящее время наиболее популярным способом описания удара остается, как и много столетий назад, способ, основанный на гипотезе Ньютона [3, 5, 7, 29, 54]. Строго говоря, именно предположение о мгновенности акта удара и делает виброударные системы негладкими. Структура всякой модели виброударной системы есть: "механическая система, как правило, гладкая, плюс гипотеза удара".

Гипотеза Ньютона постулирует наличие разрыва скорости в момент соударения. Так, в простейшем случае прямого и центрального соударения некоего точечного тела, с координатой $x(t)$ с

неподвижным ограничителем хода ($x=\Delta$), гипотеза Ньютона выражается так

$$\dot{x}(t_a+0) = -R\dot{x}(t_a-0). \quad (\text{A.1})$$

Причем t_a - некий α -й момент времени: $x(t_a) = \Delta$. Число $R = \text{const}$, $R \in [0,1]$ - называется коэффициентом восстановления. Это число показывает какая часть скорости восстанавливается после удара. Коэффициент восстановления - суть феноменологическая величина, на деле зависящая от большого числа факторов, которые, однако, не учитываются. Из выражения (A.1) следует знаменитая теорема Лазара Карно о потере энергии при ударе.

В данном случае, предположив, что масса тела, соударяющегося с ограничителями m , для рассеянной энергии E_c находим:

$$E_c = J^2 \frac{1-R}{2m(1+R)}, \quad (\text{A.1})$$

причем величина $J = 2(1+R) |\dot{x}(t_a-0)|$ - импульс удара.

Отсюда и видна негладкость динамической системы с ударами. Отказ от предположения о мгновенности удара в принципе устраняет непосредственную разрывность систем, но они остаются близкими к разрывным.

Говоря об основах теории удара нельзя не вспомнить имена великих предшественников Ньютона, о которых он упоминал в своих «Началах»: о Галилее, Рене, Валлисе, Гюйгенсе и Мариотте. Впрочем, этот список можно было бы расширить, поскольку в 17-м веке ударом интересовались практически все натурфилософы. Иногда гипотезу Ньютона именуют также гипотезой Гюйгенса – Ньютона.

Несмотря то, что любое реальное соударение имеет конечную продолжительность, применение гипотезы Ньютона чрезвычайно заманчиво и удобно, поскольку именно благодаря гипотезе о мгновенном ударе и удаётся построить содержательные решения многих сильно нелинейных задач.

При этом её использование иногда влечет за собой не всегда приятную необходимость сталкиваться с некоторыми парадоксальными

ситуациями, связанными с «мгновенностью», скачками и т. д.. См. также п. 4.3.4.

Отказ от концепции мгновенного удара может быть выполнен двумя путями. Во-первых, посредством учета собственных волновых свойств ударной пары. Во-вторых, при помощи моделирования контакта соударяющихся тел посредством методов механики деформируемого твердого тела.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

ВОЗБУЖДЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВИБРОУДАРНЫХ ПРОЦЕССОВ УДАРАМИ

В.1 Об одном классе моделей параметрических виброударных систем, допускающих построение точных аналитических решений. В работе [38] был рассмотрен специальный класс параметрических виброударных систем, для которых достаточно легко строятся точные периодические решения. Обычно модели такого типа изучаются посредством метода усреднения (см. п. 2.3.1). Для ряда задач, однако, удаётся построить точные аналитические представления. Подобное везение – оказывается довольно редким и поэтому приводимые ниже результаты имеют определенную модельную ценность.

На рис. В.1 показаны различные виброударные системы, отвечающие линейным системам, данным на рис. 1.4 и 1.5. В случаях рис. А.1. а, б уравнения движения имеют вид:

$$\ddot{x} + [1 + \mu \delta^{\frac{\pi}{2}}(t)]x + \Phi_0(x, \dot{x}) = 0$$

где $\Phi_0(x, \dot{x})$ сила удара и без ограничения общности считается $m=1$. Взаимодействие может считаться как симметричным, так и несимметричным; функция $\delta^{\frac{\pi}{2}}(t)$ определена в п. 1.4.2.

Для систем рис. В.1. в, г будем иметь:

$$\ddot{x} + [1 - \mu + \mu T \delta^T(t)]x + \Phi_0(x, \dot{x}) = 0. \quad (\text{B.1})$$

Рассмотрим для определенности случай прыгающей каретки, оснащенной несимметричным ограничителем хода (рис. В.1., в). Пусть $\mu < 1$. Используя периодическую функцию Грина, получим, как и

Рис. В.1

при рассмотрении линейной системы (1.25) интегральное представление решения, трансформирующееся в интегральное уравнение T -периодических колебаний:

$$x(t) = - \int_0^T \chi(t-s) \{ \mu T \delta^T(s) x(s) + \Phi_0[x(s), \dot{x}(s)] \} ds \quad (\text{B.2})$$

В этом уравнении T - период отыскиваемого решения (здесь - совпадающий с периодом возбуждения); $\Phi_0[x(s), \dot{x}(s)]$ - сила ударного взаимодействия, выражаемого в окрестности каждого α -го соударения через δ -функцию как

$$\Phi_0[x(s), \dot{x}(s)]_{t=t_\alpha} = J \delta(t - t_\alpha); J = (1 + R) |\dot{x}(t_\alpha - 0)|, \quad (\text{B.3})$$

$R \in (0, 1]$ - коэффициент восстановления (см. Приложение А). В случае T -периодического виброударного процесса в формуле (B.3) необходимо положить $t_\alpha = \varphi = \text{const} \in [0, T]$; при продолжении функции $\Phi_0[x(s), \dot{x}(s)]_{t=t_\alpha}$ на всю числовую в той же формуле должна появиться периодическая обобщенная функция $\delta^T(t)$ (см. п.1.2).

Теперь из (B.2) найдем двухпараметрическое представление [38]:

$$x(t) = -\mu T \chi(t) x(0) - J \chi(t - \varphi), \quad (\text{B.4})$$

причём параметры движения «импульс, фаза» определяются из условий удара

$$x(\varphi) = \Delta; J = (1 + R) |\dot{x}(\varphi - 0)|. \quad (\text{B.5})$$

Вид периодической функции Грина вычислен в п. 1.4.2, см. формулу (1.26) и далее (здесь $\mu < 1$!). После вычислений находим:

$$x(t) = \frac{\Delta[1 + \mu T \chi(0)]}{\chi(0) + \mu T \beta(\varphi)} \chi(t - \varphi) - \frac{\mu T \Delta \chi(\varphi)}{\chi(0) + \mu T \beta(\varphi)} \chi(t); \quad \beta(\varphi) = \chi^2(0) - \chi^2(\varphi);$$

$$J = -\frac{\Delta[1 + \mu T \chi(0)]}{\chi(0) + \mu T \beta(\varphi)}; \quad (\text{B.6})$$

$$x(t) = -J[\chi(t - \varphi) - \frac{\mu T \chi(t) \chi(\varphi)}{\chi(0) + \mu T \chi(\varphi)}];$$

Принимая во внимание вид периодической функции Грина, данный в (1.26) и далее (функция $\chi_{01}(t)$), приходим к представлению для импульса удара:

$$J = -\Delta \frac{4\gamma^2 \sin^2 \gamma / 2 + \mu T \gamma \sin \gamma T}{\gamma \sin \gamma T - \mu T \sin \gamma \varphi \sin[\gamma(T - \varphi)]}, \quad \gamma = \sqrt{1 - \mu}. \quad (\text{B.7})$$

Выражения (B.6) и (B.7) определяют вид искомого периодического режима. Аналогично может быть рассмотрена задача об отыскании субгармонических режимов или проанализированы другие модели, показанные на рис. B.1.

Предположение о малости величины μ в данной задаче не существенно: определяющая решения периодическая функция Грина в соответствии с формулой (1.26) легко вычисляется при всех μ .

В.2 Использование принципа энергетического баланса. Для получения неизвестной фазы процесса воспользуемся принципом энергетического баланса [8, 72], полагая, что на периодическом режиме работы неконсервативных сил - возбуждения и диссипации - равны:

$$A_p(J, \varphi) = E_c(J, \varphi)$$

Пусть, для определенности, в системе отсутствует силовое возбуждение, а диссипация учитывается только посредством введения в модель гипотезы Ньютона. Тогда:

$$A_p(J, \varphi) = \int_0^T \mu T \delta^T(t) x(J, \varphi; t) \dot{x}(J, \varphi; t) dt;$$

$$E_c(J, \varphi) = J^2 \frac{1-R}{2(1+R)} = \text{const}(\varphi),$$

где первое выражение – работа параметрического источника, а второе – выражает теорему Карно (А.1.) при $m=1$.

При вычислении величины $A_p(J, \varphi)$ необходимо отметить, что при $t=kT$ ($k \in Z$) под знаком интеграла сингулярность «домножается» на разрыв первого рода, который возникает из-за отсутствия производной периодической функции Грина при $t=kT$. Наряду с этим, в указанных точках, впрочем, существуют правая и левая производные. Имеем:

$$A_p(J, \varphi) = -\mu T J^2 \int_0^T \left[\chi(t-\varphi) - \frac{\mu T \chi(t) \chi(\varphi)}{\chi(0) + \mu T \chi(\varphi)} \right] \left[\dot{\chi}(t-\varphi) - \frac{\mu T \dot{\chi}(t) \chi(\varphi)}{\chi(0) + \mu T \chi(\varphi)} \right] \delta^T(t) dt,$$

или, выполняя интегрирование:

$$A_p(J, \varphi) = \mu T J^2 \frac{\mu T \dot{\chi}(\varphi) \chi(\varphi)}{\chi(0) + \mu T \chi(\varphi)},$$

где учтены, следующие из основных свойств периодической функции Грина [см. п.1.4.2 и формулу (1.26)] факты: $\chi(-\varphi) = \chi(\varphi)$; $\dot{\chi}_{\pm}(-\varphi) = -\dot{\chi}_{\pm}(\varphi)$; $\dot{\chi}_{\pm}(0) = \pm \frac{1}{2}$. При этом было введено обозначение: $\dot{\chi}(\varphi) = \frac{1}{2} [\dot{\chi}_{+}(\varphi) + \dot{\chi}_{-}(\varphi)]$.

При $\varphi=kT$ доопределим производную $\dot{\chi}(\varphi)$ нулем. С учетом вычисленного, уравнение энергетического баланса принимает вид:

$$\mu T J^2 \frac{\mu T \dot{\chi}(\varphi) \chi(\varphi)}{1 + \mu T \chi(0)} - \frac{1-R}{2(1+R)} = 0. \quad (B.8)$$

Обозначим $\alpha(\varphi) \equiv \dot{\chi}(\varphi) \chi(\varphi)$ и перепишем (B.8) как

$$\alpha(\varphi) = \frac{1-R}{2(1+R)} \frac{1 + \mu T \chi(0)}{\mu T},$$

причём в соответствии с (1.26)

$$\alpha(\varphi) = -\frac{1}{4\gamma} \frac{\sin[2\gamma(\varphi - \frac{T}{2})]}{\sin^2 \gamma \frac{T}{2}}; 0 < \varphi < T,$$

и $\alpha(\varphi) = 0$ при $\varphi = 0; T$. Используемое доопределение оправдано тем, что разрывы фазового члена в уравнении энергетического баланса возникают, как результат гипотезы о мгновенном ударе и мгновенном внесении в систему энергии. При любом «допредельном» параметрическом члене непрерывная функция $\alpha(kT) = 0$. Таким образом доопределение физически оправдано тем обстоятельством, что при $\varphi = kT$ энергия диссипируется и рассеивается одновременно, ибо по условию задачи в модели сосуществуют два различных «моментально протекающих» процесса.

Легко установить, что при таком доопределении уравнение (B.8) можно получить и непосредственно из определения импульса удара (B.5).

Возвращаясь к исходным обозначениям ($\gamma = \sqrt{1-\mu}$) можно найти условия разрешимости уравнения (B.8) и, следовательно, условия существования периодических виброударных режимов:

$$\left| 2\sqrt{1-\mu} \frac{1-R}{1+R} \left(\frac{1}{\mu T} + \frac{1}{2\sqrt{1-\mu}} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{1-\mu} T}{2} \right) \sin^2 \frac{\sqrt{1-\mu} T}{2} \right| \leq 1. \quad (\text{B.9})$$

Возможные варианты эскизов графиков функции $\alpha(\varphi)$ даны на рис. B.2.

Рис. B.2

B.3 Энергетическое условие неустойчивости. Учитывая, что использование методов теории устойчивости для систем такого рода приводит к весьма громоздким и нетривиальным вычислениям, воспользуемся «прикидочной» методикой, заключающейся в

использовании энергетического условия неустойчивости, позволяющей отделить заведомо неустойчивые решения [6, 8, 72]. Перепишем уравнение энергетического баланса в виде

$$W(J, \varphi) = A_p(J, \varphi) - E_c(J, \varphi) = 0.$$

В случае неустойчивости периодического режима движения с параметрами (J^0, φ^0) , силы диссипации не могут стабилизировать систему и поэтому для неустойчивости *достаточно*, чтобы

$$\frac{dW}{dJ} = \frac{\partial W}{\partial J} + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dJ} \Big|_{(J^0, \varphi^0)} > 0.$$

При вычислениях учтем выполнение уравнения энергетического баланса и то обстоятельство, что функции $A_p(J, \varphi)$ и $E_c(J, \varphi)$ – однородны по J . Тогда в силу уравнения (В.8) $W_J = 0$. Далее

$$W_\varphi = \mu T J^2 \frac{\alpha'(\varphi)}{1 + \mu T \chi(0)}; J_\varphi = - \frac{2\alpha(\varphi)\Delta[1 + \mu T \chi(0)]}{\{\chi(0) + \mu T [\chi^2(0) - \chi^2(\varphi)]\}^2},$$

поэтому условие неустойчивости приводится к виду

$$\frac{\Delta}{\alpha(\varphi)} \alpha'(\varphi) < 0 \quad (\text{В.10})$$

Отделение заведомо неустойчивых режимов часто может оказаться достаточным при проведении практических расчетов.

В.4 Краткий анализ результатов. Для иллюстрации полученных решений приведем возможные зависимости $J(\omega)$, положив для определенности $\Delta < 0$. Пусть вначале $R=1$, то есть система гамильтонова. Стационарные значения фазы $\varphi_1=0$ и $\varphi_2=0,5T$ дают два значения импульса:

$$J_1(\omega) = -2\Delta\sqrt{1-\mu}\text{tg}\frac{\sqrt{1-\mu}\pi}{\omega} - \frac{2\mu\pi\Delta}{\omega};$$

$$J_2(\omega) = -2\Delta\sqrt{1-\mu}\text{tg}\left(\frac{\sqrt{1-\mu}\pi}{\omega} + \psi\right), \text{tg}\psi = \frac{\mu\pi}{\omega\sqrt{1-\mu}}, \psi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Зависимости $J_{1,2}(\omega)$ определяют границы, в которых при $R < 1$ находятся все резонансные кривые. Вертикальными асимптотами тут служат прямые

$$\omega_{1*} = 2\sqrt{1-\mu}, \omega_{2*} = \frac{2\pi\sqrt{1-\mu}}{\pi-2\beta}.$$

На рис. В.3 найденные зависимости показаны штрих-пунктирными линиями. Возможные варианты резонансных кривых при $R < 1$ представлены здесь как при наличии. Так при и в отсутствии возможности затягивания до бесконечных импульсов.

Рис.В.3

Наиболее интенсивные режимы, которые могут установиться вблизи, например, частоты $\omega = \omega_{1*} = 2\sqrt{1-\mu}$, существуют, как это следует из (В.9), тогда, когда

$$\frac{\pi\mu}{2(1-\mu)} \geq \frac{1-R}{1+R}.$$

При $\mu \rightarrow 1$ резонансная частота $\omega_{1*} \rightarrow 0$, тогда как резонансная частота $\omega_{2*} \rightarrow \infty$. Если $\mu \geq 1$ - в соответствии с (1.26) изменяется

структура периодической функции Грина и выведенные соотношения корректируются.

Специфика данной системы такова, что, до тех пор, пока уровень диссипации не достигнет значения, отвечающего уровню, отмеченному на оси ординат рис. В.2 звездочкой, фаза $\varphi_1=0$, после чего будет увеличиваться вплоть до границы условия существования, соответствующей максимуму функции $\alpha(\varphi)$.

В данном случае $\alpha(\varphi)>0$, $\Delta<0$. Следовательно, неустойчивые режимы соответствуют возрастающим участкам графика рис. В.2. Эти режимы на рис. В.3 отмечены пунктирными линиями.

Рассмотренные режимы не исчерпывают всех возможных периодических режимов движения. Они, кроме всего прочего, при необходимости должны более тщательно проверяться на выполнимость условия $x(t) \leq \Delta$.

ПРИЛОЖЕНИЕ С

ГАШЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУН И СТЕРЖНЕЙ ЗА СЧЕТ ВИБРОПЕРЕМЕЩЕНИЯ ШАЙБЫ

С.1 Скользящие гасители колебаний. Твердое тело малых размеров (шайбу), установленную на струне или стержне (далее –объекте гашения) с возможностью свободного перемещения вдоль участков, подверженных вибрации струн и стержней будем называть *скользящим гасителем колебаний*.

В п.3.8 рассматривались вопросы, связанные с маятником Челомея; там же даются соответствующие библиографические ссылки. Излагаемый ниже материал основан на работе [26].

Вибрационное поле объекта гашения считалось заданным и не зависящим от положения шайбы. В условиях неизменности возбуждения такая ситуация имеет место, когда можно пренебречь влиянием шайбы на само вибрационное поле. Собственно говоря, в этом случае нельзя говорить и о гашении колебаний. Рассмотрим случай, когда указанное предположение недопустимо.

Если на объект действует синусоидальное возбуждение и его частота ω далека от собственной частоты объединенной системы

"объект-шайба", то в системе осуществляются малоинтенсивные колебания.

При приближении величины ω к одной из собственных частот интенсивность колебаний резко возрастает, что приводит к росту сил волнового давления, действующих на шайбу [21, 44]. В тот момент, когда равнодействующая этих сил превосходит силу трения, начинается движение шайбы вдоль объекта.

Это, в свою очередь, приводит к изменению спектра собственных частот системы и, следовательно, ее самоотстройке от резонанса; интенсивность колебаний существенно уменьшается, и шайба останавливается, так что с одной стороны происходит гашение колебаний, а с другой – виброперемещение шайбы.

С.2. Закрепленная шайба. Рассмотрим следующую модель. Шайба массой m расположена на струне, имеющей погонную массу ρ и растянутую осевым усилием N . Длина струны l , а расстояние от заделки до шайбы y .

Распределение внешнего возбуждения описывается функцией $P(x, t)$. Обозначим через $u(x, t)$ отклонение точек струны от положения статического равновесия. Пусть

$$P(x, t) = P_1 \sin \frac{\pi x}{l} \cos \omega t$$

где $P_1 > 0$ – амплитуда, частота возбуждения ω близка к первой собственной частоте струны Ω_1 , $x \in [0, l]$.

Пусть вначале шайба закреплена на струне и не может перемещаться. Уравнение колебаний струны в этом случае будут такими:

$$\rho u_{tt} - Nu_{xx} + R(t)\delta(x - y) = P_1 \sin \frac{\pi x}{l} \cos \omega t, \quad (\text{C.1})$$

причем принимаемые условия защемления струны на концах имеют вид

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

В уравнении (C.1) $R(t) = R_1 \cos \omega t$ – сосредоточенная сила реакции шайбы.

В данном случае удобно воспользоваться представлениями законов движения через динамические податливости [7, 68, 72]. Запишем выражения динамической податливости струны из произвольной точки $x \in [0, l]$ в точку фиксации шайбы y в конечном виде и в виде разложения по формам собственных колебаний:

$$I_{xy}(\omega) = \begin{cases} \frac{a \sin \omega(l-y)/a}{N\omega \sin \omega l/a} \sin \frac{\omega x}{a}, & 0 \leq x < y, \\ \frac{a \sin \omega y/a}{N\omega \sin \omega l/a} \sin \frac{\omega(l-x)}{a}, & y \leq x < l; \end{cases} \quad (C.2)$$

$$I_{xy}(\omega) = \frac{2}{\rho l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x / l \sin \pi n y / l}{\Omega_n^2 - \omega^2}, \quad (C.3)$$

где $a = \sqrt{N/\rho}$ - скорость звука в струне; $\Omega_n = a\pi n/l$ - её собственные частоты.

При помощи динамических податливостей можно записать представление решения задачи (1):

$$u(x, t) = \frac{2P_1 \sin \pi x / l \cos \omega t}{\rho l (\Omega_1^2 - \omega^2)} - \frac{2R_1 \cos \omega t}{\rho l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x / l \sin \pi n y / l}{\Omega_n^2 - \omega^2}. \quad (C.4)$$

По условию частота возбуждения мало отличается от первой собственной частоты струны. Кроме того, бесконечный ряд, входящий в представление (C.4) достаточно быстро сходится, поэтому можно в дальнейшем учитывать лишь его первый член и приближенно положить:

$$u(x, t) = \frac{2 \sin \pi x / l}{\rho l (\Omega_1^2 - \omega^2)} (P_1 - R_1 \sin \pi n x / l) \cos \omega t. \quad (C.5)$$

В случае, когда $x=y$, получаем выражение перемещения $u(y, t)$ точки с координатой y . Вертикальные перемещения шайбы

$$z(t) = R_l l_m \cos \omega t$$

где $l_m = -1/m\omega^2$ - динамическая податливость шайбы.

Из условия совместности деформаций очевидно следует:

$$z(t) = u(y, t).$$

Тогда амплитуда реакции

$$R_l = \frac{2/l P_l \sin \pi y / l}{2/l \sin^2 \pi y / l + l_m \rho (\Omega_1^2 - \omega^2)}. \quad (\text{C.6})$$

Подставив (C.6) в (C.5), получим

$$u(x, t) = \frac{2/l P_l \sin \pi x / l l_m \cos}{2/l \sin^2 \pi y / l + l_m \rho (\Omega_1^2 - \omega^2)}. \quad (\text{C.7})$$

С.3. Скользящая шайба. Пусть шайба имеет возможность перемещаться вдоль струны и пусть это перемещение осуществляется по закону $y=y(t)$. Будем предполагать, что скорость виброперемещения шайбы существенно меньше скорости звука в струне: $\dot{y} \ll a$.

Отсюда следует, что волноизлучения не происходит [21, 44] и влияние движения шайбы приводит только к изменению виброполя (C.7) с учетом расстройки между «текущей собственной частотой»:

$$\Omega_1(y) = \Omega_1 \sqrt{1 - \frac{2m}{\rho l} \sin^2 \frac{\pi y}{l}}$$

и частотой возбуждения ω .

Запишем уравнение согласованного движения шайбы по струне в предположении, что она – материальная точка и во время движения на неё действует постоянная сила сухого трения [44].

$$-m\ddot{y} = \frac{\rho}{2}(a^2 - \dot{y}^2)[u_x^2(y-0, t) - u_x^2(y+0, t)] + fmg(\text{sgn} \dot{y}), \quad (\text{C.8})$$

где f -коэффициент сухого трения. Первый член в правой части уравнения (С.8) – сила волнового давления. Проведём вычисления этой силы, пренебрегая малой величиной $\dot{y}^2$ по сравнению с квадратом скорости звука a^2 и принимая во внимание, что $\rho a^2 = N$. При помощи (С.2) получаем:

$$N[u_x(y-0,t) - u_x(y+0,t)] = -R_1 \cos \omega t. \quad (\text{C.9})$$

Дифференцируя представление (С.4), находим:

$$u_x(x, t) = \frac{2\pi P_1}{\rho l^2} \frac{\cos \frac{\pi x}{l} \cos \omega t}{\Omega_1^2 - \omega^2} - \frac{2\pi R_1 \cos \omega t}{\rho l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n y}{l}}{\Omega_n^2 - \omega^2}. \quad (\text{C.10})$$

Функция $u_x(x, t)$ имеет при $x=y$ скачок. В силу свойств рядов Фурье для абсолютно интегрируемых функций ряд (С.10) в точках скачка сходится к полусумме [61]:

$$u_x(x, t) = \frac{1}{2} [u_x(y-0, t) + u_x(y+0, t)].$$

Оставляя здесь только первый член, получим, принимая во внимание формулу (С.6):

$$u_x(y-0, t) + u_x(y+0, t) \approx \frac{2\pi}{l} \operatorname{ctg} \frac{\pi y}{l} \cos \omega t. \quad (\text{C.11})$$

Перемножение левых частей (С.9) и (С.11), очевидно, определяют силу волнового давления, входящую в правую часть уравнения (С.8). Обозначим эту силу $F(y, t)$,

$$F(y, t) = \frac{\pi R_1^2}{l} \operatorname{ctg} \frac{\pi y}{l} \cos^2 \omega t$$

и перепишем уравнение (С.8) в виде

$$m\ddot{y} + F(y, t) + fmg(\operatorname{sgn} \dot{y}) = 0. \quad (\text{C.12})$$

Для получения «прикидочных» соотношений при помощи метода прямого разделения движений [9] представим решение в виде

$$y(t, \varepsilon) = Y(\varepsilon t) + \varepsilon Y_1(t), \quad (\text{C.13})$$

где решение представлено в виде суммы медленной эволюционной и малой быстрой осцилляционной частей; ε - малый параметр. Подставив (С.13) в уравнение (С.12), проведя модельное сглаживания разрывной нелинейности и отбросив члены $O(\varepsilon^2)$, получим для эволюционной составляющей:

$$m\ddot{Y} + fmg(\operatorname{sgn}\dot{Y}) = W(Y), \quad (\text{С.14}),$$

где вибрационная сила

$$W(Y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(Y, t) dt = \frac{\pi R_1^2}{2l} l_m \operatorname{ctg} \frac{\pi Y}{l}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

При $Y=0$ или l шайба находится на концах струны и вибрационная сила – максимальна. Когда шайба находится в середине струны $Y=\frac{l}{2}$ и вибрационная сила – минимальна. Можно показать, что концевые точки отвечают неустойчивым состояниям шайбы, а середина – устойчивому.

С.4. Анализ системы. Уравнение (С.14) интегрировалось численно. При этом рассматривалась как эволюционная функция Y , так и амплитуда реакции заделки $Q(t)=Q_a \cos \omega t = Nu_x(0, t)$. Параметр Q_a измеряется в экспериментах и поэтому удобен для сравнения. При его помощи можно наблюдать за изменением виброактивности объекта. Из последнего равенства и вычисленного ранее найдём:

$$Q_a = \frac{\pi N P_1 l_m}{2 \sin^2 \frac{\pi Y}{l} + \rho l l_m (\Omega_1^2 - \omega^2)}.$$

Интегрирование (С.14) проводилось при следующих значениях параметров: $m=10^{-3}$ кг, $P_1=3 \cdot 10^{-3}$ Нм $^{-1}$, $a=16$ мс $^{-1}$, $l=0,4$ м, $N=0,26$ Н, $f=10^{-2}$. Начальные условия выбирались такими: $Y_0=10^{-6}$, $\dot{Y}_0=0$.

Функция $Y(t)$ медленно изменяется вплоть до достижения значения вблизи середины струны.

Для частоты возбуждения $\omega=125$ с $^{-1}$, близкой, но меньшей собственной частоты струны $\Omega=125,6$ с $^{-1}$, результаты численного интегрирования даны на рис. С.1. (кривая а). Здесь изображена

зависимость безразмерной амплитуды реакции заделки струны $\bar{Q}_0$ (нормировка произведена значением функции Q_0 в первый момент времени) в зависимости от безразмерного времени $\bar{t}$ (нормировка величиной $\Delta t = 10^{-2}$ с: $\bar{t} = t / \Delta t$).

Рис.С.1.

Всплеск функции Q_0 объясняется тем, что по мере движения шайбы по струне собственная частота системы понижается и проходит через значение, равное частоте возбуждения.

При частоте возбуждения немного больше первой собственной $\omega = 126 \text{ с}^{-1}$ результаты интегрирования приведены на том же рис. С.1 (кривая б).

На рис. С.2. показана схема экспериментального стенда. На вход усилителя мощности УМ подается электрический сигнал генератора Г. Усиленный сигнал питает обмотку возбуждения электродинамического вибратора В, на штоке которого закреплен конец резинового жгута Ж диаметром 1 мм и длиной 0,4 м. На жгуте с возможностью свободного осевого перемещения размещена пластмассовая шайба Ш (наружный и внутренний диаметры 5 и 1 мм соответственно, ширина 3 мм). Второй конец жгута закреплен на свободной шпильке пьезодатчика силы ДС, измеряющего реакцию заделки жгута.

Электрический сигнал датчика через предусилитель ПУ подается на вход узкополосного цифрового спектроанализатора СА

или измерительного усилителя НУ. Регистрация сигналов производится при помощи самописца уровня СУ.

Шайба отводилась к заделке и крепилась к жгуту. Затем на первой форме ($\Omega_1 = 40\pi \text{ с}^{-1}$) возбуждались резонансные колебания струны с шайбой и проводилось измерение реакции заделки. После чего шайба освобождалась и, после её остановки вблизи середины струны, измерения повторялись. Затем шайбу отпускалась и после ее остановки измерения повторялись замеры.

Рис.С.2

Снижение интенсивности колебаний составило 26 дБ. Во время движения шайбы сигнал датчика сил подавали на измерительный усилитель, а затем на самописец уровня. На рис.С.3 приведены зависимости величины Q_0 в случаях $\omega = 39\pi \text{ с}^{-1}$ и $\omega = 41\pi \text{ с}^{-1}$ (кривые, а и б соответственно).

Заметим, что в результате эксперимента фиксировались также времена достижения шайбой равновесного состояния в середине струны. Эти времена в среднем составляли 300 с, что и обосновывает предположение о пренебрежимо малой скорости шайбы по сравнению со скоростью звука.

Указанное обстоятельство позволяет, в частности, также оценить значение величины параметра ε в представлении (С.13).

Рис.С.3

Наконец отметим, что А.М. Веприк проводил подобные эксперименты и с другими типами распределенных объектов (например, тонких длинных трубок), а также с другими типами колебательных процессов (автоколебания, процессы, возбуждаемые широкополосными случайными силами и другие). Во всех случаях были зарегистрирован описанный эффект гашения колебаний.

Литература

- [1] Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. — М.: Мир, 1976.
- [2] Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Г. — Введение в акустическую динамику машин. — М.: «Наука». — 1979. — 295с.
- [3] Асташев В. К., Крупенин В. Л. Виброударные системы — В кн.: Машиностроение. Энциклопедия. Т.1-3, кн.1. М.: Машиностроение. 1994. — С.381-389.
- [4] Асташев В. К., Крупенин В. Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 1998. - № 5 - С. 13-30.
- [5] Бабицкий В.И. Теория виброударных систем. — М.: Наука, 1978. — 352 с.
- [6] Бабицкий В.И., Ковалева А.С., Крупенин В.Л. Исследование квазиконсервативных виброударных систем методом усреднения // Известия АН СССР. Механика твердого тела — 1982. — № 1. — С. 41–50.
- [7] Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. К теории параметрических резонансов виброударных систем // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1978. — № 4. — С. 13–21.
- [8] Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. — М.: Наука, 1985. — 320 с.
- [9] Блехман И.И. Теория вибрационных процессов и устройств. — СПб.:ИД «Руда и Металлы» — 2013. — 640 с.
- [10] Блехман И.И., Ланда П.С. Эффект сопряженности резонансов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2002. — № 1-2. — С. 44–51.

- [11] Блехман И.И., Ланда П.С. Эффект сопряженности резонансов и бифуркаций при двухчастотном воздействии на маятник с вибрирующей осью подвеса // ДАН СССР. — 2004. — Т. 395, № 2. — С. 192–195.
- [12] Блехман И.И., Малахова О.З. О квазиравновесных положениях маятника Челомя // ДАН СССР. — 1986. — Т. 287, № 2. — С. 290–294.
- [13] Боголюбов Н.Н. О некоторых статистических методах в математической физике. — Киев: Изд-во АН УССР, 1945. — 140 с.
- [14] Боголюбов Н.Н. Теория возмущений в нелинейной механике // Сборник трудов ин-та строительной механики АН УССР. — 1950. — Т. 14. — С. 9–34.
- [15] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука. - 1974. - 504 с.
- [16] Бурд В.Ш. К задаче об устойчивости верхнего состояния равновесия маятника с вертикально вибрирующим подвесом // Математическое моделирование систем: методы, приложения и средства: Сборник научных трудов. — Воронеж: ВГУ, 1999. — С. 64–67.
- [17] Бурд В.Ш. Метод усреднения на бесконечном промежутке и некоторые задачи теории колебаний — Ярославль: Яр-ГУ, 2013. — 420 с.
- [18] Бурд В.Ш. Резонансные почти периодические колебания в нелинейных двумерных системах с медленно меняющимися параметрами // ПММ. — 1996. — Т. 60, № 3. — С. 397–404.
- [19] Бурд В.Ш., Крупенин В.Л. Анализ периодических колебаний в автономных виброударных системах с одной степенью свободы, // Вестник научно-технического развития. Интернет-журнал. 2010. — № 1(89). URL: <http://www.vntr.ru/ftpgetfile.php?id=826>.
- [20] Бурд В.Ш., Крупенин В.Л. Резонансные периодические колебания ударного осциллятора // Вестник научно-технического развития. Интернет-журнал. — 2010. — № 10(38). URL: <http://www.vntr.ru/ftpgetfile.php?id=460>.
- [21] Весницкий А.И. Избранные труды по механике. — Нижний Новгород: ИД «Наш Дом», 2010. — 248 с.
- [22] Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. — М.: Машиностроение. Т.2.1979. — 351с.
- [23] Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. — М.: Машиностроение. Т.6.1995. — 456с.

- [24] Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. — М.: Изд-во МГУ, 1971. — 508 с.
- [25] Вульфсон И. И. Динамика цикловых машин. — С.-Петербург: «Политехника». — 2013. — 426 с.
- [26] Гашение вынужденных колебаний струн и стержней подвижной нагрузкой / В.К. Асташев, В.И. Бабицкий, А.М. Веприк, В.Л. Крупенин // ДАН СССР. — 1989. — Т. 304, № 1. — С. 50–54.
- [27] Гольдсмит В. Удар. — М.: Стройиздат. 1965. — 448 с.
- [28] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 536 с.
- [29] Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука. 1988. 328 с.
- [30] Зеньковская С.М., Симоненко И.Б. О влиянии вибраций высокой частоты на возникновение конвекции // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1966. — № 5. — С. 51–55.
- [31] Зеньковская С.М., Шлейкель А.Л. Влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции в горизонтальном слое жидкости // ДАН. — 2002. — Т. 382, № 5. — С. 632–636.
- [32] Зеньковская С.М., Шлейкель А.Л. Влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции Марангони в горизонтальном слое жидкости // ПММ. — 2002. — Т. 66, № 4. — С. 573–583.
- [33] Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. — 1951. — Т. 21, № 5. — С. 588–597.
- [34] Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // УФН. — 1951. — Т. 44, № 1. — С. 7–20.
- [35] Киргетов А.В. К вопросу об устойчивости квазиравновесных движений маятника В.Н. Челомея // Изв. АН СССР. МТТ. — 1986. — № 6. — С. 57–62.
- [36] Кобринский А.Е., Кобринский А.А. Виброударные системы. — М.: Наука. 1973. — 591 с.
- [37] Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С. Нелинейные почти периодические колебания. — М.: Наука, 1970. — 352 с.
- [38] Крупенин В.Л. Возбуждение параметрических колебаний ударами // Машиноведение. — 1979. — № 1. — С. 27–35.
- [39] Крупенин В.Л. Метод расчета параметрических виброударных систем с одной степенью свободы // Машиноведение. — 1981. — № 1. — С. 27–34.

- [40] Крупенин В.Л. Машины ударного действия. — М.: Знание. 1987. — 62 с
- [41] Крупенин В.Л. О представлении периодических виброударных процессов через параметры движения «импульс - фаза» // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2010. — №1. — С.34-42.
- [42] Крупенин В.Л. К расчету областей прозрачности и непрозрачности линейных виброводов с точечными включениями // Вестник научно-технического развития. Интернет-журнал. — 2011. — № 11(51). URL: <http://www.vntr.ru/ftpgetfile.php?id=556>
- [43] Крупенин В.Л. Об оценке числа периодических режимов движения нелинейных колебательных систем при периодическом полигармоническом возбуждении колебаний // Вестник научно-технического развития. Интернет-журнал. — 2013. — № 4(68). URL: <http://vntr.ru/ftpgetfile.php?id=682>
- [44] Крысов С.В. Вынужденные колебания и резонанс в упругих системах с движущимися нагрузками. — Горький: Изд-во ГГУ. — 1985. — 69 с.
- [45] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. — М.: Наука. — 1988. — 216 с.
- [46] Левитан Б.М. Почти-периодические функции. — М.: Гостехиздат, 1953. — 396 с.
- [47] Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат. — 1956. — 492 с.
- [48] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука. — 1966. — 532 с.
- [49] Меняйлов А.И., Мовчан А.В. О стабилизации системы маятник-кольцо в условиях вибрации основания//Известия АН СССР, Механика твердого тела. — 1984. — № 6. — С. 35-40.
- [50] Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наукова Думка. — 1971. — 440 с.
- [51] Нагаев Р.Ф. Механические процессы с повторными затухающими соударениями. — М.: Наука. 1985. — 200 с.
- [52] Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. — Ташкент: Фан, 1973. — 272 с.
- [53] Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука. 1972. — 472 с.
- [54] Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара. М.: Наука. 1977. 223 с.
- [55] Принцип усреднения и бифуркация почти периодических решений / Бурд В.Ш., Забрейко П.П., Колесов Ю.С., Красносельский М.А // ДАН СССР. — 1969. — Т. 187, № 6. — С. 1219-1221.

- [56] Рагульскис К.М., Нагинявичюс В.В. Трубообразный виброклапан, управляемый колебаниями трубы как упругого тела /Деп. в Лит. НИИНТИ. Вильнюс. — 1986. — № 1644.
- [57] Розенвассер Е.Н. Периодически нестационарные системы управления. — М.: Наука. —1973. — 512 с.
- [58] Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости. — М.: Наука, 1971. — 288 с.
- [59] Сетна П.Р. Системы с быстрым и медленным временем // Труды 5-й Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. — Т. 1. —Киев: Изд-во АН УССР, 1970. — С. 505–521.
- [60] Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа “маятник”. — Алма-Ата: «Наука» Казахской ССР, 1981. —253 с.
- [61] Толстов Г.П. Ряды Фурье. — М.: Физматлит, 1960. — 390 с.
- [62] Ухалов А.Ю. Исследование задачи о существовании и устойчивости почти периодических колебаний в нелинейных системах с малым параметром: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. — Ярославль, 1997. — 80 с.
- [63] Ухалов А.Ю. Почти периодические решения систем дифференциальных уравнений с быстрым и медленным временем в случае вырождения // Матем. заметки. — 1998. — Т. 63, № 3. —С. 451–456.
- [64] Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1985. — 448 с.
- [65] Фейгин М.И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. —М.: Наука. —1994. —288 с.
- [66] Флюгге З. Задачи по квантовой механике. —М: Мир. — 1974. — Т.1. —342 с.
- [67] Челомей В.Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // ДАН СССР. — 1983. — Т. 270. — С. 62–67.
- [68] Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний// Веприк А.М., Крупенин В.Л. и др. — Л.: Машиностроение, 1987. —76 с.
- [69] Юдович В.И. Вибродинамика систем со связями// ДАН СССР— 1997. — Т. 354 — № 5. — С. 622–624.
- [70] Юдович В.И. Динамика материальной частицы на вибрирующей гладкой поверхности // ПММ. — 1998. — Т. 62, № 6. — С. 968–976.
- [71] Acheson D.J. A pendulum theorem // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 1993. — Vol. 443. — P. 239–245.
- [72] Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear

- Discontinuous Systems.- Berlin-Heidelberg -New York: Springer-Verlag. — 2001. — 404 p.p.
- [73] Baltanas J.P., Lopez L., Blechman I.I., Landa P.S., Zaikin A., Kurths J. and Sanhuan M.A.F. Experimental evidence, numerics, and theory of vibrational resonance in bestable systems // *Physical Review*. — E 67, 066119. — P. 1-7.
- [74] Blekhman I.I., Landa P.S. Conjugate resonances and bifurcations in nonlinear systems under biharmonic excitation // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. — V. 39. — 2004. — P. 421-426.
- [75] Bogdanoff J.L. Influence on the behavior of a linear dynamical system of some imposed rapid motion of small amplitude // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1962. — Vol. 34. — P. 1055-1062.
- [76] Bogdanoff J.L., Citron S.J. Experiments with an inverted pendulum subject to random parametric excitation // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1965. — Vol. 38. — P. 447-452.
- [77] Burd V. Method of averaging for differential equations on an infinite interval. — CRC Press, *Lecture Notes on Pure and Applied Mathematics*. — V. 255. — 2007. — 360p.
- [78] Burd V.Sh. Resonant almost periodic oscillations in systems with slow varying parameters // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. — 1997. — Vol. 32, no. 6. — P. 1143-1152.
- [79] Burd V.Sh., Krupenin V.L. On the calculation of resonance oscillations of the vibro-impact systems by the averaging technique. In «Dynamics of Vibro-Impact Systems». *Proceedings of the Euromech Colloquium, 1998*. — Berlin-Heidelberg -New York: Springer-Verlag. — 1999. — P. 127 - 135.
- [80] Burd V.Sh., Krupenin V.L. Subharmonic resonance oscillations of impact oscillator // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability* — 2011. — V. 40. — No. 3. — P. 201-207.
- [81] Burd V.Sh., Krupenin V.L. Resonance oscillations of a shock-vibrating system under polyharmonic excitation // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. — 2014. — V. 43. — N 6. — P. 537-543.
- [82] Champneys A.R., Fraser W.B. The “Indian rope trick” for a parametrically excited flexible rod: linearized analysis // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* — 2000. — Vol. 456. — P.553-570
- [83] Corduneanu C. Almost periodic functions. — New York, N.Y.: AMS Chelsea Publishing, 1989. — 257 p.
- [84] Cristofilos N. US Patents. — No. 2,531,028 and 2,567,904. — 1950 and 1951.
- [85] Duffing G. *Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz*. — Braunschweig: Vieweg. — 1918.

- [86] Erdelyi A. "Über die kleinen Schwingungen eines Pendels mit oszillierendem Aufh"angepunkt. — ZAMM. Z. Angew. Math. Mech. — 1934. — V. 14. — No. 4. — P. 235–247.
- [87] Fidlin A. On asymptotic properties of systems with strong and very strong high-frequency excitation // J. Sound Vibr. — 2000. — Vol. 235. — P. 219–233.
- [88] Fidlin A., Thomsen J.J. Predicting vibration-induced displacement for a resonant friction slider // Eur. J. Mech. A Solids. — 2001. — Vol. 20. — P. 155–166.
- [89] Fink A.M. Almost periodic differential equations. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1974. — Vol. 377 of Lecture Notes in Math. — 336 p.
- [90] Hale J.K., Pavlu L.C. Dynamic behavior from asymptotic expansions // Quart. Appl. Math. — 1983. — Vol. 41, no. 1. — P. 161–
- [91] Hemp G.W., Sethna P.R. On dynamical systems with high frequency parametric excitation // International Journal of Non-Linear Mechanics. — 1968. — Vol. 3, no. 3. — P. 351–365.
- [92] Hirsch P. Das Pendel mit Oszillierendem Aufh"angepunkt. ZAMM. Z. Angew. Math. Mech. — 1930. — Vol. 10. — P. 41–52.
- [93] Ibrahim R.A. Vibro-Impact Dynamics. — Berlin—Heidelberg — New York: Springer-Verlag. — 2009. — 297 p.p.
- [94] Ince E.L. Mathieu functions of stable type // Philosophical Magazine. — 1928. — Vol. 6. — P. 547–558.
- [95] Jeffreys H., Swirles B. Methods of mathematical physics. — Third edition. — Cambridge: Cambridge University Press, 1956. — 714 p.
- [96] M.A. Krasnoselsky, V.Sh. Burd, Yu.S. Kolesov Nonlinear almost periodic oscillations. — New York: John Wiley & Sons. — 1973. — 326pp.
- [97] Krupenin V.L. Vibro-impact processes in systems with multiple impact pairs and distributed impact elements // Dynamics of Vibro-impact systems. Proceeding of the Euromech Colloquium, 15-18 September, 1998. — Berlin-Heidelberg -New York: Springer-Verlag. — 1999. — P.39-48.
- [98] Landa P.S., McClintock P.V.E. Vibrational Resonance // J. Phys. A: Math. Gen. V. 33. — 2000. — P. 433–438.
- [99] Levi M. Geometry and physics of averaging with applications // Phys. D. — 1999. — Vol. 132. — P. 150–164.
- [100] Levi M. Geometry of Kapitza's potentials // Nonlinearity. — 1998. — Vol. 11. — P. 1365–1368.
- [101] Levi M. Stability of the inverted pendulum — a topological explanation // SIAM Rev. — 1988. — Vol. 30, no. 4. — P. 639–644.

- [102] Levi M., Weckesser W. Stabilization of the inverted linearized pendulum by high frequency vibrations // *SIAM Rev.* — 1995. — Vol. 37, no. 2. — P. 219–223.
- [103] Levinson N. The asymptotic nature of solution of linear systems of differential equations // *Duke Math. J.* — 1948. — V.15. — No 1. — P. 111–126.
- [104] Lowenstern E.R. The stabilizing effect of imposed oscillations of high frequency on a dynamical system // *London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag.* — 1932. — Vol. 13. — P. 458–486.
- [105] Mitchell R. Stability of the inverted pendulum subjected to almost periodic and stochastic base motion — An application of the method of averaging // *International Journal of Non-Linear Mechanics.* — 1972. — V. 7. — No. 1. — P. 101–123.
- [106] Morozov A.D. Quasi-conservative systems: cycles, resonances and chaos. — Singapore, River Edge, N.J.: World Scientific, 1998. — 325 p.
- [107] Murdock J.A. Perturbations. Theory and methods. — Philadelphia: SIAM, 1999. — 509 p.
- [108] Nesterov P. Method of averaging for systems with main part vanishing at infinity // *Math. Nachr.* — 2011. — Vol. 284. — No.11–12. — P. 1496–1514.
- [109] Osberghaus O., Paul W., Fischer E. Forschungsberichte des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums Nordrhein-Westfalen. — Köln und Opladen: Westdeutscher Verlag, 1958. — Vol. 415.
- [110] Paul W. Electromagnetic traps for charged and neutral particles // *Rev. Modern Phys.* — 1990. — V. 62. — P. 531–540.
- [111] Peterka F. Uvod do kmitani mechanickysh soustav s vnitrimirazy // Praha: Academia. — 1981. — 272 s.
- [112] Roseau M. Sur une classe de systemes dynamiques soumis `a des excitations periodiques de longue periode // *C.R. Acad. Sc., Paris, ser. A.* — 1969. — V. 268. — No. 7. — P. 409–412.
- [113] Saito H., Ueda M. Dynamically stabilized bright solitons in a two-dimensional Bose-Einstein condensate // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — V. 90. — No. 040403.
- [114] Stephenson A. On a new type of dynamical stability // *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society.* — 1908. — V. 52. — No. 8. — P. 1–10.
- [115] Stephenson A. On induced stability // *Philosophical Magazine.* — 1909. — V. 17. — P. 765–766.
- [116] Strutt M.J.O. Lamesche- Mathieusche- und verwandte funktionen in physik und technik. — New York: Chelsea Pub. Co., 1932. — 116 p.

- [117] Strutt M.J.O. Stabiliseering en labiliseering door trillingen // *Physica*. — 1927. — V. 7. — P. 265–271.
- [118] Tcherniak D. The influence of fast excitation on a continuous system // *J. Sound Vibr.* — 1999. — V. 227, no. 2. — P. 343–360.
- [119] Thomsen J.J. Slow high-frequency effects in mechanics: problems, solutions, potentials // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* — 2005. — V. 15, no. 9. — P. 2799–2818.
- [120] Thomsen J.J., Tcherniak D. Chelomei's pendulum explained // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* — 2001. — V. 457. — P. 1889–1913.
- [121] Thomsen J.J., Tcherniak D. Slow effects of harmonic excitation for elastic structures // *Nonlinear Dynam.* — 1998. — V. 17. — P. 227–246.
- [122] Van der Pol B. Stabiliseering door kleine trillingen // *Physica*. — 1925. — V. 5. — P. 157–162.
- [123] Van der Pol B., Strutt M.J.O. On the stability of solutions of Mathieu's equation // *Philosophical Magazine*. — 1928. — V. 5. — P. 18–38.
- [124] Zharnitsky V., Mitkov I. π -kinks in the parametrically driven sine-Gordon equation and applications // *Phys. D*. — 1998. — V. 123. — P. 301–307.
- [125] Zharnitsky V., Mitkov I., Levi M. Parametrically forced sine-Gordon equation and domain wall dynamics in ferromagnets // *Phys. Rev. B*. — 1998. — V. 57, no. 9. — P. 56–58.

DOI: 10.18411/d-2016-057
ISBN 978-5-905714-96-2

V. Sh. Burd, V.L. Krupenin

Averaging in quasi-conservative systems

Pendulum and vibroimpact systems

The book contains the results of studies for quasi-conservative oscillatory systems with help of the averaging method. Auxiliary mathematical problems and results of general theory are described.

The pendulum and vibro-impact systems with one degree of freedom for different methods of oscillations excitation, in particular, almost periodic oscillations are described. The solution examples for some specific problems in the field of nonlinear mechanics are given.

The book is intended for scientists and engineers involved in the calculation and analysis of complex dynamical systems, will be useful for teachers, postgraduate students of physical, mathematical and engineering courses interested in the theory of nonlinear oscillations.

Printed in authors' edition.

**The library of the Journal "Bulletin of Science and Technical
Development"
(<http://www.vntr.ru>)**

**V.Sh. Burd, V.L. Krupenin Averaging in Quasi-Conservative
Systems: Pendulum and Vibroimpact Systems. // – Moscow:
VNTR, 2016. – 170 p.p.**

**The book prepared and published with the Russian Science
Foundation support (project no. 15-19-30026).**

Moscow

2016

Научное издание

Владимир Шепселевич Бурд

Виталий Львович Крупенин

Колебания в квазиконсервативных системах:
маятниковые и виброударные системы

МОНОГРАФИЯ

Оригинал-макет подготовлен авторами

Подготовлено и издано при поддержке Российского Научного
Фонда (грант № 15-19-30026)

Библиотека журнала «Вестник Научно-Технического Развития»
(<http://www.vntr.ru>)

Москва, 2016

Подписано в печать 05.08.2016. Формат 60х90/16.
Усл. п.л. 10,75 Тираж 100 экз. Заказ 20160508
ООО «Типография «Семейный бизнес»,
141080, Московская область, г. Королев, ул.
Стадионная, д. 7, офис 16, Тел.: (495) 778-80-73