Российский
научный
фонд

***Институт машиноведения
им. А.А. Благонравова РАН***

IV МЕЖДУНАРОДНАЯ ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ
МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

"Нелинейная динамика машин"
SCHOOL-NDM 2017

Сборник трудов

Москва
2017

ББК 22.2, 22.213, 34.4, 34.41
УДК 531, 534.1, 621.01

Школа-конференция проводится за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-19-30026).

IV Международная Школа-конференция молодых ученых «Нелинейная динамика машин» – School-NDM 2017: Сборник трудов (Москва, 18 – 21 апреля 2017 г.) / М.: ИМАШ РАН, 2017. – 482 с.

Сборник IV Международной Школы-конференции молодых ученых «Нелинейная динамика машин» School-NDM 2017 содержит оформленные в виде научных статей лекционные материалы приглашенных ученых – специалистов в области нелинейной динамики и теории механических колебаний. Во второй части сборника собраны рецензированные материалы докладов молодых ученых, представленные на школе-конференции.

Программный комитет

Председатель – Заслуженный деятель науки РФ, д.т.н., проф. Пановко Григорий Яковлевич

Зам. председателя – к.т.н. Шохин Александр Евгеньевич

д.т.н., проф. Асташев Владимир Константинович (Москва)

prof. Vladimir Babitsky (Великобритания)

д.ф.-м.н., проф. Беляев Александр Константинович (С.-Петербург)

academician Janis Viba (Латвия)

д.т.н., проф. Глазунов Виктор Аркадьевич (Москва)

д.т.н., проф. Крупенин Виталий Львович (Москва)

чл.-корр. РАН Ломакин Евгений Викторович (Москва)

prof. Philippe Lorong (Франция)

prof. Giuseppe Rega (Италия)

prof. Michael Rosenblum (Германия)

д.т.н., проф. Ерофеев Владимир Иванович (Н.-Новгород)

DOI: 10.18411/a-2017-048

ISBN 978-5-9908886-6-1

© ИМАШ РАН, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Лекционные материалы.....	7
1. Bubulis Algimantas Mechanical oscillations in mechatronics: theory and some applications.....	9
2. Seyranian Alexander P. V.I.Arnold and stability problems in solid mechanics.....	11
3. Zapoměl J., Ferfecki P. Actual problems of nonlinear dynamics of rotor systems.....	31
4. Банах Л.Я. Методы декомпозиции и редукции динамических моделей механических систем.....	41
5. Демьянушко И.В. Применение численных методов нелинейной динамики к решению проблем столкновений при наезде транспортных средств на дорожные барьеры безопасности.....	56
6. Крупенин В.Л. Вибрационные поля в конструкциях со множественными разрывами.....	65
7. Меркурьев И.В., Подалков В.В. Исследование нелинейной динамики микромеханического гироскопа.....	82
Статьи участников.....	92
1. Антонов Е.А. Динамика микромеханического гироскопа 1-1 типа в режиме свободных колебаний при наличии нелинейных деформаций в системе.....	93
2. Антонов А.М., Ерофеев В.И. О свойствах волны Рэлея, распространяющейся вдоль границы градиентно-упругого полупространства	99
3. Азарян Д.К., Малолетов А.В. Исследование условий равновесия робота с заклинивающим движителем при движении по стержню.....	107
4. Арыканцев В.В., Чернышев В.В. Модельные оценки влияния «компрессионной» силы на динамику глубоководного шагающего аппарата.....	113
5. Афанасьева Н. А., Дудник В.В., Гапонов В.Л. Циклическая динамика углов атаки на лопастях горизонтально-осевой ветроэнергетической установки в условиях рысканья и аэроакустические процессы.....	120
6. Ахмедова Е.Р. Описание динамики волнового твердотельного гироскопа и принципиальной электрической схемы для измерения переменной ёмкости уравнениями Лагранжа-Максвелла.....	128
7. Babin Alexander Numerical modeling of rotor trajectories on active thrust fixed-pad bearings.....	137
8. Балаев А.Ф., Махамбетова Ж.С., Яковичин А.С., Захаров О.В. Оптимизация маршрута при контроле на координатно-измерительных машинах на основе эвристических алгоритмов.....	143
9. Беликов В.А., Терехов С.Е., Жога В.В., Скакунов В.Н. Система стабилизации горизонтального положения робота с ортогональными шагающими движителями.....	151

10. Беличенко М.В., Холостова О.В. Исследование маятниковых движений волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса.....	159
11. Бобырь М.В., Кулабухов С.А., Якушев А.С. Нелинейная нечеткая система управления охлаждением элементов оборудования с ЧПУ.....	166
12. Бобырь М.В., Нассер А.А., Абдулджаббар М. А. Анализ устойчивости нелинейной нечеткой системы управления оборудованием с ЧПУ.....	173
13. Большаков Р.С. Реакция связи как параметр динамического состояния механической колебательной системы.....	179
14. Бондаренко М.Э., Поляков Р.Н. Расчет критических частот ротора газотурбинного привода.....	189
15. Бородина М.Б. Гидромеханические муфты с дифференциальным передаточным механизмом и управляемым изменением коэффициента жёсткости.....	194
16. Bubulis A., Navickas J., Bakanauskas V. Experimental research of the main parameters of tube-shaped ultrasound wave guide wire.....	202
17. Букина С.В., Ширяев К.Е. Об аналитическом методе решения уравнения движения машинного агрегата.....	207
18. Герасимов С.И., Кикеев В.А., Фомкин А.П., Яненко Б.А. Особенности аэродинамических процессов, сопровождающих полет тела с гиперзвуковой скоростью в газе.....	210
19. Гончаров С.Ю., Поляков С.А., Лычагин В.В., Климов А.Ю., Куц М.С. Анализ нелинейной динамики колебаний в червячных передачах.....	217
20. Груничев А.В., Лабахуа Л.Р., Меркурьев И.В. Экспериментальное исследование нелинейной динамики мобильного робота с роликонесущими колесами.....	226
21. Дяшкин-Титов В.В., Воробьева Н.С., Иванов А.Г., Николаев М.Е. Математическая модель динамики манипулятора параллельно- последовательной структуры с трех степенным захватным устройством.....	233
22. Емельянова О.В., Казарян К. Г., Мартинез Леон А.С., Яцун С.Ф., Стуканева С.П. Синтез параметров электроприводов бпла типа «конвертоплан–трикоптер».....	239
23. Жуков Н.А., Киселев И.А. Учет демпфирования процесса при моделировании динамики плоского фрезерования.....	250
24. Захаров Е.Н., Иванов А.Г. Эргатическая система управления манипулятором-триподом.....	253
25. Иванов А.Д., Лукин. А.В. Аналитическое и численное моделирование кориолисова расходомера.....	259
26. Кваша Ю.С., Скобелев М.О., Хачатрян А.А., Швидкая А.А. О выборе формы направляющей для перемещения твердых тел.....	269
27. Козубняк С.А., Нарайкин О.С., Сорокин Ф.Д. Метод возмущений для вычисления расщепления собственных частот колебаний цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа, вызванного малым отклонением формы от осевой симметрии.....	273

28. Колударов П.Ю., Лукин А.В., Скубов Д.Ю. Конечно-элементное моделирование связанных задач электроупругости для элементов микросистемной техники.....	283
29. Крахмалев О.Н. Динамическая модель манипуляционной системы робота.....	291
30. Крылова Е. Ю., Яковлева Т.В., Баженов В.Г. Математическое моделирование контактного взаимодействия распределенных механических структур в стационарном температурном поле.....	299
31. Лапиков А.Л., Масюк В.М., Пашенко В.Н. К вопросу взаимного движения секций многосекционных механизмов параллельной структуры при позиционировании схвата.....	308
32. Лукин А.В., Попов И.А., Скубов Д.Ю. Исследование устойчивости и ветвления форм равновесия упругих элементов микросистемной техники.....	313
33. Лукин А.В., Скубов Д.Ю., Абдуллаев Р.А. Аналитические и численные методы в задаче детектирования массы и положения микрочастицы с помощью микросистемной технологии.....	323
34. Майлатов И.С. Программирование системы управления вентильно-индукторным приводом с помощью вероятностной модели.....	332
35. Мальханов А.О., Москва Е.С., Сандалов В.М. О критическом значении скорости осциллятора, движущегося по балке Бернулли-Эйлера.....	337
36. Метрикин В.С., Никифорова И.В. Динамика многопоршневых виброударных механизмов с кривошипно- шатунным возбудителем колебаний.....	345
37. Миронова Л.И., Кондратенко Л.А. Колебания в нелинейном подпружиненном механизме с одной степенью свободы.....	356
38. Москвитин Г.В., Балашова А.В., Пугачев М.С., Поляков А.Н. К вопросу оценки ресурса конструкций стабилизаторов волновых процессов при случайном нагружении.....	364
39. Низаметдинов Ф.Р., Сорокин Ф.Д. Кольцевой конечный элемент оболочки вращения с опцией жесткого торца и проблемы идентификации матрицы масс протяженных участков оболочек.....	369
40. Папкова И.В. , Салтыкова О.А., Крысько А.В. Математическая модель контактного взаимодействия двух балок с зазором с учетом неклассических теорий балок.....	380
41. Радаев Ю.Н., Ярымов О.А. Гармонические волны перемещений и микровращений в длинном цилиндрическом волноводе.....	388
42. Салтыкова О.А., Папкова И.В., Крысько В.А. О истинности хаотических колебаний контактных задач гибких балок, описываемых моделями Эйлера-Бернулли, Тимошенко и их комбинациями.....	393
43. Сорокин Ф.Д., Су Чжоу Численное моделирование нелинейной динамики вращения изогнутой в дугу винтовой цилиндрической пружины.....	401
44. Сорокин Ф.Д., Чжан Хао Использование уравнений динамики для определения равновесного положения ролика между кольцами подшипника.....	406

45. Stankevich N.V., Kuznetsov A.P., Seleznev E.P. Chaotic and quasiperiodic oscillations in radiophysical generators.....	413
46. Суровцев С.В., Хозенюк Н.А. Постановка задачи нелинейной динамики для гидродинамического подшипника с упругим корпусом.....	418
47. Сытин А.В., Тюрин В.О., Шевелев А.В. Динамика ротора с лепестковыми подшипниками при смазке маловязкими жидкостями.....	426
48. Тукмаков Д.А. Численное моделирование акустической коагуляции частиц в двухфазном полидисперсном потоке.....	430
49. Фурс И.В. Исследование КПД волновых передач с телами качения.....	433
50. Худаяров Б.А., Кучаров О.Р., Шербоев Х.У. Нелинейные колебания вязкоупругих трубопроводов.....	443
51. Худаяров Б.А., Тураев Ф.Ж. Моделирование динамических процессов трубопроводов с протекающей жидкостью.....	449
52. Юрин А.Н., Спицына Д.Н. Исследование факторов, влияющих на уровень боковых сил, действующих на ходовые колеса мостовых кранов.....	455
53. Яковлева Т.В., Крысько В.А.-мл., Крылова Е.Ю. Математическое моделирование нелинейной динамики элементов приборов МЭМС с учетом стационарных температурных полей.....	461
54. Яцун С., Савин С., Яцун А. Алгоритм выбора походки для экзоскелета нижних конечностей в режиме движения по лестнице.....	468
55. Борисов А.В., Мамаев И.С., Килин А.А., Караваев Ю.Л. Сферические роботы: механика и управление.....	477

ЛЕКЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

MECHANICAL OSCILLATIONS IN MECHATRONICS: THEORY AND SOME APPLICATIONS

Prof. Algimantas Bubulis
Kaunas University of Technology, Lithuania

Annotation

Mechanical oscillations are the basis for creating a variety of mechatronic systems, especially high-precision positioning devices. The term 'high-precision' refers to the concepts of 'micropositioning' and/or 'nanopositioning' that are used to describe motor-driven stages capable of achieving micro-/nanolevel displacement resolution and accuracy. High-precision positioning often plays a key role in many modern electromechanical or mechatronic devices and systems in a wide range of scale, with a sub-nanometer-size extension highly expected in the nearest future. Such fields as microscopy, metrology, precise machining, robotics, biomedicine [1-6], semiconductor and IT industries [7] and others greatly benefit from angular (rotary) positioning stages. Various precise rotary stages have been developed over the last fifty years. Despite the changes in design, each of them contained an actuator for motion generation (stator), and a driven output link (rotor). Essentially, these two components represent a motor (drive). If position sensor with associated displacement readout and control units is present, the device is referred to as a stage, though a lot of cutting-edge stages have been ambiguously called 'motors' or 'drives' in literature and elsewhere. Unlike translational positioning stage possessing three degrees of freedom (DOF) with respect to axes X, Y and Z, the rotary stage enables restriction of translational motion of the output link in all the stated directions but maintain capability to exhibit rotation about those axes, i.e. roll, pitch, and yaw. Conventional (electromagnetic) motors have been extensively designed and employed as actuators for precise positioning applications all over the world and have significantly contributed to our society in both academia and industry. With a pass of years, the relevant theories, design methods and production techniques have been developed so successfully that they undergo just incremental improvements. The ever increasing demands in science and technology (in particular, high-tech products, e.g., drugs delivery systems, space satellites, smart photocameras, hand watches, etc.) are constantly raising new technical requirements for motors. The criteria include (but are not limited to) compactness, simple structure, high precision, and low cost. Low noise and no electromagnetic interference are among the most desirable as well. Nonetheless, a structure and operation principle of conventional actuators imposes limitations on possibilities to meet these requirements. Therefore, a lot of efforts have been put on the worldwide scale into finding alternatives. The motors based on the electrostatic, bionic, photo-thermal, shape-memory and other principles are considered to be potential options [8]. However, piezoelectric (especially, ultrasonic) motors stand for probably the most prominent category. That is mainly governed by the ability of these devices to fulfil some of the aforementioned requirements and, in addition, offer such properties, as response of millisecond-level order, relatively large output torque, etc. At the heart of piezoelectric motor, there is a piezoelectric transducer converting electrical energy to mechanical one. Nowadays piezoelectric motors are utilised as one of the major means in various processes, where precision of micro-/nano scale is demanded. Characterised by reliability, piezoactuators have been applied in medical engineering, aviation, nuclear sector, consumer devices, automotive industry, etc. In the case of angular positioning, the precision of displacement measurement is substantially affected by system's resolution, not to mention the previously stated criteria, system dynamics, and mass of both stage and object to be positioned. According to [9], resolution is the smallest mechanical step the machine (or part of it) can make during point-to-point motion. Although the given definition is rather straightforward, it is actually referred to programmable part of positioning stage (for ex., the smallest increment of displacement encoder), whereas minimal incremental motion is meant to express the adequate

feature related to motion of the device. Resolution can be significantly smaller than the minimal actual motion of the output link, and that is the key distinction disclosed very rarely. The factors potentially affecting minimal incremental motion cover friction, load, vibrations and inertia, system dynamics, external forces, and motion controller peculiarities [10]. Nonetheless, for the sake of simplicity, the ‘resolution’ concept will be used for characterisation of overall systems’ performance everywhere in this work later on.

Conclusions

A comprehensive literature review of the existing high-precision rotary stages and displacement encoders with relevant sub-components was performed. It was determined that, due to their merits, piezoelectric resonant USMs have a huge potential to be widely applied as drivers in high-resolution rotary stages and positioners, but the main limiting issues are insufficient precision, complex structure, lack of simple bidirectional motion control, and high cost.

To develop a geometric model of high-resolution piezoelectric rotary stage, as well as finite element models of both piezocylinder and piezocylinder contacting with the rotor in order to determine dynamic response of the piezoelement and transient response of the contacting parts, respectively.

To experimentally investigate dynamic characteristics of high-resolution piezoelectric rotary stage when evaluating vibrational motion trajectories of contact zone elements of the piezocylinder, its surface deformation and minimal incremental motion (resolution) of the rotor by means of optical and contact-type research methods, and suggest generation of torsional oscillations with rotational motion of the rotary stage.

To present possible versions of virtual and physical prototypes of the designed high-resolution piezoelectric rotary stage with integrated closed-loop feedback control system.

REFERENCES

1. BAURIENĖ, G., KULVIETIS, G., GRIGORAVIČIUS, A. Optimization of fixation elements parameters for ring type piezoelectric actuator generating elliptical movement. *Mechanics*. 2014, 20(3), 294-298. doi: 10.5755/j01.mech.20.3.7388
2. LU, X., HU, J., YANG, L., ZHAO, C. A novel dual stator-ring rotary ultrasonic motor. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2013, 189, 504-511. doi: 10.1016/j.sna.2012.11.009
3. YANG, X., LIU, Y., CHEN, W., LIU, J. A cylindrical traveling wave ultrasonic motor using bonded-type composite beam. *Ultrasonics*. 2016, 65, 277-281. doi: 10.1016/j.ultras.2015.09.014
4. LIU, Y., CHEN, W., FENG, P., LIU, J. A square-type rotary ultrasonic motor with four driving feet. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2012, 180, 113-19. doi: 10.1016/j.sna.2012.04.024
5. SMITH, G.L., RUDY, R.Q., POLCAWICH, R.G., DEVOE, D.L. Integrated thin-film piezoelectric traveling wave ultrasonic motors. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2012, 188, 305-311. doi: 10.1016/j.sna.2011.12.029
6. LAN, C-C., WANG, J-H., FAN, C-H. Optimal design of rotary manipulators using shape memory alloy wire actuated flexures. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2009, 153(2), 258-266. doi: 10.1016/j.sna.2009.05.019
7. ZHENG, J., SALTON, A., FU, M. Design and control of a rotary dual-stage actuator positioning system. *Mechatronics*. 2011, 21(6), 1003-1012. doi: 10.1016/j.mechatronics.2011.03.011
8. ZHAO, C. *Ultrasonic motors: technologies and applications*. Beijing: Science Press, 2015.
9. SLOCUM, H. A. *Precision machine design*. USA: Prentice-Hall, 1992.
10. Newport | *Motion basics and standards* [interactive]. [Last viewed 2016 12 01]. Access via internet: <https://www.newport.com/n/motion-basics-and-standards>
<https://www.lifewire.com/stepper-motor-vs-servo-motors-selecting-a-motor-818841>

V.I.ARNOLD AND STABILITY PROBLEMS IN SOLID MECHANICS

Alexander P. Seyranian

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University
Michurynski pr.1, Moscow 119192, Russia, e-mail: seyran@imec.msu.ru

Abstract. This paper is a review of modern development of Arnold's ideas with applications in solid mechanics. Mostly mechanical periodically excited systems depending on multiple constant parameters are considered. We formulate and solve parametric resonance problems for one- and multiple degrees of freedom systems in three-dimensional space of physical parameters: excitation frequency, amplitude, and viscous damping coefficient assuming that the last two parameters are small. The main result obtained here is that we find the instability domains (simple and combination parametric resonances) as half-conical singularities in three-parameter space with the coefficients depending on eigenfrequencies and eigenmodes of the corresponding undisturbed conservative system.

Keywords. Stability, solid mechanics, flutter, divergence, nonlinear, bifurcation, catastrophe

Introduction. Stability theory represents an important field of mathematics having numerous applications in natural sciences. This field was always attracting brilliant scientists like Euler, Lagrange, Poincare, Lyapunov and many others. In XX-th century Arnold made an outstanding contribution to the stability theory. We recall his classical papers and books directly or closely related to stability problems published in 1957-2010. One of his most important studies is the analysis of the stability domain and its boundary in the parameter space. This is a problem of great practical importance. A number of examples reveal complexity of the stability boundary, which consists of smooth parts and can have different singularities. The singularities are related to bifurcations of eigenvalues of the system operator. They reflect specific physical properties of the system and may lead to numerical difficulties of the analysis. Classification of singularities of the stability boundary for two- and three-parameter systems and the qualitative analysis of them were done in Arnold (1972, 1983, 1992, 2010), and the extension to a more general case was given by his pupil Levantovskii (1980, 1982). Quantitative methods of stability analysis near regular and singular points of the stability boundary were developed in the papers Mailybaev and Seyranian (1998, 1999, 1999a, 2000), and the books Seyranian and Mailybaev (2003) and Mailybaev and Seyranian (2009).

In this paper we give a review of modern development of Arnold's ideas with applications in mechanics. Below stability problems of solid mechanics are considered and mostly periodic systems dependent on multiple constant parameters are discussed. This subject has been a challenge for more than one hundred years since Mathieu, Floquet, Hill, Rayleigh, Lyapunov, Poincare. From the very beginning these problems were multiparameter. We formulate and solve parametric resonance problems for one- and multiple degrees of freedom systems in three-dimensional space of physical parameters: excitation frequency, amplitude, and viscous damping coefficient assuming that the last two parameters are small. The main result obtained here is that we find the instability domains (simple and combination parametric resonances) as half-conical singularities in three-parameter space with the coefficients depending on eigenfrequencies and eigenmodes of the corresponding undisturbed conservative system. In Section 1 derivatives of a monodromy (Floquet) matrix with respect to problem parameters are presented. They are important for description of behavior of monodromy matrices in the vicinity of an initial point in parameter space, and hence the stability study. The derived relations allow to find the derivatives of simple multipliers, responsible for stability of the system with respect to parameters, and predict their behavior with a change of parameters. In

Section 2 resonance domains for Hill's equation with damping are investigated. It is shown that they represent halves of cones in three-parameter space. In Section 3 another classical problem of finding instability regions for a system with periodically varying moment of inertia is formulated and solved. An equation describing small torsional oscillations of the system with periodic coefficients dependent on four constant parameters including damping is derived. Analytical results for instability (parametric resonance) regions in parameter space are obtained and numerical examples are presented. In Section 4 a problem of stabilization of a vertical (inverted) position of a pendulum under high frequency vibration of the suspension point is considered. Small viscous damping is taken into account, and periodic excitation function describing vibration of the suspension point is assumed to be arbitrary. A formula for stability region of Hill's equation with damping near zero frequency is obtained. For several examples it is shown that analytical and numerical results are in a good agreement with each other. An asymptotic formula for stabilization region of the inverted pendulum with arbitrary periodic excitation function is derived. It is shown that the effect of small viscous damping is of the third order, and taking it into account leads to increasing critical stabilization frequency. In Section 5 another important application of damped Hill's equation is considered. It is connected with the study of stability of periodic motions in nonlinear dynamical systems. It is shown how to find stable and unstable regimes for harmonically excited Duffing's equation. Then, in Section 6 linear vibrational systems with arbitrary degrees of freedom with periodic coefficients depending on three independent parameters: frequency and amplitude of periodic excitation, and damping coefficient are considered with the assumption that the last two quantities are small. Instability of the trivial solution of the system (parametric resonance) is studied. Two important specific cases of excitation matrix are studied: a symmetric matrix and a stationary matrix multiplied by a scalar periodic function. It is shown that in both cases the resonance domains are halves of cones in the three-dimensional space with the boundary surface coefficients depending only on the eigenfrequencies, eigenmodes and system matrices. The obtained relations allow to analyze influence of growing eigenfrequencies and resonance number on instability domains. In Section 7 as a mechanical application Bolotin's problem of dynamic stability of a thin beam loaded by periodic bending moments is solved. Comparison between analytical asymptotic formulae and numerical results for resonance domains show that they are in a good agreement with each other.

1 Derivatives of the Monodromy Matrix with Respect to Parameters

We consider a system of linear differential equations

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}\mathbf{x} \quad (1.1)$$

where $\mathbf{G} = \mathbf{G}(t, \mathbf{p})$ is a real square matrix of dimension m , which is smoothly depending on a vector of real parameters $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ and is a continuous periodic function of the time $\mathbf{G}(t, \mathbf{p}) = \mathbf{G}(t + T, \mathbf{p})$, T being a period. We denote linear independent solutions of system (1) as $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_m(t)$ and form out of them a fundamental matrix $\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_m(t)]$. The $\mathbf{X}(t)$ matrix satisfying the equations

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{G}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{I} \quad (1.2)$$

where $\mathbf{I}$ is the identity matrix of dimension m , is called a matriciant, and the matrix $\mathbf{F} = \mathbf{X}(T)$ is called a monodromy matrix.

According to the Floquet theory, see Nayfeh and Mook (1979) and Yakubovich and Starzhinskii (1987), stability of system (1.1) is determined by multipliers (eigenvalues of the monodromy matrix): if all the multipliers for their absolute value are less than one, the system is asymptotically stable, and if at least one of them is greater than one, the system becomes unstable.

Along with (1.2) we consider an adjoint system of equations for the matrix $\mathbf{Y}$

$$\dot{\mathbf{Y}} = -\mathbf{G}^T \mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{I} \quad (1.3)$$

The solutions $\mathbf{X}(t)$ and $\mathbf{Y}(t)$ of equations (1.2) and (1.3) are related by the equality, see Yakubovich and Starzhinskii (1987)

$$\mathbf{X}^T(t) \mathbf{Y}(t) = \mathbf{I}, \quad (1.4)$$

allowing to express $\mathbf{Y}(t) = [\mathbf{X}^T(t)]^{-1}$

Now we assume that the vector of parameters takes a variation $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p}$. Hence, the $\mathbf{G}$ matrix, and therefore the matriciant $\mathbf{X}(t)$ obtain variations. This accordingly leads to a change of the monodromy matrix $\mathbf{F}$. The formulas for the first and second derivatives of a monodromy matrix with respect to parameters were derived in Seyranian et al. (1999, 2000) in the form of integrals over the period

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_k} = \mathbf{F}_0 \int_0^T \mathbf{Y}_0^T \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_k} \mathbf{X}_0 dt, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial p_i \partial p_j} = & \mathbf{F}_0 \left(\int_0^T \mathbf{Y}_0^T \frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial p_i \partial p_j} \mathbf{X}_0 dt + \int_0^T \mathbf{Y}_0^T \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_i} \mathbf{X}_0 \left(\int_0^t \mathbf{Y}_0^T \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_j} \mathbf{X}_0 d\zeta \right) d\tau + \right. \\ & \left. + \int_0^T \mathbf{Y}_0^T \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_j} \mathbf{X}_0 \left(\int_0^t \mathbf{Y}_0^T \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p_i} \mathbf{X}_0 d\zeta \right) d\tau \right), \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1.6)$$

where the zero subscript means that the corresponding value is taken at $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$. Note that to find derivatives (1.5) and (1.6) it is necessary to know only the matriciants $\mathbf{X}_0(t)$, $\mathbf{Y}_0^T(t) = \mathbf{X}_0^{-1}(t)$ and the derivatives of the $\mathbf{G}$ matrix with respect to the parameters taken at $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$. Using derivatives (1.5) and (1.6) a variation of the monodromy matrix can be given in the form

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_k} \Delta p_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial p_i \partial p_j} \Delta p_i \Delta p_j + \dots \quad (1.7)$$

Knowing the derivatives of the monodromy matrix we can calculate the value of this matrix in the vicinity of the initial point $\mathbf{p}_0$, and therefore estimate behavior of the multipliers responsible for the stability of system (1.1) when the problem parameters are changed. The first and second derivatives of the monodromy matrix for the case when the period T also depends on parameters were derived in Seyranian et al. (2000), and Seyranian and Maillybaev (2003).

2 Resonance Domains for Hill's Equation with Damping

In this section we consider Hill's equation with damping

$$\ddot{y} + \beta \dot{y} + [\omega^2 + \varepsilon \varphi(t)] y = 0 \quad (2.1)$$

where β is the damping coefficient, ε is the excitation amplitude, ω is the natural frequency, and $\varphi(t)$ is a continuous periodic function of time with the period 2π . For the sake of simplicity we assume that the periodic function has zero mean value

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0 \quad (2.2)$$

Equation (2.1) has been considered by many authors, see Nayfeh and Mook (1979) and Merkin (1997).

Our aim is to find analytically the domains of instability of the trivial solution $y = 0$ (the domains of parametric resonance) in the case of small excitation amplitude ε , damping coefficient β , and arbitrary natural frequency $\omega \neq 0$. For this purpose we represent equation (2.1) in the form (1.1)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{p}, t) \mathbf{x} \quad (2.3)$$

with

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(t, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 - \varepsilon \varphi(t) & -\beta \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

This system contains explicitly three parameters $\mathbf{p} = (\varepsilon, \beta, \omega)$. If we substitute $\varepsilon = 0, \beta = 0$ in (2.4) then it is easy to find the matriciant and its inverse from (1.2) and (2.3), (2.4) as

$$\mathbf{X}_0(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \omega^{-1} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_0^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\omega^{-1} \sin \omega t \\ \omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Figure 1: The instability domains for Hill's equation with damping.

So, when $\varepsilon = 0, \beta = 0$ we have the monodromy matrix in the form

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{X}_0(2\pi) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi\omega & \omega^{-1} \sin 2\pi\omega \\ -\omega \sin 2\pi\omega & \cos 2\pi\omega \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

The eigenvalues of this matrix (the multipliers) are

$$\rho_{1,2} = \cos 2\pi\omega \pm i \sin 2\pi\omega \quad (2.7)$$

If $\omega \neq k/2, k=1,2,\dots$ the multipliers are complex conjugate quantities lying on the unit circle (stability). We can show that when small periodic excitation and damping are added ($\varepsilon > 0, \beta > 0$) then the multipliers move inside the unit circle which implies asymptotic stability. Indeed, in this case the multipliers due to continuity property and reality of the matriciant remain complex conjugate quantities. For the multipliers we have a quadratic equation

$$\rho^2 + c_1\rho + c_2 = 0 \quad (2.8)$$

According to Vieta's theorem and Liouville's formula, see Nayfeh and Mook (1979), and Yakubovich and Starzhinskii (1987), the last coefficient c_2 is equal to

$$c_2 = \rho_1\rho_2 = |\rho|^2 = \exp\left(\int_0^{2\pi} \text{tr}(\mathbf{G})dt\right) = \exp(-2\pi\beta) < 1 \quad (2.9)$$

This inequality means that when small periodic excitation and damping are added to the unperturbed system the complex conjugate multipliers move inside the unit circle, and the system becomes asymptotically stable.

Therefore, the instability (parametric resonance) can take place only in the vicinity of the points

$$\mathbf{p}_0: \varepsilon = 0, \beta = 0, \omega = k/2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

at which the multipliers are double $\rho_1 = \rho_2 = (-1)^k$.

To find the instability domains we expand the monodromy matrix $\mathbf{F}$ in Taylor's series in the vicinity of the points $\mathbf{p}_0$ with respect to the parameters ε, β , and $\Delta\omega = \omega - k/2$

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}(\mathbf{p}_0) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \omega} \Delta \omega + \dots \quad (2.11)$$

According to formula (1.5) and with the use of (2.4)-(2.6) we calculate the derivatives $\partial \mathbf{F} / \partial \varepsilon$, $\partial \mathbf{F} / \partial \beta$, and $\partial \mathbf{F} / \partial \omega$ at $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$. Then, up to the first order terms (2.11) we get

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \cos \pi k \begin{bmatrix} 1 + \pi a_k \varepsilon / k - \pi \beta & 2\pi(2\Delta \omega k - b_k \varepsilon) / k^2 \\ -\pi(\Delta \omega k + b_k \varepsilon / 2) & 1 - \pi a_k \varepsilon / k - \pi \beta \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Here we have introduced notation for the Fourier coefficients of the periodic function $\varphi(t)$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \sin k t dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cos k t dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

The eigenvalues of matrix (2.12) (the multipliers) can be found approximately as

$$\rho_{1,2} = (-1)^k (1 - \pi \beta) \pm \pi \sqrt{D}, \quad (2.14)$$

$$D = r_k^2 \varepsilon^2 / k^2 - 4(\Delta \omega)^2, \quad r_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (2.15)$$

The system is unstable if the absolute value of at least one multiplier is greater than one. This condition is fulfilled for $\beta < 0$, and the system becomes unstable. But if $\beta \geq 0$ this instability condition is satisfied only when $\sqrt{D} > \beta$. Hence, using (2.15) we obtain the instability (parametric resonance) domain as

$$4(\omega - k/2)^2 + \beta^2 < r_k^2 \varepsilon^2 / k^2, \quad \beta \geq 0 \quad (2.16)$$

It is half of the cone in three-parameter space joining the half-space $\beta < 0$, Fig 1.

Putting in (2.16) $\beta = 0$ we obtain the domains of parametric resonance with no damping

$$-\varepsilon r_k / (2k) < \omega - k/2 < \varepsilon r_k / (2k) \quad (2.17)$$

Figure 2: Cross section of the resonance domain by the plane $\varepsilon = \text{const}$.

The cross section of the domain (2.16) by the plane $\varepsilon = \text{const}$ is half of the ellipse with the semi-axes $|\omega - k/2| = r_k \varepsilon / (2k)$ and $\beta = r_k \varepsilon / k$, see Fig. 2. Note that with an increase of the damping coefficient β the width of the resonance range by the frequency ω decreases, and for $\beta > r_k \varepsilon / k$ disappears at all.

The cross section of the half-cone (2.16) by the plane $\beta = \text{const}$, $\beta \geq 0$ gives the domain of parametric resonance limited by hyperbola, see Fig 3. The asymptotes of the hyperbola are found from inequalities (2.17). When damping is included ($\beta > 0$) the minimal by absolute value excitation amplitude of the resonance according to (2.16) is $\varepsilon_{\min} = \beta k / r_k$, Fig 3. With an increase of the resonance number k the coefficients r_k / k tend to zero. This means that when k is increasing the values $\varepsilon_{\min}$ tend to infinity and the cone is narrowing.

Figure 3: Cross section of the resonance domain by the plane $\beta = \text{const}$, $\beta \geq 0$.

Formula (2.16) agrees with those obtained earlier for some specific cases. For instance, if we put in (2.16) $\beta=0$, $\varphi(t) = \cos t$ we get the Mathieu equation. In this case for the domain of the first resonance $k=1$ we get according to (2.13) $a_1=0$, $b_1=1$, $r_1=1$, and from (2.16) we obtain the well known relation $1-\varepsilon < 2\omega < 1+\varepsilon$, see Nayfeh and Mook (1979) and Merkin (1997).

More general case when mean value of the periodic function is not zero was treated in Seyranian (2001) and Seyranian and Mailybaev (2003). The presented method of analysis of the parametric resonance domains using derivatives of the monodromy matrix with respect to parameters seems to be more simple and evident in comparison with the methods based on the search of periodic solutions on the boundaries of the stability domains, see Nayfeh and Mook (1979) and Merkin (1997). Besides, it readily gives the resonance domains, not only the boundaries.

3 Instability regions for a system with periodically varying moment of inertia

We consider oscillations of a vertical massless elastic shaft with a rigid disk mounted on it, Fig 4. It is assumed that there are two masses m symmetrically placed on the disk and moving along radius of the disk according to the periodic law

$$r = r_0 + a\varphi(\Omega t), \quad \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) d\tau = 0 \quad (3.1)$$

where r_0 is the initial distance of the masses from the vertical axis of the shaft, a and Ω are the excitation amplitude and frequency, respectively, and $\varphi(\tau)$ is a smooth periodic function with the period 2π with zero mean value.

Figure 4: Elastic shaft with a rigid disk with two moving masses.

Then the moment of inertia of the system (the disk with two masses) is equal to

$$J(t) = J_0 + 2m[r_0 + a\varphi(\Omega t)]^2 \quad (3.2)$$

with J_0 being the moment of inertia of the disk. The equation governing free torsional oscillations of the system is

$$(J(t)\dot{\theta}) + \gamma\dot{\theta} + c\theta = 0 \quad (3.3)$$

where θ is the twisting angle, c is the stiffness of the shaft, and the point stands for derivative with respect to time t . The amplitude a and the damping coefficient γ are assumed to be small. The problem is to find regions of the parameters at which the trivial state $\theta = 0$ is unstable. This classical problem without damping and with the harmonic excitation function for the first time was formulated in Panovko and Gubanov (1987).

Let us introduce non-dimensional variables and parameters

$$\begin{aligned} \tau = \Omega t, \quad \varepsilon = \frac{a}{r_0}, \quad \varsigma = \frac{2mr_0^2}{J_0}, \quad \tilde{J}_0 = J_0 + 2mr_0^2, \\ \beta = \frac{\gamma}{\sqrt{\tilde{J}_0}c}, \quad \omega = \frac{1}{\Omega} \sqrt{\frac{c}{\tilde{J}_0}}, \quad x_1 = \theta, \quad x_2 = \frac{\tilde{J}(t)\dot{\theta}}{\Omega}, \quad \tilde{J}(t) = \frac{J(t)}{\tilde{J}_0} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Then equation (3.3) can be written in a form of first order equations as

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{1}{\tilde{J}(\tau)} x_2, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = -\omega^2 x_1 - \frac{\beta\omega}{\tilde{J}(\tau)} x_2 \quad (3.5)$$

with

$$\tilde{J}(\tau) = 1 + 2\varepsilon\varsigma\varphi(\tau) + \varepsilon^2\varsigma\varphi^2(\tau) \quad (3.6)$$

In new variables the assumption of smoothness of the periodic function $\varphi(\tau)$ can be weakened, and it can be regarded as only piecewise continuous.

The right hand sides of equations (3.5) are linear functions of the vector $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$ and periodic in τ with period 2π . Equations (3.5), (3.6) depend explicitly on four independent parameters $\varsigma, \omega, \varepsilon, \beta$, two last of them being small

$$0 < \omega, \quad 0 < \varsigma < 1, \quad 0 \leq \varepsilon \ll 1, \quad 0 \leq \beta \ll 1 \quad (3.7)$$

The problem is to find the instability (parametric resonance) regions of the trivial solution $\mathbf{x} = 0$ in three-parameter space $\mathbf{p} = (\omega, \varepsilon, \beta)$ assuming the parameter ς is fixed.

We rewrite system (3.5) in the form (1.1) with the matrix

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & [1 + 2\varepsilon\varsigma\varphi(\tau) + \varepsilon^2\varsigma\varphi^2(\tau)]^{-1} \\ -\omega^2 & -\beta\omega[1 + 2\varepsilon\varsigma\varphi(\tau) + \varepsilon^2\varsigma\varphi^2(\tau)]^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

explicitly depending on four parameters and the periodic function $\varphi(\tau)$. We are interested in studying behavior of multipliers near the point $\mathbf{p}_0 = (\omega, 0, 0)$ and arbitrary value $\varsigma \in (0, 1)$.

So, we substitute $\varepsilon = 0, \beta = 0$ in (1.1), (3.8) and find the matriciant and the inverse matrix from (1.2) as

$$\mathbf{X}_0(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \omega^{-1} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_0^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\omega^{-1} \sin \omega t \\ \omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Thus, for $\varepsilon = 0, \beta = 0$ we have the monodromy matrix in the form

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{X}_0(2\pi) \quad (3.10)$$

The eigenvalues of this matrix (the multipliers) are

$$\rho_{1,2} = \cos 2\pi\omega \pm i \sin 2\pi\omega \quad (3.11)$$

For $\omega \neq k/2, k=1,2,\dots$ the multipliers are complex conjugate quantities lying on the unit circle (stability). For small changes of the parameters $\omega, \varepsilon, \beta$ in the vicinity of the point

$\mathbf{p}_0 = (\omega, 0, 0)$, $\omega \neq k/2$ ($k=1,2,\dots$) the multipliers due to continuity remain complex conjugate quantities. For the multipliers we have a quadratic equation

$$\rho^2 + A\rho + B = 0 \quad (3.12)$$

where the last term according to Liouville formula and expression (3.8) is given by

$$B = \exp\left(\int_0^{2\pi} \text{tr } \mathbf{G} dt\right) = \exp(-2\pi\beta\omega(1 + o(\varepsilon^2))) \quad (3.13)$$

Due to Vieta theorem from equations (3.7), (3.13) for $\beta > 0$ and sufficiently small ε we have

$$\rho_1\rho_2 = B < 1 \quad (3.14)$$

Then for complex conjugate multipliers from (3.14) the inequality $|\rho_{1,2}| < 1$ is valid. This means that any small change of the parameters $\omega, \beta, \varepsilon$ with $\beta > 0$ in the vicinity of the point $\mathbf{p}_0 = (\omega, 0, 0)$, $\omega \neq k/2$ shifts the multipliers inside the unit circle which guarantees asymptotic stability.

Therefore, instability (parametric resonance) can take place only in the vicinity of the points

$$\mathbf{p}_0: \varepsilon = 0, \beta = 0, \omega = k/2, k = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

at which the multipliers are double.

For finding domains of parametric resonance we expand the monodromy matrix $\mathbf{F}$ in Taylor's series in the vicinity of the points $\mathbf{p}_0$ with respect to the parameters ε, β , and $\Delta\omega = \omega - k/2$

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}(\mathbf{p}_0) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \omega} \Delta\omega + \dots \quad (3.16)$$

According to formulas (1.5) and using (3.8)-(3.10) we calculate the derivatives $\partial \mathbf{F} / \partial \varepsilon$, $\partial \mathbf{F} / \partial \beta$, and $\partial \mathbf{F} / \partial \omega$ at $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$. Then, up to first order accuracy (3.16) we get

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \cos \pi k \begin{pmatrix} 1 + (\pi b_k k \varepsilon \zeta - \pi \beta k) / 2 & 4k^{-1} \pi \Delta\omega - \pi a_k \varepsilon \zeta \\ -k \pi \Delta\omega - \pi a_k k^2 \varepsilon \zeta / 4 & 1 - (\pi b_k k \varepsilon \zeta + \pi \beta k) / 2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Here, the quantities a_k, b_k , $k=1,2,\dots$ are Fourier coefficients of the periodic function $\varphi(\tau)$.

The eigenvalues of the matrix (3.17) (the multipliers) can be found approximately as

$$\rho_{1,2} = (-1)^k (1 - \pi \beta k / 2) \pm \pi \sqrt{D}, \quad D = r_k^2 k^2 \varepsilon^2 \zeta^2 / 4 - (2\Delta\omega)^2, \quad r_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (3.18)$$

The system is unstable if the absolute value of at least one multiplier is greater than one. This condition is fulfilled for $\beta < 0$, and the system becomes unstable. But if $\beta \geq 0$ this condition is satisfied only when $\sqrt{D} > \beta k / 2$. Hence, using (3.18) we obtain the regions of parametric resonance as

$$4(2\omega/k - 1)^2 + \beta^2 < r_k^2 \varepsilon^2 \zeta^2, \quad \beta \geq 0 \quad (3.19)$$

This is half of the cone joining the half-space $\beta < 0$, Fig 1. Formula (3.19) is the first order approximation of the instability domains showing that the k -th resonance domain depends only on the k -th Fourier coefficients of the periodic excitation function. If $a_k = 0$ and $b_k = 0$, which implies $r_k = 0$, then the k -th resonance domain degenerates to the straight line $\beta = 0$ and $\omega = k/2$. In this case to determine the resonance domain more accurately higher order approximations are needed. It can also mean that the corresponding resonance domain is empty.

The cross section of the half-cone (3.19) by the plane $\beta = \text{const}$, $\beta \geq 0$ gives the zones of parametric resonance limited by hyperbolae, see Fig 3. When damping is included ($\beta > 0$) the minimal excitation amplitude of the resonance according to (3.19) is equal to

$$\varepsilon_{\min} = \beta / (r_k \zeta) \quad (3.20)$$

With an increase of the resonance number k the Fourier coefficients a_k, b_k , and hence r_k , tend to zero. This means that for a fixed damping coefficient β and parameter ζ with an increase of k the minimal excitation amplitude tends to infinity. This explains why it is easier to observe the parametric resonance at small numbers $k = 1, 2, \dots$ because at higher resonance numbers essential efforts and high excitation amplitudes are needed to set the system into unstable motion.

From expression (3.19) and presented analysis it is easy to see that with increasing parameter ζ , $0 < \zeta < 1$, resonance domains get wider. According to (3.4) this means that when the moment of inertia of the masses increases, keeping fixed the moment of inertia of the disk, then the resonance domains become wider.

Using (3.4), (3.15) we find that the parametric resonance takes place near the critical frequencies

$$\Omega_{cr} = \frac{2\Omega_0}{k}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{c}{J_0 + 2mr_0^2}} \quad (3.21)$$

We note that Ω_0 is the eigenfrequency of torsional oscillations of the disk with two immovable masses m taken at the distance r_0 from the rotation axis. With the use of (3.4) and (3.15) resonance domains (3.19) can be given in dimensional form.

As a numerical example we take $\varphi(\tau) = \cos \tau$ and $\zeta = 1/2$. In this case for the first resonance domain $k=1$ we get from (2.13) $a_1 = r_1 = 1, b_1 = 0$. Thus, according to (3.4) and (3.19) we obtain the explicit expression for the first resonance domain in dimensional form as

$$4 \left(\frac{\Omega}{2\Omega_0} - 1 \right)^2 + \frac{\gamma^2}{(J_0 + 2mr_0^2)c} < \frac{a^2}{4r_0^2} \quad (3.22)$$

We note that all the other resonance regions are degenerate since $a_k = b_k = r_k = 0$, $k = 2, 3, 4, \dots$

As another example we take a continuously differentiable 2π - periodic function

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} \tau(\pi - \tau), & 0 \leq \tau \leq \pi \\ (\pi - \tau)(2\pi - \tau), & \pi < \tau \leq 2\pi \end{cases} \quad (3.23)$$

consisting of two parabolas with positive and negative curvature. For odd Fourier coefficients of this function we have

$$a_k = 0, \quad b_k = r_k = \frac{8}{\pi k^3}, \quad k = 1, 3, 5, \dots; \quad a_k = b_k = r_k = 0, \quad k = 2, 4, 6, \dots \quad (3.24)$$

Thus, formula (3.19) for odd resonance domains yields

$$4 \left(\frac{2\omega}{k} - 1 \right)^2 + \beta^2 < \frac{64\varepsilon^2 \zeta^2}{\pi^2 k^6}, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (3.25)$$

showing how fast with growth of k the resonance regions shrink, while even resonance domains are degenerate.

Similar problem of stability of a pendulum with periodically varying length was considered in Seyranian (2004), Belyakov, Seyranian and Luongo (2009), and Belyakov and Seyranian (2012).

4 Stabilization of an inverted pendulum

Vibration and stability of an inverted pendulum were studied by many authors. Among classical works we cite Stephenson (1908) and Kapitsa (1951). The difference between the present paper and previous research is that we assume existence of viscous damping forces, consider arbitrary periodic excitation function, and use the method of stability study of periodic systems based on analysis of the Floquet multipliers.

Oscillations of a physical pendulum with the vibrating suspension point about upper vertical (statically unstable) position is described by the equation

$$I\ddot{\theta}_n + c\dot{\theta}_n - mr(g + z_n)\sin\theta = 0 \quad (4.1)$$

Here I and m are the moment of inertia and mass of the pendulum, θ is the angle measured from the vertical axis, c is the damping coefficient, r is the distance between suspension point and the center of gravity, g is the acceleration due to gravity, z is the vertical displacement of the suspension point following the law $z = a\phi(\Omega t)$, where Ω is the excitation frequency, and $\phi(\tau)$ is an arbitrary 2π -periodic function. The amplitude a and damping coefficient c are supposed to be small. For the sake of simplicity we use notation $\varphi = -\phi_n$ and assume that the mean value of the periodic function $\varphi(\tau)$ is equal to zero.

We introduce non-dimensional time and parameters

$$\tau = \Omega t, \quad \beta = \frac{c}{I\Omega}, \quad \varepsilon = \frac{a\Omega_0^2}{g}, \quad \omega = \frac{\Omega_0}{\Omega}, \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{mrg}{I}} \quad (4.2)$$

where Ω_0 is the eigenfrequency of the pendulum with fixed suspension point about lower vertical position.

With this notation linearized equation (4.1) takes the form of Hill's equation with damping

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + [\mu + \varepsilon\varphi(\tau)]\theta = 0, \quad \mu = -\omega^2 \quad (4.3)$$

where the dot denotes differentiation with respect to τ . The coefficients of this equation explicitly depend on the 2π -periodic function $\varphi(\tau)$ and three non-dimensional parameters $\varepsilon, \beta, \omega$. The amplitude and damping parameters ε and β are assumed to be small with respect to 1.

At $\varepsilon = 0, \beta = 0$ the upper vertical position of the pendulum $\theta = 0$ is unstable. Let us study possibility of stabilization of this position by high-frequency excitation of the suspension point. In this case we are close to the point $\varepsilon = 0, \beta = 0, \mu = 0$. To find the stability region in the vicinity of this point we use the method based on calculation of derivatives of the monodromy matrix and analysis of Floquet multipliers. We show that the stability region for an arbitrary periodic function $\varphi(\tau)$ in the vicinity of the point $\mathbf{p}_0 = (0, 0, 0)$ in the first approximation is given by the inequality

$$\mu > F\varepsilon^2, \quad F = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t\varphi(t)dt \right)^2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \int_0^t \tau\varphi(\tau)d\tau dt \quad (4.4)$$

It can be shown that for most of the periodic functions the constant $F < 0$. In the formula for stabilization region the terms of higher order have the form of rather complicated multiple integrals.

For the function $\varphi(\tau) = \cos \tau$ we obtain the stabilization region near the point $\mathbf{p}_0 = (0, 0, 0)$ as

$$\mu > -\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2\beta^2}{2} + \frac{7\varepsilon^4}{32} \quad (4.5)$$

From this formula we can see that damping has destabilizing effect on the stability region. Influence of damping to the stability boundary is shown in Fig. 5 for the case of the periodic

function $\varphi(\tau) = \cos \tau$. The analytical results with (4.5) are shown by solid line, and the numerical results are shaded. Fig. 5 shows that analytical and numerical results are in a good agreement with each other up to the values $\varepsilon \approx 0.5$, $\beta \approx 0.4$, $\mu \approx -0.15$.

Using formulas for stability regions for Hill's equation with damping we can obtain the stabilization frequency of the pendulum. With introduction of the damping coefficient as $\beta_0 = c/(I \Omega_0)$ for the function $\varphi(\tau) = \cos \tau$ we obtain a formula for the stabilization frequency in the form

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} > \sqrt{2} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{7\varepsilon}{32} + \frac{\varepsilon\beta_0^2}{4} - \frac{2389\varepsilon^3}{18432} \right] \quad (4.6)$$

Thus, at rather high excitation frequency the upper vertical position of the pendulum becomes stable, and small damping increases the critical stabilization frequency. The first term in the right hand side of (4.6) agrees with that of known in the literature, see e.g. Kapitsa (1951).

If we consider a mathematical pendulum with piecewise constant excitation function

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 < \tau \leq \pi \\ -1, & \pi < \tau < 2\pi \end{cases} \quad (4.7)$$

for which we have $F = -\pi^2/12$, then we obtain the stabilization condition as

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} > \sqrt{3} \left[\frac{2}{\pi\varepsilon} + \frac{\pi^3\varepsilon}{126} + \frac{\pi^3\varepsilon\beta_0^2}{120} - \frac{79\pi^7\varepsilon^3}{970200} \right] \quad (4.8)$$

The formula with only first term in the right hand side of (4.8) was derived in Arnold (1978).

Fig. 5: Stability region for the Hill equation with damping

For the periodic function with no symmetry $\varphi(\tau) = 2(\tau/2\pi)^3 - 1/2$, $0 \leq \tau \leq 2\pi$, the stability condition takes the form

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} > \frac{2.19}{\varepsilon} - 0.202 + 0.162\varepsilon + 0.045\varepsilon^2 + 0.214\varepsilon\beta_0^2 - 0.028\varepsilon^3 \quad (4.9)$$

We note that in this formula there are terms of zero and second order with respect to ε . As earlier, taking damping into account leads to increase in the critical stabilization frequency. Formulas (4.6), (4.8), (4.9) are in a good agreement with numerical results up to the values $\varepsilon \approx 0.8$, $\beta_0 \approx 0.3$.

5 Stability of Periodic Solutions in Nonlinear Systems

In this section using the results on the instability domains for Hill's equation with damping we show how to study stability of periodic solutions in nonlinear dynamical systems. For this purpose we consider harmonically excited Duffing's equation, see Nayfeh and Mook (1979), and Thomsen (1997)

$$\ddot{u} + 2\mu\dot{u} + \omega_0^2 u + \alpha u^3 = f \cos \Omega t \quad (5.1)$$

Here we assume that the excitation frequency is close to the natural frequency $\Omega = \omega_0 + \sigma$ (primary resonance), and the constants μ, α, f and σ are small quantities of the same order $o(1)$. Equation (5.1) admits a periodic solution, see Thomsen (1997)

$$u_0(t) = a \cos(\Omega t - \gamma) + \frac{\alpha a^3}{32\omega_0^2} \cos(3\Omega t - 3\gamma) + o(\alpha) \quad (5.2)$$

where the term $o(\alpha)$ contains higher harmonics, and the amplitude a and phase γ are constants of the order $o(1)$ satisfying the equations

$$\left[\left(\Omega - \omega_0 - \frac{3\alpha a^2}{8\omega_0} \right)^2 + \mu^2 \right] a^2 = \frac{f^2}{4\omega_0^2} \quad (5.3)$$

$$\gamma = \arcsin \left(\frac{2\mu a \omega_0}{f} \right) \quad (5.4)$$

For given constants $\Omega, \omega_0, \alpha, \mu, f$ (5.3) is a cubic equation on the unknown squared amplitude a^2 . The plot of a as a function of Ω for given other quantities is called a *frequency-response curve*. To draw this curve it is convenient to express Ω from (5.3) as a function of a

$$\Omega = \omega_0 + \frac{3\alpha a^2}{8\omega_0} \pm \sqrt{\frac{f^2}{4\omega_0^2 a^2} - \mu^2} \quad (5.5)$$

This formula gives two branches Ω_+ and Ω_- . A typical frequency-response curve for $\alpha > 0$ is presented in Fig 6. Note that the cases $\alpha > 0$ and $\alpha < 0$ are symmetric with respect to the vertical axis $\Omega = \omega_0$. Such multivaluable behavior $a(\Omega)$ is typical for nonlinear systems. For some values Ω it is possible to have three different regimes a and γ of the periodic solution (5.2). Some of them might be stable, and some unstable.

To study the stability of the periodic solution (5.2) we take

$$u(t) = u_0(t) + v(t), \quad (5.6)$$

substitute this expression into (5.1), and then linearize with respect to $v(t)$. Using (5.2) and (5.6) we get, see Nayfeh and Mook (1979)

$$\ddot{v} + 2\mu\dot{v} + [\omega_0^2 + 3\alpha a^2 \cos^2(\Omega t - \gamma) + o(\alpha)]v = 0 \quad (5.7)$$

Figure 6: The frequency-response curve for Duffing's equation.

The stability of the periodic solution (5.2) is governed by equation (5.7). If the solution $v(t)$ to this equation is stable, the periodic motion (5.2) is stable, and vice versa. Introducing the notation $\tau = \Omega t - \gamma$ we obtain in the first approximation

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} + \frac{2\mu}{\omega_0} \frac{dv}{d\tau} + \left[1 - \frac{2\sigma}{\omega_0} + \frac{3\alpha a^2}{\omega_0^2} \cos^2 \tau \right] v = 0 \quad (5.8)$$

Using here $\cos^2 \tau = (1 + \cos 2\tau)/2$ we get Hill's equation in the form

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} + \frac{2\mu}{\omega_0} \frac{dv}{d\tau} + \left[1 - \frac{2\sigma}{\omega_0} + \frac{3\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{3\alpha a^2}{2\omega_0^2} \cos 2\tau \right] v = 0 \quad (5.9)$$

Comparison with equation (2.1) implies

$$\beta = \frac{2\mu}{\omega_0}, \quad \omega^2 = 1 - \frac{2\sigma}{\omega_0} + \frac{3\alpha a^2}{2\omega_0^2}, \quad \varepsilon = \frac{3\alpha a^2}{2\omega_0^2}, \quad \varphi(\tau) = \cos 2\tau \quad (5.10)$$

Calculating the coefficients according to (2.13) and (2.15) we find

$$k = 2, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = 1, \quad r_2 = 1 \quad (5.11)$$

Then the instability condition (2.16) yields the cone

$$\left(\Omega - \omega_0 - \frac{3\alpha a^2}{4\omega_0} \right)^2 + \mu^2 < \left(\frac{3\alpha a^2}{8\omega_0} \right)^2 \quad (5.12)$$

However, unlike the linear case the excitation frequency Ω and the amplitude a are not independent quantities due to relations (5.5). Condition (5.11) can be transformed to

$$\left(\Omega - \omega_0 - \frac{3\alpha a^2}{8\omega_0} \right) \left(\Omega - \omega_0 - \frac{9\alpha a^2}{8\omega_0} \right) + \mu^2 < 0 \quad (5.13)$$

In this form the instability condition was derived in Nayfeh and Mook (1979), and Thomsen (1997) using the method of multiple scales. Verifying condition (5.13) for the branch Ω_- from (5.5) for $\alpha > 0$ we obtain the inequality of the opposite sign implying the stability of the periodic solution (5.2). Substituting in (5.13) the branch Ω_+ from (5.5) we obtain that for $\alpha > 0$ it is satisfied only when

$$a_* < a < a_{**} \quad (5.14)$$

where a_* and a_{**} are the two roots of the equation

$$\frac{f^4}{9\alpha^2 \omega_0^2 a^8} = \frac{f^2}{4\omega_0^2 a^2} - \mu^2 \quad (5.15)$$

We note that equation (5.15) is equivalent to the condition $d\Omega_+/da=0$ indicating that the unstable regime (5.2) lies between the points A and B shown in Fig. 6 by dashed line. Other parts of the branch Ω_+ , shown in Fig. 6 by solid line, correspond to the stable periodic solutions (5.2). The points A and B are the catastrophe points due to a jump in the amplitude a . We emphasize that for $\omega_0 > 0, \mu > 0, \alpha > 0, f \neq 0$ these two points are always existing since equation (5.15) possesses the two real roots $a_* < a_{**}$. The case $\alpha < 0$ can be treated similarly.

Another example of stability study of a limit cycle in periodic systems was investigated both theoretically and experimentally in Seyranian, Yabuno and Tsumoto (2005).

The General Case of Systems with Multiple Degrees of Freedom

In this section we briefly describe the general case following the papers by Seyranian and Mailybaev (2001), Mailybaev and Seyranian (2001), and Seyranian and Mailybaev (2003). This case is much more complicated compared with that of for one-degree-of-freedom. However, for some important cases considered below the results for parametric resonance domains seem to be similar.

We consider a linear oscillatory system with periodic coefficients

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \gamma \mathbf{D}\dot{\mathbf{y}} + [\mathbf{C} + \delta \mathbf{B}(\Omega t)]\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (6.1)$$

Here, $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$, and $\mathbf{C}$ are the symmetric positive-definite square $m \times m$ matrices of mass, damping, and potential forces, respectively; $\mathbf{B}(\tau)$ is a piecewise continuous 2π -periodic matrix of a parametric excitation; $\mathbf{y}$ is the vector of the generalized coordinates.

We analyze the stability of the trivial solution to system (6.1) as a function of the vector of three parameters $\mathbf{p} = (\gamma, \delta, \Omega)$ whose components describe the magnitude of dissipative forces, and the amplitude and frequency of the periodic excitation, respectively.

We assume that $0 < \gamma, |\delta| \ll 1$, i.e. system (6.1) is close to the autonomous conservative system

$$\mathbf{C}\mathbf{u} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^T \mathbf{M}\mathbf{u} = 1 \quad (6.2)$$

with the simple eigenfrequencies $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_m$ and the corresponding eigenmodes

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$.

We rewrite (6.1) as a set of equations of the first order:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\Omega t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

The $2m \times 2m$ matrix $\mathbf{A}(\Omega t)$ is a real-valued periodic function with the period $T = 2\pi/\Omega$. The $2m \times 2m$ matrix $\mathbf{X}(t)$ satisfying the relationships

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\Omega t)\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{I} \quad (6.4)$$

is referred to as a matriciant of system (6.3), with $\mathbf{I}$ being the unit matrix. The value of the matriciant at $t = T$ is referred to as a monodromy matrix $\mathbf{F} = \mathbf{X}(T)$, see Yakubovich and Starzhinski (1987). According to the known theorem on the parameter dependence of solutions to differential equations, the monodromy matrix is a smooth function of the parameter vector $\mathbf{p}$. The eigenvalues ρ of the matrix $\mathbf{F}$ are called multipliers. System (6.1) (or (6.3)) is asymptotically stable if all its multipliers are located inside the unit circle on the complex plane, i.e. $|\rho| < 1$. If at least one multiplier is outside of the unit circle, i.e., $|\rho| > 1$, then the system becomes unstable, see Yakubovich and Starzhinski (1987).

When $\gamma = \delta = 0$, the multipliers of the monodromy matrix $\mathbf{F}_0$ are given by, see Seyranian and Mailybaev (2003)

$$\rho_j, \bar{\rho}_j = \exp(\pm i\omega_j T) = \exp\left(\pm \frac{2\pi i\omega_j}{\Omega}\right), \quad j = 1, \dots, m. \quad (6.5)$$

Since all the multipliers ρ_j from (6.5) lie on the unit circle $|\rho_j| = 1$, the stability of system (6.1) for nonzero γ and δ is determined by perturbations of all the multipliers. In general, all ρ_j are different. Repeated (multiple) multipliers appear for the following critical values of the frequency Ω

$$\Omega = \frac{2\omega_j}{k}, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.6)$$

$$\Omega = \frac{\omega_j \pm \omega_l}{k}, \quad j, l = 1, \dots, m, \quad j > l; \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.7)$$

Equalities (6.6) and (6.7) define, respectively, the main (simple) and combination resonances of summed and difference types, and correspond to the double multipliers $\rho = (-1)^k$ and $\rho = \exp(i\omega_j T)$. Multipliers of higher order multiplicity appear only if the quantities $\omega_j \pm \omega_l$ are linked by rational relationships. These cases are nongeneric and will not be considered in this paper.

Two important cases of the symmetric excitation matrix $\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{B}^T(\tau)$ and the excitation matrix in the form $\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{B}_0 \varphi(\tau)$, where $\mathbf{B}_0$ is a constant matrix, and $\varphi(\tau)$ is a scalar 2π periodic function, are considered. The parametric resonance domains for these two cases were derived in the form of half-cones, see Seyranian and Mailybaev (2003):

$$\eta_j \eta_l \gamma^2 \mp \xi_1 \delta^2 + 4k^2 \frac{\eta_j \eta_l}{(\eta_j + \eta_l)^2} \left(\Delta\Omega + \frac{\sigma_{\pm} \delta}{k} \right)^2 \leq 0 \quad (6.8)$$

with the coefficients

$$\begin{aligned} \eta_j &= \mathbf{u}_j^T \mathbf{D} \mathbf{u}_j, \quad \eta_l = \mathbf{u}_l^T \mathbf{D} \mathbf{u}_l, \quad \xi_1 = \frac{a_k^{jl} a_k^{lj} + b_k^{jl} b_k^{lj}}{4\omega_j \omega_l} \\ a_k^{jl} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_j^T \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}_l \cos(k\tau) d\tau, \quad b_k^{jl} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_j^T \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}_l \sin(k\tau) d\tau \\ \Delta\Omega &= \Omega - \frac{\omega_j \pm \omega_l}{k}, \quad \sigma_{\pm} = -\frac{\omega_j a_0^{jl} \pm \omega_l a_0^{ll}}{4\omega_j \omega_l} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Plus and minus in (6.8), (6.9) correspond to the combination resonances (6.7) of summed or difference types, respectively. For the main resonance (6.6) we have to put in (6.8), (6.9) $j = l$. For $\xi_1 \neq 0$ (the regular case), only one of the inequalities (6.8) with plus or minus defines a cone, while the other one gives the point $\gamma = \delta = \Delta\Omega = 0$ (absence of resonance). Therefore, for positive ξ_1 the domain of the difference-type combination resonance is lacking.

Consider now the case of the symmetric excitation matrix $\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{B}^T(\tau)$. It is easy to notice from (6.9) that in this case $a_k^{jl} = a_k^{lj}$ and $b_k^{jl} = b_k^{lj}$ which means $\xi_1 > 0$. Thus, for the symmetric excitation matrix only the main and combination resonances of summed type take place. It is worth noting that, in the case of Hamiltonian systems (without dissipation), the absence of the difference-type combination resonances has already been noted, see Yakubovich and Starzhinski (1987).

Consider now the case of the excitation matrix $\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{B}_0 \varphi(\tau)$, where $\mathbf{B}_0$ is a constant matrix, and $\varphi(\tau)$ is a scalar 2π periodic function. In this case we have from (6.9)

$$\xi_1 = \frac{c_{j_l}(a_k^2 + b_k^2)}{4\omega_j\omega_l}, \quad c_{j_l} = \mathbf{u}_j^T \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^T \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_j, \quad (6.10)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \cos(k\tau) d\tau, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \sin(k\tau) d\tau \quad (6.11)$$

The main and combination resonances are given by relations (6.8), (6.9). In the regular (nondegenerate) case, when $\xi_1 \neq 0$, the sign of ξ_1 coincides with that of c_{j_l} . For the main resonance, $c_{j_l} > 0$; therefore, there exists the main-resonance domain defined by cone (6.8). The existence of combination resonance domains depends on the sign of c_{j_l} . Namely, for $c_{j_l} > 0$ or $c_{j_l} < 0$, only the domain of the summation-type or difference-type combination resonance exists, respectively. The shape of the parametric-resonance domains (cones) depends on the resonance number k and the frequencies ω_j and ω_l . When $c_{j_l} = 0$, the resonance domain is either absent or degenerate (i.e., the first approximation represents a straight line). We notice that with an increase of k and ω_j, ω_l the cones (6.8) become narrow and straight, Fig 1. We formulate the results obtained in the following statement.

Theorem. For a symmetric matrix $\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{B}^T(\tau)$ system (6.1) exhibits only the main resonance (6.6) and the summation-type combination resonance (6.7). In the case of $\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{B}_0 \varphi(\tau)$, where $\mathbf{B}_0$ is a constant matrix, and $\varphi(\tau)$ is a scalar 2π periodic function, either the main resonances (6.6), the summation-type combination resonances (for $c_{j_l} > 0$), or the difference-type combination resonances (for $c_{j_l} < 0$) are realized in the system. In the three-dimensional space of the parameters $\mathbf{p} = (\gamma, \delta, \Omega)$, the domains of both main and summation-type combination resonances, as well as difference combination resonances are described by cones (6.8).

The cases of excitation matrices considered above correspond to the most conventional forms of parametric excitations. In other cases, the parametric resonance domains are described by much more complicated formulas, see Mailybaev and Seyranian (2001) and Seyranian and Mailybaev (2003).

7 Bolotin's problem

As a mechanical example, we consider a problem on dynamic stability of the trivial solution (plane position) of a beam. The elastic beam is assumed to be simply supported at its ends and loaded by the periodic moments $M(\Omega t) = \delta\varphi(\Omega t)$ in the plane of its maximum stiffness, where $\varphi(t)$ is a 2π -periodic function, Fig. 7. We note that this problem for the first time was formulated in Bolotin (1964), see also Bolotin (1995).

Bending-torsional vibrations off this plane are described by the equations

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \gamma m d_1 \frac{\partial w}{\partial t} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \delta\varphi(\Omega t) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= 0 \\ mr^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \gamma mr^2 d_2 \frac{\partial \theta}{\partial t} + \delta\varphi(\Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - GI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (7.1)$$

Here, $w(x, t)$ is the transverse deflection of the beam; $\theta(x, t)$ and r are the torsion angle and the radius of inertia for the beam's cross section, respectively; EJ and GI are the bending and torsion stiffnesses of the beam, respectively; m is the mass per unit length of the beam; γ is the

parameter of dissipative force (viscous friction coefficient); and d_1 and d_2 are fixed constants defining the bending and torsional viscous friction forces.

Figure 7: An elastic beam loaded by periodic bending moments.

The boundary conditions take the form

$$x = 0, l: \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \theta = 0 \quad (7.2)$$

where l is the beam length. We seek the solution to system (7.1), (7.2) in the form of series:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ \theta(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned} \quad (7.3)$$

where $W_n(t)$ and $\Theta_n(t)$ are unknown functions of time. Substituting (7.3) into (7.1), we obtain a set of ordinary differential equations with respect to $W_n(t)$ and $\Theta_n(t)$ of the form of (6.1) with

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \omega_{n1}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{n2}^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}(\Omega t) &= -\varphi(\Omega t) \begin{pmatrix} 0 & \pi^2 n^2 / (l^2 m) \\ \pi^2 n^2 / (l^2 r^2 m) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} W_n \\ \Theta_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Here, ω_{n1} and ω_{n2} are the natural frequencies of bending and torsional vibrations of the beam, respectively:

$$\omega_{n1} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad \omega_{n2} = \frac{n\pi}{rl} \sqrt{\frac{GI}{m}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.5)$$

The eigenvectors corresponding to the frequencies ω_{n1} and ω_{n2} are equal to $\mathbf{u}_{n1} = (1, 0)^T$ and $\mathbf{u}_{n2} = (0, 1)^T$, respectively. We now analyze the stability of systems (6.1) with (7.4), (7.5) for a certain fixed n . Since $\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{B}_0 \varphi(\tau)$, where $\mathbf{B}_0$ is a constant matrix, and $\varphi(\tau)$ is a scalar 2π periodic function, this system belongs to the second type considered above in section 6. The quantities defined in (6.10) take the form

$$c_{11} = c_{22} = 0, \quad c_{12} = \frac{\pi^4 n^4}{l^4 r^2 m^2} > 0 \quad (7.6)$$

Therefore, the domains of the difference-type combination resonance are absent, while the main resonance domains are degenerate (in order to analyze them, higher order approximations are required). According to (6.8), the domains of the summation-type combination resonance at frequencies close to $\Omega_0 = (\omega_{n1} + \omega_{n2})/k$, $k=1, 2, \dots$ are determined by

$$d_1 d_2 \gamma^2 - \frac{c_{12}(a_k^2 + b_k^2)}{4\omega_{n1}\omega_{n2}} \delta^2 + 4k^2 \frac{d_1 d_2}{(d_1 + d_2)^2} \Delta \Omega^2 \leq 0 \quad (7.7)$$

where the Fourier coefficients a_k and b_k are defined in (6.11). To carry out numerical calculations we set $n = 1$, $\varphi(\tau) = \cos \tau$, $d_1 = d_2 = 1$, $\omega_{n1} = 1s^{-1}$, $\omega_{n2} = \sqrt{5}s^{-1}$, $l^2 m = \pi^2 / 4 \text{ kg cm}$, and $r^2 = 4 / \sqrt{5} \text{ cm}^2$. The boundary of the combination resonance domain (with $k = 1$), given by (7.7) in the first approximation, is shown in Fig. 8 (solid curves). The same quantity obtained by numerical evaluation of the monodromy matrix for various values of the parameters γ , δ , and Ω is also shown (dashed curves). The Runge-Kutta method was employed to integrate equation (6.1) with (7.4), (7.5). It is seen from Fig. 8 that the exact (obtained numerically) and approximate (obtained asymptotically) domains of the combination resonance are well matched up to the amplitudes $\delta \approx 0.8$.

Figure 8: Combination resonance domain for Bolotin's problem.

Other mechanical examples concerning determination of the parametric resonance domains of elastic columns of non-uniform cross-section loaded by longitudinal periodic forces, as well as column optimization problem are presented in Seyranian, Solem and Pedersen (1999, 2000), Mailybaev and Seyranian (2001), Seyranian (2004), Seyranian and Mailybaev (2003) and Mailybaev and Seyranian (2009).

Conclusion

We have considered problems of solid mechanics concerning parametrically excited systems with one and multiple degrees of freedom depending on parameters. First and second order derivatives of the Floquet matrix with respect to parameters are presented in terms of matriciants of the main and adjoint problems and derivatives of the system matrices. With the use of multiparameter perturbation technique for two important cases of excitation matrix: a symmetric matrix, and a stationary matrix, multiplied by a scalar periodic function, the main and combination resonances have been studied. It is shown that in both cases the resonance domains are halves of cones in the three-dimensional space of damping magnitude, excitation amplitude and frequency with the boundary surface coefficients depending only on the eigenfrequencies and eigenmodes of the unperturbed conservative system, and the excitation and damping matrices. It turns out that the main and combination resonances can be treated similarly. The obtained relations allow to analyze influence of small damping parameters, as well as growing eigenfrequencies and resonance number on resonance domains. It is shown that the obtained results can be effectively applied to a wide class of mechanical systems to evaluate the parametric resonance domains. Another important application of the given results is connected with the study of stability of periodic solutions in nonlinear dynamical systems.

Acknowledgement. The author acknowledges cooperation for many years with Alexei A. Mailybaev, Anton O. Belyakov and Andrei A. Seyranian (Russia), Pauli Pedersen and Frederik Solem (Denmark), Hiroshi Yabuno and Koji Tsumoto (Japan), Angelo Luongo and Carlo Cattani (Italy). This research is supported by Russian Foundation for Basic Research, grant no. 13-01- 00261.

References

1. Arnold, V.I. (1971) On matrices depending on parameters. *Russ. Math. Surv.* 26 (2): 29 - 43.
2. Arnold, V.I. (1972) Lectures on bifurcations in versal families. *Russ. Math. Surv.* 27 (5): 54 - 123.
3. Arnold, V.I. (1978) *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, New York. (Russian original: Moscow, 1974).
4. Arnold, V.I. (1983) *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer, New York. (Russian original: Moscow, 1978).
5. Arnold, V.I. (1983a) Remarks on the perturbation theory for problems of Mathieu type. *Russ. Math. Surv.* 38 (4): 215 - 233.
6. Arnold, V.I. (1992) *Catastrophe Theory*. New York: Springer. (Russian original: Moscow, 1981).
7. Arnold, V.I. (2010). *Collected Works*, Vol. 1. New York: Springer.
8. Belyakov, A.O. and Seyranian, A. P. (2012) Chapter 4 “Dynamics of a Pendulum of Variable Length and Similar Problems” in the book: Nonlinearity, Bifurcation and Chaos - Theory and Applications, (Eds. J. Awrejcewicz and P. Hagedorn) INTECH, Rijeka, Croatia, 2012.
9. Belyakov, A.O., Seyranian, A.P. and Luongo, A. (2009). Dynamics of the pendulum with periodically varying length. *Physica D* (238): 1589-1597.
10. Bolotin, V.V. (1964). *The Dynamic Stability of Elastic Systems*, Holden-Day, San Francisco.
11. Bolotin, V.V. (1995). Dynamic stability of structures. In: *Non-linear Stability of Structures. Theory and Computational Techniques* (Kounadis, A.N. and Kratzig, W.B., eds.). Wien: N.Y.: Springer, 3-72.
12. Cattani, C., and Seyranian, A.P. (2005). The regions of instability of a system with a periodically varying moment of inertia. *J. Appl. Math. Mech.* 69 (6): 810-815.
13. Kapitsa, P.L. (1951). Dynamic stability of a pendulum with vibrating suspension point. *J. Exp. Theor. Physics* 21 (5): 588-597.
14. Levantovskii, L. V. (1980). The boundary of a set of stable matrices. *Russian Math. Surveys* 35(2): 249-250.
15. Levantovskii, L. V. (1982). Singularities of the boundary of the stability domain. *Functional Anal. Appl.* 16(1): 34-37.
16. Mailybaev, A. A. and Seyranian, A. P. (1998). Singularities of the boundaries of stability domains. *J. Appl. Math. Mech.* 62 (6): 909-920.
17. Mailybaev, A. A. and Seyranian, A. P. (1999). The stability domains of Hamiltonian systems. *J. Appl. Math. Mech.* 63 (4): 545-555.
18. Mailybaev, A. A. and Seyranian, A. P. (1999a). On singularities of a boundary of the stability domain. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 21 (1): 106-128.
19. Mailybaev, A. A. and Seyranian, A. P. (2000). On the boundaries of the parametric resonance domain. *J. Appl. Math. Mech.* 64 (6): 909-923.
20. Mailybaev, A.A., and Seyranian, A.P. (2001). Parametric resonance in systems with small dissipation. *J. Appl. Math. Mech.* 65 (5): 755-767.
21. Mailybaev, A.A., and Seyranian, A.P. (2009). *Parametric Stability Problems. Theory and Applications in Mechanics*. Fizmatlit: Moscow.
22. Merkin, D. (1997). *Introduction to the Theory of Stability*. New York: Springer.

23. Nayfeh, A.H., and Mook, D.T. (1979). *Nonlinear Oscillations*. New York: John Wiley and Sons.
24. Panovko, Ya.G., and Gubanov, I.I. (1987). *Stability and Vibrations of Elastic Systems*. 4th edition. Moscow: Nauka.
25. Seyranian, A.A., and Seyranian, A.P. (2006). The stability of an inverted pendulum with a vibrating suspension point. *J. Appl. Math. Mech.* 70 (5): 754-761.
26. Seyranian, A.P. (2001). Resonance domains for the Hill equation with allowance for damping. *Physics-Doklady* 46 (1): 41-44.
27. Seyranian, A.P. (2004). The swing: parametric resonance. *J. Appl. Math. Mech.* 68 (5): 757-764.
28. Seyranian, A.P., and Elishakoff, I. (eds.) (2002) *Modern Problems of Structural Stability*. Wien: N.Y.: Springer.
29. Seyranian, A.P., and Mailybaev, A.A. (2001). Parametric resonance in systems with weak dissipation. *Doklady Physics* 46 (6): 434-439.
30. Seyranian, A.P., and Mailybaev, A.A. (2003) *Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications*. New Jersey, London: World Scientific.
31. Seyranian, A.P., Solem, F., and Pedersen, P. (1999). Stability analysis for multi-parameter linear periodic systems. *Archive of Applied Mechanics* 69: 160-180.
32. Seyranian, A.P., Solem, F., and Pedersen, P. (2000). Multi-parameter linear periodic systems: sensitivity analysis and applications. *Journal of Sound and Vibration* 229: 89-111.
33. Seyranian, A.P., Yabuno, H., and Tsumoto, K. (2005). Instability and periodic motion of a physical pendulum with a vibrating suspension point (theoretical and experimental approach). *Doklady Physics* 50 (9): 467-472.
34. Stephenson, A. (1908). On a new type of dynamical stability. *Mem. Proc. Manchester Lit. Phil. Soc.* 52 (8): 1-10.
35. Thomsen, J.J. (1997). *Vibrations and Stability. Order and Chaos*. London: McGraw-Hill.
36. Yakubovich, V.A., and Starzhinskii, V.M. (1987). *Parametric Resonance in Linear Systems*. Moscow: Nauka.

ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS OF ROTOR SYSTEMS

Zapoměl J.¹, Ferfecki P.²

¹VSb - Technical University of Ostrava, Ostrava, Czech Republic, jaroslav.zapomel@vsb.cz

²VSb - Technical University of Ostrava, Ostrava, Czech Republic, petr.ferfecki@vsb.cz

Summary. The behaviour of rotating machines depends on properties of support elements coupling the rotor and the stationary part. As their stiffness and damping are nonlinear in many cases, they can become a source of undesirable effects such as of excitation of vibrations of large amplitude or irregular or even chaotic oscillations of the whole technological equipment. The method of computational modelling and simulations makes it possible to achieve a proper design of rotating machines running in a large extent of operating regimes and working conditions. The modern and efficient methods reported in this article are applicable for setting up the computational models and performing the simulations the results of which enable to learn more on oscillations of rotating machines, on their technological parameters, and on the possibilities making it possible to suppress undesirable effects arising from nonlinear properties of the support elements.

Key words. Rotating machines, nonlinear support elements, hydrodynamic bearings, squeeze film dampers, magnetorheological damping devices, mathematical modelling, computational methods.

Introduction

The rotating machines consist of a stationary part (frame, casing) and of a rotor (rotating part), which is composed of a shaft and of the discs or wheels. Both parts are connected by coupling elements, bearings and dampers. The time variable technological forces and moments, unbalance of rotating parts, assembling inaccuracies, and ground and structural oscillations are the principal sources of excitation of lateral vibration of rotating machines. A frequently used technological solution consists in application of the support elements exhibiting sufficient damping or in adding damping devices to the rotor supports. This is offered by application of the hydrodynamic bearings or rolling element bearings combined with squeeze film dampers. Learning more on the influence of the support elements on behaviour of rotors and on their proper design is enabled by performing and evaluating a sufficient number of computational simulations. The modern methods and approaches, which enable to set up adequate computational models, are introduced and discussed in this article.

The support elements and their modelling

The rotors are coupled with the stationary part by coupling elements. Mostly, the rolling-element or hydrodynamic bearings are used.

The main parts of rolling element bearings are the inner and outer races between which there are the rolling elements (balls, rollers, tapered rolls). They are characterized by high stiffness and no or very little damping. The forces transmitted through the bearing have their origin in elastic deformations of the rolling elements and the races in the contact areas. The stiffness properties are either isotropic or orthotropic as the stiffness can be slightly different in the direction of the transmitted force and in the perpendicular one. The empiric relationships for the stiffness of ball and roller bearings reported in [1] are given by relations (1) and (2), respectively

$$k_y^* = 1.3 \times 10^7 \sqrt[3]{n_V^2 d_V F_B} \quad (1)$$

$$k_y^* = 1.005 \times 10^9 n_V^{0.9} L_V^{0.8} F_B^{0.1} \quad (2)$$

$$k_z^* = \kappa(n_V) k_y^* \quad (3)$$

k_y^* , k_z^* are the stiffness of the bearing in the direction of the transmitted force and in the direction perpendicular, respectively, F_B is the force transmitted through the bearing, n_V is the number of the rolling elements, d_V is the diameter of the rolling elements, L_V is the length of the roller and κ is the coefficient less than 1 depending on the kind of the bearing and the number of the rolling elements [1].

The hydrodynamic bearings are composed of a liner inserted into a bearing housing and of a shaft journal. Both these parts are separated by a thin layer of lubricating oil. The lubricant is supplied to the bearing gap by a set of holes or grooves in the liner. The hydrodynamic bearings are characterized by stiffness that is lower than that of the rolling element bearings and by much higher damping capacity.

Based on the assumptions of the classical theory of lubrication

the shaft journal and the liner are absolutely rigid,

their surfaces are absolutely smooth,

the width of the damper gap is small relative to the shaft journal radius,

the oil is Newtonian liquid,

the flow in the bearing gap is laminar and isothermal,

the pressure of the lubricant is constant in the radial direction,

the lubricant is incompressible and massless,

influence of the curvature of the oil film on the flow is negligible.

Then the pressure distribution in the bearing gap is governed by the Reynolds equation

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right] + R^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial Z} \right] = \frac{1}{2} \omega R^2 \frac{\partial h}{\partial \varphi} + R^2 \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (4)$$

p is the pressure, R is the journal radius, η is the oil dynamic viscosity, φ is the circumferential coordinate of the position in the oil film (Fig. 1), Z is the axial coordinate of the position in the oil film (Fig. 1), ω is the angular speed of the journal rotation and t is the time. h denotes the thickness of the oil film [1], [2], [3]

$$h = c - e_H \cos(\varphi - \gamma) \quad (5)$$

where c is the width of the bearing gap for the case when the journal takes a centric position in the bearing hole, e_H is the shaft journal eccentricity (Fig. 1) and γ is the angle of the line of centres (Fig. 1).

Fig.1. Coordinate systems

In Fig. 1, the coordinate systems defined by axes xyz and XYZ are referred to the rotor system

and to the oil film, respectively. The journal eccentricity e_H and the angle of the line of centres γ can be determined by means of the position coordinates of the journal and the hole centres. The Reynolds equation (4) is a nonlinear partial differential equation of the second order. For its solving a central difference or a finite element methods can be used. The boundary conditions define the pressure at the bearing ends (mostly the atmospheric pressure) and the pressure at locations of the oil inlets.

High angular speed of rotating machines, high bearings diameter or application of lubricants with low dynamic viscosity as synthetic oils, cooling liquids, liquefied gases, etc. can lead to occurrence of the transient or turbulent flow in the oil film.

The character of the flow at any location of the bearing gap depends on magnitude of the local Reynolds R_L and Taylor T_L numbers

$$R_L = \frac{\rho R \omega h}{\eta}, \quad (6)$$

$$T_L = R_L \sqrt{\frac{h}{R}}. \quad (7)$$

ρ is the oil density.

The laminar flow is changed into transient if the Taylor number exceeds its critical value, which is equal to 41.3 [2]. The fully developed turbulent flow occurs if the local Reynolds number becomes larger than 1 500 [2] or if the local Taylor number exceeds its critical value twice [4]. To take into account the effect of the transient and turbulent flow on the pressure distribution in the bearing gap, the Reynolds equation is modified by introducing the turbulent coefficients [2]

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{h^3}{K_\phi \eta} \frac{\partial p}{\partial \phi} \right] + R^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{h^3}{K_Z \eta} \frac{\partial p}{\partial Z} \right] = \frac{1}{2} \omega R^2 \frac{\partial h}{\partial \phi} + R^2 \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (8)$$

K_ϕ , K_Z are the turbulence coefficients related to the circumferential and axial direction, respectively. Their magnitudes are always greater than 12 and depend on the local Reynolds number. The analytical expressions have been obtained by different authors like Constantinescu, Elrod, Hirs and others and can be found e.g. in [2]. The dependence of the turbulence coefficients on the local Reynolds number according to Constantinescu and Hirs are drawn in Fig. 2.

Fig.2. Turbulence coefficients

In these areas in the bearing gap where the pressure should drop below a critical value, a cavitation takes place. In cavitated areas the gases (mostly air) are liberated from the oil, the

oils starts to boil the oil vapours start to fill the bearing gap. The cavitated regions are characterized by occurrence of a two-phase medium and the Reynolds equations (4), (8) stop to hold there. The measurements carried out at different working places show that the pressure in cavitated areas remains almost constant and equal to the pressure in the ambient space. Then at the simplest distinguishing level it is possible to assume that the pressure distribution in the bearing gap p_d is given by the following relations

$$p_d = p \quad \text{for} \quad p \leq p_{CAV} , \quad (9)$$

$$p_d = p_{CAV} \quad \text{for} \quad p > p_{CAV} . \quad (10)$$

p_{CAV} is the pressure in the areas of cavitation (often considered to be equal to the pressure in the ambient space).

The components of the hydraulic force by which the oil layer acts on the rotor journal are obtained by integration of the pressure distribution around the circumference and along the length of the bearing taking into account different pressure profiles in non-cavitated and cavitated areas

$$F_{Hy} = R \int_0^L \int_0^{2\pi} p_d \cos \varphi \, d\varphi \, dZ , \quad (11)$$

$$F_{Hz} = R \int_0^L \int_0^{2\pi} p_d \sin \varphi \, d\varphi \, dZ . \quad (12)$$

F_{Hy} , F_{Hz} are the y and z components of the hydraulic force and L is the bearing length.

The support damping devices and their modelling

The rolling element bearings exhibit high stiffness but almost no damping, which arrives at little ability to attenuate the rotor oscillations or to prevent the rotor self-excited vibrations induced e.g. by material damping. On the other hand their advantage is that their failure does not occur suddenly and that their damage or excessive wear can be identified by progressive increase of noise and excitation of high frequency vibrations.

Fig.3. Squeeze film damper

The hydrodynamic bearings are distinguished by less stiffness and considerable higher damping. Their disadvantage is the possibility of a sudden failure with no previous warnings. This is the reason why the hydrodynamic bearings are not used in aircraft engines or in other devices the failure of which would lead to serious impacts. Another drawback of the hydrodynamic bearings is the excitation of the rotor self excited vibrations produced by the hydraulic forces if the rotor rotation exceeds a critical speed.

The squeeze film dampers are based on utilization of high stiffness and low friction of rolling element bearings and high damping capacity of hydrodynamic bearings. Their main parts (Fig. 3) are two concentric rings between which there is a thin layer of lubricating film. The outer ring is firmly coupled with the damper body while the inner ring is connected with the rotor journal by a rolling element bearing and with the damper housing by a squirrel spring. The spring enables the ring to vibrate in the radial direction but prevents its rotation together with the shaft. The squeezing the oil film produces the damping force. No rotation of the inner ring together with the rotor journal is the substantial difference between the hydrodynamic bearings and the squeeze film dampers.

The pressure distribution in the oil film can be determined by application of the Reynolds equation. The classical theory of lubrication considers that the oil as massless. The importance of the inertia effects rises if magnitude of the Reynolds number Re

$$Re = \rho \frac{R\omega c}{\eta} \quad (13)$$

exceeds the value of approximately 1000. Then some modifications of the Reynolds equation were proposed by Tichy, Crandal, El-Shafei, Zapoměl and others and can be found e.g. in [3], [5], [6], [7].

The force acting between the shaft and the stationary part is transmitted through the squirrel spring and the layer of the lubricating film

$$F_{Sy} = -k_S y - R \int_0^L \int_0^{2\pi} p_d \cos \varphi \, d\varphi \, dZ, \quad (14)$$

$$F_{Sz} = -k_S z - R \int_0^L \int_0^{2\pi} p_d \sin \varphi \, d\varphi \, dZ. \quad (15)$$

F_{Sy} , F_{Sz} are the y and z components of the support force acting of the rotor journal, k_S is the stiffness of the squirrel spring and y and z are the transversal displacements of the shaft journal at location of the squeeze film damper.

The controllable magnetorheological squeeze film dampers and their modelling

A new concept of controlling the damping force is represented by squeeze film dampers lubricated by magnetorheological oils (Fig. 4). The damper body is equipped with an electric coil generating magnetic flux passing through the film of magnetorheological liquid. As resistance against its flow depends on magnetic induction, the change of the applied current can be used to control the damping force.

Magnetorheological fluids are suspensions composed of oil, micrometer-sized ferromagnetic particles dispersed in it and of additive substances. If the magnetic field is applied, the ferromagnetic particles begin to form the chains which increases resistance against the liquid flow and the magnetorheological fluid starts to behave as a liquid with a yielding shear stress.

The developed mathematical model of the magnetorheological squeeze film damper is based on assumptions of the classical theory of lubrication, except for that of the oil being Newtonian liquid. The lubricant is represented by Bingham fluid, the yielding shear stress of which depends on magnetic induction. Further attention is focused on the dampers the geometry and design of which make it possible to consider them as short (the ratio of the damper length to the radius of both rings is small and the dampers are not sealed at their ends or the seals are very soft). In such dampers, the prevailing flow in the lubricating layer occurs in the axial direction and therefore, in the mathematical model the circumferential flow component is neglected. As both the inner and outer rings of the damper do not rotate, the flow in the lubricating film is only due to the pressure gradient (Poiseuille flow).

Fig.4. Magnetorheological squeeze film damper

The pressure distribution in the full film of magnetorheological liquid is then governed by the Reynolds' equation adapted for Bingham material and short dampers [8]

$$h^3 p'^3 + 3(h^2 \tau_y - 4\eta_B h Z) p'^2 - 4\tau_y^3 = 0 \quad \text{for} \quad p' < 0, Z > 0 \quad (16)$$

$$h^3 p'^3 - 3(h^2 \tau_y + 4\eta_B h Z) p'^2 + 4\tau_y^3 = 0 \quad \text{for} \quad p' > 0, Z > 0 \quad (17)$$

where

$$p' = \frac{\partial p}{\partial Z}. \quad (18)$$

p denotes the pressure, p' is the pressure gradient in the axial direction, h is the thickness of the oil film, τ_y , η_B are the yielding shear stress and Bingham viscosity, Z is the axial coordinate referred to the frame of reference describing positions in the oil film (Fig. 1) and $(\cdot)$ denotes the first derivative with respect to time.

The pressure profile in the axial direction is obtained by integration of the pressure gradient with the boundary conditions expressing that pressure at the damper ends is equal to the atmospheric one. Occurrence of cavitation is assumed in the areas where the clearance between the inner and outer rings of the damper rises with time. It is supposed that the pressure remains constant in the cavitated regions and equal to the pressure of the ambient space.

As evident from relations (16) and (17), the pressure gradient in the axial direction depends on the Bingham viscosity η_B and on the yielding shear stress τ_y . The Bingham viscosity is considered to be constant and the dependence of the yielding shear stress on magnetic induction can be approximated with sufficient accuracy by a power function

$$\tau_y = k_y B^{n_y} \quad (19)$$

where B denotes the magnetic induction and k_y and n_y are the proportional and exponential material constants of the magnetorheological fluid.

In the developed mathematical model the damper housing is considered to be composed of a series of meridian segments and each segment is considered to be a divided core of an electromagnet with the gap filled by magnetorheological oil (Fig. 5). This enables to determine magnetic induction B as a function of the applied current and thickness of the oil film at any location in the oil film around the damper circumference

$$B = k_B \mu_0 \mu_r \frac{I}{h}. \quad (20)$$

μ_0 , μ_r are the permeability of the vacuum and the relative permeability of the magnetorheological oil, respectively, I is the applied current, k_B is the design parameter that is

defined as a product of the number of the coil turns and the magnetic efficiency. More details on its determination can be found in [9].

Fig.5. Magnetic circuit referred to the magnetorheological squeeze film damper

The force acting on the rotor journal consists on the elastic component produced by bending of the squirrel spring, the hydraulic damping force caused by squeezing the oil film and by the magnetic force that attracts the inner and outer rings one to another

$$F_{sy} = -k_s y - R \int_0^L \int_0^{2\pi} (p_d - p_m) \cos \varphi \, d\varphi \, dZ, \quad (21)$$

$$F_{sz} = -k_s z - R \int_0^L \int_0^{2\pi} (p_d - p_m) \sin \varphi \, d\varphi \, dZ. \quad (22)$$

p_d is the hydraulic pressure distribution in the damper gap taking into account different pressure profiles in non-cavitated and cavitated areas and p_m is the specific attracting magnetic force

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}. \quad (23)$$

The equation of motion of the rotor system

To formulate the motion equation of the rotor system it is assumed

the rotor is axisymmetric,

the shaft is represented by a beam body that is discretized into beam finite elements,

the discs are axisymmetric and absolutely rigid,

the shaft material is linear, homogeneous and isotropic,

the material damping and the damping produced by the environment is linear,

the rotor angular speed is constant,

the support elements are represented by springs or by springs and nonlinear force couplings.

The model shaft is considered to be of Kelvin-Voight theoretical material the stiffness and damping properties of which are evident from Fig. 6.

The constitutive relationship of the Kelvin-Voight theoretical material has the form

$$\sigma = E \varepsilon + \eta_V E \dot{\varepsilon} \quad (24)$$

where σ is the stress, ε is the strain, E is the Young's modulus and η_V is the viscous damping coefficient.

Fig.6. Scheme of the Kelvin-Voigt theoretical material

Based on the accepted assumptions, the motion equation of the rotor takes the form

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{B}_p + \mathbf{B}_m - \omega \mathbf{G}) \dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + \omega \mathbf{K}_c) \mathbf{x} = \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_H \quad (25)$$

where $\mathbf{M}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{K}$ are the mass, gyroscopic and stiffness matrices of the rotor system, $\mathbf{B}_p$, $\mathbf{B}_m$ are the damping matrices (external, material, respectively), $\mathbf{K}_c$ is the circulation matrix, $\mathbf{x}$ is the vector of the generalized coordinates, $\mathbf{f}_A$ is the vector of the applied forces, $\mathbf{f}_H$ is the vector of nonlinear hydraulic forces acting of the shaft journal by the support elements (hydrodynamic bearings, squeeze film dampers) and $(\cdot)$, $(\ddot{\cdot})$ denote the first and second derivative with respect to time.

The determination of the equilibrium position arrives at solving a set of nonlinear algebraic equations, which are derived from the motion equation (25)

$$(\mathbf{K} + \omega \mathbf{K}_c) \mathbf{x}_0 = \mathbf{f}_{A0} + \mathbf{f}_{H0} \quad (26)$$

$\mathbf{x}_0$ is the vector of generalized coordinates defining the rotor equilibrium position, $\mathbf{f}_{A0}$ is the vector of the stationary applied forces and $\mathbf{f}_{H0}$ is the vector of the hydraulic forces referred to the stationary position of the rotor.

The principle analysis of investigation of rotating machines is determination of their natural frequencies. This enables to find out the critical speeds and to evaluate the stability of the system vibrations. If amplitude of the oscillations near to the rotor equilibrium position is small, then the eigenvalues can be obtained by means of linearization of the system equation of motion. The vector of hydraulic forces is expanded into a truncated Taylor series in the neighbourhood of the equilibrium state

$$\mathbf{f}_H = \mathbf{f}_{H0} + \mathbf{D}_B \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_K (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (27)$$

where

$$\mathbf{D}_B = \left[\frac{\partial \mathbf{f}_H}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right]_{\dot{\mathbf{x}}=0, \mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \quad (28)$$

$$\mathbf{D}_K = \left[\frac{\partial \mathbf{f}_H}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\dot{\mathbf{x}}=0, \mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \quad (29)$$

$\mathbf{D}_B$ and $\mathbf{D}_K$ are the Jacobi matrices and $\mathbf{o}$ is the zero vector.

After substitution of (27) in the equation of motion (25) and taking into account (28) and (29), the calculation of the natural frequencies leads to solving a quadratic eigenvalue problem

$$\left[\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda (\mathbf{B}_p + \mathbf{B}_m - \omega \mathbf{G} - \mathbf{D}_B) + \mathbf{K} + \omega \mathbf{K}_c - \mathbf{D}_K \right] \mathbf{u} = \mathbf{o} \quad (30)$$

λ is the eigenvalue and $\mathbf{u}$ is the corresponding eigenvector.

The transient solution of the motion equation (25) can be obtained by application of some of the direct integration methods. To use the Newmark method, which gives good results when solving linear problems, the nonlinear vector of the hydraulic forces must be linearized by means of its expansion into a truncated Taylor series in the neighbourhood of the state parameters referred to time t . Then the equation of motion referred to time $t+\Delta t$ takes the form

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} + (\mathbf{B}_p + \mathbf{B}_m - \omega \mathbf{G}) \dot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} + (\mathbf{K} + \omega \mathbf{K}_C) \mathbf{x}_{t+\Delta t} = \\ = \mathbf{f}_{A,t+\Delta t} + \mathbf{f}_{H,t} + \mathbf{D}_{B,t} (\dot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} - \dot{\mathbf{x}}_t) + \mathbf{D}_{K,t} (\mathbf{x}_{t+\Delta t} - \mathbf{x}_t) \end{aligned} \quad (31)$$

$\mathbf{D}_{B,t}$, $\mathbf{D}_{K,t}$ denote the Jacobi matrices of partial derivatives with respect to velocities and displacements, respectively, set up at the point of time of t .

This manipulation makes it possible to avoid solving a set of nonlinear algebraic equations at each integration step.

After the transformation of the equation of motion (25) in the state space

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{B}_p + \mathbf{B}_m - \omega \mathbf{G} \end{bmatrix}^{-1} \left(- \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K} + \omega \mathbf{K}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_H \end{bmatrix} \right) \quad (32)$$

a number of implicit or explicit integration methods can be applied (Runge-Kutta, Adams-Moulton, etc.).

If the excitation is periodic, the steady state solution of the equation of motion can be obtained by application of the trigonometric collocation method. This approach assumes that the response on harmonic excitation is a periodic function of time, the period of the response is the same as those of the excitation, the steady state component of the response can be approximated by a finite number of terms of a Fourier series

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^{N_F} \mathbf{x}_{Cj} \cos(j\omega_B t) + \mathbf{x}_{Sj} \sin(j\omega_B t). \quad (33)$$

ω_B is the angular frequency of excitation, $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_{Cj}$, $\mathbf{x}_{Sj}$ for $j = 1, 2, \dots, N_F$ are the vectors of the Fourier coefficients and N_F is the number of the used first terms of the Fourier series.

Then substitution of (33) and its first and second derivatives with respect to time in (25) arrives at a set of nonlinear algebraic equations in which the unknowns are the Fourier coefficients

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_0 + \\ & + \sum_{j=1}^{N_C} [\cos(j\omega_B t_k) (\mathbf{K} + \omega \mathbf{K}_C - j^2 \omega_B^2 \mathbf{M}) - j \omega_B \sin(j\omega_B t_k) (\mathbf{B}_p + \mathbf{B}_m - \omega \mathbf{G})] \mathbf{x}_{Cj} + \\ & + \sum_{j=1}^{N_C} [\sin(j\omega_B t_k) (\mathbf{K} + \omega \mathbf{K}_C - j^2 \omega_B^2 \mathbf{M}) + j \omega_B \cos(j\omega_B t_k) (\mathbf{B}_p + \mathbf{B}_m - \omega \mathbf{G})] \mathbf{x}_{Sj} = \\ & = \mathbf{b}(t_k, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{C1}, \mathbf{x}_{S1}, \mathbf{x}_{C2}, \mathbf{x}_{S2}, \dots, \mathbf{x}_{CNF}, \mathbf{x}_{SNF}) \quad \text{for } k = 1, 2, \dots, N_C. \end{aligned} \quad (34)$$

t_k is the k -th collocation point of time

$$t_k = \frac{2\pi}{\omega_B} \frac{k-1}{N_C} \quad (35)$$

and N_C is the total number of the collocation points.

Conclusions

The behaviour of rotating machines strongly depends on the support elements coupling the rotor with the stationary part. Mostly, their stiffness and damping properties are highly nonlinear, which can arrive at excitation of subharmonic, ultraharmonic or self-excited vibrations of large amplitude or even at excitation of irregular or chaotic motions of the rotating machine if the critical speed is exceeded. A proper design of the coupling elements enables to attenuate vibrations of rotating machines in the whole interval of their operating speeds. If the machine works in the range of several critical velocities, the parameters of the damping elements inserted between the rotor and the stationary part must be adaptable to the current running conditions. This is offered by application of magnetorheological damping devices. The presented article reports on modern possibilities of modelling the rotors, their support elements, and on methods for performing the computational simulations, which enable to find the optimum technological solution when designing or analysing behaviour of new rotating machinery.

References

1. Krüger E.: Dynamics of Rotors and Foundations, Springer-Verlag, 1993.
2. Szeri A.Z.: Tribology : Friction, Lubrication, and Wear, Hemisphere Publishing Corporation, Washington, New York, London, 1980.
3. Zapoměl J.: Computer modelling of lateral vibration of rotors supported by hydrodynamical bearings and squeeze film dampers, VSB-Technical University of Ostrava, Ostrava, 2007 (in Czech).
4. Lahmar M., Haddad A., Nicolas D.: An optimised short bearing theory for nonlinear dynamic analysis of turbulent journal bearings, Eur. J. Mech. A/Solids 19, 2000, pp. 151-177.
5. Tichý J.A.: The effect of fluid inertia forces in squeeze-film damper bearing : A heuristic and physical description, ASME paper 84-GT-177, 1983.
6. El-Shafei A., Crandal S.H.: Fluid inertia forces in squeeze-film dampers, ASME Rotating Machinery and Vehicle Dynamics, DE-vol. 35, 1993, pp. 219-228.
7. El-Shafei A.: Modeling fluid inertia forces of short journal bearings for rotordynamic applications, ASME Journal of Vibrations and Acoustics, vol. 117, 1995, pp. 462-469.
8. Zapoměl J., Ferfecki P., Forte P.: A computational investigation of the transient response of an unbalanced rigid rotor flexibly supported and damped by short magnetorheological squeeze film dampers, Smart Materials and Structures, vol. 21, Issue 10, 2012, pp. 1-12.
9. Ferfecki, P., Zapoměl, J., Kozánek, J.: Analysis of the vibration attenuation of rotors supported by magnetorheological squeeze film dampers as a multiphysical finite element problem, Advances in Engineering. Software, vol. 104, 2017, pp. 1-11.

МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ И РЕДУКЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Банах Л.Я.

ИМАШ РАН, Москва, Россия, banl@inbox.ru

Аннотация. Рассматривается проблема построения и динамического анализа расчетных моделей сложных иерархических структур путем выделения основных элементов, определяющих динамику конструкции. Разработаны критерии слабых динамических взаимодействий между подсистемами, на основе которых возможна существенная редукция модели. При этом используются различные способы декомпозиции: разделение на квазинезависимые подсистемы, агрегирование, построение частотной иерархии минимальных моделей. Приводятся примеры редукции моделей реальных конструкций.

Ключевые слова. Слабые взаимодействия, декомпозиция, расчетная модель, редукция, оценка точности.

Введение. Основные проблемы динамического анализа составных механических систем. Реальные механические системы, (например, газо- турбинные и жидкостные ракетные двигатели, энергетические установки, станки и т.п.) включают в себя большое число подсистем и механизмов. Подсистемы, в свою очередь, состоят из различных элементов, и вся система имеет иерархическую структуру. Исследование динамических процессов в таких системах возможно лишь при рассмотрении системы в целом с учетом взаимодействий между составляющими подсистемами. Построение динамической модели реальной конструкции, состоящей из большого числа элементов с различными физическими свойствами - сложная, многоэтапная процедура, использующая различного рода феноменологические и эмпирические закономерности, гипотезы. Такая идеализация зависит от интуиции, опыта исследователя, и поэтому процесс построения модели оказывается неоднозначным и неформализованным. [1].

Расчетные модели больших систем (как правило, конечно-элементные) содержат сотни тысяч степеней свободы и параметров. Анализ численных результатов, как правило, невозможен без предварительного динамического анализа. Поэтому возникает проблема отыскания общих закономерностей в динамических иерархических системах, а именно:

- выявление в большой системе сравнительно небольшого числа переменных, определяющих ее вибрационное состояние в заданном диапазоне частот;
- определение степени динамических взаимодействий между подсистемами при колебаниях;
- формализация процесса редукции расчетной модели, при сохранении наперед заданной степени точности расчетной модели;
- установление критериев эквивалентности различных расчетных моделей между собой, оценка точности расчетной модели. Это необходимо в силу неоднозначности построения расчетной модели.

Методы идеализации при выборе расчетной модели. Способы редукции размерности расчетных и математических моделей.

1.1. Методы построения расчетных моделей. Существуют различные подходы при построении расчетных моделей механических систем. Выделим основные методы.

Дискретизация - представление системы в виде сосредоточенных масс или твердых тел, соединенных безмассовыми упругими элементами [2,3,4]. Универсальным способом дискретизации является метод конечных элементов (МКЭ). Основным недостатком таких моделей является их огромная размерность.

Континуализация используют «размазывание» достаточно густо расположенных дискретных включений. Следует отметить статистические энергетические методы (СЭМ), хорошо приспособленные для анализа высокочастотных колебаний [5].

Дискретно - континуальные модели (балочно-пластинчатая, оболочечная аппроксимация). К ним относятся: методы динамической жесткости (податливости), начальных параметров, переходных функций, импедансные методы. При этом каждый участок системы представляется в виде элементов с распределенными параметрами с известным аналитическим решением (типа балок, пластин, оболочек, и т.п.) [3,4,6,7]. Однако возникают проблемы обоснования подобной идеализации, так как реальные элементы конструкции обычно имеют сложное криволинейное очертание, и с трудом поддаются аналитическому описанию.

1.2. Методы редукции моделей. При исследовании сложных многомерных систем любой природы (в том числе экологических, экономических и т.п.) используются подходы декомпозиции: разделение на составляющие подсистемы и метод агрегирования (объединение элементов)[8].

Разделение системы на составляющие подсистемы. К ним относятся:

- различные варианты покомпонентного метода синтеза форм колебаний;
- топологические методы, основанные на работе Г. Крона [9].

Здесь, в первую очередь, возникают проблемы с выбором подсистем: при произвольном разбиении решение для подсистем существенно отличается от решения системы в целом, и не выявляются физические особенности системы.

Методы агрегирования. - выделение определенных элементов или подсистем с последующим их объединением. К методам агрегирования можно отнести следующие:

- статическая конденсация за счет исключения безинерционных элементов (исключение Гаусса) [10]. К недостаткам метода относится неопределенность в выборе исключаемых координат и оценка точности редуцированной модели;

- метод исключения нормальных форм колебаний [11]. Такое исключение возможно лишь после получения решения всей системы. Помимо этого, уравнения редуцированной модели описывают модальные, а не физические координаты.

Кроме того, произвольная декомпозиция расчетной модели малоэффективна, так как учет связей существенно меняет динамику системы. Поэтому необходимы подходы, учитывающие влияние динамических взаимодействий в системе.

Основной закономерностью динамического поведения систем с иерархической структурой является возникновение слабых динамических взаимодействий между подсистемами или элементами. Теоретический анализ и опыт расчетов подтверждает, что слабые взаимодействия практически всегда присутствуют в больших системах. Они возникают при значительном разбросе параметров системы, в том числе, упругих и инерционных, при большой расстройке частот в подсистемах, при малом нарушении регулярности и симметрии структуры. Такого рода факторы, как правило, всегда имеют место в реальных конструкциях.

Выделяя слабые взаимодействия, систему можно представить как совокупность слабосвязанных подсистем, колебания в которых происходят практически независимо, что позволяет понять физическую сущность системных процессов. Поведение всей системы определяется сильно-связанными переменными, поэтому трудно переоценить возможность формализации процедуры распознавания в большой системе ее определяющих элементов и исключения малозначимых элементов. Для этого необходимо в первую очередь ввести аналитические критерии слабых взаимодействий.

2. Анализ динамических взаимодействий между подсистемами. Коэффициенты слабых взаимодействий в многомассовых системах.

Уравнения, описывающие колебания механических систем, состоящих из ряда подсистем, удобно записать в виде блочной матрицы $\mathbf{D}$, так как она повторяет структуру системы:

$$\mathbf{D} = \mathbf{K} - \lambda \mathbf{M} = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{11} - \lambda \mathbf{M}_{11}] & [\mathbf{K}_{12}] & \cdots & [\mathbf{K}_{1m}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\mathbf{K}_{m1}] & [\mathbf{K}_{m2}] & \cdots & [\mathbf{K}_{mm} - \lambda \mathbf{M}_{mm}] \end{bmatrix} = \mathbf{F}(t), \quad (1)$$

Диагональные блоки $\mathbf{K}_{ii}$, $\mathbf{M}_{ii}$ – описывают матрицы жесткости и инерции i -ой парциальной подсистемы, внедиагональные блоки $\mathbf{K}_{ij}$ – матрицы упругой (и инерционной) связи между i -ой и j -ой подсистемами, m – число подсистем, n_i – порядок i -ой подсистемы, демпфирование можно учесть, полагая $\mathbf{K}$ комплексным, λ – квадрат собственной частоты.

Коэффициенты связи γ_{12} в двухмассовых системах впервые были предложены А.И. Мандельштамом [12], С.П. Стрелковым [13].

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & \\ & m_2 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Коэффициент слабой связи и связанности двухмассовой системы

$$\gamma_{12} = k_{12} / \sqrt{k_{11} k_{22}} = \varepsilon \ll 1, \quad \sigma_{12} = \gamma_{12} / (\nu_1^2 - \nu_2^2)$$

Однако, такое определение коэффициентов связей эффективно, если размерность подсистем достаточно мала. Для многомерных систем необходимо существенное обобщение этих понятий, так как коэффициент γ_{ij} характеризует свойства статической матрицы жесткости $\mathbf{K}$, а не динамической матрицы $\mathbf{D}$.

Определим теперь коэффициенты взаимодействия для многомерных систем
Определение. Подсистемы i и j назовем слабо связанными, если их формы колебаний в связанной системе (в безразмерном виде) могут быть представлены в виде

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{ii} \\ \varepsilon \mathbf{h}_{ij} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_j = \begin{bmatrix} \varepsilon \mathbf{h}_{ji} \\ \mathbf{h}_{jj} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon \ll 1$$

$\mathbf{h}_{ii}$ – координаты собственных векторов в связанной системе, относящиеся к i -й подсистеме, а $\mathbf{h}_{ij}$ – к j -й подсистеме. Таким образом, при колебаниях одной из подсистем, вторая остается практически неподвижной

Были выделены следующие безразмерные коэффициенты динамического взаимодействия в системе, типичные для механических систем: [14]

Коэффициент энергетической связи между i -й и j -й подсистемами (при $\mathbf{M}_{ij} = 0$)

$$\alpha_{ij}^{pr} = \frac{(\mathbf{h}_{i0}^r)^T (\mathbf{K}_{ij}) \mathbf{h}_{j0}^r}{(\boldsymbol{\kappa}_i^{(p)} \boldsymbol{\kappa}_j^{(r)})^{1/2}} = \frac{(\mathbf{h}_{i0}^r)^T (\mathbf{K}_{ij}) \mathbf{h}_{j0}^r}{(\lambda_{i0}^{(p)} \lambda_{j0}^{(r)})^{1/2} (\mu_i^{(p)} \mu_j^{(r)})^{1/2}}, \quad p = 1 \dots n_i, \quad r = 1 \dots n_j, \quad |\alpha_{ij}^{pr}| \leq 1 \quad (2)$$

p, r - означают номер формы колебаний в соответствующей подсистеме. α_{ij}^{pr} отражают отношение работы связей к энергии подсистем. Заметим, что $\alpha_{ij}^{pr} < 1$ в силу положительной определенности матрицы жесткости $\mathbf{K}$.

Коэффициенты энергетических связей определяют отношение работы, произведенной силами связей между подсистемами к среднегеометрической энергии, накопленной в парциальных подсистемах при данных формах колебаний.

Коэффициент спектральной связи , зависит от расстройки частот в подсистемах

$$s_{ij}^{pr} = \frac{\alpha_{ij}^{pr}}{(1 - \lambda_{i0}^{(p)} / \lambda_{j0}^{(r)})} . \quad (3)$$

Для определения динамических взаимодействий достаточно знать жесткость между подсистемами и решения для изолированных подсистем, но не для всей системы в целом. При неизвестном решении можно применить приближенную оценку коэффициентов связи, используя нормы матриц жесткости и инерции парциальных подсистем

$$|\alpha_{ij}^{pr}| \leq \frac{\| \mathbf{M}_{ii}^{-1/2} \mathbf{K}_{ij} \mathbf{M}_{jj}^{-1/2} \|}{\sqrt{\lambda_{i0}^p \lambda_{j0}^r}} < \varepsilon . \quad (4)$$

Коэффициенты энергетических связей α_{ij}^{pr} достаточно просто выделяются в общей системе (1) с помощью матричных преобразований.

$$\mathbf{d} = \mathbf{\kappa}^{-1/2} \mathbf{H}_0^T \mathbf{D} \mathbf{H}_0 \mathbf{\kappa}^{-1/2} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{diag}[1 - \lambda / \Lambda_{i0}] & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1m} \\ \mathbf{a}_{12}^T & \text{diag}[1 - \lambda / \Lambda_{20}] & \cdots & \mathbf{a}_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{1m}^T & \mathbf{a}_{2m}^T & \cdots & \text{diag}[1 - \lambda / \Lambda_{m0}] \end{bmatrix}, \quad (5)$$

блочно-диагональная матрица $\mathbf{H}_0$ образована из векторов-столбцов собственных форм колебаний парциальных подсистем, $\mathbf{\kappa} = \text{diag } \kappa_i^p$. В случае слабосвязанных подсистем эти коэффициенты малы

$$\alpha_{ij}^{pr} < \varepsilon, \quad s_{ij}^{pr} < \varepsilon$$

В зависимости от расположения ε – блоков матрице $\mathbf{d}$ возможны различные виды декомпозиции и связанные с ней различные математические методы анализа[15]

Табл.1. Различные способы декомпозиции в зависимости от вида и расположения слабых динамических взаимодействий

Виды слабых взаимодействий	$[\mathbf{a}_{ij}] < \varepsilon$ $[\mathbf{s}_{ij}] \neq \varepsilon$	$[\mathbf{a}_{ij}] < \varepsilon, [\mathbf{s}_{ij}] < \varepsilon$	$[\mathbf{a}_{ij}] \cong 1, [\mathbf{s}_{ij}] < \varepsilon$
Структура динамической матрицы	$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \varepsilon \mathbf{D}_{12} \\ \varepsilon \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \varepsilon \mathbf{D}_{12} \\ \varepsilon \mathbf{D}_{21} & \varepsilon^2 \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{K}_{11} - \lambda \varepsilon \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix}$
Способ декомпозиции	Разделение на независимые подсистемы $\mathbf{D}_{11}$ $\mathbf{D}_{22}$	Исключение подсистем, описываемых матрицей $\mathbf{D}_{22}$	Агрегирование элементов
Условия возникновения	Большой разброс жесткостных параметров, малая асимметрия	Большой диапазон собственных частот.	Большой разброс парциальных частот

Эти подходы декомпозиции отличаются тем, что позволяют исключать физические координаты, и сохранять, таким образом, структуру и наглядность расчетной модели.

3. Связь коэффициентов слабого взаимодействия с условиями плохой вычислительной обусловленности матриц.

Коэффициенты динамических взаимодействий оказываются достаточно универсальными характеристиками для больших систем. Действительно, они совпадают с условиями плохой обусловленности матрицы при собственных и вынужденных колебаниях, с критериями эквивалентности различных математических моделей системы между собой, они также совпадают с коэффициентами чувствительности изменения частот и форм колебаний при объединении подсистем [15].

3.1. Условие плохой обусловленности вынужденных колебаний

$$\rho(\mathbf{D}) = \|\mathbf{D}\| \|\mathbf{D}^{-1}\| = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}},$$

совпадает с условием слабой спектральной связи (3): $\|\mathbf{s}_{ij}\| \leq \varepsilon$, при $\lambda_{\max} \gg \omega_{\max}$

3.2. Условие плохой обусловленности собственных векторов

$$\rho(h) = \frac{\max_{p,r} |\lambda_I^p - \lambda_{II}^r|}{\min_{p,r} |\lambda_I^p - \lambda_{II}^r|}$$

совпадает со случаем резонансного взаимодействия подсистем: $\|\mathbf{a}_{ij}\| \leq \varepsilon$, $\|\mathbf{s}_{ij}\| \approx 1$

Таким образом, понятие вычислительной математики «число обусловленности» связано с проблемой выбора расчетной модели: число обусловленности велико, если выбранная модель неудачна. Если плохо обусловлена проблема вынужденных колебаний $\rho(\mathbf{D})$, тогда система допускает сокращение числа степеней свободы (агрегирование), если велико число обусловленности $\rho(\mathbf{H})$ для собственных векторов, то в системе есть слабые взаимодействия, и необходима ее декомпозиция на слабосвязанные подсистемы.

3.3. Критерий эквивалентности различных математических моделей системы между собой. Поскольку процесс построения модели неоднозначен возникает проблема определения эквивалентности расчетных моделей между собой.

Определение. Будем называть эквивалентными с точностью до ε (или ε -эквивалентными) различные модели, которые описывают динамические характеристики с точностью до ε .

Для рассматриваемого круга проблем такими характеристиками являются собственные частоты и формы колебаний, амплитуды вынужденных колебаний. Тогда условиями ε -эквивалентности расчетных моделей 1 и 2, является близость (с точностью до ε) энергетических и спектральных коэффициентов динамического взаимодействия:

$$\|\alpha_{ij}\|_1 - \|\alpha_{ij}\|_2 < \varepsilon, \quad \|\mathbf{s}_{ij}\|_1 - \|\mathbf{s}_{ij}\|_2 < \varepsilon$$

Действительно при этом условии собственные частоты и формы колебаний моделей 1 и 2, отличаются на величины порядка ε и имеют близкое энергетическое состояние (п.4). Величина ε – степень эквивалентности моделей.

Рассмотрим теперь различные способы декомпозиции расчетных моделей

Декомпозиция системы на слабосвязанные подсистемы при $\|\mathbf{a}_{ij}\| \leq \varepsilon$

В этом случае матрица, описывающая колебания системы имеет вид / /:

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} - \lambda \mathbf{M}_{11} & \varepsilon \mathbf{D}_{12} \\ - & - \\ \varepsilon \mathbf{D}_{21} & \mathbf{K}_{22} - \lambda \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & & \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & & \\ & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \\ & & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_4 & & & \varepsilon_4 \end{bmatrix}$$

При $\varepsilon = 0$ получается порождающая система. Она описывает несвязанные между собой парциальные подсистемы. Решение связанной системы можно искать в виде сходящегося ряда по степеням ε .

Нерезонансный случай $\|\alpha_{ij}\| < \varepsilon, \|s_{ij}\| < \varepsilon$

Решение для частот и форм колебаний: $\Lambda = \Lambda_0 + \varepsilon^2 \Lambda^{(1)} + \dots$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \varepsilon \mathbf{H}_1 \mathbf{S} + \dots$,

Λ_0 , $\mathbf{H}_0$ - решение несвязанных парциальных подсистем

Резонансный случай (близкие частоты в подсистемах): $\|\alpha_{ij}\| < \varepsilon, \|s_{ij}\| > \varepsilon$

$$\lambda_{i,j} = \lambda_{i0} \pm \alpha_{is} \Delta \lambda + o(\varepsilon^2), \quad \mathbf{h}_i = \mathbf{h}_i \pm \mathbf{h}_j + \varepsilon s_{ij} \mathbf{h}_i + o(\varepsilon)$$

Колебания в слабосвязанных подсистемах происходят практически независимо;
- собственные частоты связанной системы близки с точностью до ε к собственным частотам несвязанных парциальных подсистем;
- формы собственных колебаний парциальных подсистем и связанной системы при отсутствии близких частот в подсистемах близки между собой. Однако, формы колебаний, соответствующие близким частотам, резко меняются, что означает обмен энергией при резонансных режимах.

Динамический анализ газотурбинного двигателя [16]. Газотурбинный двигатель (ГТД) имеет три основные подсистемы (Рис.1): ротор низкого давления, ротор высокого давления, корпус

Рис.1. Общий вид ГТД: 1-ротор низкого давления (РНД), 2-ротор высокого давления (РВД), 3-корпус (К)

Рис. 2. Собственные формы колебаний ГТД

Табл.2 . Собственные частоты парциальных подсистем и связанной системы ГТД

Собственные частоты Гц								
РНД	27.8	66.8	134.9	221.1	954.5			
РВД	142	240.9	339.55	1251.4				
корпус	132	217	2189					
Система ГТД	27	53.1	65.13	72.45	137	157.7	237.8	236.8

Как показывает анализ результатов, имеется слабое динамическое взаимодействие между корпусом и подсистемами роторов практически во всем рассматриваемом диапазоне: амплитуды колебаний корпуса много меньше амплитуд роторов (рис.2).

Кроме того, внутри подсистемы РНД отмечено слабое взаимодействие между турбиной и компрессором в низкочастотном диапазоне (до 56 Гц). Собственные частоты парциальных подсистем ГТД близки к частотам связанной системы двигателя.

Таким образом, присутствие слабых взаимодействий в инженерных сооружениях играет двоякую роль. С одной стороны они препятствуют передаче повышенных вибрационных нагрузок по конструкции, что повышает надежность работы двигателя. Но, с другой стороны, затрудняется контроль внутреннего состояния подсистем по показателям датчиков, установленных, как правило, на корпусе двигателя.

5. Частотная декомпозиция при $\|\alpha_{ij}\| < \varepsilon, \|s_{ij}\| < \varepsilon$.

Этот метод решает проблему получения минимальной математической модели в данном диапазоне частоты ($0 - \omega_{\max}$). Метод основан на исключении слабо- влияющих форм колебаний [15,17]. Такая декомпозиция возможна при наличии малых коэффициентов связи, как энергетических (2), так и спектральных (3), когда матрица **d** (5) имеет вид

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{ll} & | & \varepsilon \mathbf{d}_{lh} \\ - & | & - \\ \varepsilon \mathbf{d}_{lr} & | & \varepsilon^2 \mathbf{d}_{hh} \end{bmatrix}$$

5.1. Построение низкочастотной модели. Алгоритм.

1. Выделить слабосвязанные парциальные подсистемы, используя приближенные оценки (4).

2. В каждой из этих подсистем отделить низко- и высоко- частотные колебания из условия $\lambda_{in} \leq \eta \omega_{\max}$. Выбираем η из условия $|\alpha_{nn}| < \varepsilon$ (рис. 4).

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \Lambda_i^H & | & \\ - & | & - \\ & | & \Lambda_i^B \end{bmatrix}, \quad \lambda_{i0max}^B = \eta \omega_{max}^2 \quad \mathbf{d}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{HH} & | & \mathbf{d}_{HB} \\ - & | & - \\ \mathbf{d}_{HB} & | & \mathbf{d}_{BB} \end{bmatrix}$$

$$\left[\mathbf{d}_{nn} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda/v_{10}'' & \alpha_{12}'' \\ \alpha_{21}'' & 1 - \lambda/v_{20}'' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_{nn} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12}'' \\ \alpha_{21}'' & 0 \end{bmatrix} \right]$$

Сформировать матрицу системы как низкочастотное объединение подсистем, переставляя строки и столбцы в исходной матрице **D** связанной системы

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_H & \mathbf{D}_{nB} \\ \mathbf{D}_{nH} & \mathbf{D}_B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_H = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{1H} & \mathbf{d}_{12H} & \cdots & \mathbf{d}_{1N_H} \\ \mathbf{d}_{21H} & \mathbf{d}_{2H} & & \mathbf{d}_{2N_H} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{d}_{N1H} & \mathbf{d}_{N2H} & & \mathbf{d}_{N_H} \end{bmatrix}$$

Тогда $\|\mathbf{D}_{nn}\| < \varepsilon$ и решение низкочастотного объединения : Φ_n, Λ_n близко к решению исходной системы с точностью до ε в заданном частотном диапазоне. Решение в исходных координатах: $\mathbf{X}_n = \mathbf{H}_{0n} \Phi_n \mathbf{Z}$

Рис. 3. Определение числа удерживаемых форм колебаний n в зависимости от заданной точности расчета ε и коэффициента энергетической связи между подсистемами $\alpha = \max \|\alpha_{ij}\|$

Из рис. 3 следует, что число удерживаемых форм колебаний достаточно мало. Так, при $\varepsilon = 0,1, \alpha_{ij \max} 0,3: n = 2,3$.

Следовательно, многомерную систему можно описать с помощью относительно небольшого числа переменных (в данном частотном диапазоне). Математические модели, полученные в результате данных подходов декомпозиции, имеют уровень энергии, близкий к энергии исходной системе с точностью до ε .

5.2. Редукция расчетной модели несущей конструкции РЛС.

Рис.4. Конструкция РЛС (а) и ее три подсистемы. Нижняя подсистема-1 прикреплена к основанию, средняя (б) и верхняя (в) подсистемы вращаются вокруг вертикальной оси z . Подсистема (в) также еще вокруг горизонтальной оси.

Построение редуцированной модели. Конечно – элементная модель имела первоначально 4776 степеней свободы.: подсистема 1 имеет 1476 степеней свободы, подсистема 2- 1446, подсистема

3 -1854 степеней свободы.. Для модели (0-60 Гц) при точности модели $\varepsilon < 0.12$ в соответствии с рис.3, в подсистеме 3 необходимо учесть 10 низших частот и форм колебаний, 5 – в подсистеме 2, подсистема 1 считается абсолютно твердым телом. Число степеней свободы редуцированной модели равно **47** и снизилось, таким образом, на **два** порядка. Собственные частоты редуцированной модели, а также точность расчета приведены в табл.3. Минимальная модель в диапазоне 0-30 Гц, имеет только 24 степени свободы при точности вычисления частот 10 %.

Табл. 3. Собственные частоты подсистем и связанной системы конструкции РЛС. (Гц)

Подсистема 3	2.54	12.5	14.8	25.1	27.8	41.0	42.7	47.3	76.7	94.4
Подсистема 2	56.8	60.3	85.8	99.3	101.8					
Связанная система	2.3	10.43	14.4	24.9	27.6	41.0	42.5	56.4	60.3	
Погрешность %	11.3	10.1	3.0	1.0	0.72	0.73	0.61	0.3	0.33	0.1
$\alpha_{ij \max}$	0.13	0.15	0.114	0.07	0.004	0.01	0.05	0.04	0.001	0.0007

Агрегирование (объединение) высокочастотных элементов.

Этот способ декомпозиции может применяться, если в системе имеются высокочастотные парциальные элементы (подсистемы). При этом в математической модели при этом остаются только элементы, определяющие ее энергию. Для неразветвленных цепных систем такой подход был предложен Е.И. Ривиным [18].

Рис. 5. Цепная система(а), б-взаимное преобразование элементарных высокочастотных подсистем с-; агрегированная система.

Метод основан на взаимном преобразовании высокочастотных элементарных подсистем (выделены серым на рис. 5 а, б) для которых выполнено соотношение:

$$\frac{\omega_{max}^2}{v_a^2} = \varepsilon \ll 1, \quad \frac{\omega_{max}^2}{v_b^2} = \varepsilon \ll 1, \quad (6)$$

Параметры преобразованных подсистем связаны соотношениями, при которых сохраняется передаточная функция:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{k_1 m}{k_1 + k_2}, \quad m_2 = \frac{k_2 m}{k_1 + k_2}, \quad \frac{1}{k_{12}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}. \\ k_1 &= \frac{m_1 + m_2}{m_1} k_{12}, \quad k_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} k_{12}; \quad m = m_1 + m_2, \end{aligned} \quad (7)$$

Преобразованные подсистемы затем вставляются в исходную систему, понижая, таким образом, ее порядок (рис. 5 с).

6.1. Электромеханическая аналогия между преобразованиями парциальных подсистем и преобразованием электрических систем звезды в треугольник. Существует электромеханическая аналогия между преобразованиями парциальных подсистем: преобразование элементарных механических подсистем представляет собой преобразование звезды в контур и наоборот [15]. Построим графы элементарных подсистем рис. 5 б. Эти графы и соответствующие обозначения ветвей приведены на рис. 6а-г.

Рис.6. Элементарные подсистемы (а, б) и их графы (в, г).

$$\begin{aligned} k_1 &= y_1 & k_2 &= y_2 & -m\omega^2 &= y_0 \\ k_{12} &= y_{12} & -m_1\omega^2 &= y_{10} & -m_2\omega^2 &= y_{20} \end{aligned}$$

Используя электромеханическую систему аналогий (табл. 4), видим, что известные в теории электрических систем преобразования звезды в треугольник (8) совпадают с (7) при условии (6)

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} \frac{1}{y_{12}} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_1 y_2} \\ \frac{1}{y_{02}} = \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_2 y_0} \\ \frac{1}{y_{10}} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_1 y_0} \end{cases} & \quad \text{б) } \begin{cases} y_0 = y_{10} + y_{20} + \frac{y_{10} y_{20}}{y_{12}} \\ y_1 = y_{10} + y_{12} + \frac{y_{10} y_{20}}{y_{20}} \\ y_2 = y_{12} + y_{20} + \frac{y_{12} y_{20}}{y_{10}} \end{cases}, \end{aligned} \quad (8)$$

Табл.4. Электромеханическая система аналогий.

Mechanical force F	Electric voltage U
Speed v	Current strength I
Mechanical impedance	Resistance R

6.2. Агрегирование разветвленных систем

Рассмотрим теперь агрегирование произвольных разветвленных систем. Предположим, что в системе имеются элементы, парциальные частоты которых ν_i , достаточно велики в диапазоне $0 - \omega_{max}$

$$\frac{\omega_{max}^2}{\nu_i^2} = \varepsilon \ll 1.$$

После исключения высокочастотных элементов из матрицы $\mathbf{D}$ найдем матрицы жесткости и инерции агрегированной системы с точностью до малых порядка ε^2

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{n-r} &= \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}, \\ \mathbf{M}_{n-r} &= \mathbf{M}_{11} + \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{M}_{22} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \end{aligned}$$

При этом преобразование координат и внешних сил в исключаемых узлах $\mathbf{X}_2$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \end{bmatrix} \mathbf{X}_1, \quad \mathbf{P}^* = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \end{bmatrix}$$

Агрегированная система, имеющая диагональную матрицу инерции, описывается уравнениями с точностью до малых порядка ε

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ред} &= \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \\ \mathbf{M}_{ред} &= \mathbf{M}_{11} + \text{diag}[\mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{M}_{22} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}] \end{aligned}$$

Агрегирование разветвленной системы представлено на рис.7. При условии (6) ее можно на каждом этапе преобразовать в $n - 1$ - массовую.

Рис.7. Агрегирование разветвленных систем с $n - 1$ упругими элементами

Собственные частоты и формы колебаний, а также амплитуды вынужденных колебаний агрегированной системы отличаются от исходной на величину порядка ε

$$\left| \lambda_i - \lambda_i^{ред} \right| < \varepsilon^2 \quad \left| \mathbf{X} - \mathbf{X}^{ред} \right| < \varepsilon$$

На рис.8 представлен процесс агрегирования разветвленной 18-массовой расчетной модели крутильных колебаний системы привода станка..

Частоты 11-массовой системы отличаются от исходной 18-массовой на 3.84%, 6- массовой –на 14%

Рис.8. Последовательное агрегирование расчетной модели привода станка.

6.3. Агрегирование нелинейных систем. Уравнения нелинейных систем с малым параметром при высших производных (сингулярно - возмущенные) имеют вид:

,, $\mu \ll 1$

Рис. 9 Пределный цикл с быстрыми релаксационными колебаниями

Агрегированные модели описывают медленные движения в низкочастотном диапазоне

Колебания систем с геометрической симметрией.

Системы с геометрической симметрией находят широкое применение во многих областях техники: это различного рода фундаменты под машины, роторные диски с расположенными на них лопатками и т.д. Основным методом исследования систем с геометрической симметрией является теория представления групп [19], использующая операторы симметрии.

7.1. Операторы симметрии. Оператор симметрии P_n для систем типа n-угольника имеет вид: Его анализ показывает, что:

- колебания носят волновой характер. Длины волн кратны 1, 2, 3...

- собственные частоты плоских колебаний имеют кратность, равную двум (за исключением низшей и высшей (для нечетных n)). При этом низшая частота соответствует перемещению всех узлов в фазе, высшая - в противофазе.

На рис.10 представлен оператор симметрии P_4 квадратной рамы

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin q\beta & \dots & \dots & \dots & \sin nq\beta \\ \cos q\beta & \dots & \dots & \dots & \cos nq\beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Рис. 10. квадратная рама (а), «симметричные» координаты (б), проективный оператор квадратной рамы(в), матрица системы в симметричных координатах (г).

Из вида P_4 следует существование следующих типов колебаний:

- все одинаково расположенные узлы колеблются в фазе.
 - соседние одинаково расположенные узлы в противофазе.
 - имеются $n/2$ кратных корней (n - число узлов), при этом два соседних одинаково расположенных узла- в фазе, а два другие – в противофазе;
 - поступательные и поворотные колебания рамы как твердого тела не связаны
- Оператор симметрии – некоторый аналог обобщенных форм колебаний (типов колебаний). Он приводит матрицу к блочно-диагональному виду

$$D_4^* = P_4^{-1} D P_4 = \begin{bmatrix} \boxed{A_{11}^*} & 0 & 0 & 0 \\ & \boxed{A_{22}^*} & 0 & 0 \\ & & \boxed{A_{33}^*} & \boxed{A_{34}^*} \\ symm. & & \boxed{A_{34}^*} & \boxed{A_{44}^*} \end{bmatrix} - \lambda M^* = 0$$

$\hat{A}_{ij}$ –матрицы жесткости конечного элемента в симметричных координатах с учетом поворота осей координат.

7.2. Обобщенные формы колебаний (типы колебаний) квадратной рамы Типы колебаний симметричной системы - это инварианты системы для данного типа симметрии. Они не меняются при любых изменениях параметров или конструкции, если не нарушается данный вид симметрии и. сохраняются для систем с распределенными параметрами. Это свойство определяет хорошую прогнозируемость работы конструкции, удобство вычислений и оптимизации.

Первый тип колебаний (все идентичные узлы в фазе) (Подпространство U_1)	...
Второй тип колебаний Все идентичные узлы в противофазе) (Подпространство U_2)	
Третий и четвертый типы колебаний. Два соседних идентичных узла в фазе, два других – в противофазе к ним (Подпространства U_3, U_4),	

Рис.11. Обобщенные типы колебаний квадратной рамы:

1-й тип: все идентичные узлы в фазе

2-й тип: все идентичные узлы в противофазе 3-й и 4-й тип (кратные корни): два соседних узла в фазе, два других – в противофазе к ним.

Колебания квазисимметричных систем. При малом нарушении симметрии система становится квазисимметричной и возникают взаимодействия между типами колебаний

$$D_4 = \begin{bmatrix} A_{11} + \Delta_1 & A_{12} & A_{21} \\ & A_{11} + \Delta_2 & A_{12} \\ & & A_{11} + \Delta_3 & A_{12} \\ \text{symm.} & & & A_{11} + \Delta_4 \end{bmatrix} - \lambda M = 0$$

Колебания нелинейных систем. Формы колебаний симметричных систем, полученные выше, будут оставаться такими же и в нелинейной системе. Их можно рассматривать как прямолинейные нормальные формы нелинейных колебаний. Они обладают рядом замечательных свойств:

- нормальная форма колебаний не зависит от амплитуды колебаний, но частота от нее зависит;

- каждая прямая модальная линия пересекает эквипотенциальные поверхности ортогонально;

- все переменные одновременно проходят через начало координат, а также достигают эквипотенциальной поверхности

Рис.12 Прямолинейные нормальные формы нелинейных колебаний

7.3. Колебания ансамбля турбинных лопаток. Колебания ансамбля m лопаток – гармонические и описываются оператором симметрии P_m . При этом в системе возникают колебания с различным числом узловых диаметров m : $A_i \sin(m\varphi_i + \alpha_i)$

Колебания одной лопатки также гармонические, она имеет n форм упругих колебаний: 1-я форма колебаний имеет один узел в заделке, 2-я форма – двухузловая. Коллективные колебания лопаток представляют собой произведение этих волновых колебаний, и их оператор:

$$P_{mn} = P_m P_n$$

При $m=1$ возникают синфазные колебания лопаток. При нечетном числе лопаток n -я частота - некрatная, и все соседние лопатки колеблются в противофазе.

Рис. 13. 1-я форма колебаний лопатки с t узловыми диаметрами (а), 2-я форма колебаний лопатки с t узловыми диаметрами (б), колебания бандажа (в)

Литература

1. Неймарк Ю.И.. Математическое моделирование как наука и искусство и роль простых моделей в познании мира// Вестник ННГУ, 2010. 420 с.
2. Аргирис Д.Ж. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц. М.: Стройиздат.1968.
3. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа,1980. 408 с.
4. Вибрации в технике. Справочник,т.1-4.М.: Машиностроение.
5. Lyon R.H. Statistical Energy Analysis of dynamical Systems: Theory and applications. MIT Press, 1975. 388p.
6. Ивович В.А. Переходные матрицы в динамике упругих систем. М.: Машиностроение.1969.
7. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. М.: Мир.1971.518с
8. Крон Г. Исследование систем по частям: диакоптика М.: Наука. 1972. 544с.
9. Вульфсон И.И. Агрегирование и декомпозиция разветвленных колебательных цепей цикловых механизмов. // Машиноведение. № 6. 1980. С. 20-27.
10. Гайан Р. Приведение матриц жесткости и массы//Ракетная техника и космонавтика, 1965. № 2. С. 287-291.
11. Kershen C., Golinval I-C, Vakakis A. The Method of Proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems// Nonlinear Dynamics, 41.Iss.1-3. 2005. P.147-169.
12. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470 с.
13. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука,1964. 442 с.
14. Банах Л.Я. Слабые взаимодействия при колебаниях механических систем //ДАН,1994, т.337. № 3. Механика. С336-338.
15. Банах Л.Я. Методы декомпозиции при исследовании колебаний механических систем.: РХД. 2016. 292 с.
16. Ахметханов Р. С., Банах Л. Я.. Анализ вибрационных взаимодействий в роторных системах газотурбинного двигателя// Проблемы машиностроения и надежности
17. Ахметханов Р.С.,Банах Л.Я.,Соколин Е.Г. Построение расчетной модели минимальной размерности с использованием энергетических и спектральных слабых связей //Машиноведение.1987. № 3. С. 87-94.
18. Ривин Е.И. Динамика привода станков. М.: Машиностроение, 1963. 196 с

19. Хаммермеш М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. М.: Мир, 2002. 588с.
20. Banakh L. Ya., Kempner M. L . Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure. Springer, NY, London, 2010. 261 p.
21. Костюк А.Г. Динамика и прочность турбомашин. М.: изд. МЭИ. 2000. 480 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ К РЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМ СТОЛКНОВЕНИЙ ПРИ НАЕЗДЕ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ НА ДОРОЖНЫЕ БАРЬЕРЫ БЕЗОПАСНОСТИ

Демьянушко И.В.

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет
(МАДИ), Москва, demj-ir@mail.ru

Аннотация

В статье рассмотрены вопросы применения численных методов нелинейной динамики, реализованных в программных комплексах метода конечных элементов, в частности, Ls-Dupa, к расчетным исследованиям процессов столкновения транспортных средств (автомобилей, автобусов) с дорожными ограждениями различной конструкции. Показано, что для получения адекватных результатов анализа ударных воздействий ТС на сложные конструкции ограждений необходима экспериментальная верификация моделей, что позволяет получить расчетным путем основные характеристики конструкций. Проведенные с использованием такого подхода симуляционные расчеты фактически заменяют натурные испытания конструкций.

Ключевые слова: Дорожное ограждение, метод конечных элементов, нелинейная динамика, удар, транспортное средство

Дорожное ограждение - устройство, предназначенное для обеспечения движения транспорта с наименьшими рисками столкновений и съездов с дорог, предотвращения переезда через разделительную полосу, столкновения со встречным транспортным средством (ТС), наезда на массивные препятствия и сооружения, расположенные на дороге. Традиционно в нашей стране устанавливались так называемые боковые (по направлению наезда) - «парапетные» - бетонные (рис. 1а) и барьерные – металлические (рис. 1б), препятствующие проникновению ТС на полосу встречного движения или съезду с полотна дороги.

а)

б)

Рис. 1. Виды дорожных ограждений: а) – парапетного типа; б) – барьерного типа

В связи с существенным повышением масс автомобилей, их размерности (в т. ч., диаметра колес, высоты центра масс), интенсивности движения по основным трассам, увеличением скоростей движения, для удержания автомобилей приходится повышать **удерживающую способность** дорожных ограждений, которая является основной характеристикой конструкции ограждения. Удерживающая способность - У

соответствует кинетической энергии - E , кДж, возникающей при ударе ТС об ограждение, которую ограждение должно выдержать без значительного разрушения и при обеспечении целого ряда так называемых потребительских характеристик [1]. Энергия рассчитывается по формуле

$$E = \frac{1}{2}MV^2\cos^2\alpha, \quad (2)$$

где α – угол наезда автомобиля (ТС) на дорожное ограждение, градусы, M – масса автомобиля, т; V – скорость наезда, м/с. Обычно величина U большинства ограждений находится в пределах от 90 до 700 кДж.

На рис. 2 показана схема наезда автомобиля на боковое ограждение, установленное на осевой линии дороги, и указаны некоторые типовые параметры, угол наезда 20 град. (принимается как средняя статистическая величина), величина максимального динамического прогиба ограждения в момент удара, определяемая ограничениями, устанавливаемыми дорожной разметкой.

Рис. 2. Схема наезда ТС на центральное ограждение со встречным движением

Повышение удерживающей способности «классических ограждений» происходит за счет увеличения высоты и материалоемкости. Ограждения становятся все более громоздкими, они занимают значительную часть дорожного пространства по ширине и закрывают для водителей перспективу дороги, нарушают архитектурный облик дорог. В связи с этим началась разработка новых для России конструкций ограждений – боковых тросовых (рис. 3) и, так называемых, «фронтальных ограждений», которые служат для гашения прямого удара и ставятся на развилках дорог и перед боковыми ограждениями.

Рис. 3. Тросовые боковые (а) дорожные ограждения по осевой линии и на обочине дороги и фронтальное ограждение (б) перед опорой моста

Оценка соответствия требованиям (стандартам) основных параметров ограждений производится путем натурных испытаний ограждений, при которых осуществляется наезд на ограждение ТС (легковых автомобилей, автобусов). Испытания проводятся на специальных испытательных площадках. Однако при проектировании конструкций,

сравнительном анализе, небольших изменениях параметров и анализе ситуаций при авариях в настоящее время широко применяются методы компьютерного моделирования, так называемый «симуляционный анализ».

В МАДИ был создана исследовательская группа, в основном, молодых ученых, которые занимаются проектированием систем ограждений, лабораторными испытаниями элементов и развитием расчетного симуляционного анализа. Использование математического моделирования на базе современных компьютерных продуктов и современной вычислительной техники позволило за короткий срок решить вопросы рационального выбора конструкций тросовых ограждений, показать особенности их работы, эффективность удержания автомобилей разных типов, последствия наезда. Процесс удара при наезде ТС на ограждение представляет собой высоконелинейный и быстротекущий процесс, так средняя величина вторжения автомобиля от момента соприкосновения с конструкцией до выхода длится обычно 200-300 миллисекунд. Конструкция ограждения обычно состоит из тонкостенных элементов (балок) и тросов – в тросовых конструкциях, кузовные элементы автомобиля также являются тонкостенными, так что в процессе удара происходят большие взаимные деформации и перемещения, контактные взаимодействия, пластические деформации, в связи с чем, задача наезда является существенно нелинейной. Сложность конструкций обуславливает использование для расчетов метода конечных элементов (МКЭ). В связи с этим для решения задачи моделирования удара при наезде ТС на ограждения наиболее эффективным оказался многоцелевой конечно-элементный комплекс, предназначенный для анализа высоконелинейных и быстротекущих процессов в задачах механики твердого и жидкого тела LS-Dyna DYNA (Livermore Software Technology Corp., Калифорния, США) (лицензионная версия) [2]. Удобство комплекса LS-DYNA для моделирования определяется тем, что он имеет интерфейс практически ко всем препроцессорам КЭ-моделей и большинству КЭ-пакетов (в т. ч., к ANSYS и NASTRAN), CAD. Опыт нашего использования численного анализа различных конструкций ограждений и сравнения с результатами натурных и стендовых экспериментальных исследований позволил сформулировать требования к расчетам, которые сформированы в соответствующих нормативных материалах. Основным принципом при построении моделей КЭ-анализа, является необходимость верификации построенных, как отдельных КЭ-моделей элементов конструкций, так и полноразмерной конструкции системы соударяющихся тел.

Так при выборе КЭ-моделей для тросов, что было необходимо для моделирования тросовых ограждений, были проведены исследования статики и динамики (рис. 4) использующихся в настоящее время стальных тросов, разработаны соответствующие методики этих испытаний [3,4], что позволило выбрать адекватную модель, состоящую из балочно-оболочечных элементов, рассмотренную в [5]. Эти исследования показали, что, что распространение волн деформаций в тросе при ударе является сложным процессом, и поглощение энергии удара происходит в основном за счет трения проволок в тросах и сильно зависит от предварительного натяжения тросов.

Аналогичные верификационные исследования удара по стойке ограждения, установленной в гильзу и в бетонный фундамент, или непосредственно в покрытие дороги, проводились нами как экспериментально, так и методом имитационного расчета [6].

Рис. 4. Испытательная установка для анализа динамических характеристик троса при ударе(а), виртуальная КЭ- модель того же стенда, созданная в комплексе LS-Dyna б)

Рис. 5. Экспериментальное нагружение стойки дорожного ограждения а) и КЭ-моделирование удара по стойке б)

На рис. 5 показано: а) - экспериментальные исследования нагружения стойки и б) - расчетная имитация процесса удара. Исследования показали, что симуляционный КЭ-расчет удара по стойке достаточно точно повторяет результаты эксперимента как качественно, так и количественно, что дало основания выбора соответствующих КЭ-моделей.

Существенными моментами при построении адекватных симуляционных моделей являются вопросы выбора и моделирования поверхностей трения и работы элементов соединений в рассматриваемых конструкциях ограждений.

При симуляционном анализе определяются все характеристики ударного взаимодействия ТС с ограждением. Так индекс тяжести травмирования I , который фактически представляет собой среднюю величину значения инерционных перегрузок в центре масс автомобиля (рис. 6), является обязательной характеристикой ограждения.

Рис. 6. Определение перегрузок в центре масс автомобиля

Индекс тяжести травмирования определяется по формуле

$$I = \left[\left(\frac{N_x}{12} \right)^2 + \left(\frac{N_y}{9} \right)^2 + \left(\frac{N_z}{10} \right)^2 \right]^{0.5} \quad (2)$$

где N_x , N_y , N_z – средние значения инерционных перегрузок по осям ТС в m/s^2 определяется и анализируется при симуляционном расчете. Не менее важными характеристиками, определяемыми расчетным анализом являются размеры так называемого «коридора» - т. е. определение возможности выезда ТС после удара за разрешенные пределы, а также коэффициент сохранности внутренних размеров ТС, определяемый по относительным деформациям кузова ТС в заданных направлениях для каждого вида ТС.

Ниже рассмотрены результаты симуляционного анализа поведения тросового дорожного ограждения при наезде и ударе автобусом. Это типичный анализ, который проводится в соответствии с нормативными требованиями по безопасности.

Рис. 7. Общая модель тросового ограждения для симуляционного анализа и деформируемая КЭ-модель автобуса

На рисунках 8 а) и б) показаны твердотельная модель стойки, установленной в гильзу и грунт и КЭ-модель той же стойки.

Рис.8 Моделирование элементов тросового ограждения, а) – твердотельная модель, б) – КЭ-модель

Рис. 9. Начальный момент удара автобуса о тросовое ограждение – слева – КЭ-модель в Ls-Dyna, справа – натурные испытания, проведенные на испытательной площадке ГНЦ РФ ФГУП «НАМИ», для одного и того же момента времени.

Отслеживание соответствия траектории движения автобуса при натурных испытаниях и в симуляционном расчете (рис. 9), а также сравнение всех параметров (рис. 10 и 11) позволяют установить адекватность расчетной модели.

Рис. 10. Изменение прогиба троса и усилий в тросах в процессе удара

Рис. 11. Ускорения в центре масс автобуса при столкновении с ограждением, $\text{Ир}_{\text{расч.}} = 0,56$, отличие от эксперимента составляет 2,5%.

Принцип работы различных конструкций ограждений естественно различен. Если тросовое ограждение поглощает энергию удара за счет высокого трения и, соответственно, демпфирования в системе, при этом основные усилия в тросах – растягивающие, то барьерное ограждение работает как балочная система, нагружаемая динамическими поперечными усилиями. В связи с этим КЭ-модели барьерного ограждения отличаются от тросовых. Для моделирования балки ограждения, которая является основным несущим элементом, используются оболочечные элементы, вид КЭ

моделей основных конструктивных элементов барьерного ограждения и их соединений показан на рис. 12 а) и б). Для соединения балки с консолью-амортизатором, используется деформируемое разрушаемое болтовое соединение. Соединительные элементы, используемые для соединения консоли-амортизатора со стойками, - жесткие и неразрушимые RBE-элементы (рис. 12б).

Рис.12. Вид соединения элементов барьерного ограждения: (а) болтовое соединение балки с компенсаторами, (б) соединение компенсаторов со стойкой посредством RBE-элементов

Стальная балка ограждения изготавливается из тонколистового металла и КЭ-модель балки моделируется двумерными оболочечными элементами. Компенсаторы, которые наряду с балкой воспринимают ударную нагрузку, также моделируются оболочечными элементами. Стойка ограждения, устанавливаемая (забиваемая) в грунтовой массив также представляет собой балку, различного профиля, в этом примере – швеллер.

Рис. 13. КЭ-модели балки и общая модель стойки в грунтовой массиве

Ниже на рис. 14 а – г показан пример расчетного поведения модели в различные моменты времени при симуляции процесса наезда автобуса на барьерное ограждение при $E=300$ кДж, причем воспроизводится не только первый удар, но также и разворот автобуса и повторный удар об ограждение его задней частью.

Рис. 14 (а и б). Вид сбоку в разные моменты времени, в) и г) – вид сверху

Ускорения в центре масс, позволяющие оценить влияние удара на тяжесть последствий по данным расчета сопоставляются с экспериментальными результатами. На рис. 15 даны расчетные значения, результаты расчета хорошо согласуются с экспериментом.

Рис. 15. Пример графика расчетных ускорений в центре масс при ударе автобуса о барьерное ограждение, *И* расч = 0, 36, *И* эксп. = 0,4

В настоящей статье мы естественно не могли привести все материалы исследований по моделированию процессов наезда и удара ТС различного типа на дорожные ограждения разных конструкций. Однако даже приведенные ограниченные результаты показывают, что применение современных численных методов нелинейного динамического расчета к сложным задачам ударного столкновения ТС с деформируемыми системами ограждений безопасности дает большие возможности для анализа этих процессов. Следует отметить, что затраты на первичное создание адекватных КЭ-моделей, конечно, велики, эти процедуры требуют обязательной верификации моделей путем сравнения с экспериментом, однако впоследствии эти затраты значительно уменьшаются, из-за использования аналогий, особенно в моделях материалов и конструкций. У нас не было здесь, например, возможности показать

чрезвычайно интересные решения по анализу наезда ТС на жесткие бетонные ограждения, где возникает задача моделирования разрушения бетона, представляющая значительный интерес и решение которой мы параллельно проводили с использованием комплекса нелинейного анализа MSC.Software – MARC [7]. Анализ наезда на фронтальные ограждения с учетом разнообразия их конструкций и применяемых материалов также представляется сложной и интересной задачей.

Автор благодарит за большую творческую работу по расчетам и анализу сотрудников кафедры строительной механики МАДИ – И.А. Карпова, Б.Т. Тавшавадзе, студентов – А.В. Родионова, В.М. Лазарева и других.

Литература

1. ГОСТ33129-2014. Дороги автомобильные общего пользования. Ограждения дорожные. Методы контроля. М.:Стандартинформ,-2014. -19 с.
2. LS-DYNA Keyword User's Manual. Version 971 Release 4. Livermore Software Technology Corporation. Livermore, California: 2009.
3. И.В. Демьянушко И.В. Тросовые дорожные ограждения. Российский опыт.//Дорожная держава,-2014.-№52. -С. 22 – 24
4. Карпов, И. А. Разработка конечно-элементных моделей тросовых дорожных ограждений с использованием программного комплекса LS-DYNA / И. А. Карпов // Автомобиль. Дорога. Инфраструктура. - 2016. - № 2.
5. Reid, John, Paulsen, T.J., and Hiser, Nick. Simulation and Bogie Testing of a New Cable Barrier Terminal. //Crashworthiness, Occupant Protection and Biomechanics in Transportation Systems Conference.-2003.- Paper No. IMECE2003-55104.- 2003.
6. И.В. Демьянушко, И.А. Карпов. Моделирование наезда автомобиля на стойку дорожного ограждения // Транспортное строительство.- №10 .-2013.- С.16-20
7. Демьянушко И.В., Стаин В.М., Стаин А.В., Карпов И.А. Расчетное моделирование взаимодействия автобуса с двусторонним бетонным парапетным ограждением // Транспортное строительство.-№3.-2017.-.С.11-16.

ВИБРАЦИОННЫЕ ПОЛЯ В КОНСТРУКЦИЯХ СО МНОЖЕСТВЕННЫМИ РАЗРЫВАМИ

Крупенин В.Л.^{1,2}

ИМАШ РАН, Москва, Россия, krupeinster@gmail.com
Московский Политехнический Университет, Россия, Москва

Аннотация. Представляется группа динамических систем, изучение которых даёт возможность получить модельные, а также практически значимые представления о распространении и генерировании широкополосных вибрационных процессов в машинных конструкциях. Рассмотрены соответствующие модели сильно нелинейных сплошных сред со сложной структурой, относящиеся к классу «несущая среда простой структуры плюс амортизированные виброударные системы». Модели предполагают, в частности, немгновенность соударений контактирующих подсистем. Даются определяющие соотношения и приводятся принципиальные примеры расчета.

Ключевые слова: сильно нелинейная сплошная среда, сложная структура, виброударная система, модель немгновенного удара, импульс взаимодействия, время взаимодействия, уравнение Ламе, уравнение мембраны, стержень, решетчатая конструкция, присоединённое оборудование, ударный осциллятор.

1. Постановка задачи в общем виде. Рассмотрим класс достаточно общих задач, анализ которых поможет понять механизм генерирования и распространения вибрации с представительными спектрами в пространственно протяженных машинных конструкциях. Известно [1, 2], что вибрация распространяется посредством виброводов (волноводов) — упругих сред, в которых волны из-за наличия ограничивающих поверхностей распространяются в достаточно произвольных направлениях. Разработанные в последнее время методы акустической динамики машин, включающие в себя, в частности, методы анализа механизма распространения вибрации и борьбы с нею, основаны на предположении о линейности виброводов [2] или их слабой нелинейности. Однако, появление в виброводе хотя бы одного разрыва [3-5], приводящего к соударениям элементов его конструкции, вызывает существенное изменение динамических качеств системы в целом. То же происходит и в случае, когда соударяются элементы, непосредственно связанные с виброводом. Если подобные («паразитные») ударные пары единичны и от точек ударов до точек наблюдения вибровод линеен, то генерируемая широкополосная вибрация после прохождения через механические фильтры может рассматриваться как некий высокочастотный шум малой интенсивности. При наличии же большего числа ударных пар, каким-либо образом присоединенных к виброводу и непосредственно связанных с процессом передачи вибрации, упругая передающая среда из линейной превращается в сильно нелинейную. В этом случае традиционные методы расчета неприемлемы. Виброударные процессы, возникающие в сильно нелинейных средах, не только содержат высокочастотные составляющие, но и вызывают дополнительные динамические эффекты: появляются области локализации интенсивных ударов в присоединенном к виброводам оборудовании, конструкция «раскачивается» на «нерезонансных» частотах, изменяется характер затухания вибрации при удалении ее источника, радикально изменяются резонансные свойства объектов в результате чего проявляются специфические нелинейные явления и др.

На рис. 1 приведена схема, иллюстрирующая процесс распространения вибрации в двигателе внутреннего сгорания [4]. Несущий вибровод здесь динамически связан с различными агрегатами и механизмами, которые могут генерировать широкополосные виброударные процессы, а также многократно взаимодействовать между собой через

вибровод. Возникающее вследствие этого результирующее вибрационное поле и формирует картину в некоторой точке W , произвольно выбранной, например, на корпусе двигателя.

Поместим в этой точке какой-либо виброприемник, условившись именовать виброприемником амортизированную присоединенную систему, не оказывающую существенного влияния на динамику вибровода «в целом». В точке присоединения виброприемника всю систему можно считать однонаправленной: возбуждение не зависит от его свойств и определяется только структурой вибровода. Таковыми оказываются приборы автоматики, управления и тому подобные объекты [4]. Внешнее воздействие, возбуждающее в виброприемнике колебания, может резко отличаться от синусоидального и, кроме того, вызывать в нем существенно нелинейные резонансные явления. Подобная ситуация складывается, в сущности, в каждой достаточно сложной машине. Это обстоятельство предъявляет весьма жесткие требования, например, к условиям виброиспытаний, а также расчета и конструирования машин и машинных агрегатов.

Рис.1

Учитывая вышеизложенное, необходимо рассмотреть процесс передачи вибрации с учетом одновременного действия в динамических системах большого числа широкополосных генерирующих факторов. Для этого целесообразно постулировать некоторые ранее не учитываемые реологические свойства вибропередающих сред. Таким образом, наша задача заключается в описании свойств сильно нелинейных («виброударных») виброводов.

Следует оговорить, что рассматриваемая ниже задача — лишь некоторое «начальное», модельное приближение к реальной ситуации, которая на деле оказывается намного сложнее. Наши построения, основанные, прежде всего на том, что со спектральной точки зрения все широкополосные источники вибрации в известной мере «эквивалентны», дают качественное представление о механизме формирования физических свойств сильно нелинейных виброводов — свойств, определяемых взаимодействием между несущей средой и присоединенными ударными парами.

В работе [1] рассмотрены, в частности, линейные (или близкие к таковым) специфические модели сплошных сред сложной структуры. Одной из особенностей этих моделей, оказывается наличие двух своеобразных «частей среды» - «несущей» и «присоединенной». Соответственно уравнения динамики таких сред состоят из двух групп уравнений. Первая - описывает несущую часть, вторая - присоединенную. Как и всякая модель мультиполярной механики здесь существенной ревизии

подвергается понятие точки, состояние которой может определяться произвольным числом кинематических параметров. Указанный подход, наряду с другими, получил, принципиальное развитие в диссертации [5] и далее.

В работах [6 – 10] рассмотрены сильно нелинейные модели подобных сред, в которых для учета множественных соударений в компонентах присоединенного оборудования использовались распределенные ударные элементы. Такие модели позволяют дать описание процесса формирования, а также и распространения вибрационных полей в сложных составных конструкциях. Кроме того, указанные модели дают возможность получить ряд расчетных формул и значимых определяющих соотношений. Необходимость обращения к ним диктуется, прежде всего, тем обстоятельством, что в машинных конструкциях именно множественные систематические соударения элементов подсистем часто "ответственны" за вид формируемых глобальных виброполей и за виброактивность конструкций в целом. (См. также диссертацию [11]).

Возвращаясь к упомянутым двум группам уравнений движения, во-первых, как обычно, постулируем существование упругой (упруго-вязкой) несущей среды. То есть модель необходимо содержит уравнения движения несущих частей (примеры: классическое уравнение Ламе, уравнение продольных или поперечных колебаний стержней, и т. д.), к которым добавляются граничные условия.

Во-вторых, в предположении, что соударения как бы "размазаны" по некоторой пространственной области, к уравнениям несущих частей добавляются уравнения движения присоединенного оборудования. Механизм связности, обеих частей определяет глобальную структуру генерируемого вибрационного поля.

2. Формализация постановки задачи. Итак, в достаточно представительном случае постулируется существование некоторой упруго-диссипативной несущей среды, описываемой вектором перемещений $u(x, t)$ ($u, x \in \mathbf{R}^3$, $x \in \Xi \subseteq \mathbf{R}^3$, $t \in \mathbf{R}$), подчиняющейся классическому уравнению Ламе с диссипативным членом (ср.[1, 6])

$$\rho u_{tt} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \mu \Delta u + D[u] + F, \quad (1)$$

где ρ - плотность среды, λ, μ - параметры Ламе, характеризующие ее упругие свойства, Ξ - область изменения координаты; Δ - лапласиан; $D[...]$ - оператор, отвечающий диссипативным потерям. Пусть внешние (объемные и поверхностные) силы $F = F_1 + F_0$, где F_1 - заданный вектор, а F_0 - воздействие присоединенных систем, содержащих ударные пары.

Отметим, что, вообще говоря, модель несущей среды может сама по себе иметь сложную структуру, так что уравнение (1) может быть заменено более общим. К уравнению (1) должны быть поставлены граничные условия.

Пусть присоединённое оборудование – упруго амортизировано:

$$F_0(x, t) = -c_1(x)[u(x, t) - y_1^{(I)}(x, t)] - c_2(x)[u(x, t) - y_1^{(II)}(x, t)] \quad (2)$$

где предполагается, что в каждой точке среды подвешена взаимодействующая (ударная) пара, состоящая из двух контактирующих линейных стационарных склерономных подсистем $A^{(I)}(x)$ и $A^{(II)}(x)$, каждая из которых описывается конечным набором функций $y_j^{(I,II)}(x, t); j=1, 2, \dots, N$.

Предположение об одинаковом числе степеней свободы обеих подсистем, очевидно, сделано для удобства: лишние степени свободы могут быть фиктивными. Точки подвеса были обозначены в (2) $y_1^{(I,II)}(x, t)$; точки контакта будем обозначать $y_n^{(I,II)}(x, t), n \leq N$. Предположим, что подсистемы $A^{(I,II)}(x)$ определяются некоторыми семействами распределенных операторов динамической податливости: $L_{qk}^{(I,II)}(x; p) = O(p^{-2}), p \rightarrow \infty$; индексы q и k изменяются от 1 до N ; $p = \partial/\partial t$, $x, z \in \Xi \subseteq \mathbf{R}^3$.

Здесь и ниже всегда будем предполагать, что взаимодействие в каждом элементе – прямое, центральное и одномерное: пусть $y^0 = y_n^{(II)} - y_n^{(I)}$ – относительное сближение точек контакта; координата y^0 изменяется вдоль некоторой оси. Сила взаимодействия $\Phi_1(y^0, y_i^0) = \lambda \Phi(y^0) + \Phi_2(y^0, y_i^0)$; $\lambda \gg 1$ – большой параметр [10]. Здесь первый член в правой части определяет упругую составляющую силы взаимодействия, а второй – диссипативную. Функция Φ_1 и определяет гипотезу, вообще говоря, немгновенного (неньютоновского) удара; она может и непосредственно зависеть от x , так как характер взаимодействия может меняться от точки к точке. Предположим, что функция Φ является пороговой функцией [10]:

$$\Phi(y^0) \in \{\Phi\} \triangleq \{\Phi(y^0); \Phi(y^0) = \psi(y^0 - \Delta) \eta(y^0 - \Delta); \Delta \geq 0; \psi(y^0) \equiv 0; y^0 \geq 0\},$$

где $\psi(u)$ – непрерывно дифференцируема на всей числовой оси, монотонно возрастает и является выпуклой при $u \geq 0$ (рис. 2); $\eta(u)$ – единичная функция. В случае отказа от концепции ньютоновского взаимодействия, диссипативная составляющая Φ_2 также описывается некоторой пороговой функцией [9, 10, 12].

Для точек подвеса и взаимодействия имеем операторные уравнения:

$$y_1^{(I,II)} = L_{11}^{(I,II)}(p) c_{1,2}(x) u \pm L_{n1}^{(I,II)}(p) \Phi_1(y^0, y_i^0) + f_1^{(I,II)}, \quad (3)$$

$$y_1^{(I,II)} = L_{nn}^{(I,II)}(p) c_{1,2}(x) u \pm L_{nn}^{(I,II)}(p) \Phi_1(y^0, y_i^0) + f_n^{(I,II)}, \quad (4)$$

причем здесь для для системы $A^{(I)}$ в (3) и (4) выбираем знак "плюс", для $A^{(II)}$ – "минус". В эти же уравнения могут быть внесены какие-либо функции $f^{(I,II)}_{1,n}$, описывающие дополнительные внешние воздействия.

Рис.2

Механизмы связи, несущей и присоединенной частей определяют структуру глобального виброполя. Этот подход жертвует информацией об особенностях конкретных элементов системы, а также об эффектах, проявление которых возможно только при учете дискретности модели.

3. Упрощающие предположения. Предложенная выше модель сложна для анализа и нуждается в упрощениях. Приведем примеры более реалистичных моделей такого рода.

3.1 2D–структура несущей части. Дискретная модель. Рассмотрим струнную решетку [13, 14], составленную из двух взаимно перпендикулярных семейств упругих линейных струн, зашпеленных на концах и имеющих длины L_1 и L_2 (рис. 3). Каждая струна нумеруется при помощи индексов $k = 0, 1, N_1$ и $q = 0, 1, \dots, N_2$. В узлах – точечные абсолютно твердые тела с массами m_{kq} .

Предполагается, что ячейки решетки – одинаковые и прямоугольные, но длины и ширины их сторон, вообще говоря, не равны между собой и сама решетка – анизотропная.

Струны - безынерционные. Их крепления в узлах считаются абсолютно жесткими, а натяжения - настолько большими, что возможными изменениями при линейных колебаниях можно пренебречь.

Пусть каждая «горизонтальная сторона» ячеек имеет длину ΔL_1 ; «вертикальная» - ΔL_2 ; «горизонтальные струны» имеют натяжение T_1 , а «вертикальные» - T_2 . Таким образом, динамика решетчатой конструкции может быть описана при посредстве функций смещения узлов решетки $u_{kq}(t)$; $k=0, 1, \dots, N_1$; $q=0, 1, \dots, N_2$. Каждая из функций $u_{kq}(t)$ изменяется вдоль некоторой оси, перпендикулярной плоскости статического равновесия решетки.

Считаем все действующие неконсервативные силы малыми. Обозначим их $\varepsilon g_{kq}(t, u_{kq}, \dot{u}_{kq})$, ε - малый параметр. Так как каждая частица лежит на двух струнах, то получаем N уравнений движения ($N = (N_1 - 1)(N_2 - 1)$):

$$m_{kq} \ddot{u}_{kq} + c_1(2u_{kq} - u_{(k-1,q)} - u_{(k+1,q)}) + c_2(2u_{kq} - u_{(k,q-1)} - u_{(k,q+1)}) = \varepsilon g_{kq}(t, u_{kq}, \dot{u}_{kq}) + F_{kq}. \quad (5)$$

Здесь обозначено: $c_{1,2} = T_{1,2}/\Delta L_{1,2}$ - коэффициенты упругости.

Рис.3

Граничные условия заземления можно записать как $u_{kq}=0$, при $k=0; N_1$; $q=0; N_2$. Уравнения (5) представляют собой первую группу уравнений; в дискретной модели они описывают несущую часть среды со сложной структурой. Пусть в каждом узловом теле решетки подвешен так называемый ударный осциллятор [12-14] (рис. 3). Пусть далее: w_{kq} - координата тела, образующего осциллятор; M_{kq} - его масса; Ω_{kq} - собственная частота; Δ_{kq} - значения установочных зазоров (натягов); $k=0, 1, \dots, N_1$; $q=0, 1, \dots, N_2$. Таким образом, уравнения движения присоединенного оборудования будут такими:

$$M_{kq} \ddot{w}_{kq} + M_{kq} \Omega_{kq}^2 (w_{kq} - u_{kq}) + \Phi_{1kq}(w_{kq}, \dot{w}_{kq}) = \varepsilon f_{kq}(t, w_{kq}, \dot{w}_{kq}), \quad (6)$$

где $f_{kq}(t, w_{kq}, \dot{w}_{kq})$ – дополнительные силы, действующие на осциллятор.

Отсюда видно, что в уравнении (5) силы $F_{kq} = M_{kq} \Omega_{kq}^2 (w_{kq} - u_{kq})$.

Силы взаимодействия определяются пороговыми функциями (см. п.2 и [14]): $\Phi_{1kq}(w_{kq}, \dot{w}_{kq}) = \lambda \Phi_{kq}(w_{kq}) + \Phi_{2kq}(w_{kq}, \dot{w}_{kq})$, $\lambda \gg 1$. Полагаем, что при $\lambda \rightarrow \infty$ рассматриваемые гипотезы взаимодействия переходят в гипотезу Ньютона: удар – мгновенный, сила удара даётся сингулярной обобщенной функцией. Строго говоря, это положение должно постулироваться, так как построить его корректное доказательство удаётся только в предположении упругости взаимодействия [12].

Необходимо найти перемещения $\{u_{kq}, w_{kq}\}$ при заданных силах $\{g_{kq}, f_{kq}\}$.

3.2. 2D – структура несущей части. Континуальная модель. В системе (5), (6) перейдем к длинным волнам, считая, для простоты что при всех k и q : $m_{kq} = m$. Пусть число струн в обоих семействах достаточно велико, а величины $\Delta L_{1,2}$ – достаточно малы. Пусть в то же время, величины $\gamma = m / (\Delta L_1 \Delta L_2)$ – поверхностная плотность, а также $\theta_x = T_1 / \Delta L_1$, $\theta_y = T_2 / \Delta L_2$ – погонные натяжения – имеют порядки $O(1)$. Систему уравнений движения (1) можно континуализировать, рассматривая её как конечно-разностный аналог непрерывной системы с распределенными параметрами. При этом рассмотрим достаточно гладкую функцию $u(x, y, t)$, совпадающую (в данном случае) в узлах решетки с исходными функциями $u_{kq}(t)$.

Выражения $(2u_{kq} - u_{(k-1,q)} - u_{(k+1,q)})$ и $(2u_{kq} - u_{(k,q-1)} - u_{(k,q+1)})$ заменим их разностными аналогами:

$$2u_{kq} - u_{(k-1,q)} - u_{(k+1,q)} = 2u(x, y, t) - u(x - \Delta L_1, y, t) - u(x + \Delta L_1, y, t);$$

$$2u_{kq} - u_{(k,q-1)} - u_{(k,q+1)} = 2u(x, y, t) - u(x, y - \Delta L_2, t) - u(x, y + \Delta L_2, t)$$

Тогда уравнение (5) можно представить, как

$$\gamma \Delta L_1 \Delta L_2 u_{tt} = \Delta L_1 \Delta L_2 (\theta_x u_{xx} + \theta_y u_{yy}) + (\Delta L_1)^3 (\Delta L_2) (\theta_x / 12) u_{xxxx} + (\Delta L_1) (\Delta L_2)^3 (\theta_y / 12) u_{yyyy} + \dots$$

Здесь вместо разностей, определяющих (1) выписаны отвечающие им ряды по степеням ΔL_1 и ΔL_2 . В данном случае с точностью до малых порядка $O[(\Delta L_{1,2})^2]$, в исходном приближении приходим к уравнению анизотропной мембраны: $\gamma u_{tt} - \theta_x u_{xx} - \theta_y u_{yy} + \dots = \varepsilon g(t, u, u_t, \dots) + O[(\Delta L_{1,2})^2]$.

Если рассмотреть наиболее популярную модель изотропной мембраны, когда натяжения равны: $\theta_x = \theta_y = \theta$ при $\varepsilon = 0$, приходим к хорошо известному и досконально изученному уравнению классической натянутой по контуру мембраны, прогиб которой $u = u(t, x, y)$: $u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy})$, $c^2 = \theta \gamma^{-1}$.

Граничные условия, взятые выше для решетки, приводят к защемленной по всем краям мембране. Если длины её сторон l_1 и l_2 , то условия защемления записываются так: $u(0, y, t) = u(l_1, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, l_2, t) = 0$.

Таким образом, учитывая представления для фигурирующей в (1) силы F получим следующее уравнение несущей части среды:

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}) + M(x, y) \Omega^2(x, y) (w - u) + \varepsilon g(t, u, \dot{u}), \quad (7)$$

Здесь силы и другие физические факторы заменены их распределениями по площади. Уравнения (6) трансформируются так:

$$M(x,y)w_{tt}(t,x,y)+M(x,y)\Omega^2(x,y)[w(t,x,y)-u(t,x,y)]+\Phi_1(w,w_t)=\varepsilon_1 f(t,w,w_t), \quad (8)$$

Уравнения (7), (8) дают простейшую модель *двумерной* сильно нелинейной среды сложной структуры. Обобщение может быть выполнено при рассмотрении более сложных моделей несущих сред (пластины, балочные и стержневые решетки и т. д.) и, естественно, за счет более общих моделей присоединенного оборудования (п.2). В работе [15] при рассмотрении дискретной модели, подверженной случайному широкополосному возбуждению изучалась решетка с присоединенными упругими цепочками точечных тел, снабженных одно- и двухсторонними ограничителями хода. В случае ньютоновского взаимодействия анализ данной модели частично проводился в работе [10], см. также ниже п. 7.

3.3. Оснащенный сильно нелинейный стержень. Одномерный аналог модели (1) – (4) изучен наиболее подробно [3, 4, 7, 8]. Вместо уравнения (1) имеем для стержня длины l :

$$\rho u_{tt} - Eu_{xx} + c_1(u - y_n^{(I)}) + c_1(u - y_n^{(II)}) - D[u] + F = 0, \quad x \in [0, l], \quad (9)$$

граничные условия: $u(0, t) = 0$; $Eu_x(l, t) = P \cos \omega t$ $[u(l, t) = \mu \cos \omega t]$. Смысл обозначений очевиден. Соотношения (2) – (4) сохраняют свой вид.

На рис. 4. показана континуальная модель сильно нелинейного вибровода с упруго амортизированным оборудованием. Здесь показана несущая часть системы и символически - присоединенное оборудование (взаимодействующие в буферах подсистемы $A^{(I)}(x)$ и $A^{(II)}(x)$).

Рис. 4

3.4. Стержень с внутренними разрывами. На рис. 5 приведена дискретная модель стержня с внутренними разрывами. При большой концентрации упруго связанных систем, снова

можно перейти к длинноволновому приближению. Постулируем существование одномерной среды с определяющими уравнениями

$$\rho u_{tt} - E u_{xx} - \Phi_1(y^0, y_t^0) = 0, \quad (10)$$

$$m(y_{tt}^0 + u_{tt}) + \Phi_1(y^0, y_t^0) = 0. \quad (11)$$

где ρ и E – погонная масса и модуль Юнга стержня, по длине которого как бы "размазывается" взаимодействующее оборудование; m – погонная масса распределенных ударных элементов; $y^0(x, t)$ – распределение их относительного смещения. Граничные условия, приведены после уравнения (9).

Рис. 5.

Отметим, что использование этой модели ограничено, из-за того, что здесь оказывается возможным выйти за рамки непрерывных решений и в определенных частотных диапазонах модель должна быть уточнена.

3.5. Замечания. Виброполю в рассматриваемых объектах определяются двумя основными механизмами.

Присоединенное оборудование действует на несущую часть подобно ударным гасителям вибрации. Исключение составляют узкие частотные зоны, вблизи собственных частот линейных колебаний, где это действие подобно линейным гасителям. Несущая часть осуществляет фильтрацию проходящей вибрации. Именно эти механизмы, проявляясь по-разному в разных точках несущих конструкций и могут порождать специфические динамические эффекты.

Заканчивая краткий обзор моделей типа «линейная несущая среда плюс взаимодействующее присоединенное оборудование», заметим, что при записи необходимых уравнений движения могут использоваться разные предположения о структуре взаимодействующих элементов. Контакттировать могут две подсистемы или присоединенное оборудование может взаимодействовать с неподвижными ограничителями или речь может идти о двухсторонних элементах и т. д.

4. Сингуляризация. Предположим далее, что взаимодействие – упругое: $\Phi_1(y^0,$

$y_t^0) = \lambda \Phi(y^0)$ (п. 2). Если принята гипотеза о мгновенном взаимодействии ($\lambda \rightarrow \infty$), то сила удара выражается сингулярными обобщенными функциями. Для анализа процессов и систем, в которых важно учесть конечную продолжительность взаимодействия был предложен метод сингуляризации [5, 12, 14], в соответствии с которым, приняв во внимание переход к длинноволновому приближению, запишем при осуществлении одиночного взаимодействия

$$\lambda \Phi[y^0(x, t)] \approx J_\lambda(x) \delta[t - \varphi_\lambda(x) - \tau_\lambda(x)], \quad (12)$$

где $J_\lambda(x)$ – плотность импульса взаимодействия; $\varphi_\lambda(x)$ – распределение моментов начала взаимодействия; $\tau_\lambda(x) = 1/2 t_\lambda(x)$; $t_\lambda(x)$ – распределение времен взаимодействия; $\delta(x)$ – δ -функция Дирака; $x \in \Xi_1$ – область взаимодействия.

Обозначим $\Delta(x)$ – распределение координат начала (и, соответственно, окончания) взаимодействия:

$$y^0[x, \varphi_\lambda(x)] = y^0[x, \varphi_\lambda(x) + t_\lambda(x)] = \Delta(x). \quad (13)$$

Плотность импульса и полный импульс взаимодействия:

$$J_i(x) = \int_0^{t_i(x)} |\lambda \Phi[y^0(x, t)] dt|; \quad I_\lambda = \int_{\Xi_1} J_\lambda(x) dx. \quad (14)$$

Функции $J_\lambda(x)$ и $\varphi_\lambda(x)$ определяются при конкретизации задачи и, в конечном итоге, определяют вид искомым решений. При рассмотрении Т-периодических процессов, сила (12) выражаются через Т-периодическую δ -функцию (гребенку Дираку) или двойную гребенку Дирака в случае симметричного двухстороннего ограничителя:

$$\delta^T(t) = T^{-1} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \exp(i\sigma\omega t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta(t-KT), \quad \omega = 2\pi/T^{-1},$$

$$\delta^{T/2}(t) = 1/2 T^{-1} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \exp[i(2\sigma+1)\omega t] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} [\delta(t-KT) - \delta(t-T/2-KT)], \quad \omega = 2\pi/T^{-1}.$$

5. Представления полей перемещений. Множество искомым полей перемещений структурных элементов среды $U = \{u(x, t); y_0(x, t); y_1(x, t); \dots; y_N(x, t)\}$, причем первый элемент здесь описывает несущую часть среды, а остальные – присоединённые части. В рассматриваемых моделях нелинейные силы определяются только присутствием подсистем, взаимодействующих между собой или с фиксированными ограничителями. Для моделей рассматриваемого вида можно указать структуру элементов множества U . Поле перемещений $u(x, t)$ складывается как результат действия внешних (массовых и поверхностных) сил – обозначим его $u_l(x, t)$ - и результата действия сил взаимодействия в присоединенном оборудовании, то есть

$$u(x, t) = u_l(x, t) + \int_{\Xi_1}^t \int_{-\infty}^t V(x, z, t-s) \Phi_1[y^0(x, s), y_i^0(x, s)] ds dz, \quad (15)$$

где $V(x, z, t-s)$ - соответствующая функция Грина, определяемая структурами линейных систем – несущей и присоединенной частями среды. Для взаимодействующих элементов среды (присоединенные части) найдем представления типа:

$$y_q(x, t) = y_{q1}(x, t) - \int_{-\infty}^t H_q(t-s) \Phi_1[y^0(x, s), y_i^0(x, s)] + \\ + \int_{\Xi_1}^t \int_{-\infty}^t Y_q(x, z, t-s) \Phi_1[y^0(x, s), y_i^0(x, s)] ds dz, \quad (16)$$

где $y_q(x, t)$ – перемещение структурного элемента одной из взаимодействующих подсистем; $H_q(t-s)$ - функция Грина в точке взаимодействия; второй член в правой части (16) – суть перемещение, возникающее как непосредственный результат взаимодействия в данной точке; в то время, как третий член – перемещение, возникающие вследствие взаимодействия, но появляющееся в результате вызванного им движения других структурных элементов среды; $Y_q(x, z, t-s)$ - соответствующая функция Грина. Теперь легко записать соотношения для относительной координаты и других элементов среды.

При анализе периодических виброударных процессов в уравнениях (15), (16) целесообразно перейти к периодическим функциям Грина (ПФГ). Примеры анализа подобных моделей в случае принятия аналогов гипотезы Ньютона даны в работах [3, 5-8]. При усложнении моделей несущих частей сред, например, за счет учета микроструктуры, соответственно изменятся (усложнятся) представления перемещений структурных элементов.

В книге [1] рассматривалась модель среды, в которой присоединенной оборудование моделировалось континуальным набором изотропных осцилляторов. Подобные построения частично использовались и для приведенных здесь моделей, но из-за сильной нелинейности присоединенной части, для описания частотных свойств системы оказывается достаточным снабдить эту часть конечным числом степеней свободы

6. Пример.

6.1. В качестве примера рассмотрим более подробно задачу о виброударе с внутренними разрывами – рис. 4. Пусть погонная масса ударных элементов: $m(x)=1$. Уравнения (10), (11), перепишем в виде:

$$\rho u_{tt} - Eu_{xx} + \lambda \Phi(y^0) = 0, \quad (17)$$

$$y^0_{,tt} + u_{tt} + \lambda \Phi(y^0) = 0, \quad (18)$$

где упругая сила взаимодействия принадлежит классу симметричных пороговых функций, который строится при помощи класса $\{\Phi\}_\Delta$, описанного в п.2, как $\Phi(y^0) = \Phi_1(y^0) - \Phi_1(-y^0)$; $\Phi_1(y^0) \in \{\Phi\}_\Delta$. Будем предполагать, что нагружение в зонах контакта – линейное:

$$\lambda \Phi[y^0(x, t)] = \lambda \{ [y^0(x, t) - \Delta(x)] \eta[y^0(x, t) - \Delta(x)] - [y^0(x, t) + \Delta(x)] \eta[y^0(x, t) + \Delta(x)] \}.$$

Пусть $\Delta(x) = \text{const}$. Установим: $\varepsilon = O(\lambda^{-1/2})$. Граничные условия:

$$u(0, t) = 0, \quad Eu_x(l, t) = \varepsilon P_1 \cos \alpha x, \quad P_1 = 0, \quad (19)$$

что отвечает случаю закрепления левого конца стержня и приложения к его правому концу T -периодического силового воздействия; $T = 2\pi\omega^{-1}$.

В соответствии с (15), (16) и [10] запишем интегральные уравнения симметричных T -периодических колебаний:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + \int_0^{lT/2} \chi(x, z, t-s) \lambda \Phi[y^0(z, s)] dz ds, \quad (20)$$

$$y^0(x, t) = -u(x, t) - \int_0^{T/2} \chi_1(t-s) \lambda \Phi[y^0(x, s)] ds, \quad (21)$$

где χ и χ_1 – периодические функции Грина (ПФГ). Поле перемещений несущего структурного элемента в пренебрежении соударениями:

$$u_1(x, t) = [P_1 \sin \omega_0 x \cos \omega t] [E \omega_0 \cos \omega_0 l]^{-1}, \quad (22)$$

причем в соответствии с [7], в данном случае $\omega_0 = \alpha \omega^{-1}$, где $a = \sqrt{E\rho^{-1}}$; ПФГ $\chi_1(t)$ дается рядом [12]:

$$\chi_1(t) = T^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} -(2k+1)^{-2} \omega^{-2} \exp[i(2k+1)\omega t].$$

Внутри промежутка $0 < t \leq T/2$ этот ряд можно записать в конечной форме: $\chi_1(t) = [\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\pi\omega^{-1}]$ [9]. Вне интервала этого промежутка [данное представление следует продолжить по периодичности, исходя из условий симметрии. В результате получаем пилообразную периодическую функцию («треугольный синус»).

ПФГ $\chi(x, z, t)$ соответствует линейному волновому оператору и типу рассматриваемых граничных условий. Пользуясь [12], найдем:

$$\chi(x, z, t) = (IT\rho)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_n \cos \frac{1}{4}\Omega_n T)^{-1} \sin(h_n x) \sin(h_n z) \cos[\Omega_n(t - \frac{1}{4}T)], \quad (23)$$

$$h_n = [(2l)^{-1}(2n+1)\pi]; \Omega_n = \frac{1}{2}a(2n+1)\pi l^{-1}; a = \sqrt{E/\rho}; 0, < t \leq \frac{1}{2}T.$$

Показывается [3, 4], что для ПФГ (23) имеет место ещё одно представление:

$$\chi(x, z, t) = 4(Ta^2\rho)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} G_{2k+1}(x, z) \cos[(2k+1)\omega t], \quad (24)$$

причем функции

$$G_k(x, z) = [-k\omega_0 \cos k\omega_0]^{-1} \cos k\omega_0(z-l) \sin k\omega_0 x, 0 \leq x \leq l; \quad (25)$$

$$G_k(x, z) = [-k\omega_0 \cos k\omega_0]^{-1} \cos k\omega_0(x-l) \sin k\omega_0 z, z \leq x \leq l$$

определяются функциями Грина задачи Штурма - Лиувилля, в данном случае задачи с левым закрепленным и правым свободным концом [16].

В соответствии с (12), для симметричных двухударных режимов движения ([7, 8]) запишем плотность силы ударного взаимодействия как

$$\Phi(y^0) = J_\lambda(x) \delta^{T/2}(t) [t - \varphi_\lambda(x) - \tau_\lambda(x)], \quad (26)$$

С учетом приведенных выше соотношений, внося (20) в (21), получаем двухфункциональное представление [17] вида:

$$y^0(x, t) = -u_1(x, t) - J_\lambda(x) \chi_1[t - \varphi_\lambda(x) - \tau_\lambda(x)] - \int_0^l J_\lambda(z) \chi[x, z, t - \varphi_\lambda(x) - \tau_\lambda(x)] dz. \quad (27)$$

Двухфункциональные представления типа (27), определяют при сделанных предположениях искомые перемещения. Для принятой гипотезы взаимодействия можно положить при больших импульсах [12]: $\tau_\lambda(x) = \tau_\lambda = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} = \text{const}(x)$. Воспользуемся (13) и (22). Имеем:

$$J(x) = J_{\lambda 0} - \chi_1^{-1} \int_0^l J(z) \chi[x, z, \varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(z)] dz - \varepsilon P_1 [E \omega_0 \chi_1 \cos \omega_0 l]^{-1} \sin \omega_0 x \cos[\omega_0 \varphi_\lambda(x)] \quad (28)$$

Причем: $\omega_0 = \omega a^{-1}$; $\chi_1 = \chi_1(\tau_\lambda)$; $J_{\lambda 0} = \Delta/\chi_1(\tau_\lambda)$ - плотность импульса взаимодействия, для абсолютно жесткой несущей части среды; $\chi_1(\tau_\lambda) = \frac{1}{2}\tau_\lambda - \frac{1}{4}\pi\omega^{-1}$. Второе условие, определяющее параметры движения, дает (14) или другие эквивалентные соотношения. Из формулы (20) имеем:

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \int_0^l J_{\lambda}(z) \chi[x, z, t - \varphi_{\lambda}(z) - \tau_{\lambda}] dz, \quad (29)$$

6.2. Рассмотрим прохождение вибрации вблизи первой резонансной частоты. В работах [6-8] показано, что в этом случае в подобных системах реализуются синфазные формы нелинейных колебаний. Пусть линейная плотность оборудования существенно меньше погонной массы несущего стержня: $\rho \gg 1$.

В рассматриваемом гамильтоновом случае и в данной частотной зоне значения фазы могут быть только следующими: $\omega_0 \varphi_{\lambda} = 0, \pi$. При действии реальной диссипации устойчивому режиму в порождающей системе ($\rho \rightarrow \infty$) может отвечать только большее значение импульса удара. Поэтому при $\omega_0 < \pi/2l$ выбираем $\omega_0 \varphi_{\lambda} = 0$; в тоже время при $\pi/2l < \omega_0 < \pi/l$ выбираем $\omega_0 \varphi_{\lambda} = \pi$.

Следует специально подчеркнуть, что при анализе ситуации в зарезонансных областях $\omega_0 > \pi/l$, необходимо введение различного рода антифазных форм нелинейных колебаний [8]. Для вибровыводов с внутренними разрывами описание таких форм требует специальных рассмотрений, выводящих за рамки данной статьи, т.к. требуется уточнение модели.

Ограничиваясь важнейшим случаем синхронизации ударников вблизи первой резонансной зоны, заметим, что если $\varphi = \text{const}$, то уравнение (29) - суть уравнение Фредгольма. Считая ρ^{-1} - малым, вне малой окрестности значения $\omega_0 > 0,5\pi/l$, при помощи метода последовательных приближений найдем первое приближение для плотности импульса $J_{\lambda}(x)$ полагая, что в нулевом (порождающем) приближении $J_{\lambda 0} \approx J_0 = -\Delta \chi_{\lambda}(n)$. Имеем после вычислений с учетом (23) - (28):

$$J_{\lambda}(x) = J_{\lambda 0} \left(1 - \frac{8}{\pi \rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)\omega_0(x-l)]}{(2k+1)^2 \{1 - \cos[(2k+1)\omega_0 l]\}} \right) + 4\varepsilon \frac{P_1 a}{\pi E} \left| \frac{\sin \omega_0 x}{\cos \omega_0 l} \right|, \quad \omega_0 \neq \pi/2l; \omega_0 < \pi/l$$

Из формулы (15) с точностью до малых высшего порядка найдем:

$$u(x, t) = 4\varepsilon \frac{P_1 a}{\pi E} \frac{\sin \omega_0 x}{\cos \omega_0 l} \cos \omega t + \frac{8\Delta}{\pi^2 \rho} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{\cos[(2k+1)\omega_0(x-l)]}{(2k+1)^2 \cos[(2k+1)\omega_0 l]} - 1 \right\} \cos[(2k+1)\omega(t - \varphi_{\lambda})] + \dots,$$

откуда можно получить, что при $\omega_0 < \pi/2l; \varphi_{\lambda} = 0$ вибровывод прозрачен для основного тона и конструкция активно колеблется. Если $\omega_0 > \pi/2l; \varphi_{\lambda} = \pi$, то вибровывод заперт и основной тон вибрации практически не проходит [3, 8]. В обоих случаях в конструкции генерируется представительный набор высших гармонических составляющих.

7. Второй пример. Рассмотрим теперь задачу, поставленные в п.п. 3.1, 3.2. в предположении, что $\lambda \rightarrow \infty$ и удар моделируется по Ньютону.

7.1. Для дискретных моделей (5), (6). Силы удара $\Phi_{kq}(w_{kq}, \dot{w}_{kq})$, определяемые цепочкой выражений, выполняемой при всех k и q :

$$w_{kq}(t_{kq0}) = \Delta_{kq}, \quad \dot{w}_{kq}(t_{kq0}-0) = -R_{kq} \dot{w}_{kq}(t_{kq0}+0) < 0; \quad 0 < R_{kq} \leq 1; \quad w_{kq}(t) \leq \Delta_{kq},$$

Здесь t_{kq0} - некоторый момент удара в ударной паре (k, q) ; R_{kq} - коэффициенты восстановления. В соответствии с [10, 11] можно записать выражение для силы удара в окрестности произвольного момента t_{kq0} :

$$\Phi_{kq}(w_{kq}, \dot{w}_{kq})|_{t=t_{kq0}}=J_{kq}\delta(t-t_{kq0}); J_{kq}=M_{kq}(1+R_{kq})|\dot{w}_{kq}(t_{kq0}-0)|\geq 0,$$

где J_{kq} – импульс удара в ударной паре (k, q) .

Ставится задача: дать описание полей перемещений $\{u_{kq}, w_{kq}\}$ при заданных полях сил $\{g_{kq}, f_{kq}\}$ при реализации виброударного процесса.

7.2. 3 При рассмотрении континуальных моделей (7), (8) силы и другие физические факторы заменены их распределениями по площади.

При этом условия удара трансформируются, так:

$$\begin{aligned} w[x, y, t_0(x, y)] &= \Delta(x, y), w_t[x, y, t_0(x, y) - 0] = -R(x, y) w_t[x, y, t_0(x, y) + 0] < 0; \\ 0 < R(x, y) &\leq 1; w(x, y, t) \leq \Delta(x, y). \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь осуществляется переход к распределениям величин по площади: распределению зазоров, коэффициента восстановления, моментов удара. Для плотности ударной силы имеем:

$$\Phi(w, w_t) = J(x, y) \delta[t - t_0(x, y)]; J(x, y) = M(x, y) [1 + R(x, y)] |w_t[x, y, t_0(x, y) - 0]| \geq 0, \quad (31)$$

где $J(x, y) \geq 0$ – плотность импульса удара в точке (x, y) ; первое соотношение отвечает акту взаимодействия, определяемого распределением фазы удара $t_0(x, y)$.

Уравнения (7), (8) вместе с соотношениями (31) и дают модель сильно нелинейной двумерной среды сложной структуры.

Следует отметить, что, строго говоря, здесь необходимо указать области изменения переменных, функциональные классы гладкости фигурирующих функций и т. д. Следуя традициям, сложившимся в физике, будем предполагать, что все необходимые математические формальности соблюдаются.

7.3. Имея целью получить соотношения удобные для анализа виброударных процессов, перейдем к операторным уравнениям движения [12, 17, 18].

При этом внесем упрощающие предположения. Во-первых, положим, $\varepsilon_1 = 0$, т.е. предположим, что неконсервативные силы действуют только на несущую часть среды. Во-вторых, положим, что $g(t, u, u_{tt}) = A_1(x, y) \cos(\omega t + \varphi_1)$, где ω и $\varphi_1(x, y)$ – частота и распределение фазы внешнего синусоидального воздействия; $A_1(x, y)$ – распределение интенсивности внешнего воздействия по площади несущей мембраны, при этом предполагаем, что диссипативные силы – линейны и могут быть учтены при записи операторов динамической податливости или в начальном приближении вообще проигнорированы.

Переходя к операторным уравнениям, из (8) получим:

$$[1 + M\Omega^2 L(p, x, z, y, h)] u(t, x, y) = \varepsilon L(p, x, z, y, h) g(t, u, \dot{u}) + M\Omega^2 L(p, x, z, y, h) w(t, x, y), \quad (32)$$

Причем здесь и далее рассматриваются проходные операторы динамической податливости $L(p, x, z, y, h)$ из точки (z, h) в точку (x, z) или, в частности, локальные операторы $L(p, x, x, y, y)$. Иногда, за очевидностью, независимые переменные далее не указываются.

Из формулы (32) с учетом сделанных предположений находим:

$$u = A_2(x, y) \cos(\omega t + \varphi_2) + M\Omega^2 L(p, x, z, y, h) [1 + M\Omega^2 L(p, x, z, y, h)]^{-1} w, \quad (33)$$

где $L(p, x, z, y, h)$ – оператор несущей части среды (мембраны) – [19];

$$\begin{aligned} A_2(x, y) &= \text{mod}\{L(i\omega, x, z, y, h)[1 + M\Omega^2 L(i\omega, x, z, y, h)]^{-1}\}A_1(z, h); \\ \varphi_2(x, y) &= \varphi_1 + \arg\{L(i\omega, x, z, y, h)[1 + M\Omega^2 L(i\omega, x, z, y, h)]^{-1}\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Из (8) находим:

$$w = M\Omega^2(Mp^2 + M\Omega^2)(u - \Phi). \quad (35)$$

Внося (35) в (8) получаем:

$$u = A_3(x, y)\cos(\omega t + \varphi_3) - L_3(p, x, z, y, h)L_1(p, x, z, y, h)\Phi(w, w_i), \quad (36)$$

где функции A_3 и φ_3 получаются из формул (34) с заменой $L \rightarrow L_3$ и очевидной заменой индексов. Операторные функции

$$L_1(p, x, z, y, h) = M^2\Omega^4[1 + M\Omega^2 L(p, x, z, y, h)]^{-1}[Mp^2 + M\Omega^2]^{-1}; \quad (37)$$

$$L_3(p, x, y) = \frac{(1 + M\Omega^2 L)(Mp^2 + M\Omega^2)}{(1 + M\Omega^2 L)(Mp^2 + M\Omega^2) - M\Omega^2}. \quad (38)$$

Здесь, как и везде ряд аргументов для простоты не указывается. Теперь (36) внесем в (35) и получим:

$$\begin{aligned} w &= A_4(x, y)\cos(\omega t + \varphi_4) - L_4(p, x, z, y, h)L_3(p, x, z, y, h)L_1(p, x, z, y, h)\Phi(w, w_i) - \\ &- L_4(p, x, z, y, h)\Phi(w, w_i), \end{aligned} \quad (39)$$

где обозначено:

$$L_4(p, x, z, y, h) = M\Omega^2(Mp^2 + M\Omega^2)^{-1}. \quad (40)$$

При выбранном типе начальных условий (защемление мембраны по всем краям) представление определяющего оператора $L(p, x, z, y, h)$ дано, например, в [12]

$$L(p, x, z, y, h) = \frac{4}{l_1 l_2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2} \sin \frac{k\pi p}{l_1} \sin \frac{n\pi p}{l_2}}{c^2 \pi^2 (k^2 \frac{l_2^2}{l_1^2} + n^2 \frac{l_1^2}{l_2^2}) + p^2}. \quad (41)$$

Тем самым все параметры определяющих операторных уравнений определены. Эти уравнения могут анализироваться численно, но могут быть подвергнуты дальнейшим полезным трансформациям в соответствии с формализмом методов частотно-временного анализа [12, 17, 18].

7.4. Для получения представления периодических виброударных процессов, индуцированных, действующим в системе силовым фактором g , перейдем от операторных к интегральным уравнениям периодических колебаний. Интересуясь Т-периодическими решениями ($T = 2\pi\omega^{-1}$), введем периодическую функцию Грина (ПФГ):

$$\chi_0(t, x, z, y, h) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_0(i\omega\omega, x, z, y, h) \exp(ik\omega t), \quad (42)$$

причем $L_0 = L_3 L_2$. Периодические функции Грина представляют собой реакции линейных систем на периодические последовательности δ -функций [12].

Аналогично (17) для операторов L_4 и $L^* = L_4 L_3 L_1$, вводятся ПФГ χ_4 и χ^* . Тогда для T -периодических процессов u и w будем иметь:

$$u(t, x, y) = A_3(x, y) \cos(\omega t + \varphi_3) + \int_0^T \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \chi_0(t-s, x, z, y, h) \Phi(w, w_t) dz dh ds, \quad (43)$$

$$w(t, x, y) = A_4(x, y) \cos(\omega t + \varphi_4) - \int_0^T \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \chi_*(t-s, x, z, y, h) \Phi(w, w_t) dz dh ds - \\ - \int_0^T \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \chi_4(t-s, x, z, y, h) \Phi(w, w_t) dz dh ds. \quad (44)$$

Используя (31), придём к представлениям

$$u(t, x, y) = A_3(x, y) \cos(\omega t + \varphi_3) + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \chi_0[t-t_0(z, h), x, z, y, h] J(z, h) dz dh, \quad (45)$$

$$w(t, x, y) = A_4(x, y) \cos(\omega t + \varphi_4) - \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \chi_*[t-t_0(z, h), x, z, y, h] J(z, h) dz dh - \\ - \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \chi_4[t-t_0(z, h), x, z, y, h] J(z, h) dz dh. \quad (46)$$

Таким образом, получено определяющее представление (20), (21), названное ранее двухфункциональным. Если оказываются известными две функции – плотность ударного импульса $J(x, y)$ и распределение фазы $t_0(x, y)$ – то искомого поля перемещений становятся полностью определенными, так как ПФГ χ_0 , χ_* и χ_4 определены только операторами линейных систем и являются вычисляемыми, несмотря на свою громоздкость. Именно в силу указанной громоздкости анализ определяющих представлений будет приведен в последующих работах.

7.5. Сделаем принципиальные заключительные замечания.

7.5.1. Методы нахождения определяющих функций были разработаны в работах [17, 18, 21]. В данном случае двумерной модели несущей части среды сложной структуры проблема существенно усложняется и приобретает самостоятельный интерес. Однако, как и рассмотренные ранее одномерные аналоги таких сред сохраняются их общие важнейшие черты. Например, все такие модели в определенном смысле отвечают моделям традиционных виброударных систем типа «линейная безударная система + ударные пары». Здесь тип модели «линейная среда сложной структуры + распределенный ударный элемент» [21].

6.2. Физически рассматриваемая нами модель описывает, процесс вибропередачи в плоском изотропном объекте с большим числом ударных пар. Виброполе в данном объекте определяется двумя основными механизмами.

Как указывалось, присоединенное оборудование действует на несущую часть подобно ударным гасителям колебаний (ср. [1, 3.]).

Несущая часть осуществляет фильтрацию проходящей вибрации. Именно эти механизмы, проявляясь по-разному, в разных точках несущей конструкции и могут порождать специфические динамические эффекты.

6.3. Анализ определяющих соотношений здесь возможен только с привлечением численных методов. Тем не менее существует возможность, используя аналитические схемы, основанные на частотно-временном анализе и методах форм нелинейных колебаний [3, 4, 7, 8] и получить часть информации аналитически.

Лекция подготовлена при поддержке Российского научного фонда. Проект №15-19-30026.

Литература

1. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел.-М.: Наука, 1976. 328 с.
2. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 296 с.
3. Крупенин В.Л. К теории сильно нелинейных виброводов // Машиноведение. 1987. N 1. С.25-32
4. Веприк А.М., Вознюк П.Д., Крупенин В.Л. и др. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний.- Л.:Машиностроение,1987. -87 с.
5. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения надежности машин.1998, № 5, с. 13-30
6. Крупенин В.Л. Модель сильно нелинейной вибропроводящей среды с распределенным ударным элементом// ДАН. 1995. Т. 343. №6. С. 759-763.
7. Крупенин В.Л. К описанию процессов прохождения нелинейных волн через машинные конструкции, моделируемые посредством сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры (часть 1)//Интернет- журнал «Вестник научно-технического развития»(www.vntr.ru). 2011. №6. С. 26-33.
8. Крупенин В.Л. К описанию процессов прохождения нелинейных волн через машинные конструкции, моделируемые посредством сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры (часть 2) // Интернет- журнал «Вестник научно-технического развития» (www.vntr.ru). 2011. №7. С. 3-16.
9. Крупенин В.Л. Об описании виброводов со структурными разрывами при помощи виброударных систем с распределенными ударными элементами // Интернет- журнал «Вестник научно-технического развития»(www.vntr.ru). 2014. №3 (79) С. 23-30.
10. Крупенин В.Л. Об описании сильно нелинейных вибропроводящих и виброгенерирующих сред // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016, № 4, с. 9-19.
11. Беляев А.К. Высокочастотная динамика сложных инженерных конструкций: дис....доктора физ.-мат. наук. СПб. 2001.232 с
12. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. -404 p.p.
13. Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. Ташкент: ФАН, 1973. 272 с.

14. Крупенин В.Л. Анализ сингуляризованных уравнений движения решетчатых виброударных 2D-систем при отказе от гипотезы ньютона // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016, № 2, с. 13-22.
15. Крупенин В.Л. Случайные вибрационные поля в оснащенных многомерных виброударных 2D-системах// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2015, № 6, с. 21-28
16. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
17. Крупенин В.Л. Представление виброударных процессов через определяющие физические параметры движения «импульс – фаза» (часть I) // Интернет- журнал «Вестник научно-технического развития» (www.vntr.ru). 2010. №2 (30) С. 44-53.
18. Крупенин В.Л. Периодические движения в семействе упругих систем со взаимодействующими через удары граничными элементами // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. №3. С.20-28.
19. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. М: Наука, 1979. 234 с.
20. Крупенин В.Л. К теории виброударных систем с распределенными ударными элементами // Изв. АН СССР.МТТ. -1986.-№1.-С.25-32.
21. Krupenin V.L., Veprik A.M. Vibroconductors equipped with impact elements and distributed vibroimpact systems // Proceedings of the 2-nd European Nonlinear Oscillations Conference. V.1. Czech Prague: CTU, 1996, pp. 229-234.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА

Меркурьев И.В.¹, Подалков В.В.¹

¹ФГОУ ВО «НИУ «МЭИ», Москва, РФ, e-mail MerkuryevIV@mpei.ru

Аннотация. Изучены вынужденные нелинейные колебания микромеханического гироскопа с кардановым подвесом чувствительного элемента. Теоретическое исследование проведено в квазилинейной постановке методами малого параметра и усреднения Крылова-Боголюбова. Исследованы условия возникновения стационарных колебаний чувствительного элемента на подвижном основании в окрестности главного резонанса в зависимости от параметров нелинейной электростатической системы возбуждения колебаний.

Ключевые слова. Микромеханический гироскоп, динамика, осреднение, нелинейный эффект, точность.

В настоящее время актуальной является задача создания высокоточных вибрационных микромеханических гироскопов (ММГ) для решения задач навигации, ориентации и управления движением подвижных объектов.

Принцип действия вибрационных гироскопов основан на свойстве камертона, заключающегося в стремлении сохранять плоскость колебаний своих ножек при угловом движении основания. Основы теории вибрационных гироскопов заложены в работах [1-3], где рассмотрены различные схемы построения таких гироскопов, изучено влияние систематических погрешностей в различных режимах функционирования.

В работах [1-2] показано, что движение чувствительных элементов вибрационных, микромеханических, волновых твердотельных гироскопов в одномодовом приближении может быть описано математической моделью маятника Фуко, в рамках которой предложены решения задач управления и измерения колебаний для нового класса гироскопов обобщенного маятника Фуко.

Благодаря новым технологиям микроэлектромеханических систем, применению новых конструкционных материалов с низкими внутренними потерями при колебаниях, удастся существенно уменьшить характерные размеры колебательной системы, однако при этом возрастают принципиальные погрешности гироскопов класса обобщенного маятника Фуко, связанные с конечными (нелинейными) колебаниями упругой системы, имеющие различную геометрическую и физическую природу [1-3]. Геометрическая нелинейность, как правило, связана с особенностями кинематической схемы гироскопа [3-7], физическая нелинейность проявляется при конечных амплитудах колебаний по отношению к зазору электростатической, электромагнитной системы управления и измерения, а также связана с нелинейной упругостью конструкционного материала [4].

В [1,2] определена основная, принципиальная погрешность маятника Фуко, как измерителя угловой скорости Земли, обусловленная конечными амплитудами колебаний маятника геометрической природы. Показано, что погрешность из-за нелинейностей присуща всем без исключения гироскопам класса обобщенного маятника Фуко. В [4] исследовано влияние геометрической нелинейности колебаний рамок карданова подвеса чувствительного элемента на динамику и точность гироскопа. Найден стационарный режим колебаний чувствительного элемента ММГ и даны оценки точности гироскопа из-за нелинейных эффектов.

Экспериментально наблюдаемые явления срыва колебаний чувствительных элементов, зависимость резонансной частоты от амплитуды колебаний, медленно изменяющиеся характеристики различных типов вибрационных, микромеханических и волновых твердотельных гироскопов могут быть объяснены в рамках нелинейной

теории колебаний с учетом специфики конкретной схемы прибора [3-8].

Постановка задачи. В данной работе рассматривается динамика ММГ с кардановым подвесом чувствительного элемента [9] на подвижном основании с учетом малой нелинейности упругих свойств подвеса. На рис. 1 представлена конструктивная схема ММГ в виде монокристаллической пластины 1 (основания гироскопа), соединенной торсионами 2 с чувствительным элементом 3, закрепленным на промежуточной рамке 4.

Упругий подвес чувствительного элемента гироскопа проектируется для обеспечения резонансного режима работы. Частоты колебаний рамок подвеса должны быть совмещены для обеспечения внутреннего резонанса системы. С помощью электростатического контура управления обеспечивается мягкое резонансное возбуждение колебаний.

Рис. 1. Микромеханический гироскоп с кардановым подвесом чувствительного элемента

При вращении основания прибора с угловой скоростью Ω_* возникает расщепление собственных частот колебаний системы. Для определения углового движения основания используется емкостная электростатическая система, образованная электродами на основании и на рамках подвеса, измеряющая обобщенные координаты α, β . После соответствующей обработки в контуре управления формируется сигнал, пропорциональный угловой скорости или интегралу от угловой скорости в интегрирующем режиме функционирования. Рассматриваемая схема гироскопа имеет одну ось чувствительности и предназначена для измерения одной составляющей вектора угловой скорости основания ММГ.

В целях повышения точности ММГ изучается нелинейная динамика ММГ в режиме датчика угловой скорости. Исследуются условия возникновения пространственных нелинейных стационарных колебаний в окрестности главного резонанса.

Уравнения движения чувствительного элемента ММГ

Будем предполагать, что гироскоп сбалансирован, т.е. центр масс чувствительного элемента и центр упругого подвеса находятся в неподвижной точке O (рис.2). Введем системы координат $Ox_*y_*z_*$ – связанную с основанием гироскопа, $Ox_1y_1z_1$ – связанную с промежуточной рамкой карданова подвеса. В осях $Ox_1y_1z_1$ зададим тензор инерции промежуточной рамки $\hat{I} = \text{diag}(I_x, I_y, I_z)$, где I_x, I_y, I_z – моменты инерции. С чувствительным элементом гироскопа свяжем систему координат $Oxyz$, в осях которой зададим тензор инерции $\hat{J} = \text{diag}(J_x, J_y, J_z)$ с моментами инерции чувствительного элемента J_x, J_y, J_z .

Рис.2. Кинематическая схема гироскопа

Взаимную ориентацию систем координат представим следующей схемой:

$$Ox_0y_0z_0 \xrightarrow[\alpha]{x_0} Ox_1y_1z_1 \xrightarrow[\beta]{y_1} Oxyz,$$

где над стрелкой указаны обобщенные координаты системы – углы α, β , а под стрелкой ось, вокруг которой происходит поворот против хода часовой стрелки на соответствующий угол.

Погрешности плазмохимического травления карданова подвеса из монокристаллической пластины кремния вызывают малое расщепление частот колебаний чувствительного элемента, которое приводит к уменьшению чувствительности к угловой скорости основания и к уменьшению точности гироскопа. Расщепление частот может быть скомпенсировано технологическим способом балансировки рамок подвеса, а также с помощью эффекта отрицательной электростатической жесткости электростатического контура управления. Однако, при достаточно большой амплитуде колебаний по отношению к величине номинального зазора между неподвижными и подвижными электродами возникает явления, характерные для нелинейных систем.

Запишем проекции абсолютной угловой скорости чувствительного элемента на оси системы координат $Oxyz$:

$$\Omega_x = -\Omega_0 \beta + \dot{\alpha}, \quad \Omega_y = \Omega_0 \alpha + \dot{\beta}, \quad \Omega_z = \Omega_0 + \dot{\alpha}\beta, \quad (1)$$

где Ω_0 - проекция вектора угловой скорости основания на ось z_0 ; точкой обозначено дифференцирование по времени t .

Используя формализм Лагранжа, запишем дифференциальное уравнение движения чувствительного элемента ММГ в виде:

$$\begin{aligned} (I_x + J_x) \ddot{\alpha} - \Omega_0 (J_x + J_y - J_z) \dot{\beta} + k_1 \dot{\alpha} + c_1 \alpha - d_1 \alpha^3 &= M_0 \sin \omega_0 t, \\ J_y \ddot{\beta} + \Omega_0 (J_x + J_y - J_z) \dot{\alpha} + k_2 \dot{\beta} + c_2 \beta - d_2 \beta^3 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где c_1, c_2 – коэффициенты жесткости упругого подвеса; k_1, k_2 – коэффициенты демпфирования; d_1, d_2 – коэффициенты нелинейной упругости подвеса. В уравнениях (2) опущены слагаемые, пропорциональные квадрату угловой скорости основания. Предполагается, что угловая скорость основания постоянная. При получении уравнений

(2) предполагается, что при совмещении частот парциальных колебаний системы с использованием электростатического контура возникает малая нелинейная упругая кубическая характеристика.

В дальнейшем будем рассматривать малые колебания системы около положения равновесия. Приведем уравнения (2) к стандартной одночастотной форме нелинейной системы, для этого введем безразмерные коэффициенты и параметры:

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{c_1}{J_x + I_x}} = \sqrt{\frac{c_2}{J_y}}, \quad \mu = \frac{\omega_0}{\omega}, \quad \varepsilon\gamma = \frac{k_1}{\sqrt{c_1(J_x + I_x)}} = \frac{k_2}{\sqrt{c_2 J_y}}, \\ \varepsilon\nu &= \frac{\Omega_*}{\omega}, \quad \alpha = \sqrt{\varepsilon}\alpha', \quad \beta = \sqrt{\varepsilon}\beta', \quad \tau = \omega t, \quad j_1 = \frac{J_x + J_y - J_z}{J_x + I_x}, \quad j_2 = \frac{J_x + J_y - J_z}{J_y}, \quad (3) \\ (\mu, \nu &\sim 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1).\end{aligned}$$

где ε – малый параметр; μ – отношение частоты ω_0 изменения внешнего момента к характерной частоте колебаний ω системы; γ, ξ – параметры, характеризующие демпфирование и нелинейную характеристику подвеса; ν – безразмерная угловая скорость основания; j_1, j_2 – массово-геометрические характеристики чувствительного элемента, τ, α', β' – безразмерные переменные, характеризующие время t и угловые координаты α, β .

Ограничиваясь величинами первого порядка малости, уравнения (2) с учетом (3), преобразуем к виду:

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + \alpha &= \varepsilon \left(-\gamma \dot{\alpha} + j_1 \nu \dot{\beta} + \xi \alpha^3 + \sin \mu \tau \right), \\ \ddot{\beta} + \beta &= \varepsilon \left(-\gamma \dot{\beta} - j_2 \nu \dot{\alpha} + \xi \beta^3 \right),\end{aligned}\quad (4)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени τ (штрихи над буквами опускаем).

Исследование квазилинейных колебаний методом усреднения

Далее будем изучать практически важный случай колебания чувствительного элемента ММГ в малой окрестности главного резонанса, т.е. при

$$\mu = 1 + \varepsilon\lambda, \quad \lambda \sim 1,$$

где λ – частотная расстройка.

К возмущенной одночастотной системе (4) применим метод усреднения Крылова – Боголюбова [10] и приведем её к стандартному виду посредством перехода от переменных $\dot{\alpha}, \alpha, \dot{\beta}, \beta$ к осциллирующим (медленным) переменным “амплитуда-фаза” A, B, φ, ψ по формулам

$$\begin{aligned}\alpha &= A \sin(\mu\tau + \varphi), \quad \dot{\alpha} = \mu A \cos(\mu\tau + \varphi), \\ \beta &= B \sin(\mu\tau + \psi), \quad \dot{\beta} = \mu B \cos(\mu\tau + \psi),\end{aligned}\quad (5)$$

здесь A, B – медленно изменяющиеся амплитуды углов α, β соответственно; φ, ψ – фазовые расстройки парциальных колебаний по углам α, β . Дифференцируя формулы замены (5) по τ из уравнений (4), найдем стандартную по Боголюбову систему, усредняя которую по явно входящему аргументу τ , получим уравнения для амплитуд A, B и фазовых расстроек φ, ψ :

$$\begin{aligned}
\dot{A} &= \varepsilon[-\gamma A + v_{j1} B \cos(\psi - \varphi) - \sin \varphi] / 2, \\
\dot{\varphi} &= \varepsilon[-8\lambda A + 4v_{j1} B \sin(\psi - \varphi) - 3\xi A^3 - 4 \cos \varphi] / (8A), \\
\dot{B} &= \varepsilon[-\gamma B - v_{j2} A \cos(\psi - \varphi)] / 2, \\
\dot{\psi} &= \varepsilon[-8\lambda B + 4v_{j2} A \sin(\psi - \varphi) - 3\xi B^3] / (8B).
\end{aligned} \tag{6}$$

Для приложений представляется важным исследование стационарных колебаний. Соответствующие резонансные значения A , B , φ , ψ определяются как стационарные точки системы (6).

Исследование стационарных режимов колебаний

Рассмотрим нелинейные колебания ММГ на неподвижном основании (угловая скорость $\Omega_* = \nu = 0$). В этом случае уравнения (6) распадаются на две подсистемы. Первые два уравнения описывают усредненные колебания осциллятора Дуффинга с мягкой характеристикой, детально изученные в [11]. Стационарные решения A , φ определяются соотношениями

$$\gamma A + \sin \varphi = 0, \quad \lambda + 3/8 \xi A^2 + 1/(2A) \cos \varphi = 0, \quad A \geq 0. \tag{7}$$

Избавляясь от тригонометрических функций в уравнениях (7), получим неявное выражение для резонансной кривой

$$3/8 \xi A^2 \pm \sqrt{1 - \gamma^2 A^2} / (2A) + \lambda = 0. \tag{8}$$

Существенный интерес представляет изучение зависимости амплитуд стационарных колебаний от параметров, характеризующих демпфирование, частотную расстройку и нелинейную характеристику упругого подвеса чувствительного элемента. Из ограничений на значения тригонометрических функций в (7), следует ряд условий возникновения стационарных колебаний, например, $A(\lambda, \gamma) \leq 1/\gamma$.

При малых значениях демпфирования γ (рис. 3) получается известная амплитудно-частотная характеристика [11-12]. Пунктирная и штрихпунктирная линии на рис. 3 соответствуют колебаниям в фазе с внешним воздействием ($\varphi = 0$), сплошная линия – в противофазе ($\varphi = \pi$). Анализ уравнения (8) показывает, что при выполнении

неравенства $\lambda \geq -\frac{4}{3} \left(\frac{2}{3} \xi \right)^{\frac{1}{3}}$ резонансная кривая $A(\lambda)$ становится однозначной.

Для значений коэффициента демпфирования $\gamma=1/10$ и $\gamma=1/2$, соответственно, максимальное значение амплитуды $A = 1/\gamma = 10$ и $A = 2$. Отметим, что максимальное значение амплитуды колебаний $A = 1/\gamma$ достигается при достаточно больших значениях частотной расстройки:

$$\lambda = -\frac{3}{8} \frac{\xi}{\gamma^2}.$$

Этот случай соответствует точке соединения на рис. 3 пунктирной и сплошной ветви резонансной кривой $A(\lambda)$.

Рис. 3. Амплитуды стационарных колебаний $A(\lambda)$ в зависимости от частотной расстройки λ .

В линейном случае ($\xi = 0$), резонансная кривая $A(\lambda)$ аналогична амплитудно-частотной характеристике линейного осциллятора вблизи резонанса (рис. 4).

Рис. 4. Зависимость амплитуд колебаний A и B (сплошная и пунктирная линия соответственно) на подвижном основании от частотной расстройки λ .

Стационарные колебания системы на подвижном основании. Рассмотрим нелинейные колебания ММГ на подвижном основании (угловая скорость основания $v \neq 0$). Поскольку правая часть системы (6) оказывается линейной относительно тригонометрических функций $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\sin(\psi - \varphi)$, $\cos(\psi - \varphi)$, нетрудно представить их в виде:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= -\frac{\gamma(j_1 B^2 + j_2 A^2)}{j_2 A}, \quad \cos \varphi = \frac{j_1(8\lambda + 3\xi B^2)B^2 - j_2(8\lambda + 3\xi A^2)A^2}{4j_2 A}, \\ \sin(\psi - \varphi) &= \frac{(8\lambda + 3\xi B^2)B}{4vj_2 A}, \quad \cos(\psi - \varphi) = -\frac{\gamma B}{vj_2 A}. \end{aligned} \quad (9)$$

Исключая тригонометрические функции в выражениях (9), в результате элементарных преобразований получим алгебраические уравнения для определения искомых амплитудно-частотных характеристик $A(\lambda, \gamma)$, $B(\lambda, \gamma)$:

$$16\gamma^2(j_1 B^2 + j_2 A^2)^2 + [j_1(8\lambda + 3\xi B^2)B^2 - j_2(8\lambda + 3\xi A^2)A^2]^2 = 16j_2^2 A^2, \quad (10)$$

$$B^2 [16\gamma^2 + (8\lambda + 3\xi B^2)^2] = 16v^2 j_2^2 A^2.$$

Рассмотрим вначале линейную систему ($\xi = 0$), в этом случае решение системы (10) имеет вид:

$$A^2 = (\gamma^2 + 4\lambda^2)w, \quad B^2 = v^2 j_2^2 w, \quad (11)$$

$$w = [(\gamma^2 + 4\lambda^2)^2 + v^2 j_1 j_2 (2\gamma^2 - 8\lambda^2 + v^2 j_1 j_2)]^{-1}.$$

При значениях параметров $j_1 = j_2 = v = 1$, $\gamma = 1/5$ зависимость амплитуд колебаний $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ от частотной расстройки λ представлена рис.4. Анализ (11) и рис. 4 показывает, что наличие угловой скорости основания приводит к смещению резонансных пиков амплитудно-частотных характеристик $A(\lambda, \gamma)$, $B(\lambda, \gamma)$.

Далее рассмотрим случай нелинейных колебаний чувствительного элемента ММГ для малых значений параметра демпфирования γ . Характерной особенностью данного режима колебаний является возможность появления множества стационарных решений системы (6). Опуская в выражениях (10) слагаемые порядка γ^2 , получим уравнение девятой степени относительно квадратов амплитуд колебаний $B(\lambda)$. Численное решение уравнений (10) относительно амплитуд $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ при значениях параметров $\xi = v = j_1 = j_2 = 1$ представлено на рис. 5. При малом демпфировании ($\gamma < 0.15$) в колебательной системе (6) имеется до девяти стационарных режимов. На рис. 5 пунктиром отмечены участки амплитудно-частотной характеристики с различным числом стационарных режимов.

В результате численного моделирования устанавливается, что при $\gamma \geq 0,6$ резонансные кривые $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ становятся однозначными функциями λ .

Оценка проекции угловой скорости основания может быть получена по измерениям осредненных амплитуд и фаз колебаний чувствительного элемента:

$$v = \frac{\gamma B}{j_2 A \cos(\psi - \varphi)}. \quad (12)$$

При нулевой частотной расстройке ($\lambda = 0$) формула (12) совпадает с известной расчетной зависимостью, применяемой для оценки проекции вектора угловой скорости основания $\hat{\Omega}$ на ось z^* по измерениям амплитуд колебаний чувствительного элемента [9]:

$$\hat{\Omega} = \frac{J_y \omega}{(J_x + J_y - J_z) Q} \frac{B}{A}, \quad (13)$$

где $Q = 1/(\epsilon\gamma)$ - добротность колебательного контура.

Рис. 5. Зависимость амплитуд колебаний A и B от частотной расстройки λ .

а) и б) - в случае малого демпфирования; в) и г) при значениях $\gamma = 0,6$; $\gamma = 0,4$ (сплошная и штрихпунктирная линия соответственно).

Полученные стационарные колебательные режимы имеют существенное значение для объяснения явлений срыва колебаний и скачков амплитуд, наблюдаемых при экспериментальных исследованиях ММГ [12,13]. Анализ стационарных колебаний чувствительного элемента ММГ, представленных на рис. 5, показывает, что нелинейные явления срыва колебаний существенно усложняют настройку резонансного режима работы на подвижном основании.

Числовой пример. Проведем числовые оценки параметров ММГ [4], при которых возникает множество стационарных режимов колебаний чувствительного элемента гироскопа. Пусть амплитуда момента возбуждения $M_0 = 1,86 \cdot 10^{-11}$ Н·м; $c_1 = c_2 = 4,26 \cdot 10^{-5}$ Н·м; моменты инерции $J_x = J_y = J_z = 1,2 \cdot 10^{-13}$ кг·м²; добротность линейной системы $Q = 0,8 \cdot 10^5$. В этом случае параметры (3) таковы:

$$\varepsilon = \left(\frac{M_0}{c_1} \right)^{2/3} = 5,75 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma = \frac{1}{\varepsilon Q} = 0,21; \quad j_1 = j_2 = 1; \quad (14)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c_1}{J_x + I_x}} = 1,88 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1} \text{ (3 кГц)}.$$

Малая физическая нелинейность электростатической системы приводит к смещению резонансных пиков и появлению множества резонансных режимов. При частотной расстройке $\lambda < -0,1$ (−0,17 Гц) в системе (6) будет до девяти стационарных режимов колебаний, устойчивость которых требует отдельного исследования.

Отметим, что в ходе экспериментальных стендовых испытаний наблюдаются только асимптотически устойчивые стационарные режимы колебаний (рис. 6). Стрелкой на рис. 6 показано направление изменения частоты внешнего воздействия ω_0 и частотной настройки $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$. Анализ рис. 6 показывает, что при частотной настройке на резонанс при малом изменении частотной настройки $\Delta\omega$ возникает явление срыва колебаний – достаточно быстрый переход на новый асимптотически устойчивый режим колебаний.

В целях совмещения резонансных частот карданова подвеса и увеличения точности гироскопа на соответствующие электроды было подано опорное напряжение, которое уменьшает жесткость упругого подвеса на величину до 15 Гц при характерной резонансной частоте 3 кГц. С увеличением опорного напряжения, подаваемого для компенсации разности частот между рамками, увеличивалось влияние нелинейности колебаний. Снизить влияние нелинейности можно путем уменьшения величины опорного напряжения в электростатическом контуре управления и настройки, уменьшения амплитуды колебаний, увеличения номинального зазора между электродами управления, а также с помощью применения системы обратной связи.

Уменьшение величины опорного напряжения для совмещения частот колебаний рамок приведет к уменьшению выхода образцов ММГ, удовлетворяющих техническим требованиям по совмещению частот колебаний рамок; уменьшение амплитуды колебаний приведет к уменьшению кинетического момента и чувствительности гироскопа к угловой скорости основания; увеличение номинального зазора ведет к увеличению энергии, требуемой для управления колебаниями.

Таким образом, исследование нелинейности и построение адекватной математической модели ММГ, алгоритмов управления и настройки режимов функционирования позволяет повысить точность и стабильность метрологических характеристик гироскопа.

Рис. 6. Экспериментальные амплитудно-частотные характеристики ММГ на подвижном основании. Зависимость амплитуд стационарных колебаний А и В от частотной расстройки $\Delta\omega$ (Гц).

Для идентификации параметров математической модели ММГ может быть применена методика, предложенная в [13-14]. Решение обратной задачи динамики ММГ по определению структуры возмущающих сил позволит применить методы аналитической компенсации погрешностей ММГ.

Заключение. Методами малого параметра и усреднения Крылова–Боголюбова получены осредненные уравнения в оскулирующих переменных, описывающие динамику ММГ с учетом нелинейной упругости подвеса чувствительного элемента. Исследованы условия возникновения пространственных стационарных колебаний чувствительного элемента гироскопа в окрестности главного резонанса в зависимости от параметров системы. Получена расчетная формула для оценки проекции вектора

угловой скорости основания на ось чувствительности гироскопа по измерениям осредненных амплитуд и фаз колебаний чувствительного элемента. Даны рекомендации по выбору параметров гироскопа, позволяющие избежать явлений срыва колебаний и скачков амплитуд чувствительного элемента.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00772-а, № 16-08-01269-а).

Литература

1. Журавлев В.Ф. Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов. // Изв. РАН, МТТ, №6. 1997. С.27 -35.
2. Журавлев В.Ф. О глобальных эволюциях состояния обобщенного маятника Фуко // Изв. РАН. МТТ. 1998. №6. С. 5-11.
3. Брозгуль Л.И., Смирнов Е.Л. Вибрационные гироскопы. – М.: Машиностроение, 1970. – 213 с.
4. Меркурьев И.В., Подалков В.В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.- Физматлит. 2009. 228 с.
5. Распопов В.Я. Микромеханические приборы: Уч. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. – Тула.: Гриф и К, 2004. – 476 с.
6. Zotov S. A., Simon B. R., Prikhodko I. P., Trusov A.A., Shkel A. M. Quality Factor Maximization through Dynamic Balancing of Tuning Fork Resonator// IEEE Sensors Journal, 2014.Vol. 14, no. 8, pp. 2706 – 2714.
7. Лестев А.М. О комбинационных резонансах в динамике микромеханических гироскопов // Гироскопия и навигация. - 2014. - № 3. - С. 53-58.
8. Евстифеев М. И. , Елисеев Д.П. , Челпанов И.Б. Методы повышения стойкости микромеханических гироскопов к механическим воздействиям//Гироскопия и навигация 2014 - №4 (87) - С. 56-68.
9. Boxenhorn B. Planar inertial sensor. US Pat. № 4,598,585. Int.Cl.: G01P 015/02. 1986. .
10. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М. Наука,1974, 503с.
11. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Изд.иностран. лит, 1961. – 777с.
12. Некрасов Я. А., Моисеев Н. В., Беляев Я. В., Павлова С. В., Люкшонков Р. Г. Влияние поступательных вибраций, ударов и акустических помех на характеристики микромеханического гироскопа // Гироскопия и навигация. 2016 - №2 (93) - С. 56-67
13. Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В. Способ определения параметров волнового твердотельного гироскопа. Патент РФ №2544308, 2015, Бюл. № 8
14. Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В. Нелинейные эффекты в динамике цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа с электростатической системой управления // Гироскопия и навигация. 2015. № 1 (88). С. 71-80

СТАТЬИ УЧАСТНИКОВ

ДИНАМИКА МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА L-L ТИПА В РЕЖИМЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В СИСТЕМЕ

Антонов Е.А.

ФГОУ ВО «Национальный исследовательский институт «МЭИ», Москва,
Российская Федерация.

Аннотация. Рассматривается поведение двухмассового микромеханического гироскопа L-L типа в режиме свободных колебаний на вращающемся основании. Анализируется влияние второй активной массы и нелинейностей, содержащихся в системе, на динамику ММГ. Была разработана математическая модель данного ММГ и получены дифференциальные уравнения в орбитальных координатах. Произведен анализ полученных зависимостей и сделаны соответствующие выводы по характеру поведения системы.

Ключевые слова. Двухмассовый микромеханический гироскоп, нелинейные деформации, свободные колебания.

Разработка микроэлектромеханических систем (МЭМС) в настоящее время относится к перспективным направлениям развития наукоемких технологий. В свою очередь такие системы не могут обойтись без высокочувствительных и высококачественных измерительных устройств. Микромеханические гироскопы (ММГ) – яркий представитель таких устройств, поэтому проблемы повышения надежности и качества технических характеристик таких приборов – актуальная научно-техническая задача гироскопии [1-3]. Существует множество конструкторских решений таких задач.

Один из способов повышения точностных характеристик микромеханических гироскопов это создание многомассовых концептов устройств [4]. Влияние нелинейных динамических эффектов на поведение двухмассового микромеханического гироскопа L-L типа описано в статье А.М. Лестева и А.В. Ефимовской [5]. Сделаны выводы по части устойчивости инерциальной массы, а конструкция с двумя инерциальными массами признана наиболее стабильной.

Постановка задачи. Рассмотрим следующую модель микромеханического гироскопа (рис. 1).

Рис.1. Модель микромеханического гироскопа L-L типа

При помощи упругих внутренних подвесов (торсионов) 3 чувствительный элемент (ЧЭ) 1 массой m_c прикреплён к рамке 2. Такая конструкция обеспечивает чувствительному элементу степень свободы по Y-оси. В свою очередь, рамка 2 массой m_p прикреплена к основанию 5 внешними (наружными) тарсионами 4, что добавляет чувствительному элементу еще одну степень свободы по X-оси. Будем считать, что нам удалось подобрать одинаковую жесткость торсионов 3 и 4. Стоит упомянуть, что специальная форма торсионов позволяет им работать только на изгиб, а растяжение практически не наблюдается. Такая конструкция дает возможность чувствительному элементу 1 свободно совершать линейные перемещения. Колебания возбуждаются электростатически. С внешней стороны рамки расположены зубцы (контакты), образующие систему плоских конденсаторов 6 вместе с зубцами на подложке основания 5. При колебаниях зазоры (h) между контактами гребенки изменяются, что приводит к изменению емкостей.

Цель данного исследования в первую очередь заключается в том, чтобы рассмотреть и проанализировать двухмассовую модель микромеханического гироскопа с нелинейными деформациями в системе и построить дифференциальные уравнения движения чувствительного элемента такого устройства.

Построение уравнений движения. Запишем общий вид кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} m_p (\dot{x}^2 + (x\Omega)^2) + \frac{1}{2} m_c ((\dot{x} - y\Omega)^2 + (\dot{y} + x\Omega)^2), \quad (1)$$

где: x, y – координаты чувствительного элемента в системе координат, связанной с основанием; m_c – масса чувствительного элемента; m_p – масса рамки; Ω – угловая скорость основания, на которое помещен гироскоп.

Так как потенциальная энергия в общем виде имеет нелинейный вид, то в данной модели мы ограничимся второй и четвертой степенью тейлоровского разложения удельной потенциальной энергии:

$$\Pi = c_x \frac{x^2}{2} + c_y \frac{y^2}{2} + d(x^2 + y^2)^2, \quad (2)$$

где c_x, c_y – жесткость торсионов; d – нелинейный параметр, определяющий нелинейные деформации в системе.

Лагранжиан системы записывается в следующем виде

$$L = \frac{1}{2} m_p \left(\dot{x}^2 + (x\Omega)^2 \right) + \frac{1}{2} m_q \left((\dot{x} - y\Omega)^2 + (\dot{y} + x\Omega)^2 \right) - c_x \frac{x^2}{2} - c_y \frac{y^2}{2} - d (x^2 + y^2)^2 \quad (3)$$

Воспользовавшись формализмом Лагранжа в случае постоянной угловой скорости основания. Получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} (m_p + m_q) \ddot{x} + c_x x - 2m_q \Omega \dot{y} + 4d (x^3 + y^2 x) &= 0; \\ m_q \ddot{y} + c_y y + 2m_q \Omega \dot{x} - m_q \Omega^2 y + 4d (y^3 + x^2 y) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

С целью улучшения резонансных свойств, характеристики упругих подвесов подбираются таким образом, что коэффициенты c_x , и c_y связаны следующим образом

$$c_x = \frac{m_p + m_q}{m_q} c_y.$$

Далее приведем размерные амплитуды x и y к безразмерным малым амплитудам α , β и медленному времени τ

$$\alpha = \sqrt{\varepsilon} h x, \quad \beta = \sqrt{\varepsilon} h y, \quad \tau = \sqrt{\frac{c_y}{m_q}} t.$$

После нормализации уравнения движения чувствительного элемента (2) запишутся в следующем виде

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \alpha + 2\gamma \dot{\alpha} - 2 \frac{1}{1+\delta} \nu \dot{\beta} + 4\varepsilon \tilde{d} \frac{1}{1+\delta} \alpha (\alpha^2 + \beta^2) &= 0; \\ \ddot{\beta} + \beta + 2\gamma \dot{\beta} + 2\nu \dot{\alpha} + 4\varepsilon \tilde{d} \beta (\beta^2 + \alpha^2) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где учтены неизбежно присутствующие в системе силы вязкого трения $\gamma = \varepsilon \gamma_1$, точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени, $\nu = \Omega \sqrt{\frac{m_q}{c_y}}$ – безразмерная

угловая скорость основания порядка малого параметра ($\nu = \varepsilon \nu_1$), $\tilde{d} = \frac{d h^2}{c_y}$ – безразмерный

параметр, характеризующий нелинейные деформации, $\delta = \frac{m_p}{m_q} = \varepsilon \delta_1$.

Для упрощения записей в дальнейшем индекс «1» будет опускаться. С учетом указанных допущений, система (5) примет вид

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + \alpha &= \varepsilon F_1; \\ \ddot{\beta} + \beta &= \varepsilon F_2,\end{aligned}\tag{6}$$

где $F_1 = 2\gamma\dot{\alpha} + 2(\delta - 1)v\dot{\beta} + 4\alpha(\alpha^2 + \beta^2)$ и $F_2 = 2\gamma\dot{\beta} + 2v\dot{\alpha} + 4\beta(\beta^2 + \alpha^2)$.

Анализ динамики чувствительного элемента. Анализировать поведение чувствительного элемента в плоскости OXY лучше всего в тороидальных координатах (r, k, θ, χ). Формулы перехода к этим медленным функциям времени:

$$\begin{aligned}\alpha &= r \cos \theta \cos(t + \chi) - k \sin \theta \sin(t + \chi); \\ \dot{\alpha} &= -r \cos \theta \sin(t + \chi) - k \sin \theta \cos(t + \chi); \\ \beta &= r \sin \theta \cos(t + \chi) + k \cos \theta \sin(t + \chi); \\ \dot{\beta} &= -r \sin \theta \sin(t + \chi) + k \cos \theta \cos(t + \chi).\end{aligned}\tag{7}$$

Смысл переменных r, k, θ, χ изображен на рисунке 2: θ – угол ориентации; χ – фаза, которая характеризует изменение частоты колебаний; r и k – главные полуоси эллипса.

Рис.2. Геометрический смысл тороидальных координат

В таком случае, через орбитальные координаты полная энергия колебаний будет записываться в следующем виде

$$E = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) = \frac{1}{2}(r^2 + k^2).$$

Момент количества движения:

$$K = \alpha\dot{\beta} - \dot{\alpha}\beta = rk.$$

Чтобы привести систему (4) к новым переменным, воспользуемся методом, изложенным в [6]. После всех необходимых алгебраических преобразований получим окончательную

систему дифференциальных уравнений движения чувствительного элемента гироскопа в тороидальных координатах

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -(F_1 \cos \theta + F_2 \sin \theta) \sin(t + \chi); \\ \dot{k} &= -(F_1 \sin \theta - F_2 \cos \theta) \cos(t + \chi); \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{r^2 - k^2} [k(F_1 \cos \theta + F_2 \sin \theta) \cos(t + \chi) + r(F_1 \sin \theta - F_2 \cos \theta) \sin(t + \chi)]; \\ \dot{\chi} &= -\frac{1}{r^2 - k^2} [r(F_1 \cos \theta + F_2 \sin \theta) \cos(t + \chi) + k(F_1 \sin \theta - F_2 \cos \theta) \sin(t + \chi)].\end{aligned}\quad (8)$$

Уравнения (8) записаны в общем виде и при соответствующей задаче параметров F_1 и F_2 позволяют анализировать поведение системы при разнообразных возмущениях, в том числе и для нелинейности [6].

Подставим записанные ранее выражения для F_1 и F_2 в (8). После осреднения правых частей по времени получим зависимости

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -2\gamma r + \frac{1}{2} v \delta r \sin 2\theta; \\ \dot{k} &= -2\gamma k - \frac{1}{2} v \delta k \sin 2\theta; \\ \dot{\theta} &= v - v \delta \frac{r^2 \sin^2 \theta - k^2 \cos^2 \theta}{r^2 - k^2} + 2rk; \\ \dot{\chi} &= v \delta \frac{rk}{r^2 - k^2} \cos 2\theta + 3(r^2 + k^2).\end{aligned}\quad (9)$$

Из уравнений (9) можно сделать вывод, что погрешность определения угловой скорости

Ω равна $(-v \delta \frac{r^2 \sin^2 \theta - k^2 \cos^2 \theta}{r^2 - k^2} + 2rk)$, где погрешность от нелинейности тождественно

равна $2K$ (пропорциональна моменту количества движения), а изменение частоты колебаний, вызванное нелинейными факторами – линейная комбинация кинетического момента K и полной энергии колебаний E .

Заключение. Основная погрешность гироскопа определяется дополнительной прецессией. Она возникает во всех гироскопах, в которых реализуется принцип маятника Фуко [7]. Поэтому добиться высоких точностных характеристик гироскопа можно только при наличии в системе обратных связей. Как видно из (9) можно отчасти скомпенсировать погрешности от нелинейных факторов, выбрав определенное соотношение массы рамки и массы чувствительного элемента.

Литература

1. Пешехонов В. Г. Проблемы и перспективы современной гироскопии // Изв. вузов. Приборостроение. 2000. Т. 43, № 1—2. С. 48—55.
2. Попова И. В., Шабров А. А., Лестев А. М., Федоров М. В. Микромеханические инерциальные преобразователи параметров движения и навигационные системы / И. В. Попова, А. А. Шабров, А. М. Лестев, М. В. Федоров // Тез. докл. Междунар. науч.-техн. конгресса "Мехатроника и робототехника (МиР-2007)". - Санкт-Петербург, 2007.

3. Bebek O., Suster M., Rajgopal S., Fu M. Personal navigation via shoe mounted inertial measurement units // IEEE/RAS-EMBS International Conference on Intelligent, Robots and Systems. – Taipei, 2010. – P. 1052–1058.
4. Распопов В. Я. Микромеханические приборы. М.: Машиностроение, 2007. 400 с.
5. Лестев А.М., Ефимовская А.В. О влиянии нелинейных факторов на динамику микромеханического гироскопа с двухмассовым чувствительным элементом. // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2012, май. Т. 55. №5. С. 40–46.
6. В.Ф. Журавлев. Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов. Механика твердого тела. 1997 г. №6. С. 27-35.
7. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.

О СВОЙСТВАХ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ ГРАДИЕНТНО-УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Антонов А.М.¹, Ерофеев В.И.²

¹ Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Россия

² Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Россия

Аннотация. В данной работе рассматривается задача о распространении упругих поверхностных волн на границе градиентно-упругого полупространства. Решения уравнений ищутся путем введения скалярного и векторного потенциалов смещений. В отличие от модели классического континуума, тензор напряжений является несимметричным, а скорость поверхностной волны может превосходить скорость объемной сдвиговой волны [1]. В качестве численных иллюстраций приведено сравнение скорости поверхностной волны с фазовой скоростью сдвиговой волны, а так же приведены иллюстрации компонент перемещений и напряжений в поверхностной волне.

Ключевые слова. Градиентно-упругое полупространство, поверхностная волна, моментное напряжение, фазовая скорость, потенциал, частота.

Постановка задачи. Рассмотрим упругое изотропное полупространство $y \geq 0$ и предположим, что поверхностная волна распространяется в направлении оси x . Такого рода волна может возникнуть, если вызывающее ее возмущение не зависит от переменной z .

Уравнение движения с учетом моментных напряжений [2] запишется следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Компоненты тензора напряжений выражающийся через смещения u, v (причем $\sigma_{xy} \neq \sigma_{yx}$) примут вид:

$$\sigma_{xx} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2)$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - L^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]$$

$$\sigma_{yx} = \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + L^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]$$

где λ и μ - упругие постоянные Ламе, L^2 - отношение модуля кривизны к модулю сдвига μ , имеющая размерность квадрата длины, ρ – плотность среды.

Моментные напряжения μ_x и μ_y можно выразить через u, v :

$$\mu_x = 2 \mu L^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$\mu_y = 2 \mu L^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

В данной работе будем предполагать, что на свободной границе $y=0$ напряжения и момент отсутствуют, т.е. граничные условия примут вид: $\sigma_{ij}|_{y=0} = 0$ и $\mu_y = 0$.

Метод решения задачи. Данную задачу будем решать методом введения потенциалов [3]. Введем для области занятой полупространством, скалярный φ и векторный ψ потенциалы смещений, так что вектор смещения частиц u запишется в виде:

$$u = \nabla \varphi + \nabla * \psi$$

Поскольку волна плоская и движение не зависит от координаты z , u векторного потенциала будет отлична от нуля только компонента по оси z , эту компоненту обозначим просто через ψ . Потенциалы φ и ψ называются соответственно потенциалами продольных и сдвиговых волн.

Решение задачи. Получим уравнение в перемещениях, для этого подставим (2) в (1) и после подстановки вектора смещений частиц u получим:

$$\nabla \left[(\lambda + 2\mu) \Delta \varphi - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] + \nabla * \left[\mu \Delta (1 - L^2 \Delta) \psi - \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (4)$$

Уравнение (4) удовлетворяется, если каждое слагаемое из выражений в квадратных скобках равно нулю:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

$$\Delta (1 - L^2 \Delta) \psi - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

Где $c_1^2 = \frac{(\lambda+2\mu)}{\rho}$ - скорость продольной волны, а $c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$ - скорость сдвиговой волны.

Решение волновых уравнений будем искать в виде:

$$\varphi = A e^{\zeta y + i(\omega t - kx)} \quad (6)$$

$$\psi = B e^{\eta y + i(\omega t - kx)}$$

Из (6) видно, что волна гармоническая во времени и распространяется в направлении оси x . Фазовой скоростью, пока неизвестной, является $c = \frac{\omega}{k}$. Подставляя формулы (6) в (5), получим:

$$\zeta^2 + \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2 - k^2 = 0 \quad (7)$$

$$L^2\eta^4 - (1 + 2L^2k^2)\eta^2 + \left[k^2 + L^2k^4 - \left(\frac{\omega}{c_2}\right)^2\right] = 0$$

Для того чтобы возмущения убывали от границы во внутрь среды и соответствовали поверхностной волне, необходимо определить такие корни ζ и η уравнений (7), чтобы ζ и η были положительны. В результате получим:

$$\zeta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2}, k^2 > \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2 \quad (8)$$

$$\eta_{1,2} = \sqrt{\frac{(1 + 2L^2k^2) \pm \sqrt{(1 + 2L^2k^2)^2 - 4L^2 \left[k^2 + L^2k^4 - \left(\frac{\omega}{c_2}\right)^2\right]}}{2L^2}}$$

Тогда окончательное решение волновых уравнений (5) будет иметь вид:

$$\varphi = A e^{\zeta y + i(\omega t - kx)} \quad (8)$$

$$\psi = B_1 e^{\eta_1 y + i(\omega t - kx)} + B_2 e^{\eta_2 y + i(\omega t - kx)}$$

В предположении, что плоскость $y=0$ свободна от напряжений, мы имеем четыре граничных условия: $\mu_y = 0$, $\sigma_{yy}|_{y=0} = 0$, $\sigma_{yx}|_{y=0} = 0$, $\sigma_{yz}|_{y=0} = 0$. Последнее условие тождественно удовлетворяется в силу предположения о независимости деформаций от переменной z .

Компоненты смещения частиц u и v по осям x и y соответственно и компоненты напряжений σ_{yx} , σ_{yy} , μ_y можно представить через φ и ψ по формулам:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (9)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} \right) + 2\mu \left(\frac{d^2 \varphi}{dy^2} - \frac{d^2 \psi}{dx dy} \right)$$

$$\sigma_{yx} = \mu \left(2 \frac{d^2 \varphi}{dx dy} - \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{d^2 \psi}{dy^2} - L^2 \left(\frac{d^4 \psi}{dx^4} + 2 \frac{d^4 \psi}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 \psi}{dy^4} \right) \right) \quad (10)$$

$$\mu_y = -2 \mu L^2 \left(\frac{d^3 \psi}{dx^2 dy} + \frac{d^3 \psi}{dy^3} \right)$$

Подставляя в (9) выражения (10) и используя граничные условия $\sigma_{yy}|_{y=0} = 0$, $\sigma_{yx}|_{y=0} = 0$, $\mu_y = 0$ получим следующую систему уравнений:

$$\sigma_{yy} = A e^{\zeta y + i(\omega t - kx)} (\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2) + 2B_1 \mu i k \eta_1 e^{\eta_1 y + i(\omega t - kx)} + 2B_2 \mu i k \eta_2 e^{\eta_2 y + i(\omega t - kx)} = 0$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yx} &= -2A\mu\zeta\text{kie}^{\zeta y+i(\omega t-kx)} + B_1\mu e^{\eta_1 y+i(\omega t-kx)}(k^2 + \eta_1^2 + 2\eta_1^2 k^2 L^2 - \eta_1^4 L^2 - k^4 L^2) + \\
B_2\mu e^{\eta_2 y+i(\omega t-kx)}(k^2 + \eta_2^2 + 2\eta_2^2 k^2 L^2 - \eta_2^4 L^2 - k^4 L^2) &= 0 \\
\mu_y &= 2B_1 L^2 \eta_1 \mu e^{\eta_1 y+i(\omega t-kx)}(k^2 - \eta_1^2) + 2B_2 L^2 \eta_2 \mu e^{\eta_2 y+i(\omega t-kx)}(k^2 - \eta_2^2) = 0
\end{aligned} \quad (11)$$

Для определения A , B_1 и B_2 получили однородную систему алгебраических уравнений. Эта система имеет решения отличные от нуля, если определитель системы обращается в нуль.

$$\begin{aligned}
\eta_2(\lambda\zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu\zeta^2)(k^2 + \eta_1^2 + 2\eta_1^2 k^2 L^2 - \eta_1^4 L^2 - k^4 L^2)(k^2 - \eta_2^2) - \eta_1(\lambda\zeta^2 - \lambda k^2 + \\
+ 2\mu\zeta^2)(k^2 + \eta_2^2 + 2\eta_2^2 k^2 L^2 - \eta_2^4 L^2 - k^4 L^2)(k^2 - \eta_1^2) + 2k^2\zeta\eta_1\eta_2(\eta_2^2 - \eta_1^2) = 0
\end{aligned}$$

Учитывая: $\zeta = C_R^2 = \frac{\omega^2}{k^2 c_s^2}$, $\alpha = L^2 k^2$, $\beta = \frac{1-2\nu}{2-2\nu}$, где ν -коэффициент Пуассона, C_R -скорость поверхностной волны, получим:

$$\begin{aligned}
16(1-\beta\zeta)(1+\alpha-\zeta)[1+2\alpha+2\sqrt{\alpha(1+\alpha-\zeta)}] &= (2-\zeta)^2[(1-3\alpha^2)^2 + \alpha(3-\alpha)(1+ \\
\alpha-\zeta) + (1-\alpha^2)(1+\alpha-\zeta)^2 + \alpha(1+\alpha-\zeta)^3 + 2(1-3\alpha^2)(3-\alpha)\sqrt{\alpha(1+\alpha-\zeta)} + \\
2(1-3\alpha^2)(1-\alpha)(1+\alpha-\zeta) - 2(1-3\alpha^2)(1+\alpha-\zeta)\sqrt{\alpha(1+\alpha-\zeta)} + 2(3-\alpha)(1- \\
\alpha)(1+\alpha-\zeta)\sqrt{\alpha(1+\alpha-\zeta)} - 2(3-\alpha)(1+\alpha-\zeta)^2\alpha - 2(1-\alpha)(1+\alpha- \\
\zeta)^2\sqrt{\alpha(1+\alpha-\zeta)}]
\end{aligned} \quad (12)$$

При $L=0$ или $\alpha=0$ из (14) получится уравнение для скорости поверхностной волны в классическом случае

$$16(1-\beta\zeta)(1-\zeta) = (2-\zeta)^2(3 + (1-\zeta)^2 - 2\zeta)$$

На рис.1 представлены зависимости квадрата скорости поверхностной волны C_R от волнового числа α . Кривые представлены в безразмерной форме: квадрат скорости поверхностной волны отнесен к квадрату скорости сдвиговой волны c_s^2 . Кривые рассчитаны для двух значений коэффициента Пуассона: $\nu=0.2$ (сплошная кривая) и $\nu=0.5$ (пунктирная кривая). Из графика видно, что с увеличением волнового числа α , квадрат скорости поверхностной волны возрастает и, что при $\alpha \rightarrow \infty$, $\zeta \rightarrow 2$ или $C_R \rightarrow \sqrt{2}$. Так же можно отметить, что при определенных значениях волнового числа, скорость поверхностной волны может превышать скорость сдвиговой волны.

Рис.1 Зависимость квадрата скорости поверхностной волны от волнового числа.

Заметим, что в уравнение (12) входит частота ω , поэтому поверхностная волна обладает дисперсией, в отличие от классического случая.

Скорости. Получим выражение для фазовой скорости сдвиговой волны $V_\phi(\alpha)$ и сравним ее со скоростью поверхностной волны $C_R(\alpha)$.

Уравнение для сдвиговой волны учитывая уравнение (5) примет вид:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - L^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = \frac{1}{c_2^2} \frac{d^2 \psi}{dt^2}$$

Решение будем искать в виде: $\psi = \text{Ve}^{i(\omega t - kx)}$, откуда $\omega^2 = c_2^2 k^2 (1 + L^2 k^2)$

$$v_\phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c_2^2 (1 + L^2 k^2), \quad \frac{v_\phi^2}{c_2^2} = (1 + \alpha)$$

На рис.2 представлены две зависимости: квадрат скорости поверхностной волны C_R^2 и квадрат фазовой скорости сдвиговой волны V_ϕ^2 . Кривые представлены в безразмерной форме: квадрат скорости поверхностной волны C_R^2 и квадрат фазовой скорости сдвиговой волны V_ϕ^2 отнесены к квадрату скорости сдвиговой волны c_2^2 . Скорость поверхностной волны рассчитана для значения коэффициента Пуассона $\nu=0.5$. Из приведенной графика можно сделать вывод, что скорость поверхностной волны не может превышать фазовую скорость сдвиговой волны, но может достигать ее при определенных значениях волнового числа α .

Рис.2 Зависимости квадрата скорости поверхностной волны и квадрата фазовой скорости сдвиговой волны от волнового числа.

Перемещения. Компоненты смещения частиц u и v по осям x и y соответственно, при помощи решений волновых уравнений (8) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} U &= -iAke^{\zeta y + i(\omega t - kx)} + B_1 \eta_1 e^{\eta_1 y + i(\omega t - kx)} + B_2 \eta_2 e^{\eta_2 y + i(\omega t - kx)} \\ &= (-iAke^{\zeta y} + B_1 \eta_1 e^{\eta_1 y} + B_2 \eta_2 e^{\eta_2 y}) e^{i(\omega t - kx)} \\ V &= A\zeta e^{\zeta y + i(\omega t - kx)} + iB_1 k e^{\eta_1 y + i(\omega t - kx)} + iB_2 k e^{\eta_2 y + i(\omega t - kx)} \\ &= (A\zeta e^{\zeta y} + iB_1 k e^{\eta_1 y} + iB_2 k e^{\eta_2 y}) e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned} \quad (13)$$

из системы граничных условий (11) выразим постоянные B_1 и A через B_2 :

$$B_1 = -B_2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \left(\frac{k^2 - \eta_2^2}{k^2 - \eta_1^2} \right)$$

$$A = \frac{2iB_2\eta_2 k\mu}{(\lambda\zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu\zeta^2)} \left(\frac{k^2 - \eta_2^2}{k^2 - \eta_1^2} - 1 \right)$$
(14)

Используя (14) компоненты смещения по осям x и y , после взятия вещественных частей примут вид:

$$U = B_2\eta_2 \left[\frac{2k^2\mu}{(\lambda\zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu\zeta^2)} \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} - 1 \right) e^{-\zeta y} - \frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} e^{-\eta_1 y} + e^{-\eta_2 y} \right] \cos(kx - \omega t)$$

$$V = -B_2 \left[\frac{2k^2\mu\eta_2\zeta}{(\lambda\zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu\zeta^2)} \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} - 1 \right) e^{-\zeta y} - k \frac{\eta_2}{\eta_1} \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} \right) e^{-\eta_1 y} + k e^{-\eta_2 y} \right] \sin(kx - \omega t)$$

На рис.3 представлены зависимости амплитуд смещений U и V в поверхностной волне от глубины. Кривые представлены в безразмерной форме: амплитуды смещений отнесены к амплитуде нормального смещения на поверхности $V_{|y=0}$. Глубина отложена в долях длины волны. Из графика видно, что смещение, нормальное к поверхности, сначала возрастает, достигая своего максимума приблизительно при $y=0.1\lambda$, а затем монотонно убывает с глубиной, тогда как смещение параллельное поверхности, меняет знак на глубине примерно $y=0.15\lambda$.

Рис.3 Зависимости амплитуд перемещений в поверхностной волне от глубины.

Напряжения. Компоненты напряжений можно представить через потенциалы φ и ψ , и аналогично перемещениям выразив постоянные B_1 и A через B_2 , после взятия вещественных частей, получим:

$$\sigma_{yy} = B_2 \left[-2\eta_2 f \mu \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} - 1 \right) e^{-\zeta y} + 2\eta_2 f \mu \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} \right) e^{-\eta_1 y} - 2\eta_2 f \mu e^{-\eta_2 y} \right] \sin(kx - \omega t)$$

$$\sigma_{xx} = B_2 \left[2\eta_2 f \mu \frac{(\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu k^2)}{(\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2)} \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} - 1 \right) e^{-\zeta y} + 2\eta_2 f \mu \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} \right) e^{-\eta_1 y} - 2\eta_2 f \mu e^{-\eta_2 y} \right] \cos(kx - \omega t)$$

$$\sigma_{yx} = B_2 \left[\frac{4\eta_2 f^2 \mu^2}{(\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2)} \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} - 1 \right) e^{-\zeta y} - \mu \frac{\eta_2}{\eta_1} \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} \right) (k^2 + \eta_1^2 + 2\eta_1^2 k^2 L^2 - \eta_1^4 L^2 - k^4 L^2) e^{-\eta_1 y} + \mu (k^2 + \eta_2^2 + 2\eta_2^2 k^2 L^2 - \eta_2^4 L^2 - k^4 L^2) e^{-\eta_2 y} \right] \cos(kx - \omega t)$$

$$\sigma_{xy} = B_2 \left[\frac{4\eta_2 f^2 \mu^2}{(\lambda \zeta^2 - \lambda k^2 + 2\mu \zeta^2)} \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} - 1 \right) e^{-\zeta y} - \mu \frac{\eta_2}{\eta_1} \left(\frac{f^2 - \eta_2^2}{f^2 - \eta_1^2} \right) (k^2 + \eta_1^2 - 2\eta_1^2 k^2 L^2 + \eta_1^4 L^2 + k^4 L^2) e^{-\eta_1 y} + \mu (k^2 + \eta_2^2 - 2\eta_2^2 k^2 L^2 + \eta_2^4 L^2 + k^4 L^2) e^{-\eta_2 y} \right] \cos(kx - \omega t)$$

$$\mu_y = 2B_2 L^2 \mu \eta_2 (f^2 - \eta_2^2) (e^{-\eta_2 y} - e^{-\eta_1 y}) \cos(kx - \omega t)$$

$$\mu_x = 2B_2 L^2 \mu f (f^2 - \eta_2^2) \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} e^{-\eta_2 y} + e^{-\eta_1 y} \right) \sin(kx - \omega t)$$

На рис.4 представлены зависимости амплитуд напряжений σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yx} , σ_{yy} и моментных напряжений μ_x , μ_y в поверхностной волне от глубины. Кривые представлены в безразмерной форме: амплитуды напряжений и моментных напряжений отнесены к амплитуде нормального напряжения на поверхности $\sigma_{xx}|_{y=0}$, $\mu_x|_{y=0}$ соответственно. Глубина отложена в долях длины волны. Из графиков видно, что σ_{xx} меняет знак, тогда как σ_{yy} и σ_{yx} достигает максимума приблизительно при $y=0.2 \lambda$ и затем экспоненциально убывает с глубиной. Так же из рис.4 видно, что тензор напряжений в данном случае является не симметричным ($\sigma_{yx} \neq \sigma_{xy}$).

Рис.4 Зависимости амплитуд напряжений в поверхностной волне от глубины.

На рис.5 представлены зависимости амплитуд напряжений σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yx} , σ_{yy} в поверхностной волне от глубины в классическом случае (при $L=0$). Кривые представлены в безразмерной форме. Из графиков видно, что тензор напряжений стал симметричным, так как совпали амплитуды напряжений σ_{xy} , σ_{yx} и достигают максимума приблизительно при $y=0.2\lambda$.

Рис.5 Зависимости амплитуд напряжений в поверхностной волне от глубины в классическом случае (при $L=0$).

Приведенная на рис.3-5 совокупность кривых иллюстрирует, что поверхностная волна локализована в тонком поверхностном слое.

Заключение. Основной результат, полученный в работе, состоит в следующем. В рассмотренной модели градиентно-упругого полупространства скорость поверхностной волны C_R , может превосходить скорость сдвиговой волны c_2 , и при определенных значениях волнового числа достигать фазовую скорость сдвиговой волны. В отличие от классического случая скорость поверхностной волны зависит от частоты ω , поэтому поверхностная волна обладает дисперсией. Так же следует отметить, что вектор перемещений имеет продольную и поперечную составляющие, при этом поперечная составляющая всегда превосходит продольную.

Работа выполнялась при поддержке РФФИ (гранты № 15-08-01836, № 16-38-00426 мол-а).

Литература:

1. Сабодаш П.Ф., Филиппов И.Г. О воздействии подвижной нагрузки на упругое полупространство с учетом моментных напряжений // Прочность и пластичность.-М.: Наука.1971.
2. Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of Couple-stresses in Linear Elasticity. Departament of Civil Engineering Columbia University New York.1962.
3. Новацкий В.Теория упругости // В. Новацкий.-М.:Мир.1975.
4. Le Roux J. Etude geometrique de la flexion, dans les deformations infinitesimaleg d'nn milieu continu //Ann. Ecole Norm.Super.1911.28.523-579.
5. Le Roux J. Recherches sur la geometrie beg deformations finies // Ann. Ecole Norm. Super.1913.30.193-245.
6. Jaramillo T.J. A Generalization of the Energy Function of Elasticity Theory. Dissertation. Departament of Mathematics. University of Chicago. 1929.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ РАВНОВЕСИЯ РОБОТА С ЗАКЛИНИВАЮЩИМ ДВИЖИТЕЛЕМ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО СТЕРЖНЮ

Азарян Д.К.¹, Малолетов А.В.²

¹ВолГТУ, Волгоград, Россия, azaryan.d@yandex.ru

²ВолГТУ, Волгоград, Россия, maloletov@gmail.com

Аннотация. В работе описан принцип работы лазающего робота с движителем заклинивающего типа, приводимого в движение единственным приводным двигателем, рассмотрены условия осуществления его движения и реализации заклиненных положений равновесия и свободного хода его рам. Для анализа условий заклинивания предложен расчётный показатель требуемого коэффициента трения.

Ключевые слова. Мобильный робот, лазающий робот, заклинивание, управление движением.

Среди других классов мобильных аппаратов лазающие роботы отличаются наибольшим разнообразием, что объясняется разнообразием типов опорных поверхностей, по которым они должны осуществлять движение. Например, известны роботы для лазания по решетчатым конструкциям с активными [1] или пассивными [2] механическими захватами, по поверхностям из различных материалов с вакуумными движителями [3, 4], с магнитным [5, 6] или электростатическим [7] взаимодействием с поверхностью, многоногие роботы [8, 9], удерживающиеся на поверхностях за счёт сил трения при согласованной работе ног, и другие.

Одной из специфических областей, в которых востребованы лазающие роботы, является перемещение по длинным и относительно тонким поверхностям: стержням, столбам, балкам, трубам. Даже в такой достаточно узкой области разнообразие используемых типов движителей очень велико [10]. Среди них можно отметить, например, роботов с механическими захватами [11], использующие технику скалолазов без снаряжения [12], имитирующие способ передвижения гусеницы [13], использующие колёса прижатые к столбу [14], в том числе магнитные колёса [15].

В большинстве случаев лазающие роботы имеют большое число управляемых приводов и используют отдельные устройства — присоски, электромагниты, механические захваты для обеспечения контакта с поверхностью. Поэтому актуальной представляется разработка лазающих роботов с минимально возможным количеством приводов. Таким роботом является лазающий робот с движителями заклинивающего типа [16], предназначенный для перемещения по стержню постоянного диаметра, движение которого обеспечивается работой только одного линейного привода. Фиксация робота на опорном стержне обеспечивается эффектом заклинивания, благодаря работе того же привода. В работе ставится задача определения условий равновесия такого робота в общем случае произвольной ориентации опорного стержня в пространстве и разработка методов расчёта допустимых значений усилий в приводе робота.

Принципиальная схема движения робота показана на рисунке 1. Рамы робота 1 и 2 выполнены в виде жёстких конструкций, которые надеваются или обхватывают опору 3. Единственный двигатель робота 4 шарнирно прикреплён к рамам и реализует прямолинейное движение штока, увеличивая или уменьшая расстояние между рамами. При соответствующем подборе параметров и режимов работы двигателя удаётся осуществлять требуемое движение робота по опоре. Например, на рисунке 1.а двигатель робота работает на растяжение, нижняя или задняя рама 2 закинута на столбе, а верхняя или передняя рама 1 скользит по поверхности столба вверх. После достижения максимального выдвижения штока двигателя, он переключается в режим сжатия

(рисунок 1.6). При этом заклинивается передняя рама, а задняя скользит по поверхности столба вверх. После достижения минимального выдвижения штока, двигатель снова переключается в режим выдвижения. Таким образом, попеременно одна из рам робота заклинивается на столбе, а вторая осуществляет движение вперёд. Изменяя параметры или режимы работы двигателя удаётся обеспечить и движение в противоположном направлении.

Рис. 1. Принципиальная схема движения робота-верхолаза: а — перемещение верхней рамы, б — перемещение нижней рамы, 1 — передняя или верхняя рама, 2 — задняя или нижняя рама, 3 — опора, 4 — двигатель.

В работе [16] описана расчётная схема такого робота. Для описания динамической модели робота используются методы, аналогичные представленным в работе [17]. Поскольку двигатель робота работает по сути в цикловом режиме для решения задач оптимального управления по критерию энергозатрат основывается на подходах, описанных в [18, 19].

С учётом того, что опорный стержень может иметь произвольную ориентацию в пространстве каждая из двух рам робота может находиться в одном из четырёх положений устойчивого статического равновесия (рисунок 2), соприкасаясь со стержнем в двух точках. Возможны также четыре неустойчивых положения равновесия при контакте рамы робота с опорной поверхностью стержня в одной точке. Но практического значения эти случаи не имеют, поскольку для их реализации необходимо, чтобы результирующая всех активных сил, действующих на раму, проходила строго через точку контакта, и это условие при работе двигателя будет немедленно нарушаться.

В каждом из указанных положений условия равновесия описываются своей системой уравнений. Причём задача является статически неопределимой, так для плоского случая количество уравнений равновесия равно трём, а количество неизвестных реакций опорной поверхности стержня — четырем: нормальная и касательная реакции в каждой из двух точек контакта рамы со стержнем. Эта неопределимость разрешается путём использования предположения, что условия трения в обеих точках контакта рамы со стержнем одинаковые, и следовательно соотношение между касательной и нормальной реакциями в каждой точке контакта равны. Это соотношение, вычисляемое для расчётных значений реакций называется *требуемый коэффициент трения* f . Требуемый коэффициент трения является расчётной величиной, в отличие от реализуемого коэффициента трения f_r , который определяется физической природой взаимодействующих тел как предельное значение коэффициента трения покоя. Например, для случая рис.2.а контакт рамы со стержнем реализуется в точках О и В, и

требуемый коэффициент трения определяется как:

$$f = \frac{F_O}{R_O} = \frac{F_B}{R_B} \quad (1)$$

и вычисляется путём разрешения соответствующих уравнений равновесия. Сравнивая значения реализуемого и требуемого коэффициентов трения без учёта знака последнего можно сделать вывод о том будет ли рама находится в равновесии или она будет осуществлять скольжение по стержню.

Так, условием заклинивания рамы является неравенство

$$|f| \leq f_r \quad (2)$$

а в случае выполнения условия

$$|f| > f_r \quad (3)$$

рама будет осуществлять движение.

Рис. 2. Случаи устойчивого статического равновесия рамы робота на стержне

Требуемый коэффициент трения зависит от массо-геометрических параметров робота и от усилия, реализуемого двигателем. Таким образом управление работой двигателя может быть сведено к контролю за реализуемым усилием таким образом, чтобы в соответствующих фазах движения для одно из рам, той которая должна оставаться неподвижной, требуемый коэффициент трения был меньше реализуемого. А для движущейся рамы — больше реализуемого.

Разработанное программное обеспечение позволяет вычислять значения требуемого коэффициента трения для различных положений и фаз движения робота в зависимости от усилия в приводном двигателе. В качестве примера на рисунке 3 приведены зависимости требуемого коэффициента трения f от усилия в приводе P для двух рам робота, движущегося по вертикальному столбу в режиме перемещения верхней рамы 1. Параметры расчётной модели соответствуют разработанному лабораторному прототипу робота массой 0,3 кг.

Анализ полученных зависимостей показывает, что требуемый коэффициент трения

для нижней рамы принимает относительно небольшие значения и остаётся почти постоянным при любых значениях усилия в приводе. При достаточно малых значениях усилия P в приводе (примерно до 1,5 Н для рассматриваемой модели) верхняя рама под действием силы тяжести находится в положении, показанном на рисунке 2.б. Требуемый коэффициент трения имеет достаточно маленькие значения, то есть рама находится в неподвижном состоянии. При значениях усилия в приводе порядка 2 Н и больше, двигатель разворачивает раму в положение рис. 2.а, а требуемый коэффициент трения принимает гораздо большие значения, которые впрочем быстро убывают с ростом P . То есть, движение верхней рамы возможно пока выполняется условие (3). При достаточно большом усилии в приводе требуемый коэффициент трения может уменьшиться до значений реализуемого коэффициента и верхняя рама заблокируется.

Рис. 3. Зависимости требуемого коэффициента трения от усилия в приводе: 1 — передняя (верхняя) рама, 2 — задняя (нижняя) рама.

Разрывы графиков в центральной части рисунка соответствуют переходному процессу, в результате которого верхняя рама переходит из неподвижного положения рис. 2.б в подвижное состояние рис. 2.а. Этот режим не является устойчивым.

Таким образом, движение верхней рамы возможно при работе двигателя в узком диапазоне значений усилия в приводном двигателе. Для рассмотренного в примере случая этот диапазон начинается от границы перехода рамы робота в положение рис. 2.а (примерно 2 Н для заданных значений параметров) и заканчивается при достижении условия (2). Например, если реализуемый коэффициент трения $f_r = 0,3$, то верхняя граница допустимого усилия в приводе около 2,8 Н, а при $f_r = 0,4$ допустимое усилие примерно равно 2,3 Н.

Лазающий робот рассматриваемого типа имеет предельно простую кинематическую схему, предполагающую использование всего одного приводного двигателя. Однако диапазон изменения параметров, при которых робот будет эффективно перемещаться, достаточно узок, что требует учитывать при разработке алгоритмов управления таким роботом. Введённый расчётный показатель требуемого коэффициента трения представляется удобным инструментом для анализа режимов движения робота.

Литература

1. Load Allocation Control in Motion Transfer from Ladder Climbing to Brachiation for a Multi-locomotion Robot / Zhiguo Lu, Tadayoshi Aoyama, Kosuke Sekiyama And Toshio

- Fukuda // CLAWAR 2010: 13th International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines, Nagoya, Japan, 31 August - 03 September 2010. P. 1195-1201.
2. Development of Passive Spine and Actuated Rear Foot for an Ape-like Robot Daniel / Kühn, Felix Bernhard, Felix Grimminger, Sven Simon, And Frank Kirchner // CLAWAR 2010: 13th International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines, Nagoya, Japan, 31 August - 03 September 2010. P. 1195-1201.
 3. Градецкий, В.Г. Состояние и перспективы развития роботов вертикального перемещения для экстремальных сред / Градецкий В.Г., Князьков М.М. // Робототехника и техническая кибернетика. - 2014. - № 1 (2). - С. 9-16.
 4. Черноусько, Ф.Л. Мобильные роботы: проблемы управления и оптимизации движений / Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. // В сборнике: XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014 Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. - 2014. - С. 67-78.
 5. Peters, G. A Prototype Climbing Robot for Inspection of Complex Ferrous Structures / G. Peters, D. Pagano, D. K. Liu, K. Waldron // CLAWAR 2010: 13th International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines, Nagoya, Japan, 31 August - 03 September 2010. P. 1195-1201.
 6. Яцун, С.Ф. Виброробот для вертикального движения по металлической шероховатой поверхности / Яцун С.Ф., Локтионова О.Г., Черепанов А.А., Рублев С.Б. // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. - 2010. - Т. 12. № 4-3. - С. 651-655.
 7. Longo, D. Performance Evaluation of Electrostatic Adhesion for Climbing Robots / Domenico Longo, Giovanni Muscato, Giuseppe Tarantello // CLAWAR 2010: 13th International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines, Nagoya, Japan, 31 August - 03 September 2010. P. 1195-1201.
 8. Голубев Ю.Ф., Корянов В.В., “Управление инсектоморфным роботом при залезании на вершину вертикального угла и при движении по приставной лестнице”, Известия РАН. Теория и системы управления, 2008, № 1, с. 148-157.
 9. Голубев Ю.Ф., Корянов В.В., “Компьютерное исследование динамики и управления движением электромеханического лазающего робота”, Информационно-измерительные и управляющие системы, 2006, т. 4, № 1/3, с. 41-55.
 10. Wolfgang Fischer, “Design of compact climbing robots for power plant inspection”, a dissertation for the degree of doctor of philosophy, 2010.
 11. Changhwan Choi, Seungho Jung, and Seungho Kim, “Feeder Pipe Inspection Robot with an Inch-Worm Mechanism Using Pneumatic Actuators”, International Journal of Control, Automation, and Systems, Vol. 4, No. 1, pp. 87-95, February 2006.
 12. Ruixiang Zhang, “Design and implementation of an autonomous climbing robot”, a dissertation submitted to the department of computer science and the committee on the graduate studies of Stanford University in partial fulfillment of the requirements for the degree of doctor of philosophy, January 2014.
 13. Maempel J., Koch T., Koehring S., “Concept of a modular climbing robot”, IEEE Symposium on Industrial Electronics and Applications (ISIEA 2009), Vol. 2, October 4-6.
 14. Sang Heon Lee, “Design of the Out-pipe type Pipe Climbing Robot”, International journal of precision engineering and manufacturing, Vol. 14, No. 9, pp. 1559-1563.
 15. Fabien Tache, Francois Pomerleau, Gille Caprari, Roland Siegwart, “Three-dimensional localization for the MagneBike”, Journal of Field Robotics, Vol. 28, No. 2, pp. 180-203, March 2011.
 16. Майстренко, В.С. Лазающий робот с двигателем, работающим на эффекте периодического «динамического заклинивания» / Майстренко В.С., Темин Р.А., Малолетов А.В. // В сборнике: XXVIII Международная инновационно-

- ориентированная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС - 2016) сборник трудов конференции. - 2017. - - С. 260-263.
17. Колесов, А.М. Динамическая модель шагающего робота переменной структуры / Колесов А.М., Малолетов А.В. // В сборнике: III Международная Школа-конференция молодых ученых "Нелинейная динамика машин" - School-NDM 2016 Сборник трудов. Российский научный фонд, Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН; Под редакцией В.К. Асташева, В.Л. Крупенина, Г.Я. Пановко, К.Б. Саламандра. - 2016. - С. 172-175.
18. Брискин, Е.С. Об управлении движением шагающей машины с двигателем минимальной мощности / Брискин Е.С., Жога В.В., Малолетов А.В. // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. - 2009. - № 6. - С. 21-30.
19. Брискин, Е.С. О прикладных экстремальных задачах с комплексным критерием качества / Брискин Е.С., Калинин Я.В., Леонард А.В., Малолетов А.В. // В сборнике: XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014 Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. - 2014. - С. 2184-2195.

МОДЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ «КОМПРЕССИОННОЙ» СИЛЫ НА ДИНАМИКУ ГЛУБОКОВОДНОГО ШАГАЮЩЕГО АППАРАТА

Арыканцев В.В., Чернышев В.В.

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия,
arvstu@mail.ru, vad.chernyshev@mail.ru

Аннотация. Обсуждаются результаты математического моделирования динамики периодических режимов движения шагающих аппаратов передвигающихся по дну с учетом «компрессионного эффекта». Компрессионный эффект имеет место при шагающем способе передвижения на подводных или водонасыщенных грунтах — при смене ног, из-за разрежения под стопой, выходящей из опорной фазы, возникает сила препятствующая ее отрыву от грунта. Исследовано влияние «малой» и «большой» компрессионной силы на динамику вертикальных колебаний корпуса шагающего аппарата. Полученные результаты могут быть востребованы при проектировании шагающих машин и роботов предназначенных для подводно-технических работ и новых промышленных технологий освоения ресурсов морского дна.

Ключевые слова. Аппараты передвигающиеся по дну, шагающий движитель, взаимодействие с грунтом, компрессионный эффект, динамическое моделирование.

При проведении подводно-технических работ и внедрении новых глубоководных технологий освоения ресурсов морского дна важная роль отводится донным самоходным агрегатам, несущим на себе бульдозерное, геологоразведочное, добычное и др. оборудование. В качестве средств передвижения по дну уже используются гусеничные и колёсные машины [1–2]. Однако тяжелые условия эксплуатации таких машин, обусловленные низкой несущей способностью грунтов и сложным рельефом морского дна, зачастую делают малоэффективными традиционные типы движителей. Для работы в подводных условиях более подходят шагающие машины, которые обладают более высокой грунтовой и профильной проходимостью [3, 4].

При шагающем способе передвижения в подводных условиях имеются специфические особенности взаимодействия опорных элементов шагающего движителя с грунтом. В частности, имеет место «компрессионный эффект» который возникает при смене ног (при переступании). Из-за разрежения под стопой при выходе ее из опорной фазы, возникает сила препятствующая отрыву стопы от грунта. На вязких слабонесущих грунтах с низкими гидрофильными свойствами эта сила может достигать значительной величины. Предполагается, что с ростом глубины компрессионная сила будет возрастать из-за роста давления внешней среды. Известны случаи, когда глубоководные аппараты, в частности «Мир», из-за компрессионного эффекта с большим трудом отрывались от донного грунта.

В отличие от традиционных транспортных средств, динамику взаимодействия шагающего движителя с опорной поверхностью можно рассматривать только с учетом динамики всей шагающей машины, совершающей вертикальные колебания, вызванные самим шагающим способом передвижения [5]. При математическом моделировании шагающая машина рассматривалась в виде системы тел — корпуса и 2-х невесомых шагающих движителей (ног). Моделировались периодические режимы движения. Рассматривался случай статически устойчивых шагающих машин. Также считалось, что курсовое движение не влияет на динамику вертикальных колебаний корпуса и динамику изменения опорных реакций. В качестве расчетной использовалась адаптированная к условиям рассматриваемой задачи 2-х нога динамическая модель с вертикальным поступательным движением корпуса [6].

Движение корпуса шагающей машины происходит под действием создаваемых движителями кинематических возмущений, характер которых определяется относительным движением опорных точек механизмов шагания в фазе опоры на грунт. Вертикальное положение стоп в абсолютном движении определяется переносным движением корпуса и относительным движением ног по отношению к корпусу (рис. 1):

$$z_i = z - z_i^{(r)} \quad (1)$$

где $z = z(t)$ — закон вертикального движения корпуса машины; $z_i^{(r)} = z_i^{(r)}(t)$ — закон вертикального перемещения стоп в относительном движении ($i = 1, 2$).

Рис. 1. Расчетная схема: 1, 2 — стопы; 3 — корпус; 4 — грунт

При математическом моделировании рассматривались шагающие движители циклового типа существующих шагающих машин «Восьминог» [7] и «МАК-1» [8], предназначенных для работы на влагонасыщенных и подводных грунтах, соответственно. Для определения закона относительного движения стоп проводился кинематический анализ механизмов шагания. Зависимости $z_i^{(r)}(t)$ в интервале $(0, T)$, где $T = 2\pi/\omega$ — период цикла, ω — частота шагания, аппроксимировались тригонометрическим полиномом. В движителе с работающими в противофазе 2-мя механизмами шагания наиболее существенны члены 2-й гармоники [9]. Тогда закон относительного движения стоп 2-х ногих движителей в вертикальном направлении можно представить в виде

$$\begin{aligned} z_1^{(r)} &= z_0 + z_a^{(r)} \cos(2\omega t + \alpha) \\ z_2^{(r)} &= z_0 + z_a^{(r)} \cos(2\omega t + \alpha + \pi) \end{aligned} \quad (2)$$

где $z_a^{(r)}$ — амплитуда относительных перемещений стоп в вертикальном направлении; z_0 и α — начальные положение и фаза 1-ой стопы относительно корпуса машины.

При математическом описании грунтов использовалась вязкоупругопластичная модель с различными соотношениями вязких и упругих свойств. Для учета сил упругого сопротивления при взаимодействии стопы с грунтом вводилась сила упругости F_i , пропорциональная деформации грунта, в случае слабонесущих грунтов также учитывалось уплотнение грунта и необратимость пластических деформаций:

$$F_i = \begin{cases} c_z z_i U_i & \text{при } \dot{z}_i \leq 0 \\ k_{Cz} c_z z_i U_i & \text{при } \dot{z}_i > 0 \end{cases} \quad (3)$$

где c_z — жесткость грунта в нормальном направлении; U_i — единичная функция, описывающая состояние i -той ноги движителя, равная 1 в фазе опоры и 0 в фазе переноса; k_{Cz} — коэффициент, характеризующий уплотнение грунта, нормируемый из условия $c_z z_{\max} = k_{Cz} c_z (z_{\max} - h)$, где $z_{\max}$ — максимальная деформация грунта; h — глубина следовой дорожки.

Для учета неупругого сопротивления при нагружении стопой грунта вводилась односторонняя сила вязкого трения R_i , пропорциональная скорости деформации грунта.

$$R_i = \begin{cases} \mu_z \dot{z}_i U_i & \text{при } \dot{z}_i \leq 0 \\ 0 & \text{при } \dot{z}_i > 0 \end{cases}, \quad (4)$$

где μ_z — коэффициент вязкого сопротивления грунта.

Для оценки влияния компрессионного эффекта на динамику шагающей машины к силам F_i и R_i также добавлялась компрессионная сила Q_i , действующая на стопу при ее отрыве от грунта. Природа этой силы пока недостаточно изучена. Очевидно, что она зависит от площади и физического состояния опорной поверхности. Практика также показывает, что компрессионная сила существенно зависит от скорости отрыва стопы от грунта. При «быстром» движении стопы в момент отрыва от опорной поверхности имеет место большая компрессионная сила, так как под стопой возникает разрежение и приходится преодолевать давление окружающей среды. При «медленном» движении стопы вода успевает фильтроваться в зону контакта, что приводит к уменьшению разности давления и для отрыва стопы от грунта требуется сила меньшей величины. Предполагается, что с увеличением глубины компрессионная сила будет возрастать из-за роста давления внешней среды. Величина силы в процессе отрыва стопы от грунта меняется незначительно [10]. Поэтому при моделировании принималось, что $Q = \text{const}$ и действует только при обратном ходе стопы

$$Q_i = \begin{cases} 0 & \text{при } \dot{z}_i \leq 0 \\ Q_{\max} & \text{при } \dot{z}_i > 0 \end{cases}. \quad (5)$$

Также рассматривался случай, когда сила Q пропорциональна степенной зависимости скорости отрыва стопы от грунта, при этом также считалось, что сила действует только при обратном ходе стопы

$$Q_i = \begin{cases} 0 & \text{при } \dot{z}_i \leq 0 \\ k_V |\dot{z}_i|^n U_i & \text{при } \dot{z}_i > 0 \end{cases} \quad (6)$$

где k_V и n — коэффициенты, определяемые физическим состоянием опорной поверхности стопы, [гидрофильными](#) свойствами грунта, площадью стопы, давлением внешней среды и др.

Уравнение поступательного движения корпуса машины вдоль оси Oz имеет вид

$$m\ddot{z} = N_1 + N_2 - G - R_w \quad (7)$$

где m и G — масса и отрицательная плавучесть шагающего аппарата, соответственно; $N_i = F_i + R_i + Q_i$ — нормальные реакции грунта под стопами; $R_w = \mu_w \dot{z}$ — сила гидравлического сопротивления воды, действующая на корпус при его вертикальных колебаниях; μ_w — коэффициент вязкого сопротивления воды.

Уравнения (1)–(7) образуют систему, определяющую вертикальное движение корпуса и стоп шагающей машины, а также опорные нормальные реакции грунта. Система уравнений решалась численно. При моделировании варьировались вязкоупругие характеристики грунта, скорость его нагружения и коэффициенты, характеризующие компрессионный эффект. Были получены законы движения стоп $z_i(t)$ и центра масс корпуса $z(t)$, а также зависимости $N_i(t)$ нормальных реакций грунта. Полученные временные характеристики представлялись в функции от фазы шага $\varphi = \omega t$. Некоторые результаты моделирования представлены на рис. 2 – 4.

Рис. 2. Нормальные реакции грунта (а), реакции грунта в случае компрессионной силы (б) и вертикальные перемещения стоп (кривые 1, 2) и центра масс (кривая 3) шагающего аппарата для жёсткого грунта ($c_z=500 \text{ кН/м}$; $\mu_z=10 \text{ кН·с/м}$).

Рис. 3. Нормальные реакции грунта (а), реакции грунта в случае большой компрессионной силы (б) и вертикальные перемещения стоп (кривые 1, 2) и центра масс (кривая 3) шагающего аппарата для вязкоупругого грунта ($c_z=50 \text{ кН/м}$; $\mu_z=10 \text{ кН·с/м}$).

Рис. 4. Нормальные реакции грунта (а), реакции грунта в случае большой компрессионной силы (б) и вертикальные перемещения стоп (кривые 1, 2) и центра масс (кривая 3) шагающего аппарата для вязкоупругого грунта ($c_z=10$ кН/м; $\mu_z=100$ кН·с/м).

Моделирование показало, что характер колебаний в системе в зависимости от типа грунта скорости нагружения и величины компрессионной силы существенно меняется. На упругих грунтах, после смены стоп, наблюдаются затухающие малые колебания стопы на грунте. Компрессионная сила в этом случае оказывает демпфирующий эффект. На вязкоупругих грунтах имеют место более существенные колебания стопы на грунте, которые происходят с частотой того же порядка, что и частота шагания. В этом случае влияние компрессионной силы незначительное. На вязких грунтах стопа в течение полцикла погружается в грунт, после смены стоп процесс повторяется с нулевого уровня. Компрессионная сила в этом случае приводит к скачку опорных реакций. Во всех случаях имеет место рост максимальных значений опорных реакций, в сравнении со статическими. При увеличении скорости нагружения значения опорных реакций возрастают. Компрессионная сила во всех случаях приводит к росту энергозатрат на передвижение и поэтому нежелательна.

Полученные результаты могут быть востребованы при проектировании шагающих машин и роботов, предназначенных для подводно-технических работ и новых промышленных технологий освоения ресурсов морского дна.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 16-31-00427-мол_а. 16-08-01109-а

Литература

1. Чернышев, В.В. Управление движением подводных шагающих аппаратов передвигающихся по дну / В.В. Чернышев, В.В. Арыканцев, Ан.Е. Гаврилов // Известия ЮФУ. Технические науки : по матер. всерос. «Перспективные системы и задачи управления». - 2016. - № 1. - С. 141-155.
2. Nautilus Minerals [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.nautilusminerals.com. – Загл. с экрана.
3. Чернышев, В.В. Опыт использования шагающей машины для ликвидации аварийного разлива нефти / В.В. Чернышев // БЖ. - 2003. - №5. - С. 28-30.
4. V.V. Chernyshev, V. V. Arykantsev, A. E. Gavrilo et al, Design and underwater tests of subsea walking hexapod MAK-1. Proc. of the ASME 2016 35th Int. Conf. on Ocean, Offshore and Arctic Engineering OMAE 2016. Busan, 2016. – 9 p., 2016.
5. V.V. Chernyshev et al, Modeling of the Dynamics of the Walking Machine with the Cyclic Propulsors as System Solids with Elastic and Damping Relations, The 3rd Joint International Conference on Multibody System Dynamics. The 7th Asian Conference on Multibody Dynamics, Busan (Korea), 2014. – 9 p. (pdf), <http://imsd-acmd2014.ksme.or.kr/>.
6. Брискин, Е.С. Моделирование динамики смены стоп шагающих машин / Е.С. Брискин, В.В. Чернышев // Искусственный интеллект. - 2009. - № 3. - С. 293-299.
7. Шагающая машина "Восьминог" / Е.С. Брискин, В.В. Чернышев, А.В. Малолетов, и др. // Мехатроника, автоматизация, управление. - 2004. - №5. - С. 48-49.
8. Чернышев, В.В. МАК-1 – подводный шагающий робот / В.В. Чернышев, В.В. Арыканцев // Робототехника и техническая кибернетика. - 2015. - № 2. - С. 45-50.
9. Чернышев, В.В. Пассивное поддрессирование в мобильных робототехнических системах с цикловыми механизмами шагания / В.В. Чернышев // Известия вузов. Машиностроение. - 2003. - №1. - С. 31-39.
10. Чернышев, В.В. Моделирование динамики штамповой установки при взаимодействии с подводным грунтом / В.В. Чернышев, В.В. Арыканцев // Известия ВолгГТУ. Сер. Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах. Вып. 22. - 2014. - № 25. - С.11-14.

ЦИКЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА УГЛОВ АТАКИ НА ЛОПАСТЯХ ГОРИЗОНТАЛЬНО-ОСЕВОЙ ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ В УСЛОВИЯХ РЫСКАНИЯ И АЭРОАКУСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Афанасьева Н.А.¹

Дудник В.В., д-р техн. наук, проф.²,

Гапонов В.Л., д-р техн. наук, проф.³,

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская

Федерация, nadezda.a.afanasjeva@gmail.com¹, vydudnik@mail.ru²,

v.gaponov6591@vandex.ru³

Аннотация. Целью работы является исследование циклической динамики распределения углов атаки на лопастях горизонтально-осевой ветроэнергетической установки в условиях рыскания и связанных с этим аэроакустических процессов. В рамках цели, поставлена задача, – смоделировать механизмы циклической динамики параметров обтекания и аэроакустических процессов, обусловленной процессом рыскания и другими существенными факторами нестационарности потока. Рассмотрен шум турбулентного пограничного слоя как основной механизм образования аэродинамического шума в процессах обтекания. Для расчета уровня звукового давления и спектра шума применена одна из классических, полуэмпирических моделей ВРМ. Обнаружено существенное влияние на рассмотренные показатели угла косой обдувки, обусловленного ошибкой рыскания, а также влияния градиентов скорости вблизи мачты и в приземном слое атмосферы. Наблюдается искажение циклической динамики распределения углов атаки на лопастях в процессе вращения. Присутствует как горизонтальная, так и вертикальная асимметрия распределения углов атаки в плоскости вращения. Амплитудно-частотный анализ шума, образуемого на элементах лопасти, показал фундаментальное влияние динамики распределения локальных углов атаки на спектр образуемого шума. Уровень звукового давления находится в прямой зависимости от скорости притекания и возрастает по мере удаленности участка лопасти от центра ее вращения.

Ключевые слова: Ветроэнергетическая установка, шум турбулентного пограничного слоя, уровень звукового давления, спектр шума, угол атаки.

Введение. Разработки в области возобновляемых источников энергии являются одними из наиболее востребованных на современном рынке энергетических технологий. Малые горизонтально осевые ветроэнергетические установки (ГО ВЭУ) представляют особый интерес, поскольку применимы как для промышленной, так и для частной электрификации. Особенно, в районах, удаленных от централизованных сетей энергоснабжения. Шум ВЭУ часто выступает ключевым фактором, определяющим её приемлемость, сравнивая с другими автономными электрогенераторами. Целью данной работы, является исследование циклической динамики распределения углов атаки и аэроакустических процессов на лопастях ГО ВЭУ в условиях рыскания.

Первоочередной задачей, при расчете шума ВЭУ является определение главных механизмов его образования (источников). По результатам многих теоретических и экспериментальных исследований, аэродинамический шум турбулентного пограничного слоя это наиболее характерный механизм, преимущественно определяющий суммарный уровень звукового давления от работы ВЭУ. Характерна зависимость этого вида шума от величин угла атаки и скорости притекания, возникающих на лопасти. Вращение лопастей в условиях нестационарности ветрового потока обуславливает цикличность динамики распределения локальных углов атаки и скоростей притекания по радиусу лопасти и по

азимуту ее вращения. Задача, решаемая в работе, – смоделировать механизмы циклической динамики параметров обтекания и аэроакустических процессов, обусловленной процессом рысканья и другими существенными факторами нестационарности потока.

Существует множество методов и подходов к решению такой задачи. Степень точности, требуемая для вычисления шума турбулентного пограничного слоя, обеспечивается моделями II класса (согласно классификации M.V. Lowson) [1]. F.T. Brooks, D.S. Pope, M.A. Marcolini разработали одну из классических и широко применяемых полуэмпирических моделей, получившую название BPM [2]. Указанная модель оптимальна для исследования и прогноза аэродинамического шума ВЭУ.

Математическое моделирование.

Методика оценки аэродинамики ветроколеса ГО ВЭУ. Угол атаки является фундаментальным параметром аэродинамики лопастей. Он обуславливает режим обтекания, определяя особенности формирования и развития турбулентного пограничного слоя. Режим обтекания обуславливает характер турбулентности пограничного слоя и соответствующих аэроакустических процессов.

Угол атаки определяет точку схода вихрей с образующей аэродинамического профиля лопасти в каждом элементарном сечении. На Рис. 1(а) представлена схема скоростей и углов, возникающих на профиле лопасти при вращении. Рис. 1(б, в) схематически отражает принцип перехода между режимами обтекания при достижении критического значения угла атаки $\alpha_{кр}$.

Угол атаки, α_A является функцией от локальной скорости притекания, V_Σ . Скорость V_Σ включает в себя скорость набегающего на ветроколесо ветрового потока V_0 , за вычетом индуктивной составляющей V_{ind} , (V_I), и составляющую скорости, ориентированную по вектору силы, направленной на вращение (в элементарном сечении, с радиусом r и радиальной скоростью ω). На итоговую величину V_Σ также накладывается влияние угла косой обдувки α_B , обусловленного ошибкой рысканья, а также градиенты скорости ветрового потока, вблизи мачты (тень мачты) и в приземном слое атмосферы. Локальный угол атаки можно выразить в виде:

$$1. \quad \alpha_A = \beta - \varphi = \arctg \frac{V_Y}{V_X} - \varphi, \quad (1)$$

где V_Y – составляющая скорости притекания, направленная вдоль оси вращения ветроколеса, Y , по направлению силы тяги; V_X – составляющая скорости притекания, ориентированная вдоль плоскости вращения ветроколеса, X , по вектору силы, направленной на вращение; φ – локальный угол установки элемента лопасти, °; β – локальный угол притекания, °.

Итоговые составляющие скорости притекания в плоскости профиля элемента лопасти, исходя из схемы, представленной на Рис. 1, можно записать так:

$$\begin{cases} V_X = \omega \cdot r_T + V_0^h \cdot \sin(\alpha_B) \cdot \cos(\psi) \\ V_Y = V_0^h \cdot \cos(\alpha_B) + V_{ind} + V_{ep}^m \cdot \sin(\alpha_B) \cdot \cos(\psi) \end{cases}, \quad (2)$$

где r_T – текущее значение локального радиуса элемента лопасти, м; ω – угловая скорость вращения лопасти, рад⁻¹; ψ – азимутальное положение лопасти, °; V_{ep}^m – окружная скорость движения элемента лопасти относительно оси поворота ветродвигателя при рысканье, м/с; V_0^h – скорость ветра на высоте h , м/с.

Рис. 1. Схема скоростей и углов, возникающих на аэродинамическом профиле лопасти (а). Режимы обтекания профиля, вызывающие характерный аэродинамический шум: б) обтекание без срыва потока ($\alpha_A \leq \alpha_{кр}$); в) обтекание со срывом потока ($\alpha_A > \alpha_{кр}$)

Влияние тени мачты на величину скорости притекания представляет собой задачу обтекания кругового цилиндра плоскопараллельным течением воздуха. При этом, градиент скорости от тени мачты оказывает влияние только на нижнюю половину плоскости вращения $0^\circ \leq \psi \leq 90^\circ$ и $270^\circ \leq \psi \leq 360^\circ$, при $\psi = 0^\circ$ в крайнем нижнем положении лопасти. Практические исследования, однако, показали, что область влияния меньше и расположена в пределах $0^\circ \leq \psi \leq 70^\circ$ и $250^\circ \leq \psi \leq 360^\circ$ [3]. Полная модель, позволяющая рассчитать основные аэродинамические параметры работы ГО ВЭУ, приведена в [4].

Методика оценки аэроакустики ветроколеса ГО ВЭУ. Аэродинамический шум, возникающий на профиле лопасти является функцией от угла атаки.

Звуковые волны, распространяющиеся от поверхности лопасти, отражают изменения поверхностного давления в турбулентном пограничном слое. В условиях дозвукового течения, выделяют два основных режима обтекания, приводящих к возникновению характерных типов шума [2]:

- Обтекание без срыва. При не нулевых значениях угла атаки поток может отделяться от поверхности лопасти в области замыкающей кромки со стороны разрежения, вызывая, так называемый, шум турбулентного пограничного слоя на замыкающей кромке (Turbulent Boundary Layer Trailing Edge (TBL-TE) noise) (рис. 1(б)).

- Обтекание со срывом. При значениях угла атаки свыше критического поток в области замыкающей кромки со стороны разрежения, может существенно отделяться, приводя к срыву крупных вихрей, прежде, чем поток достигнет замыкающей кромки. Это приводит к, так называемому, шуму турбулентного пограничного слоя при срыве потока (TBL Separation Stall (TBL-SS) noise) (Рис. 1(в)).

В рамках моделей II класса точности, применяется подход деления лопасти на конечное число элементов, каждый из которых характеризуется локальными геометрическими и аэродинамическими параметрами.

Основное выражение полуэмпирической модели II класса точности ВРМ для определения суммарного уровня звукового давления (УЗД) TBL-TE шума в 1/3 октавных полосах частот имеет вид:

$$SPL_{TBL-TE} = 10 \log_{10} \left(10^{\frac{SPL_p}{10}} + 10^{\frac{SPL_s}{10}} + 10^{\frac{SPL_{\alpha A}}{10}} \right) \text{ if } \alpha_A \leq \alpha_{kp} \quad (3)$$

где SPL_{TBL-TE} – УЗД обусловленный взаимодействием турбулентного пограничного слоя с замыкающей кромкой лопасти, дБ; α_A – угол атаки; α_{kp} – критический угол атаки, вызывающий срыв потока; SPL_p – УЗД на стороне нагнетания (pressure) потока на лопасти, дБ; SPL_s – УЗД на стороне разрежения (suction), дБ; $SPL_{\alpha A}$ – УЗД учитывающий изменяющийся угол атаки, дБ.

В случае режима обтекания со срывом, при $\alpha_A > \alpha_{kp}$, уравнение (3) принимает вид:

$$SPL_{TBL-SS} = 10 \log_{10} \left(\underbrace{10^{\frac{SPL_p}{10}}}_{=0} + \underbrace{10^{\frac{SPL_s}{10}}}_{=0} + 10^{\frac{SPL_{\alpha A}}{10}} \right) \text{ if } \alpha_A > \alpha_{kp}, \quad (4)$$

а вид формулы для определения $SPL_{\alpha A}$ при этом изменяется.

Механизм шумообразования TBL представляет собой источник широкополосного шума. Характерная частота (соответствующая пиковому значению) находится в обратной зависимости с толщиной пограничного слоя δ^* , т.е. $f \sim 1/\delta^*$. Флуктуации давления, таким образом, отражают перемещение вихрей в пограничном слое, скорость которого пропорциональна скорости притекания V_{Σ} . [2].

Очевидно, что УЗД аэродинамического шума определяется скоростью притекания V_{Σ} , а преимущественными источниками шума выступают элементы лопасти с большей окружной скоростью, т.е. более удаленные от центра вращения. Обтекание торцевой части лопасти обладает своей спецификой, не рассматриваемой в настоящей статье.

Обсуждение и результаты. Для конструкции ВЭУ с горизонтальной осью вращения, характерно изменение спектра шума вдоль радиуса лопасти, с достижением максимального значения УДЗ на элементах, наиболее удаленных от оси вращения.

Рассмотрим ГО ВЭУ с диаметром ветроколеса 2 м, пассивной системой рысканья и частотой вращения на установленную мощность 320 мин⁻¹ – «ВЭУ-018». Установка была изготовлена на ООО «Персональные Энергосистемы» (г. Ростов-на-Дону). Ошибка рысканья установки, полученная ранее экспериментально, составляет 11.6°. Также, для исследуемой ВЭУ характерна довольно высокая неустойчивость системы рысканья. Среднеквадратическое отклонение возникающих в процессе работы углов косой обдувки от среднего значения 11.6° составляет 68.08%. Экспериментально установлено наличие углов косой обдувки 40-50° [5].

Распределение углов атаки в плоскости вращения лопасти, рассчитывалось посредством разработанной предварительно модели [4]. Локальные величины угла атаки обладают циклической динамикой, как вдоль радиуса лопасти, так и вдоль азимута ее вращения. Горизонтальная асимметрия распределения величины, связана с влиянием ошибки рысканья на градиент скорости в области тени мачты, а вертикальная, – с влиянием градиентов скорости в приземном слое атмосферы и вблизи мачты, а также влиянием ошибки рысканья на локальную скорость притекания (Рис. 2).

Очевидно, что по мере увеличения угла косой обдувки, становятся все более выраженными искажения в циклической динамике распределения углов атаки на лопастях в процессе их вращения. Угол атаки на каждом элементе лопасти колеблется в различных диапазонах в зависимости от угла косой обдувки. Так, на элементе

Рис. 2. Распределение углов атаки по азимуту вращения (ψ) элементов лопасти, удаленных на локальный радиус r_T от оси вращения (диаметр ветроколеса – 2 м, скорость ветра – 6 м/с, высота расположения втулки ветроколеса – 5 м, мачта удалена на два ее радиуса от ветроколеса), при угле косой обдувки: а) $\alpha_B = 0^\circ$; б) $\alpha_B = 11.6^\circ$; в) $\alpha_B = 25^\circ$

лопасти с локальным радиусом $r_T = 0.92$ м при $\alpha_B = 0$ значение α_A колеблется от 3.82° в нижнем положении лопасти до 4.21° в верхнем, а скорость протекания V_Σ от 30.8 м/с до 30.82 м/с; при $\alpha_B = 11.6^\circ$, $\alpha_A = 3.45^\circ$ – 4.265° и $V_\Sigma = 31.895$ – 29.65 м/с; при $\alpha_B = 25^\circ$, $\alpha_A = 2.634^\circ$ – 3.658° и $V_\Sigma = 33.17$ – 28.32 м/с. В соответствии с данными исследований [3], критический угол атаки для профиля NACA 0012 составляет 12.5° . Достижение критических значений угла атаки ожидается на элементах, по мере приближения к оси вращения и в направлении восходящего движения лопасти. В верхнем положении лопасти, максимальные значения

угла атаки достигаются на комлевых элементах, начиная с $r_T = 0.29$ м, где $\alpha_A = 12.36^\circ$ при $\alpha_B = 11.6^\circ$, а при $\alpha_B = 25^\circ$, α_A достигает 12.47° уже на $r_T = 0.312$ м.

Искажение в распределении углов атаки на лопасти в нижнем положении обладает характерным пиком величины в первой трети лопасти. Это вызвано, прежде всего, геометрической кривизной лопасти и особенностями реакции последней на градиент скорости потока вблизи мачты. Выше изложенное дает основание к тому, чтобы выполнить прогноз спектра TBL шума для диапазона углов атаки от 0° до 25° , считая этот диапазон наиболее повторяемым.

ВРМ модель для расчета TBL шума, отраженная в основных выражениях (3-4), использовалась в этом исследовании при следующих исходных параметрах: семь элементов лопасти обладали хордами: 0.15, 0.138, 0.127, 0.115, 0.103, 0.92 и 0.08 м; плотность воздуха при 20°C , $\rho = 1.2041$; вязкость воздуха, $\nu = 1.83 \cdot 10^{-5}$; профиль лопастей – NACA 0012.

Представляя результаты расчета TBL шума в виде амплитудно-частотных характеристик звукового давления в 1/3 октавных полосах частот, для определённых локальных радиусов лопасти, в том или ином азимутальном положении, можно получить спектр шума и значение характерной основной частоты ($f_{осн}$) элемента лопасти в любой точке плоскости вращения (Рис. 3 (в, г, д, е)).

Поскольку, критические значения углов атаки ожидаются на комлевом участке лопасти и при $\alpha_B = 11.6^\circ$ его радиус в верхнем положении лопасти составляет $r_T = 0.29$ м, а при $\alpha_B = 25^\circ - 0.312$ м, эта область, будет источником TBL-SS шума. Переход в режим обтекания со срывом хорошо наблюдается при сравнении графиков распределения УЗД вдоль радиуса лопасти в верхнем положении, где возникают критические углы атаки, и лопасти в нижнем положении, где углы атаки намного ниже критических (Рис. 3 (а, б)).

Суммарный по полосам частот и элементам УЗД на лопасти в нижнем положении при $\alpha_B = 11.6^\circ$ прогнозируется равным 91.35 дБ. При этом, в верхнем положении лопасти эта величина составляет 90.28 дБ. Суммарный УЗД при $\alpha_B = 25^\circ$ на лопасти в нижнем положении прогнозируется равным 90.62 дБ, а при верхнем положении лопасти – 88.38 дБ. Характерен рост суммарного уровня звукового давления вдоль радиуса лопасти, что отражено на Рис. 3 (а, б).

Следует отметить динамику спектра шума турбулентного пограничного слоя лопасти по мере удаления от оси ее вращения и перемещения по азимуту при различных значениях угла кривой обдувки. Так, при $\alpha_B = 11.6^\circ$ спектр шума на участке с радиусом 0.225 м, и прогнозируемыми величинами $\alpha_A = 13.54^\circ$ и $V_\Sigma = 7.4$ м/с (в верхнем положении лопасти), сосредоточен в полосе относительно низких частот с характерной частотой 445 Гц (Рис 3 (в)). При $\alpha_B = 25^\circ$ наблюдается смещение спектра и на элементе с локальным радиусом 0.225 м характерная частота $f_{осн} = 305$ Гц и возрастает до 547 Гц на радиусе 0.3 м (Таб. 1; Рис 3 (г)).

В тоже время, при нижнем положении лопасти, спектр шума и основные частоты преимущественно сосредоточены в широкополосном диапазоне частот и колеблются от 2.5 кГц до 14 кГц (Таб. 1; Рис. 4 (д, е)). По мере увеличения угла кривой обдувки, при этом, спектр смещается к более высоким частотам.

Рис. 3. Уровень звукового давления, SPL , вдоль радиуса лопасти: а) лопасть в верхнем положении; б) лопасть в нижнем положении. Амплитудно-частотные характеристики шума турбулентного пограничного слоя (ТБЛ), на элементах лопасти с радиусами r_T : в) $\alpha_B = 11.6^\circ$, лопасть в верхнем положении; г) $\alpha_B = 25^\circ$, лопасть в верхнем положении; д) $\alpha_B = 11.6^\circ$, лопасть в нижнем положении; е) $\alpha_B = 25^\circ$, лопасть в нижнем положении

Табл. 1 Аэродинамические и аэроакустические характеристики элементов лопасти

Верхнее положение лопасти															Нижнее положение лопасти							
$\alpha_B = 11.6^\circ$																						
r_T , м	0.2	0.225	0.25	0.3	0.55	0.8	0.92	0.2	0.225	0.25	0.3	0.55	0.8	0.92	0.225	0.25	0.3	0.55	0.8	0.92		
α_A , °	14.4	13.536	12.951	12.21	8.668	5.116	4.265	3.658	4.431	5.15	6.313	6.526	4.052	3.453	4.431	5.15	6.313	6.526	4.052	3.453		
V_Σ , м/с	6.716	7.417	8.144	9.653	17.661	25.911	29.649	8.546	9.318	10.101	11.69	19.853	28.147	31.895	9.318	10.101	11.69	19.853	28.147	31.895		
SPL, дБ	8.951	10.619	12.246	27.431	35.461	13.52	40.305	16.117	18.585	20.851	25.259	36.125	39.262	38.75	18.585	20.851	25.259	36.125	39.262	38.75		
$f_{осн}$, кГц	0.375	0.445	0.52	0.705	2.555	10.25	14	2.455	2.525	2.555	2.285	4.485	12.5	14	2.525	2.555	2.285	4.485	12.5	14		
$\alpha_B = 25^\circ$																						
r_T , м	0.2	0.225	0.25	0.3	0.55	0.8	0.92	0.2	0.225	0.25	0.3	0.55	0.8	0.92	0.225	0.25	0.3	0.55	0.8	0.92		
α_A , °	18.289	16.141	14.65	12.8	8.031	4.474	3.658	-4.34	0.119	1.316	3.205	5.025	3.095	2.634	0.119	1.316	3.205	5.025	3.095	2.634		
V_Σ , м/с	5.372	6.047	6.76	8.257	16.287	24.567	28.317	8.06	10.421	11.224	12.844	21.084	29.411	33.17	10.421	11.224	12.844	21.084	29.411	33.17		
SPL, дБ	5.633	7.339	9.078	12.406	33.327	37.042	38.409	-	17.215	18.685	23.435	34.978	38.018	32.307	17.215	18.685	23.435	34.978	38.018	32.307		
$f_{осн}$, кГц	0.23	0.305	0.38	0.545	2.65	10.5	14	-	4.335	3.96	4.2	7.15	14	14	4.335	3.96	4.2	7.15	14	14		

Стоит отметить, что примененная ВРМ модель не позволяет учесть влияние отрицательных углов атаки, возникающих на комлевых элементах при $\alpha_B = 25^\circ$.

Выводы. Динамика аэроакустических процессов, возникающих на локальных элементах лопасти, представлена в виде амплитудно-частотных характеристик элементов. Это позволило пронаблюдать изменение локального уровня звукового давления, а также спектра основных частот, и таким образом получить аэроакустическую характеристику каждого элемента лопасти.

Можно заключить, что для ГО ВЭУ, характерно циклическое изменение спектра шума турбулентного пограничного слоя вдоль лопасти. Максимальный уровень звукового давления ожидается на наиболее удаленном от центра элементе, с радиусом 0.92 м, при нижнем положении лопасти. При $\alpha_B = 11.6^\circ$ прогнозируемый УЗД составил 91.35 дБ. В верхнем положении лопасти эта величина составила 90.28 дБ. Суммарный УЗД при $\alpha_B = 25^\circ$ на лопасти в нижнем положении составляет 90.62 дБ, а при верхнем – 88.38 дБ.

Область перехода обтекания в режим со срывом потока невелика и ожидается вблизи комли, при верхнем положении лопасти. Поскольку скорость притекания здесь наименьшая, уровень звукового давления в этой области существенно ниже, уровня на более удаленных элементах лопасти. В тоже время, срыв потока внесёт изменения в частотный спектр, смещая его в область более низких частот.

Литература

1. Lowson, M.V. Assessment and Prediction of Wind Turbine Noise / M.V. Lowson // Energy Technology Support Unit. Harwell. ETSU W/13/00284/REP. — 1992. — 59 p.
2. Brooks, F.T. Airfoil Self-Noise and Prediction / F.T. Brooks, D.S. Pope, M.A. Marcolini // NASA Langley Research Center. Hampton. NASA RP-1218. — 1989. — 137 p.
3. Bullmore, A.J. Wind turbine measurements for Noise source identification / A.J. Bullmore [et al.] // Energy Technology Support Unit. — 1999. — ETSU W/13/00391/00/REP. — 346 p.
4. Афанасьева, Н.А. Моделирование обтекания горизонтально-осевой ветроэнергетической установки малой мощности в условиях рысканья / Н.А. Афанасьева, В.В. Дудник, В.Л. Гапонов // Инновации в сельском хозяйстве. Материалы по итогам 10-й Международной научно-технической конференции «Энергообеспечение и энергосбережение в сельском хозяйстве», 21-22 мая 2016 г. — ФГБНУ ВИЭСХ. — 2016. — № 5(20). — С. 371-376.
5. Гуринов А.С. Математическая модель динамики вращения ветротурбины и поворота малой ветроэнергетической установки для фермерских хозяйств по-средством автоматической системы ориентации / А.С. Гуринов, В.Л. Гапонов // Вестник ДГТУ. — Т. 11 № 10 (61). — 2011. — С. 1763- 1770.

ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА И ПРИНЦИПИАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ ЁМКОСТИ УРАВНЕНИЯМИ ЛАГРАНЖА-МАКСВЕЛЛА

Ахмедова Е.Р.

НИУ МЭИ, Москва, Россия, vanille1@yandex.ru

Аннотация. В данной работе рассмотрены низкочастотные колебания резонатора ВТГ, получены уравнения колебаний с помощью формализма Лагранжа, рассмотрен контур принципиальной электрической схемы для измерения переменной емкости.

Ключевые слова. Волновой твердотельный гироскоп, формализм Лагранжа, принципиальная электрическая схема, конденсатор.

Рассмотрим резонатор ВТГ в виде оболочки вращения (рис.1), срединная поверхность которой образована поворотом кривой s вокруг оси z . Будем предполагать, что резонатор ограничен двумя параллелями или имеет форму купола. Нижний край резонатора свободен, а верхний жестко прикреплен к подвижному основанию.

Рис. 1. схема ВТГ

С основанием прибора свяжем ортогональную систему координат $Oxyz$, ось z направим по оси симметрии резонатора. Для описания деформаций резонатора введем ортогональный трехгранник $\xi\eta\zeta$, связанный с меридианами и параллелями его срединной поверхности.

В качестве криволинейных координат примем угол α ($0 \leq \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$), образованный внешней нормалью к срединной поверхности и осью симметрии и угол в окружном направлении β ($0 \leq \beta \leq 2\pi$). Пусть R_1 - радиус кривизны меридиана, а R_2 - радиус кривизны нормального сечения, проведенного к кривой s . В этом случае коэффициенты Ламе поверхности имеют вид:

$$A = R_1, \quad B = R_2 \sin \alpha.$$

Введем необходимый в дальнейшем вектор $\vec{r}$, перпендикулярный к оси симметрии оболочки, $|\vec{r}| = B$.

Кинетическая энергия резонатора имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\sigma} \rho h \vec{V}^2 d\sigma, \quad (1.1)$$

где ρ - плотность материала резонатора; h - толщина резонатора;
 $d\sigma = AB d\alpha d\beta$; $\vec{V}$ - вектор абсолютной скорости произвольной точки резонатора:

$$\vec{V} = \dot{\vec{u}} + \vec{\Omega} \times (\vec{r} + \vec{u}),$$

здесь и далее точкой обозначено дифференцирование по времени t .

В проекциях на оси $\xi\eta\zeta$ имеем:

$$\vec{\Omega} = (-\Omega \sin \alpha, 0, \Omega \cos \alpha)^T,$$

$$\vec{r} = (B \cos \alpha, 0, B \sin \alpha)^T,$$

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \dot{u} - \Omega v \cos \alpha \\ \dot{v} + \Omega[(r + w) \sin \alpha + u \cos \alpha] \\ \dot{w} - \Omega v \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Вектор перемещения $\vec{u}$, вызванный упругими деформациями будем искать в виде:

$$\vec{u} = \sum_{k=2}^n [f_k(t) \vec{u}_k^{(1)}(\alpha, \beta) + g_k(t) \vec{u}_k^{(2)}(\alpha, \beta)], \quad (1.3)$$

где k - номер формы колебаний; $f_k(t), g_k(t)$ - искомые функции времени;

$\vec{u}_k^{(j)}$, ($j = 1, 2$) - собственные формы свободных колебаний оболочки.

При выводе векторов перемещений $\vec{u}_k^{(j)}$, ($j = 1, 2$) в воспользуемся формулами:

$$\vec{u}_k^{(1)} = (U_k(\alpha) \cos k\beta, V_k(\alpha) \sin k\beta, -W_k(\alpha) \cos k\beta)^T, \quad (1.4)$$

$$\vec{u}_k^{(2)} = (-U_k(\alpha) \sin k\beta, V_k(\alpha) \cos k\beta, W_k(\alpha) \sin k\beta)^T,$$

Подставляя **Ошибка! Источник ссылки не найден.**
Ошибка! Источник ссылки не найден. и выполняя интегрирование по окружной координате β , найдем выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n [\mu_k (\dot{f}_k^2 + \dot{g}_k^2) + 2\xi_k \Omega (g_k \dot{f}_k - f_k \dot{g}_k) + \zeta_k^2 \Omega^2 (f_k^2 + g_k^2)],$$

$$\begin{aligned}
\mu_k &= \pi R_1 R_2 \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \rho h (U_k^2 + V_k^2 + W_k^2) \sin \alpha d\alpha, \\
\xi_k &= 2\pi R_1 R_2 \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \rho h V_k (W_k \sin \alpha - U_k \cos \alpha) \sin \alpha d\alpha, \\
\hat{\xi}_k^2 &= \pi R_1 R_2 \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \rho h [V_k^2 + (U_k \cos \alpha - W_k \sin \alpha)^2] \sin \alpha d\alpha.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

μ_k - приведенная масса резонатора, соответствующая $k - \check{u}$ гармонике.
Потенциальная энергия резонатора имеет вид:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{Eh}{1-\nu^2} [(e_{11} + e_{22})^2 - 2(1-\nu)(e_{11}e_{22} - e_{12}^2)] + \right. \\
&\quad \left. + D[(\chi_{11} + \chi_{22})^2 - 2(1-\nu)(\chi_{11}\chi_{22} - \chi_{12}^2)] \right\} R_1 R_2 \sin \alpha d\beta d\alpha,
\end{aligned} \tag{1.16}$$

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - цилиндрическая жесткость; E - Модуль Юнга;

ν - коэффициент Пуассона; $e_{11}, e_{12}, e_{22}, \chi_{11}, \chi_{12}, \chi_{22}$ - компоненты изгибных деформаций срединной поверхности резонатора, которые имеют вид:

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_1}, \\
e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{B}{R_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{B} \right) \right), \\
e_{12} &= \frac{1}{B} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{u}{R_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \left(\frac{w}{R_2} \right), \\
\gamma_1 &= \frac{1}{R_1} \left(-\frac{\partial w}{\partial \alpha} + u \right), \quad \gamma_2 = -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2}, \\
\chi_{11} &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha}, \\
\chi_{12} &= \frac{1}{BR_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \gamma_2 - \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{B}{R_2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right), \\
\chi_{22} &= \frac{1}{B} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \beta} + \frac{1}{BR_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \gamma_1,
\end{aligned}$$

С учетом формул (1.3) и (1.4) компоненты изгибных деформаций примут вид:

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{R_1} (U'_k - W_k) (f_k \cos k\beta - g_k \sin k\beta), \\
e_{22} &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{R_1 R_2 \sin \alpha} (kR_1 V_k + R_2 U_k \cos \alpha - R_1 W_k \sin \alpha) (f_k \cos k\beta - g_k \sin k\beta), \\
e_{12} &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{2R_1 R_2 \sin \alpha} (-kR_1 U_k + R_2 V'_k \sin \alpha - R_2 V_k \cos \alpha) (f_k \sin k\beta + g_k \cos k\beta), \\
\chi_{11} &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{R_1^2} (U'_k + W''_k) (f_k \cos k\beta - g_k \sin k\beta), \\
\chi_{22} &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{R_2^3 R_1^2 \sin^2 \alpha} (kR_2 R_1^2 (-kW_k + V_k \sin \alpha) + R_2^3 \cos \alpha \sin \alpha (W'_k + U_k)) \cdot \\
&\quad \cdot (f_k \cos k\beta - g_k \sin k\beta), \\
\chi_{12} &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{R_2 R_1 \sin^2 \alpha} (kW'_k \sin \alpha - kW_2 \cos \alpha + V_k \cos \alpha \sin \alpha + kU_k \sin \alpha - \\
&\quad - V'_k \sin^2 \alpha) \cdot (f_k \sin k\beta + g_k \cos k\beta).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по координате α .

Выражение для потенциальной энергии резонатора:

$$P = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n c_k^2 (f_k^2 + g_k^2),$$

где c_k - приведенная жесткость резонатора.

Электрическая схема ТВГ представляет собой конденсатор с одной общей обкладкой (сам резонатор) и 16ю электродами, расположенными через каждые 45 градусов на плате управления (рис. 2).

Рис. 2. Схема рабочих емкостей ТВГ

Рис.3. Рабочая схема для измерения переменной емкости.

В качестве рабочей принципиальной схемы для измерения переменной емкости используется мостовая схема, преимущества которой очевидны: температурная стабильность, точность, защита от синфазных помех, которые искажают сигнал и увеличивают вероятность потери передаваемого сигнала (рис.3).

В противоположность идеальному реальный конденсатор описывается паразитными компонентами, определяющими его поведение помимо главного параметра - его емкости, - резистивными и индуктивными элементами. Используя схему замещения конденсатора, представленную на рис.4, необходимо в качестве рассматриваемой схемы использовать эквивалентную принципиальную электрическую схему (рис.5.)

Рис.4. Схема замещения конденсатора.

Если принять ток, протекающий по данной цепи, равным i , то такую цепь можно описать следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R_0}{L_0} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0. \quad (1.8)$$

Рис.5. Эквивалентная принципиальная схема.

Электрическая цепь измерительной системы, представленной на рис.5 образована: собственной емкостью конденсатора $C_k(e, x), k=1,2$, эквивалентным последовательным омическим сопротивлением $r_k, k=1,2$, обусловленное электрическим сопротивлением материала обкладок и выводов конденсатора, эквивалентной последовательной индуктивностью $L_k, k=1,2$, обусловленной собственной индуктивностью обкладок и выводов конденсатора, омическим сопротивлением плеч моста R .

Зададим в каждом контуре произвольно направленные контурные токи $i_1 = \dot{e}_1, i_2 = \dot{e}_2$, при этом ток, протекающий через индуктивность L_1 есть i_1 , а через L_2 — ток i_2 . Тогда магнитная энергия

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2. \quad (1.9)$$

Для нахождения энергии электрического поля, локализованного в пространстве между электродами и поверхностью резонатора, учтем, что $C_k(e, x)$ представляет собой суммарную ёмкость, образованную двумя электродами, следовательно:

$$C(e, x) = C_1 + C_2 = \frac{e_1^2}{2C_1(e_1, x)} + \frac{e_2^2}{2C_2(e_2, x)}. \quad (1.10)$$

Для вычисления емкости между пластинами используем известную формулу плоского конденсатора

$$C(x) = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}, \quad (1.11)$$

где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума; ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика между обкладками конденсатора; S — площадь пластин конденсатора; d — расстояние между ними. В рассматриваемом случае $C_0 = \epsilon_0 \epsilon S / h$. Отсюда $\epsilon_0 \epsilon S = C_0 h$, поэтому

$$C(e_1, x) = \frac{C_0 h}{h+x}, C(e_2, x) = \frac{C_0 h}{h-x}. \quad (1.12)$$

Подставим (1.12) в выражение для энергии электрического поля

$$W_e = \frac{e_1^2 (h+x)}{2C_0 h} + \frac{e_2^2 (h-x)}{2C_0 h}. \quad (1.13)$$

Диссипативная функция системы

$$\Psi = \frac{1}{2} R \dot{e}_1^2 + \frac{1}{2} R \dot{e}_2^2 + \frac{1}{2} r_1 \dot{e}_1^2 + \frac{1}{2} r_2 \dot{e}_2^2. \quad (1.14)$$

Составим лагранжиан системы

$$L = T - \Pi + W_m - W_e = \frac{1}{2} \int_{\sigma} \rho h \bar{V}^2 d\sigma - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n c_k^2 (f_k^2 + g_k^2) + \frac{1}{2} L_1 \dot{e}_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \dot{e}_2^2 - \left(\frac{e_1^2 (h+x)}{2C_0 h} + \frac{e_2^2 (h-x)}{2C_0 h} \right).$$

Учитывая, что обобщенные неконсервативные силы механической природы в рассматриваемом случае отсутствуют, запишем уравнения Лагранжа—Максвелла:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{f}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial f_k} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{f}_k} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{g}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial g_k} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{g}_k} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{e}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial e_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{e}_1} &= u, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{e}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial e_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{e}_2} &= u. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Применяя к функции $L = T - \Pi + W_m - W_e$ формализм Лагранжа, получаем систему линейных нестационарных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{f}_k + \delta_k (2\Omega \dot{g}_k + \dot{\Omega} g_k) + (\omega_k^2 - \hat{\delta}_k^2 \Omega^2) f_k = 0,$$

$$\ddot{g}_k - \delta_k (2\Omega \dot{f}_k + \dot{\Omega} f_k) + (\omega_k^2 - \hat{\delta}_k^2 \Omega^2) g_k = 0,$$

$$L_1 \ddot{e}_1 + R \dot{e}_1 + r_1 \dot{e}_1 + e_1 \cdot \frac{h+x}{C_0 h} = u_0 \sin \omega t, \quad (1.16)$$

$$L_2 \ddot{e}_2 + R \dot{e}_2 + r_2 \dot{e}_2 + e_2 \cdot \frac{h-x}{C_0 h} = u_0 \sin \omega t,$$

$$k = 2, 3, \dots, n,$$

$$\omega_k^2 = \frac{c_k}{\mu_k} \quad \delta_k = \frac{\xi_k}{\mu_k}, \quad \hat{\delta}_k^2 = \frac{\xi_k^2}{\mu_k}$$

где μ_k - квадрат частоты по k -й форме колебаний,

Полагая, что угловая скорость Ω основания намного меньше частоты колебаний

ω_k оболочки, можно записать решение первых двух уравнений системы:

$$f_k = (C_1 \cos \theta_k - C_2 \sin \psi_k) \sin \omega_k t + (C_3 \cos \psi_k - C_4 \sin \psi_k) \cos \omega_k t,$$

$$g_k = (C_1 \sin \theta_k + C_2 \cos \psi_k) \sin \omega_k t + (C_3 \sin \psi_k + C_4 \cos \psi_k) \cos \omega_k t,$$

где

$$\psi_k = \delta_k \int_0^t \Omega(\tau) d\tau.$$

Разделим на L_1 третье уравнение из системы уравнений (1.16) и введем следующие обозначения:

$$\eta_1 = \frac{R}{L_1}; \quad \gamma_1 = \frac{r_1}{L_1}; \quad \xi_1^2 = \frac{h+x}{C_0 h L_1}; \quad U_1 = \frac{u_0}{L_1}.$$

Аналогично поступим с четвертым уравнением (1.16), поделив его на L_2 :

$$\eta_2 = \frac{R}{L_2}; \quad \gamma_2 = \frac{r_2}{L_2}; \quad \xi_2^2 = \frac{h-x}{C_0 h L_2}; \quad U_2 = \frac{u_0}{L_2}.$$

Следовательно, уравнения зарядов на конденсаторах можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{e}_1 + (\eta_1 + \gamma_1)\dot{e}_1 + \xi_1^2 e_1 &= U_1 \sin(\omega t), \\ \ddot{e}_2 + (\eta_2 + \gamma_2)\dot{e}_2 + \xi_2^2 e_2 &= U_2 \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Так как полученное линейное уравнение является неоднородным уравнением, то его решение состоит из двух частей: E_1 — общего решения однородного уравнения и E_2 — частного решения неоднородного уравнения. Общее решение E_1 удовлетворяет однородному уравнению

$$\ddot{e}_1 + (\gamma_1 + \eta_1)\dot{e}_1 + \xi_1^2 e_1 = 0. \quad (1.18)$$

Общее решение уравнения в зависимости от соотношения между величинами η_1 и ξ_1 выражается в одной из трех форм:

$$\begin{aligned} \eta_1 + \gamma_1 < \xi_1, \quad E_{1,1} &= \exp(-(\eta_1 + \gamma_1)t) \left(A_1 \cos\left(\sqrt{\xi_1^2 - (\eta_1 + \gamma_1)^2} t\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{\xi_1^2 - (\eta_1 + \gamma_1)^2} t\right) \right); \\ \eta_1 + \gamma_1 &= \xi_1, \quad E_{1,1} = \exp(-(\eta_1 + \gamma_1)t) (A_1 t + A_2); \\ \eta_1 + \gamma_1 > \xi_1, \quad E_{1,1} &= \exp(-(\eta_1 + \gamma_1)t) \left(A_1 \exp\left(\sqrt{(\eta_1 + \gamma_1)^2 - \xi_1^2} t\right) + A_2 \exp\left(-\sqrt{(\eta_1 + \gamma_1)^2 - \xi_1^2} t\right) \right). \end{aligned}$$

Здесь A_1, A_2 — произвольные постоянные, определяемые из условий, заданных в начальный момент времени.

Аналогично для второго уравнения $\ddot{e}_2 + (\gamma_2 + \eta_2)\dot{e}_2 + \xi_2^2 e_2 = 0$:

$$\begin{aligned} \eta_2 + \gamma_2 < \xi_2, \quad E_{1,2} &= \exp(-(\eta_2 + \gamma_2)t) \left(A_3 \cos\left(\sqrt{\xi_2^2 - (\eta_2 + \gamma_2)^2} t\right) + A_4 \sin\left(\sqrt{\xi_2^2 - (\eta_2 + \gamma_2)^2} t\right) \right); \\ \eta_2 + \gamma_2 &= \xi_2, \quad E_{1,2} = \exp(-(\eta_2 + \gamma_2)t) (A_3 t + A_4); \\ \eta_2 + \gamma_2 > \xi_2, \quad E_{1,2} &= \exp(-(\eta_2 + \gamma_2)t) \left(A_3 \exp\left(\sqrt{(\eta_2 + \gamma_2)^2 - \xi_2^2} t\right) + A_4 \exp\left(-\sqrt{(\eta_2 + \gamma_2)^2 - \xi_2^2} t\right) \right), \end{aligned}$$

где A_3, A_4 — произвольные постоянные.

Перейдем к отысканию частного решения уравнения. Это решение называют вынужденным движением или вынужденным колебанием, так как это движение обусловливается действием внешней силы, стоящей в правой части.

Частное решение будем искать в виде

$$E_{2,1} = B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t).$$

Постоянные B_1 и B_2 подлежат определению из условия, что, при подстановке в уравнение, должно получиться тождество. Вычислим производные по времени от $E_{2,1}$

$$\begin{aligned} \dot{E}_{2,1} &= -\omega B_1 \sin(\omega t) + \omega B_2 \cos(\omega t); \\ \ddot{E}_{2,1} &= -\omega^2 B_1 \cos(\omega t) - \omega^2 B_2 \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Подставим значение $E_{2,1}$ и его производных и соберем члены при $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$. Получим тождество

$$\left[(\xi_1^2 - \omega^2) B_1 + (\eta_1 + \gamma_1) \omega B_2 \right] \cos(\omega t) + \left[-(\eta_1 + \gamma_1) B_1 \omega + (\xi_1^2 - \omega^2) B_2 - U_1 \right] \sin(\omega t) = 0.$$

Так как синус и косинус переменного аргумента не равняются нулю одновременно, то полученное тождество может выполняться только тогда, когда каждая из постоянных в квадратных скобках равно нулю, т. е. при

$$(\xi_1^2 - \omega^2)B_1 + (\eta_1 + \gamma_1)B_2\omega_2 = 0; \quad -(\eta_1 + \gamma_1)\omega B_1 + (\xi_1^2 - \omega^2)B_2 = U_1.$$

Решая систему 2-х линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных B_1 и B_2 , получаем

$$B_1 = \frac{-(\eta_1 + \gamma_1)\omega U_1}{(\xi_1^2 - \omega^2)^2 + (\eta_1 + \gamma_1)^2 \omega^2}; \quad B_2 = \frac{(\xi_1^2 - \omega^2)U_1}{(\xi_1^2 - \omega^2)^2 + (\eta_1 + \gamma_1)^2 \omega^2}.$$

Чтобы получить окончательную форму вынужденного решения, преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{2,1} &= \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \left(\frac{B_1}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}} \cos(\omega t) + \frac{B_2}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}} \sin(\omega t) \right) = \\ &= \sqrt{B_1^2 + B_2^2} (\sin(\varphi) \cos(\omega t) + \cos(\varphi) \sin(\omega t)) = B_{01} \sin(\omega t + \varphi_1); \\ \sin(\varphi_1) &= \frac{B_1}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}; \quad \cos(\varphi_1) = \frac{B_2}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}; \quad \operatorname{tg}(\varphi_1) = \frac{B_1}{B_2}. \end{aligned}$$

Здесь $B_{01} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$ — амплитуда вынужденных колебаний; φ_1 — сдвиг фаз между внешней силой и вынужденным колебанием.

Получаем окончательную форму частного решения уравнения

$$E_{2,1} = B_{01} \sin(\omega t + \varphi_1); \quad B_{01} = \frac{U_1}{\sqrt{(\xi_1^2 - \omega^2)^2 + (\eta_1 + \gamma_1)^2 \omega^2}}.$$

Аналогично для второго уравнения $E_{2,2} = B_3 \cos(\omega t) + B_4 \sin(\omega t)$:

$$E_{2,2} = B_{02} \sin(\omega t + \varphi_2); \quad B_{02} = \frac{U_2}{\sqrt{(\xi_2^2 - \omega^2)^2 + (\eta_2 + \gamma_2)^2 \omega^2}}.$$

Литература

1. Меркурьев И.В., Подалков В.В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 228 с.
2. Хоровиц П., Хилл У. Искусство схемотехники: В 3-х томах: Т.1. Пер. с англ. – 4-е изд. перераб. и доп. – М.: Мир, 1993. – 413 с., ил.
3. Аналитическая динамика электромеханических систем. Мартыненко Ю.Г./Под ред. И.В.Новожилова. – М.: МЭИ, 1984. – 64 с.

NUMERICAL MODELING OF ROTOR TRAJECTORIES ON ACTIVE THRUST FIXED-PAD BEARINGS

Babin Alexander¹

¹Oryol State University, Oryol, Russia, alex.mech.osu@gmail.com

Abstract. The present paper investigates numerical modeling of active hybrid thrust bearings subjected to external axial disturbance forces. To control rotor's position an electromechanical device is used which allows adjusting flow rate through the fluid-film bearing. An analysis has been carried out to estimate the influence of control system based on PID-control on the rotor's dynamic behavior.

Keywords. active thrust bearing, numerical modeling, rotor dynamics, control, hydrodynamic lubrication theory.

Application of active control systems to fluid-film bearings has been investigated since 1950s when the first papers on active tilting-pad bearing were introduced. The fact that fluid-film bearings perform better than roller element bearings under certain conditions has triggered increased interest to how one could numerically simulate their operation and possibly find solution to the problem of enhancement of rotor-bearing system's performance. The research has since then been divided into three basic directions: studies of surface modernisation, e.g. surface texturing, gap profile modification and control, etc.; studies of lubricants' properties and development of new media with enhanced properties, such as magnetorheological fluids and using ultrafine additives; and studies of various types of actuators to adjust certain properties of a bearing. Some references could be found in the bibliography of the present paper [1-14].

The possible advantages of introduction of control systems to fluid-film bearings have become the key goals of many studies in various fields: hydrodynamics, control theory, electrical and mechanical engineering and programming. Estimation of possible threats, e.g. increased wear and damage or failure, has also influenced approaches to rotor dynamics modeling. Introduction of new elements has become a foundation of research of mechatronic bearings. The present paper is aimed at contributing to this relatively unexplored and innovative field.

The object of the present study is a hybrid fixed-pad thrust bearing with a central feeding chamber for lubricant supply, where lifting force is generated by rotation of the rotor which 'drags' the lubricant into the converging gap thus creating increased pressure regions, and by supplying fluid under pressure into the gap. The conceptual model is presented in the figure 1.

Fig. 1. Conceptual model of the active thrust hybrid bearing

The operational principle of an active hybrid thrust bearing is as follows: the pump 1, located in the tank with the fluid (water, oil, etc.), supplies the lubricant into the housing 2 of

the bearing 3, which supports the rotor 4 in axial direction. The pressure data is acquired with the sensor 8. The data on the present position of the rotor is acquired with the proximity sensor 7. To process the sensor data and to generate the control influence, the data acquisition and signal generation system (ADC/DAC) 5 is used, which is connected to the PC. Software P-controller generates the signal, according to which the pressure is changed by means of a servovalve 6. The data from proximity and pressure sensors is, according to the Fig. 1, analog, so it requires several analog inputs, to transmit the generated signal to the servovalve an analog output port has to be used, since all servovalves operate under more or less standardized conditions, be it 0..10 V or 0..5 V. Within this range any incoming voltage results in some opening rate ξ from 0 to 100%. The pump can also be controlled by means of transmitting a discrete signal using a discrete output port.

To simulate the operation of the bearing in accordance to the calculation schemes in the figure 2, a set of equations has been formed, where every part of the system is numerically simulated: the reaction force of the fluid film can be obtained by means of numerically solving the Reynolds equation joint with the flow rate balance equation and integrating the pressure distribution. When the rotor's position changes under the influence of some impulse, some additional forces start acting on the rotor, so, assuming these displacements are relatively small [15], the reaction force of a bearing could be linearised using Taylor series.

Fig. 2. Calculation model of the active thrust hybrid bearing (a – scheme of a fixed-pad thrust disk, b – rotor-bearing system's dynamic model)

Thus, one obtains K_z and B_z (stiffness and damping accordingly) coefficients and assumes that the fluid has damping properties and could be represented as a set of springs and dampers. The procedure of linearisation is implemented out of a number of reasons and has proved to be quite accurate in comparison to the trajectory methods, where the main disadvantage of the trajectory method is the necessity to solve the Reynolds equation at every step of calculation, which in its turn slows the calculation time by a few orders of magnitude.

The electrohydraulic actuator (a servovalve) is simulated using the known relation between the pressure it supplies the lubricant with and the voltage on the input of the valve [16]. The most important term here is the time constant of the valve, i.e. the time it takes for a fully closed valve to fully open. This is a crucial characteristic for the systems subjected to high-frequency periodic loads, as it will be seen in the results below.

The resulting set of equation is as follows:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{h^3}{r\mu} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right] = 6\omega r \frac{\partial h}{\partial \varphi} + 12V_z \\ m\ddot{Z} + B_z\dot{Z} + K_z Z = F(t), \\ R_z = R_{z0} - K_z \Delta Z - B_z \Delta \dot{Z}, \\ T \frac{dp(t)}{dt} + p(t) = K_v u(t), \end{cases}$$

where h – local film thickness, r and φ – radial and transversal coordinates accordingly, μ – fluid’s viscosity, ω – angular velocity of the rotor, V_z – axial velocity of the rotor, p – local pressure, m – rotor’s mass, $F(t)$ – external axial force, R_{z0} – reaction in the equilibrium position equal to mg , characterised by the minimum film thickness h_0 , T – time constant of the servovalve, K_v – gain coefficient of the valve, u – voltage on the input of the servovalve.

The joint solution of this set of equation results in one obtaining a certain rotor trajectory, that, given the PID-control applied, shall be analysed below. The numerical results will be compared to a so-called passive bearing which is in other terms a conventional hydrodynamic thrust bearing. It should also be noted, that a particular gap profile is modeled using Bezier curves and the process is described in [17].

The parameters of the numerically simulated system are as follows: $R_{in} = 0.03$ m, $R_{out} = 0.06$ m, number of pads – 6, $\beta = 0.25^\circ$, rotor’s mass $m = 10$ Kg, angular velocity $\omega = 200$ rad/s, lubricant – water with $\mu = 1 \cdot 10^{-3}$ Pa·s at 20°C . Time constant of the valve $T = 0.0005$ s. Two types of load were modeled: static load – weight of the rotor without any additional external forces, and periodic load of 25 N acting on the rotor in the negative direction of Z coordinate according to the figure 2b.

Fig. 3. Modeling results of a P-controlled active thrust bearing

In the figure 3 one could see the numerical modeling results of an active thrust bearing with various settings of a P-controller compared to a conventional bearing subjected to the constant axial load of mg . It should be noted at this point that the proportional, integral and differential coefficients were set arbitrarily merely to show the influence of low, middle and high settings. It could be seen that increase of a proportional coefficient K_p of a controller significantly decreases the transition time from a starting position to the set point, which is the equilibrium position of a passive bearing. However, the more the coefficient, the more the instant control error.

Given that at this point the best trajectory in terms of relatively low value of the error and short time of transition process, the value of 100 for K_p was chosen to further simulate a PI-controller.

Fig. 4. Modeling results of a PI-controlled active thrust bearing

In the figure 4, the modeling results of a PI-controlled bearing are presented, one could see, that the increase of K_i insignificantly influences the rotor's position, and adds a slight constant error after the transition period. Given that, the value of 0 was chosen for K_i to finally simulate a PID-controller.

Fig. 5. Modeling results of a PID-controlled active thrust bearing

In the figure 5, the modeling results of a PID-controlled bearing are presented, one could see that increase of the differential coefficient K_d only slightly influences the rotor's position increasing it, but unlike K_i it does not result in a constant control error.

Given these results, the P-controller was chosen to simulate a periodic external axial force of 25 N at approx. 10 Hz.

Fig. 6. Modeling results of a P-controlled active thrust bearing subjected to periodic axial load

In the figure 6 it is shown, how the control error decreases with the increase of K_p . The performance of the bearing significantly improves, as the amplitude of oscillations decreases and more importantly, the position of the rotor is maintained around the set point, whereas in a passive bearing due to relatively high frequency of oscillations and inertial characteristics of the rotor, the position of the rotor remains below and under certain conditions could cause damage or wear of the bearing's surface.

One of the most important characteristics of an actuator in terms of its application to rotor's position control is its time constant. To demonstrate the importance of reasonable choice of the servovalve in this case, a number of numerical simulations were carried out, presented in the figure 7.

Fig. 7. Modeling results of an active thrust bearing with different time constants of the servovalve

It could be seen from the figure 7, that the less time constant, the more positive influence the control system has on the rotor's position. As the values of time constants were also chosen arbitrarily, it is obvious, that in a real system, if the characteristics of the actuator do not meet the requirements necessary to provide descent control, the actuator could actually decrease the performance of the system by means of transforming the periodic oscillations into unstable

although still periodic oscillations which might have a very negative effect on the rotor-bearing system.

In the present paper the numerical results of the active thrust hybrid bearing with a central feeding chamber simulation have been presented. The mathematical model is based on the joint solution of the Reynolds equation, flow rate balance equation, rotor dynamics equation and some additional relations. It has been determined, that in comparison to the proportional coefficient of a PID controller, the integral and the differential coefficients have insignificant influence of rotor's dynamic behavior. It has also been shown, that one should carefully choose the actuator for dynamic active rotor's position control in order to increase the performance, and here the study of an actual actuator needs to take place.

The present study has been implemented as a part of the RSF project 16-19-00186.

Bibliography

1. D.C. Deckler, R.J. Veillette, M.J. Braun, F.K. Choy, Simulation and Control of an Active Tilting-Pad Journal Bearing, *STLE Tribology Trans.* 47 (2000) 440-458.
2. A.Wu, Z.Cai, M.S. de Queiroz, Model-Based Control of Active Tilting-Pad Bearings, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Louisiana, 2008
3. Z. Cai, M.S. de Queiroz, M.M. Khonsari, Adaptive Control of Active Tilting-Pad Bearings, *Proceedings of the American Control Conference*. Vol.4 (2003) 2907-2912.
4. I.F. Santos, Design and Evaluation of Two Types of Active Tilting Pad Journal Bearings, *The Active Control of Vibration*, Mechanical Engineering Publications Limited. (1994) 79-87.
5. T. Arvidsson, U.S. Patent 4915510. (1986).
6. D.E. Bently, J. W. Grant, U.S. Patent 5769545. (1996).
7. W.J. Oledzki, U.S. Patent 8523445. (2010).
8. D.V. Shutin, L.A. Savin, Modeling of Active Radial Hydrostatic Bearing, *Journal of Southwestern State University. Series: Appliances and Technology*. 1 (2012) 54-60.
9. P. Kytka, C. Ehmann, R. Nordmann, Active Vibration μ -Synthesis-Control of a Hydrostatically Ssupported Flexible Beam, *Journal of Mechanical Science and Technology*. 21 (2007) 924-929.
10. H. Urreta1, Z. Leicht1, A. Sanchez1, A. Agirre1, P. Kuzhir and G. Magnac, Hydrodynamic bearing lubricated with magnetic fluids. 11th Conference on Electrorheological Fluids and Magnetorheological Suspensions, 2009.
11. G. Aguirre, F. Al-Bender, H. Van Brussel. Dynamic stiffness compensation with active aerostatic thrust bearings. *Proceedings of ISMA2008*, pp. 105-118.
12. A. Kornaev, E. Kornaeva, L. Savin, A. Fetisov. Influence of the ultrafine oil additives on friction and vibration in journal bearings. *Tribology International* 101:131, 2016.
13. S. Babu, P. N. Kumarapillai, P. K. Rajendrakumar. Analysis of Static and Dynamic Performance Characteristics of THD Journal Bearing Operating Under Lubricants Containing Nanoparticles. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing* 13(10), 2012.
14. D. Gropper, L. Wang, T. Harvey, V. Gviniashvili. Influence of surface texturing on the performance of tilting pad thrust bearings. 71st STLE Annual Meeting and Exhibition, 2016.
15. L.A. Savin, Modeling of rotor systems with fluid-film bearings: monograph / L.A. Savin, O.V. Solomin. - M.: Engineering 1, 2006. - 444 p.
16. Thayer, W.J., Transfer Functions for Moog Servovalves. *Moog Technical Bulletin*, 1965. 103 p.

ОПТИМИЗАЦИЯ МАРШРУТА ПРИ КОНТРОЛЕ НА КООРДИНАТНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ НА ОСНОВЕ ЭВРИСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

Баласев А.Ф.¹, Махамбетова Ж.С.², Яковинин А.С.³, Захаров О.В.⁴

¹СГТУ имени Гагарина Ю.А., Саратов, Россия, userandrey@ya.ru

²СГТУ имени Гагарина Ю.А., Саратов, Россия, zhaziramakhambetova777@mail.ru

³СГТУ имени Гагарина Ю.А., Саратов, Россия, bazilhadance@mail.ru

⁴Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П.

Королева, Самара, Россия, zov20@mail.ru

Аннотация. Одно из перспективных направлений повышения производительности контроля на координатно-измерительных машинах связано с оптимизацией маршрута датчика касания. Поиск оптимального маршрута сводится к решению обобщенной пространственной задаче коммивояжера. Обоснована эффективность применения эвристических алгоритмов, в частности метода муравьиной колонии, для приближенного решения задачи коммивояжера в условиях высокой размерности параметров. Выполнено компьютерное моделирование при контроле различного количества точек на плоской, цилиндрической и сферической поверхностях. Установлено, что алгоритм муравьиной колонии по сравнению с точным алгоритмом ветвей и границ дает близкое к оптимальному решение, но при этом требует на порядок меньше времени.

Ключевые слова. Координатно-измерительная машина, оптимизация, маршрут, метод ветвей и границ, муравьиный алгоритм.

Постановка задачи.

Контроль геометрических характеристик представляет собой неотъемлемую часть отладки технологического процесса изготовления ответственных изделий. Поэтому в последнее время наблюдается стремительный рост в использовании координатно-измерительных машин (КИМ). КИМ – мехатронная система, осуществляющая координатный контроль контактным или бесконтактным способом в ручном или автоматическом режиме. Контроль контактным методом заключается в последовательном подводе, касании и фиксации координат центра сферического наконечника щупа. Каждая контрольная точка описывается тремя координатами, полученными при касании её датчиком в виде иглы со сферическим наконечником. Измерение контрольных точек осуществляется в последовательности, задаваемой оператором или программой при наличии 3D модели.

Точность и производительность измерения зависит от количества выбранных оператором контрольных точек. Однако чем больше контрольных точек, тем выше точность измерений, но ниже производительность. При необходимости контроля большой номенклатуры изделий перед оператором встает задача поиска оптимальной стратегии измерения поверхностей, целью которой будет сокращение времени на измерение. Используемые на предприятиях стратегии измерения зависят во многом от квалификации оператора. В то время, как в основе определения минимально достаточного количества точек, обеспечивающих требуемую точность измерения лежат научно обоснованные методы [1-3], практически не использованной остается возможность оптимизации маршрута (последовательности обхода) контрольных точек, обеспечивающей минимальную траекторию движения датчика КИМ.

Для проведения исследования в качестве геометрических образов реальных поверхностей выбраны наиболее часто используемые поверхности: плоскость, цилиндр,

сфера. В декартовой системе координат они описываются известными параметрическими уравнениями:
 - уравнение плоскости

$$\left. \begin{aligned} X &= x_i; \\ Y &= y_i; \\ Z &= c; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $x_i = [x_1; x_2]$, $y_i = [y_1; y_2]$ – независимые линейные параметры, c – постоянная,
 - уравнение цилиндра

$$\left. \begin{aligned} X &= r \cos v; \\ Y &= r \sin v; \\ Z &= z_i; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $z_i = [z_1; z_2]$, v – независимые линейный и угловой параметры соответственно; r – радиус цилиндра,
 -уравнение сферы

$$\left. \begin{aligned} X &= r \cos v \cos \varphi; \\ Y &= r \cos v \sin \varphi; \\ Z &= r \sin v; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где v , φ – независимые угловые параметры сферы; r – радиус сферы.

Обычно, чтобы контрольные точки с наибольшей достоверностью описывали измеряемую поверхность расположение этих точек выбирают равномерным. Для этого распределение точек может быть задано либо путем стохастического моделирования их координат по закону равномерного распределения, либо аналитическим заданием шага между ближайшими точками. Поскольку стохастическое моделирование оправдано лишь при большом числе точек, то для проведения исследования выбран аналитический подход к определению координат точек.

Для определения координат равномерно распределенных N точек на плоской поверхности для простоты вычислений поверхность была совмещена с плоскостью XOY и ограничена четырьмя плоскостями ($x_1=-L/2$, $x_2=L/2$, $y_1=-L/2$, $y_2=L/2$), линии пересечения которых с поверхностью образуют квадрат со стороной L . Точки располагаются на плоскости с равными шагами вдоль оси OX и оси OY соответственно $h_x=h_y= L/N$. Для определения координат равномерно распределенных N точек на цилиндрической поверхности ось цилиндра была совмещена с осью OZ , а поверхность ограничена плоскостями $z_1=-L/2$, $z_2=L/2$. Точки на цилиндрической поверхности распределены с угловым шагом $d\varphi=2\pi/N$ в плоскости XOY и линейным шагом $h_z=L/N$ вдоль оси OZ . Точки на сфере были распределены с зенитным $d\theta=2\pi/N$ и азимутным $d\varphi=2\pi/N$ угловыми шагами. Для удобства вычислений центры квадратной области плоскости, цилиндра и сферы совмещены с началом системы координат $XOYZ$.

Протяженность пути датчика касания для каждой поверхности зависит от стратегии обхода контрольных точек, которая представляет собой последовательность контрольных точек. Для получения полной информации о расположении всех точек поверхности достаточно, чтобы датчик коснулся каждой контрольной точки хотя бы один раз. По завершении полного обхода поверхности датчик возвращается в положение стартовой точки. В этом случае траектория датчика представляет собой замкнутую ломаную линию, которая и определяет продолжительность измерения. Представив

маршрут датчика в виде графа, вершинами которого являются контрольные точки, а ребрами графа - траектории движения между двумя точками, получаем гамильтонов цикл. Тогда задача оптимизации маршрута сводится к поиску гамильтонова цикла, имеющего минимальную длину, и представляет собой задачу коммивояжера.

Математическая модель

Опишем задачу коммивояжера как задачу целочисленного линейного программирования. Представим перемещение шупа из i -й контрольной точки в j -ю в виде матрицы перемещений L_{ij} , где $i, j \in \overline{1, n}$ для некоторого количества контрольных точек $n \in \mathbb{N}$. Представим направление перехода из i -й точки в j -ю в виде матрицы чисел $l_{ij} \in \{0, 1\}$ для $i, j \in \overline{1, n}$, где $l_{ij} = 1$, если маршрут обхода содержит ребро (i, j) , и $l_{ij} = 0$ в противном случае. Тогда задача сводится к поиску такого решения l , при котором маршрут будет наименьшим:

$$G(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij} l_{ij} \rightarrow \min \quad (4)$$

При этом необходимо учитывать, что из каждой вершины графа, представленной контрольной точкой, выходит только одно ребро и только одно ребро входит в каждую вершину:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n l_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n} \\ \sum_{i=1}^n l_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (5)$$

В зависимости от рассматриваемой поверхности элементы матрицы перемещений L_{ij} будут определяться выражениями:

- для плоскости:

$$L_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (6)$$

- для цилиндра:

$$L_{ij} = \sqrt{(R \cdot \varphi_{ij})^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (7)$$

- для сферы:

$$L_{ij} = R \cdot \arccos \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{R^2} \quad (8)$$

где (x_i, y_i, z_i) и (x_j, y_j, z_j) – координаты i -й и j -й контрольных точек поверхности.

В настоящее время развиты различные методы решения задачи коммивояжера, которые классифицируются по способу поиска решения на точные и приближенные (эвристические и мета-эвристические). В сравнении с приближенными точные методы позволяют найти наилучшее решение, но при этом требуют больше времени на вычисление. Приближенные методы требуют меньше времени на вычисление, но дают лишь приближенное, нередко локальное, решение.

Проблема выбора методов и целесообразности их применения для поиска маршрута датчика координатно-измерительной машины заключается в том, чтобы установить, насколько значимо влияние разницы маршрутов на производительность измерения по сравнению с разницей времени вычисления этих маршрутов. Для решения данной задачи был выбран метод ветвей и границ [4], относимый к точным методам, и метод муравьиной колонии [5], относимый к мета-эвристическим методам. Оба этих метода являются широко известными и достаточно хорошо изученными.

Для проведения сравнения длин маршрутов, полученных из решения задачи коммивояжера методом ветвей и границ и муравьиной колонии, необходим базовый маршрут. Для этого необходимо установить стратегию построения базового маршрута датчика для каждой поверхности, исходя из геометрических особенностей построения контрольных точек.

Поскольку на плоскости точки образуют квадратную сетку квадратов, то в качестве стартовой точки целесообразно выбрать точку с координатами $(-L/2+hx, -L/2+hy, 0)$ в декартовой системе координат. Следующая точка окажется смещенной относительно предыдущей на шаг hx вдоль оси OX . Пройдя первый ряд точек вдоль OX , датчик переходит к первой точке следующей ряда с координатами $(-L/2+hx, -L/2+2hy, 0)$ касаясь последовательно каждой точки во втором ряду и так далее, пока не достигнет последней точки последнего ряда. После чего датчик возвращается в первоначальную позицию напротив стартовой точки первого ряда, замыкая цикл движения. Так получен базовый маршрут датчика для плоской поверхности.

Для обхода цилиндрической поверхности в качестве стартовой выбирается точка с координатами $(R, 0, -L/2)$ в цилиндрической системе координат. Следующая по маршруту точка будет смещена на угловой шаг $+2\pi/N_{xy}$ с координатами $(R, 2\pi/N_{xy}, -L/2)$ и так до тех пор, пока датчик не пройдет все точки первого ряда окружности, после чего осуществляется переход к следующему ряду и обход точек повторяется до тех пор пока датчик не достигнет последней точки последнего ряда и далее возвращается в стартовую позицию.

Обход сферической поверхности начинается с точки с координатами $(-R, 0, 0)$ в сферической системе координат, представляющей нижний полюс сферы. Затем переходит к ближайшему ряду на угловой шаг $d\theta$ и обходит окружность ряда точек с угловым шагом $d\phi$ по часовой стрелке. Обойдя все точки ряда датчик переходит к следующему ряду с угловым шагом $d\theta$. Пройдя через все точки сферической поверхности датчик возвращается стартовую позицию, формируя базовый маршрут.

Компьютерное моделирование

Для проведения компьютерного моделирования были заданы следующие начальные условия. Площади поверхностей равны $S=40000 \text{ мм}^2$ для любого количества точек. Данному условию соответствуют: а) сторона квадрата ограничивающего плоскость - $L=200 \text{ мм}$; б) длина цилиндра - $R=31.8 \text{ мм}$, высота цилиндра - $L=200 \text{ мм}$; в) радиус сферы - $R=56.4 \text{ мм}$. Радиус датчика принят равным $r=2 \text{ мм}$. Величина отвода датчика равна $2g$. Для сокращения времени вычисления оптимального маршрута в программах реализующих методы муравьиной колонии и ветвей и границ значения расстояний в матрице расстояний округлены до десятых. Поскольку координаты точек остаются неизменными, то данные округления не сказываются на точности позиционирования, но существенно сокращают размер промежуточных данных при вычислении. Из геометрических особенностей поверхностей определено минимальное количество точек измерения для каждой поверхности: для плоскости – 3 точки; для цилиндра – 5 точек; для сферы – 4 точки. Максимальное количество точек для плоскости и цилиндра – 256 точек, для сферы – 266 точек.

Для определения значений параметров алгоритма муравьиной колонии было проведено предварительное тестирование, в результате которого были приняты следующие начальные условия: количество итераций – $m=50$; скорость испарения

феромона – $\rho=0,3$; степень влияния на выбор маршрута феромона – $\alpha=7$; степень влияния на выбор маршрута расстояния до ближайшей точки – $\beta=6$; количество муравьев равно количеству контрольных точек. Программа поиска маршрута датчика по алгоритму муравьиной колонии запускалась пять раз для каждого значения количества точек, из полученных результатов выбирался наилучший по протяженности маршрут.

Иллюстрация полученных траекторий для 64 контрольных точек приведена на рис.1 для плоскости, рис. 2 – для цилиндра, рис. 3 – для сферы. Пунктирная линия соответствует базовому маршруту. В результате моделирования получены зависимости длины пути датчика касания и длительности вычисления от количества контрольных точек для плоскости (рис. 4), для цилиндра (рис. 5) и для сферы (рис. 6).

Рис.1. Маршрут датчика для плоской поверхности: *a* – муравьиный алгоритм; *б* – алгоритм ветвей и границ

Рис.2. Маршрут датчика для цилиндрической поверхности: *a* – муравьиный алгоритм; *б* – алгоритм ветвей и границ

a

б

Рис.3. Маршрут датчика для сферической поверхности: а – муравьиный алгоритм; б – алгоритм ветвей и границ

a

б

Рис.4. Зависимости длины пути датчика касания (а) и длительности вычисления (б) от количества контрольных точек для плоскости

a

б

Рис.5. Зависимости длины пути датчика касания (а) и длительности вычисления (б) от количества контрольных точек для цилиндра

Рис.6. Зависимости длины пути датчика касания (а) и длительности вычисления (б) от количества контрольных точек для сферы

Как видно из графика на рис. 4 реализация алгоритмов поиска позволяет найти маршрут в 2 раза короче базового, что способствует сокращению времени измерения координатно-измерительной машины. При этом решение, полученное с помощью алгоритма муравьиной колонии, хуже решения, найденного с помощью алгоритма ветвей и границ, не более чем на 10%. Из графика на рис. 4,б видно, что начиная с 30 точек наблюдается существенный разрыв времени вычисления по алгоритму ветвей и границ и муравьиному алгоритму, который возрастает с увеличением количества контрольных точек. Поэтому применение алгоритма ветвей и границ целесообразно для контроля поверхности по 30 точкам.

Из графиков на рис. 6,а видно, что оптимальный маршрут, найденный с использованием алгоритма ветвей и границ, практически не отличается от базового маршрута. Для маршрута, полученного с помощью муравьиного алгоритма, с увеличением количества контрольных точек происходит незначительное ухудшение. Это связано с тем, что при увеличении количества точек, при их распределении с равными зенитными и азимутными угловыми шагами, ведет к сгущению точек вокруг полюсов сферы. И линейный шаг между ближайшими точками окружности в области полюса становится существенно меньше линейного шага между окружностями, на которых расположены точки. Поэтому наиболее оптимальный маршрут, получаемый при использовании алгоритма ветвей и границ, совпадает с базовым маршрутом, полученным полным обходом всех точек одной окружности, и только после этого переход к следующей окружности с точками. Таким образом, оптимальный вариант уже предопределен базовым маршрутом. В случае иного распределения точек на сферической поверхности, когда выбор маршрута следующей точки не выражен явно, следует ожидать результата, полученного для плоской и цилиндрической поверхности.

Выводы.

В результате исследования повышения производительности измерения сокращением пути датчика координатно-измерительной машины на основе компьютерного моделирования было установлено, что маршрут датчика представляет собой гамильтонов цикл, а задача поиска минимального гамильтонова цикла представляет задачу коммивояжера. Решить эту задачу можно точными и приближенными методами. Сравнение точного метода ветвей и границ и приближенного метода муравьиной колонии показало, что метод муравьиной колонии позволяет найти решение, которое не более чем на 10% хуже оптимального, требуя многократно меньше времени на поиск решения. На основании этого метод муравьиной колонии признан целесообразным для поиска оптимального маршрута датчика и рекомендован для

реализации при разработке программного обеспечения автоматического контроля поверхностей на координатно-измерительных машинах.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №16-19-10204).

Литература

1. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности / С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. М.: Финансы и статистика, 1989. 607 с.
2. Мудров В.И. Задача о коммивояжере / В.И. Мудров. М.: Знание, 1969. 62с.
3. Подход к обеспечению и поддержанию безопасности сложных систем на основе автоматных моделей / А.Ф. Резчиков, А.С. Богомолов, В.А. Иващенко, Л.Ю. Филимонюк // Управление большими системами: Сборник трудов. Выпуск 54. М.: ИПУ РАН, 2015. – С. 179-194.
4. S. D. Jones and A. Galip Ulsoy. An Optimization Strategy for Maximizing Coordinate Measuring Machine Productivity. Part 2: Problem Formulation, Solution, and Experimental Results. J. Eng. Ind. Vol. 117. 1995. Pp. 610-618.
5. M. Dorigo and L.M. Gambardella. Ant Colony System: A Cooperative Learning Approach to the Traveling Salesman Problem. IEEE Trans, on Evolutionary Computation. Vol. 1 (1). 1997. Pp. 53-66.
6. K. Hitosh and O. Junichi/ Solving time-dependent traveling salesman problems using ant colony optimization based on predicted traffic. Advances in Intelligent and Soft Computing. 2012. Vol. 151. Pp. 25-32.
7. A.A. Kazharov and V.M. Kureichik. Ant colony optimization algorithms for solving transportation problems. Journal of Computer and Systems Sciences International. 2010. Vol. 49. Issue 1. Pp. 30-43.

СИСТЕМА СТАБИЛИЗАЦИИ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ПОЛОЖЕНИЯ РОБОТА С ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ШАГАЮЩИМИ ДВИЖИТЕЛЯМИ

Беликов В.А., Терехов С.Е., Жога В.В., Скакунов В.Н.

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград,
Российская Федерация,

belikov-viktor@mail.ru, stan.terekhov@gmail.com, viczhoga@gmail.com,
svn_vstu@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрена методика автоматической стабилизации корпуса шагающего робота с ортогональными движителями, основанная на сенсорной системе с инерциальными датчиками. В предложенной автономной системе сигналы от гироскопа и акселерометра преобразуются с помощью фильтра Мадгвика в управляющие сигналы приводов опорных стоек движителей робота.

Ключевые слова. Шагающий робот, ортогональные движители, автоматическая стабилизация горизонтального положения корпуса, инерциальные датчики, фильтр Мадгвика.

Введение. Шагающий робот РШ-7 с блочно-модульными мехатронными ортогонально-поворотными механизмами шагания [1] показан на рис. 1. При оснащении соответствующим технологическим оборудованием возможно применение робота для проведения разведывательных операций в недетерминированных средах, труднодоступных и опасных для человека: в местах техногенных катастроф, при обследовании завалов, в местах с повышенным радиационным фоном, при разминировании.

Рис. 1. Физическая модель шагающего робота

Конструктивно робот состоит из верхнего корпуса, связанного механизмом поворота с нижним корпусом. Оба корпуса имеют по две пары направляющих. В направляющие установлены рамы, приводимые в движение механизмами горизонтального перемещения. На концах рам смонтированы телескопические вертикальные опорные стойки, переменной длины. Особенности механической конструкции и характеристики приводов движителей приведены в работах [1, 2, 4].

Кинематическая схема робота позволяет реализовывать как старт – стопные режимы перемещения, так и алгоритм, при котором корпус робота перемещается непрерывно, а безударная адаптация робота к неровностям опорной поверхности обеспечивается программными законами относительных перемещений его частей. Фазы перемещения робота содержат режимы последовательного выполнения операций выдвижения и вдвигания штоков опорных стоек [2].

При перемещении робота по грунтам с низкими несущими характеристиками, вследствие изменения положения центра масс относительно опорных точек, нарушается горизонтальное положение его корпуса. Численные и экспериментальные исследования позволили определить углы крена робота для типовых грунтовых поверхностей, в случаях перемещения по однородному грунту и по неоднородному грунтам (рис. 2).

Рис. 2. Изменение углов наклона корпуса робота при перемещении по различным грунтовым поверхностям: 1 – перемещение по однородному грунту; 2 – перемещение с жесткого на мягкий грунт; 3 – перемещение с мягкого на жесткий грунт

Как видно из графиков, в широком диапазоне типа грунтов, движение робота сопровождается проседанием опорных стоек, в результате которого значения углов крена превышают допустимое значение 2.3^0 , полученное из условия не превышения допустимого значения момента на валу приводного электродвигателя. Вследствие этого каждую смену опорных стоек, после перемещения рам робота на необходимый шаг, необходимо завершать операцией автоматического горизонтирования корпуса робота [3].

Исполнительные механизмы шагающего робота построены на приводах CAT33Hx400x4AG1F вертикальных стоек и серводвигателях RTG060-004 и RTG060-1, обеспечивающих горизонтальное перемещение и поворот платформ робота. Линейные актуаторы CAT33Hx400x4AG1F не имеют встроенных систем управления. Управление и контроль состояния каждого из них осуществляется с помощью индивидуальных унифицированных модулей управления приводами, разработанных на основе 32-контроллеров STM32F100RB [4]. Приводы горизонтального перемещения и поворота поставляются с программируемыми контроллерами положения EPOS2 70/10. Синхронизация и централизованное управление приводами осуществляется объединением контроллеров с помощью протокола EPOSopen. К бортовому компьютеру контроллеры подключаются по USB интерфейсу.

Основные элементы системы управления размещены в специальном отсеке, закрепленном на нижнем корпусе робота (рис. 1): бортовой компьютер ARBOR 7702 (поз.2, рис.1), программируемые контроллеры положения EPOS2 70/10 (поз. 4, рис. 1), электронные платы управления системой технического зрения, модулей управления вертикальными стойками, сенсорные подсистемы навигации, пространственной ориентации и другие. Камера структурированного света 3 (рис. 1) ASUS Xtion PRO Live

установлена на верхней поверхности корпуса с возможностью сканирования в двух плоскостях. Питание робота осуществляется от аккумуляторных батарей 1 (рис. 1) общей емкостью 55 А/ч и напряжением силовой цепи 24 В.

Система горизонтирования робота РШ-7. Высокую маневренность, статическую и динамическую устойчивость, автономное поведение шагающего робота обеспечивает сенсорная система. В робототехнических комплексах могут использоваться разнородные сенсоры, информация с которых интегрируется системой управления [5]. Для шагающего робота наиболее достоверные сведения о пространственном положении к объектам в окружающей среде предоставляются локальной инерциальной навигационной системой – акселерометрами, гироскопами, цифровыми магнитометрами, дополненной сигналами обратной связи от энкодеров приводных двигателей вертикальных стоек, отображающих текущие позиции их рабочих точек. Исходные данные системы позволяют определять углы наклона относительно продольной и поперечной оси платформы робота (углы крена и тангажа). Чтобы преобразовать данные микроэлектромеханического акселерометра и гироскопа требуется специальный объединяющий фильтр. Высокой точностью и эффективностью по сравнению с другими фильтрами ориентации отличается алгоритм Мадгвика (Madgwick) [6]. С помощью фильтра Мадгвика определяется $\mathbf{q}$ кватернион конечного угла поворота корпуса робота в пространстве. Алгоритм Мадгвика использует метод градиентного спуска для нахождения значений компонент кватерниона угла поворота. Кватернион поворота тела в пространстве определяется гиперкомплексным числом, состоящим из четырех компонент. Компоненты кватерниона описывают вектор и конечный угол поворота относительно этого вектора

$$\mathbf{q} = (\cos 0.5\beta, \sin 0.5\beta \cdot g_x, \sin 0.5\beta \cdot g_y, \sin 0.5\beta \cdot g_z) \quad (1)$$

где g_x, g_y, g_z - проекции вектора, вокруг которого совершается поворот; β – конечный угол поворота.

В основе метода поворота тела в пространстве с помощью кватерниона лежит теорема Эйлера о конечном повороте тела в пространстве. С помощью кватерниона поворота $\mathbf{q}$ (1) связывают компоненты кватерниона $\mathbf{r}_H$ в подвижной $Ox'y'z'$ и неподвижной $\mathbf{r}_H$ системах координат $Oxyz$ [5]:

$$\mathbf{r}_H = \mathbf{q} \circ \mathbf{r}_H \circ \mathbf{q}^{-1}, \quad (2)$$

где $\mathbf{q}^{-1}$ – обратный кватернион.

Чтобы применить формулу (2) для получения проекций вектора $\vec{p}_k, k = 1 \div 4$ в неподвижной системе отсчета, по известным его проекциям в подвижной системе отсчета, необходимо предварительно составить кватернион с нулевой скалярной компонентой из данного вектора. После применения формулы (2) над полученным кватернионом, компоненты вектора в неподвижной системе отсчета находятся в векторной части кватерниона.

Плоскость корпуса робота связана с подвижной системой отсчета $Ox'y'z'$, причем плоскость $Ox'y'$ совпадает с плоскостью, проходящей через точки крепления опорных стоек на рамах робота (на верхнем или нижнем корпусе). На рис. 3 изображены векторы $\vec{p}_k, k = 1 \div 4$, проведенные из начала координат в точки A, B, C и D крепления опорных стоек робота. Неподвижная система отсчета $Oxyz$ связана с горизонтом опорной поверхности. Проекции векторов $\vec{p}_k, k = 1 \div 4$ на ось z равны нулю, если корпус робота горизонтален. В случае перекоса платформы относительно неподвижной системы

координат, проекции $\vec{p}_k, k = 1 \div 4$ ненулевые. Знак каждой проекции указывает на требуемое направление вертикального перемещения штоков опорных стоек. Отрицательный знак соответствует увеличению длины опорной стойки или подъему точки ее крепления на соответствующей раме корпуса робота. Положительный знак - уменьшению длины опорной стойки, т.е. опусканию точки ее крепления на соответствующей раме корпуса робота.

На рис. 3 приведены геометрические параметры, характеризующие конфигурацию робота в текущий момент времени, на основании которых формируются проекции векторов $\vec{p}_k, k = 1 \div 4$ на оси Ox' и Oy' подвижной системы координат. При этом параметр $d = const.$ имеет разные значения для рам верхнего и нижнего корпусов, а длины $l_{BL}, l_{FL}, l_{BR}, l_{FR}$ определяются по показаниям цифровых датчиков приводов горизонтального перемещения.

Рис. 3. Схема горизонтальной проекции рамы робота

Таким образом, для стабилизации горизонтального положения робота требуется подать управляющие сигналы на электродвигатели приводов вертикальных опорных стоек робота, для изменения их длины, на найденные значения координат по оси Oz точек крепления опорных стоек. При больших углах отклонения корпуса от горизонтального положения процесс стабилизации корпуса робота может потребовать значительных затрат времени (максимальная скорость перемещения штоков равна 100 мм/с). Большие углы отклонения могут возникать в моменты горизонтального перемещения робота из-за перераспределения сил реакций, действующих на вертикальные опоры и проседания под ними грунта. Процесс стабилизации горизонтального положения корпуса робота - итерационный и может выполняться на протяжении всего цикла перемещения робота.

Реализация системы горизонтирования. Архитектура системы горизонтирования, представляющая часть бортового комплекса управления робота РШ-7, показана на рис. 4. Стабилизация платформы выполняется по измерительным данным от акселерометра и гироскопа сенсорного модуля на микросхеме MPU9250. Датчик тока в модуле управления электроприводом определяет момент касания вертикальной стойки опорной поверхности. Во время шагания и в статическом положении управление электроприводами, как в типичной задаче автоматического регулирования, осуществляется с помощью ПИД - регулятора [7].

Рис. 4. Архитектура системы горизонтирования робота

На вход ПИД - регулятора поступают заданное (Пз) и текущее (Пт) значения положения, переведенные в условные единицы измерительных сигналов от инкрементального цифрового энкодера актуаторов. Результат расчета устанавливается как коэффициент заполнения ШИМ-сигнала, задающего величину напряжения в обмотках двигателя. Частота модуляции ШИМ-сигналов, период усреднения и другие параметры регулятора выбраны в соответствии с типом установленных на роботе приводов. В частности, период усреднения цифровых сигналов обратной связи равен 40 мс., в силу сравнительно низкой скорости обновления данных от датчиков Холла (2 импульса на оборот) энкодера привода по сравнению, например, с разрешающей способностью оптических энкодеров.

Математическая модель динамики вращательного движения корпуса робота вокруг центра масс в проекциях на оси подвижной системы координат $Ox'y'z'$, жестко связанной с корпусом робота и при использовании корабельных углов Эйлера имеет вид [8]

$$\begin{cases} I_x \cdot \ddot{\theta} - (I_z - I_y) \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta = M_x, \\ I_y \cdot \ddot{\psi} \cdot \cos \theta - (I_x + I_z - I_y) \cdot \dot{\psi} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta = M_y, \\ I_z \cdot \ddot{\psi} \cdot \sin \theta - (I_z + I_x - I_y) \cdot \dot{\psi} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta = M_z, \end{cases} \quad (3)$$

здесь I_x, I_y, I_z – главные центральные моменты инерции робота; M_x, M_y, M_z – моменты сил от приводов опорных стоек относительно подвижных осей координат.

В модели, описываемой уравнениями (3), принято, что угол рыскания φ равен нулю. Для конструкции рассматриваемого робота моменты сил от приводов относительно подвижной оси Oz' равны нулю, и третье уравнение в системе (3) определяет величину момента сил реакций опорной поверхности, обеспечивающих это условие.

Используя динамическую характеристику приводного двигателя постоянного тока с независимым возбуждением, зависимость сил приводов опорных стоек имеет вид

$$\tau \dot{F}_k + F_k = a \cdot u_k - b \cdot \dot{z}. \quad (4)$$

где a, b – постоянные, характеризующие параметры двигателя и привода; u_k – входной параметр, управляющий напряжением, подводимым к якорю электродвигателя.

Экспериментальное исследование. Настройка коэффициентов регулятора выполнялась экспериментально. Для достижения максимальной скорости перемещения подвижной части актуатора при сохранении допустимого качества регулирования, минимальных значений задержки сигналов управления и коэффициента перерегулирования, устанавливались максимально возможные значения отдельных составляющих регулятора – пропорциональной (П), интегральной (И), дифференциальной (Д). На каждом этапе настройки оценивалась точность установки заданного положения штока во всем допустимом для этого типа привода диапазоне перемещения: 0 – 150 мм, 150 – 0 мм, с постепенным уменьшением негативного влияния значений коэффициентов на качество регулирования. На рис. 5 приведены временные диаграммы сигналов управления, показывающие влияние ряда промежуточных значений этих коэффициентов на форму сигнала управления при постоянной нагрузке на двигатель. На рис. 5 и рис. 7 значение перемещения S задано в мм, а время t в сек.

Рис. 5. График зависимости положения от времени при негативном влиянии коэффициентов регулятора

Основную роль в регуляторе играет пропорциональная составляющая, поэтому большое значение регулятора при малых значениях ошибки может привести к возникновению колебаний в целевой точке, что показано на рис. 5а. Большое значение дифференциального коэффициента приводит к аналогичному результату (рис. 5б). При динамически меняющейся нагрузке для улучшения характеристик регулятора в систему добавлено астатическое звено, но даже относительно небольшие значения интегрального коэффициента приводят к значительным амплитудам перерегулирования (рис. 5в). Окончательно выбранные значения коэффициентов показаны в структурной схеме ПИД - регулятора, приведенной на рис. 6.

Рис. 6. Структурная схема ПИД - регулятора в схеме управления двигателя вертикальных стоек

Для экспериментальной проверки точности подбора коэффициентов регулятора задана трапециевидная траектория движения штока. Как видно из графика (рис. 7), реальная траектория практически не отличается от заданной. При необходимости применение двухступенчатой схемы ПИД+ПД и методов автоматического подбора коэффициентов могут улучшить характеристики регулятора.

Рис. 7. График зависимости положения от времени при движении по заданной траектории

Заключение. Экспериментальное исследование системы стабилизации горизонтального положения корпуса робота, включающее измерение и оценку точности показаний углов наклона продольной и поперечной оси с помощью инерциальных датчиков, обработку электроприводами автоматически вычисленных перемещений вертикальных стоек, показали работоспособность системы в целом, достаточно высокое быстродействие и точность позиционирования в процессе перевода шагающего робота в горизонтальное состояние.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №15-01-04577-а

Литература

1. Пат. 2476372 РФ, МПК В66С23/36, В60Р3/00. Аварийно-спасательная машина / В.В. Жога, В.Н. Скакунов, А.В. Еременко и др.; ВолгГТУ. - 2013.
2. Walking Mobile Robot with Manipulator-Tripod / В.В. Жога, В.Е. Павловский, В.Н. Скакунов и др.; // Advances on theory and practice of robots and manipulators: proceedings of ROMANSY 2014 XX CISM-IFTOMM Symposium on Theory and Practice

- of Robots and Manipulators (Moscow, 23-26 June 2014) / ed. by Marco Ceccarelli, V.A. Glazunov; Bauman Moscow State Technical University [etc.]. – [Switzerland]: Springer International Publishing, 2014. – p.p. 463-471. – (Mechanisms and Machine Science; Vol. 22).
3. Концепция проектирования, динамика и управление движением шагающих машин. Ч. 2. Динамика движения шагающих машин серии «Восьминог» / Брискин Е.С., Чернышев В.В., Жога В.В., Малолетов А.В., Шаронов Н.Г., Фролова Н.Е. / Мехатроника, автоматизация, управление. 2005. № 6. С. 19-26.
 4. Жога В.В. Архитектура системы управления мобильного технологического робота с шагающими движителями / В.В. Жога, В.Н. Скакунов, С.Е. Терехов // Современное машиностроение: Наука и образование: материалы 5-й Международной научно-практической конференции. / Под. ред. А.Н. Евграфова и А.А. Поповича. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. с. 654 – 664.
 5. Юревич Е.И. Сенсорные системы в робототехнике: учеб. пособие / Е. И. Юревич. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2013. — 100 с.
 6. Madgwick S., An efficient orientation filter for inertial and inertial/magnetic sensor arrays [Электронный ресурс]. – 2016. – Режим доступа: https://www.samba.org/tridge/UAV/madgwick_internal_report.pdf (дата обращ. 15.07.2016).
 7. Денисенко В.В. Компьютерное управление технологическим процессом, экспериментом, оборудованием – М.: Горячая линия – Телеком, 2009. – 608 с.
 8. V. Zhoga, V. Skakunov, I. Shamanov, A. Gavrilov. Programmable Movement Synthesis for the Mobile Robot with the Orthogonal Walking Drivers // Advances in Mechanical Engineering / ed. by A. Evgrafov. – Switzerland : Springer International Publishing, 2016. – p.p.. 135-147. – (Book series: Lecture Notes in Mechanical Engineering).

ИССЛЕДОВАНИЕ МАЯТНИКОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА С ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

Беличенко М.В.¹, Холостова О.В.²

¹ Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия, tuzemec1@rambler.ru

² Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия, kholostova_o@mail.ru

Аннотация. В работе рассматриваются маятниковые движения волчка Лагранжа с подвижной точкой подвеса, которая совершает высокочастотное периодическое движение малой амплитуды. Рассмотрен случай движения точки подвеса, допускающий вертикальные равновесия волчка. В рамках приближенной автономной системы уравнений проинтегрированы уравнения, описывающие движения волчка, как движение физического маятника, получена бифуркационная диаграмма этих движений, построены качественно разные фазовые портреты, найдены кривые вырождения.

Ключевые слова. Волчок Лагранжа, маятниковое движение, вибрирующая точка подвеса.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение волчка Лагранжа в однородном поле тяжести, в предположении, что его точка подвеса O совершает высокочастотное периодическое движение (с частотой Ω) относительно фиксированной в пространстве точки O_* , $O_*O = (u(t), v(t), w(t))^T$.

Введём неподвижную (O, xyz) , поступательно движущуюся $(OXYZ)$ и связанную с телом $(Oxyz)$ системы координат. Оси O_xY и OY направим вертикально вверх. Оси системы координат $Oxyz$ направим вдоль главных осей инерции тела, причём ось O_z направим вдоль оси симметрии. Ориентацию системы координат $Oxyz$ в поступательно движущейся системе координат будем задавать с помощью углов Эйлера ψ, θ, φ .

Выпишем кинетическую и потенциальную энергии системы

$$T = \frac{1}{2} m V_o^2 + m \mathbf{V}_o \cdot \mathbf{V}_{Gr} + \frac{1}{2} A (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} C (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2,$$

$$\Pi = mg(v(t) - l \cos \psi \sin \theta)$$

Здесь m — масса тела, l — расстояние от точки подвеса до центра масс G волчка, A и C — экваториальный и осевой моменты инерции для точки O , $\mathbf{V}_o$ — скорость точки O , $\mathbf{V}_{Gr} = \omega \times \mathbf{OG}$ — относительная скорость центра масс волчка в системе координат $OXYZ$, ω — вектор угловой скорости тела.

Запишем уравнения движения волчка в форме канонических уравнений Гамильтона. Введём сопряженные с углами Эйлера импульсы $P_\psi, P_\theta, P_\varphi$ и составим гамильтониан.

В полученном гамильтониане сделаем унивалентную каноническую замену переменных

$$\hat{\psi} = \psi, \hat{\theta} = \theta, \hat{\varphi} = \varphi, \hat{P}_\psi = P_\psi - ml(\dot{u} \cos \psi + \dot{v} \sin \psi) \sin \theta$$

$$\hat{P}_\theta = P_\theta - ml[(\dot{u} \sin \psi - \dot{v} \cos \psi) \cos \theta - \dot{w} \sin \psi], \hat{P}_\varphi = P_\varphi$$

Отбросим слагаемые, являющиеся функциями времени и запишем гамильтониан в виде

$$H = \frac{\hat{P}_\varphi^2}{2C} + \frac{\hat{P}_\theta^2}{2A} + \frac{(\hat{P}_\psi - \hat{P}_\varphi \cos \hat{\theta})^2}{2A \sin^2 \hat{\theta}} - mgl \cos \hat{\psi} \sin \hat{\theta} - \\ - ml \left((\dot{u}(t) \sin \hat{\psi} - \dot{v}(t) \cos \hat{\psi}) \sin \hat{\theta} + \dot{w}(t) \cos \hat{\theta} \right)$$

Отметим, что координата φ является циклической, поэтому величина $\hat{P}_\varphi$ постоянна.

Предположим, что наибольшее отклонение h_* точки подвеса волчка от точки O_* мало по сравнению с приведённой длиной $L = A/ml$, а частота Ω ее колебаний велика по сравнению с характерной частотой $\omega_* = \sqrt{g/L}$. Введём малый параметр $\varepsilon^2 = h_*/L$ ($0 < \varepsilon \ll 1$), и положим

$$\omega_*/\Omega \sim \varepsilon^2, h_*\Omega \sim 1$$

С помощью методов теории возмущений при сделанных предположениях можно найти замену переменных $\hat{\psi}, \hat{\theta}, \hat{P}_\psi, \hat{P}_\theta \rightarrow \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{P}_\psi, \tilde{P}_\theta$, приводящую гамильтониан к автономному виду до слагаемых четвёртой степени по ε [1]. Приближенный гамильтониан запишется в виде

$$\tilde{H} = \frac{\tilde{P}_\varphi^2}{2C} + \frac{\tilde{P}_\theta^2}{2A} + \frac{(\tilde{P}_\psi - \tilde{P}_\varphi \cos \tilde{\theta})^2}{2A \sin^2 \tilde{\theta}} + \Pi(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}) \quad (1)$$

$$\Pi(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}) = \Pi_g + \Pi_v, \quad \Pi_g = -mgl \cos \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta}$$

$$\Pi_v = -\frac{m^2 l^2}{2A} \left(((a_2 - a_1) \sin^2 \tilde{\psi} + a_2 \cos^2 \tilde{\psi}) \sin^2 \tilde{\theta} + \sin 2\tilde{\theta} (a_{xz} \sin \tilde{\psi} - a_{yz} \cos \tilde{\psi}) - a_{xy} \sin 2\tilde{\psi} \right)$$

Потенциальная энергия приближенной системы состоит из гравитационного Π_g и вибрационного Π_v [1] потенциалов. В вибрационном потенциале введены обозначения

$$a_1 = a_y - a_x, \quad a_2 = a_y - a_z,$$

$$a_x = \langle \dot{u}^2 \rangle, a_y = \langle \dot{v}^2 \rangle, a_z = \langle \dot{w}^2 \rangle, a_{xy} = \langle \dot{u} \dot{v} \rangle, a_{yz} = \langle \dot{v} \dot{w} \rangle, a_{xz} = \langle \dot{w} \dot{u} \rangle$$

где угловые скобки обозначают средние значения по t функции. Далее в этой работе будем рассматривать случай, для которого существуют положения относительного равновесия тела, при которых ось симметрии вертикальна. Это возможно только при $a_{xy} = a_{yz} = a_{xz} = 0$. Этот случай, в частности, включает в себя движение точки подвеса вдоль вертикали и произвольное, в рамках сделанных предположений, движение в горизонтальной плоскости.

Решения приближенной системы (1) на интервале времени $t \sim \varepsilon^{-1/2}$ связаны с решениями исходной системы соотношениями вида [1]

$$\hat{\psi} = \tilde{\psi} + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \hat{\theta} = \tilde{\theta} + O(\varepsilon^{3/2})$$

$$\hat{P}_\psi = \tilde{P}_\psi - ml \left[(\dot{u} \cos \tilde{\psi} + \dot{v} \sin \tilde{\psi}) \sin \tilde{\theta} \right] + O(\varepsilon^{1/2})$$

$$\hat{P}_\theta = \tilde{P}_\theta + ml \left[(-\dot{u} \sin \tilde{\psi} + \dot{v} \cos \tilde{\psi}) \cos \tilde{\theta} + \dot{w} \sin \tilde{\theta} \right] + O(\varepsilon^{1/2})$$

Введём безразмерные параметры, импульсы и время по формулам

$$\alpha = \frac{a_1 m^2 l^2}{A^2 \omega_*^2}, \quad \beta = \frac{a_2 m^2 l^2}{A^2 \omega_*^2}, \quad \gamma = \frac{A}{C}, \quad \tilde{P}_\psi = A \omega_* P_1, \quad \tilde{P}_\theta = A \omega_* P_2, \quad \tilde{P}_\varphi = A \omega_* P_3, \quad \tau = \omega_* t$$

для удобства опустим знаки тильды и перепишем гамильтониан в виде

$$H = \frac{\gamma P_3^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + \frac{(P_1 - P_3 \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} - \cos \psi \sin \theta - \frac{1}{2} ((\beta - \alpha) \sin^2 \psi + \beta \cos^2 \psi) \sin^2 \theta \quad (2)$$

Далее будем рассматривать приближенную автономную систему уравнений с гамильтонианом (2).

Будем считать, что константа циклического интеграла $P_3 = 0$. Тогда система допускает частные решения, при которых $\theta = \pi/2$, $P_2 = 0$, причём ψ и P_1 описываются каноническими уравнениями с функцией Гамильтона

$$H = \frac{P_1^2}{2} - \cos \psi - \frac{\alpha}{2} \cos^2 \psi \quad (3)$$

Эти уравнения описывают движение волчка Лагранжа, как физического маятника.

Цель работы — интегрирование уравнений маятниковых движений с функцией Гамильтона (3), построение бифуркационной диаграммы, выявляющей области с различными движениями волчка, и построение фазовых портретов.

2. Маятниковые движения. Рассмотрим систему с одной степенью свободы, описывающую маятниковые движения. Потенциальная энергия системы запишется в виде

$$\Pi(\psi, \pi/2) = -\cos \psi - \frac{\alpha}{2} \cos^2 \psi$$

Заметим, что выписанное выражение не зависит от параметра β , который представляет собой разность средних значений квадрата скорости движения точки подвеса вдоль вертикали и вдоль оси, перпендикулярной плоскости движения. Этот параметр не влияет на движение в плоскости OXY , но он будет влиять на устойчивость рассматриваемых движений.

Потенциальная энергия может иметь два или три экстремума на $\psi \in [0; \pi]$. Значение $\psi = 0$ при $\alpha > -1$ отвечает минимуму потенциальной энергии, а при $\alpha < -1$ — максимуму. Значение $\psi = \pi$ при $\alpha < 1$ является максимумом, а при $\alpha > 1$ — минимумом потенциальной энергии. Значение $\psi = \pi - \arccos(1/\alpha)$ существует при $|\alpha| > 1$, и при $\alpha > 1$ является максимумом потенциальной энергии, а при $\alpha < -1$ — минимумом. Положения, отвечающие максимуму потенциальной энергии отвечают неустойчивым положениям равновесия системы с одной степенью свободы, а положения, отвечающие минимуму — устойчивым.

Рис. 1. Потенциальная энергия при $|\alpha| < 1$, $\alpha > 1$ и $\alpha < -1$

Рис. 2. Фазовый портрет невозмущённого движения при $|\alpha| < 1$, $\alpha > 1$ и $\alpha < -1$

Обозначим постоянную энергии через h и разрешим гамильтониан (3) относительно P_1 .

$$P_1 = \pm \sqrt{2h + 2\cos\psi + \alpha\cos^2\psi} \quad (4)$$

Многочлен под корнем относительно $\cos\psi$ имеет два корня

$$\cos\psi_1 = u_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 2\alpha h}}{\alpha}, \quad \cos\psi_2 = u_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 2\alpha h}}{\alpha}$$

причём при $2\alpha h < 1$ они действительные, а при $2\alpha h > 1$ — комплексные.

Таким образом, область параметров α и h разбивается на 8 областей (рис. 3).

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма

Область Γ_0 ограничена условиями $2\alpha h = 1$ при $\alpha < -1$ и $h = -1 - \alpha/2$ при $\alpha > -1$, движение в этой области невозможно. Область Γ_1 описывается условиями $h > -1 - \alpha/2$, $h < 1 - \alpha/2$, и $\alpha > 0$. В ней волчок совершает колебания около нижнего положения равновесия, размах которых может составлять от 0 до π . В области Γ_2 , описываемой условиями $h > 1 - \alpha/2$, $2\alpha h < 1$ и $\alpha > 1$, происходят колебания около нижнего положения с размахом от 0 до $\pi - \arccos(1/\alpha)$ и около верхнего равновесия, размах которых может составлять от 0 до $\arccos(1/\alpha)$. В области Γ_3 ($2\alpha h > 1$, $\alpha > 0$), $\Gamma_{3.1}$ ($h > 1 - \alpha/2$, $2\alpha h < 1$, $\alpha > 0$) и Γ_6 ($h > 1 - \alpha/2$, $\alpha < 0$) тело совершает вращения. В области Γ_4 ($h < -1 - \alpha/2$, $2\alpha h > 1$, $\alpha < -1$) возможны колебания относительно устойчивых боковых равновесий, причём для колебания $\psi \in (0; \arccos(-1 - 2/\alpha))$, в области Γ_5 ($h > -1 - \alpha/2$, $h < 1 - \alpha/2$, $\alpha < 0$) — колебания около нижнего положения (охватывающие боковые равновесия в случае их существования), размах которых может составлять от $\arccos(-1 - 2/\alpha)$ до π .

3. Интегрирование маятникового движения. Найдём закон движения $\psi(t)$ для каждой области. Для безразмерного гамильтониана справедливо $\dot{\psi} = P_1$. Перейдём к новой переменной $u = \cos\psi$ и проинтегрируем уравнение (4):

$$t = \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(u-u_1)(u-u_2)}}$$

Это выражение интегрируется в эллиптических функциях, поэтому будем использовать следующие обозначения: $F(u, k)$ — эллиптический интеграл первого рода, $\operatorname{sn}(\xi, k)$ — эллиптический синус, и $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

3.1. Область Γ_1 . Рассмотрим область Γ_1 . Для движений в этой области $u \in [u_1; 1]$. Будем рассматривать движение при условии, что в начальный момент ось волчка была в нижнем положении.

$$t = \int_1^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(u-u_1)(u-u_2)}}$$

Корни подкоренного выражения действительные и расположены в порядке $u_2, -1, u_1, 1$.

Проинтегрировав с использованием соотношений из [2], получим

$$t = -\frac{F(u, k_1)}{\xi_1}, u = \arcsin \sqrt{\frac{(1-u)(u_1-u_2)}{(1-u_1)(u-u_2)}}, \xi_1 = \sqrt{\frac{\alpha(u_1-u_2)}{2}}, k_1 = \sqrt{\frac{(u_1-1)(u_2+1)}{2(u_1-u_2)}}$$

Обращая полученную функцию относительно u получим

$$u = \frac{u_2(u_1-1)\operatorname{sn}^2(\xi_1 t, k_1) - u_1 + u_2}{(u_1-1)\operatorname{sn}^2(\xi_1 t, k_1) - u_1 + u_2}$$

Решение периодическое с частотой $\omega_1 = \pi\xi_1 / 2K(k_1)$.

3.2. Область Г2. В области Г2 есть два типа движения — колебания около верхнего и около нижнего положений равновесия. Для движений около нижнего положения $u \in [u_1, 1]$, а около верхнего — $u \in [u_2, -1]$. Для движения около нижнего положения интегрирование даёт следующий результат

$$u = \frac{(1-u_1)\operatorname{sn}^2(\xi_2 t, k_2) - u_1 - 1}{(u_1-1)\operatorname{sn}^2(\xi_2 t, k_2) - u_1 - 1}, \xi_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha(u_1+1)(1-u_2)}, k_2 = \sqrt{\frac{(u_1-1)(u_2+1)}{(u_1+1)(u_2-1)}}$$

Для движения около верхнего положения получим

$$u = \frac{(u_2+1)\operatorname{sn}^2(\xi_2 t, k_2) + u_2 - 1}{(u_2+1)\operatorname{sn}^2(\xi_2 t, k_2) - u_2 + 1}$$

Частота полученных решений $\omega_2 = \pi\xi_2 / 2K(k_2)$.

3.3. Область Г3.1. Движение в области Г3.1 — вращение, $u \in [-1; 1]$,

Корни подкоренного выражения действительные и расположены в порядке $u_2, u_1, -1, 1$.

Проинтегрировав, получим

$$u = \frac{2u_2\operatorname{sn}^2(\xi_{31} t, k_{31}) - u_2 - 1}{2\operatorname{sn}^2(\xi_{31} t, k_{31}) - u_2 - 1}, \xi_{31} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha(u_1-1)(u_2+1)}, k_{31} = \sqrt{\frac{2(u_1-u_2)}{(u_1-1)(u_2+1)}}$$

Частота решения $\omega_{31} = \pi\xi_{31} / 2K(k_{31})$.

3.4. Область Г3. Движение в области Г3 — также вращение, $u \in [-1; 1]$.

Корни подкоренного выражения действительные и мнимые. Мнимые корни запишем в виде $u_{1,2} = a \pm ib$. Проинтегрировав, получим

$$u = \frac{2a\operatorname{sn}^2(\xi_3 t, k_3) \pm \sqrt{((1+a^2+b^2)^2 - 4a^2)}(1 - \operatorname{sn}^2(\xi_3 t, k_3))}{\sqrt{(1+a^2+b^2)^2 - 4a^2}(2 - \operatorname{sn}^2(\xi_3 t, k_3)) + (1+a^2+b^2)\operatorname{sn}^2(\xi_3 t, k_3)}$$

$$\xi_3 = \sqrt{\alpha}\sqrt[4]{(1+a^2+b^2)^2 - 4a^2}, k_3 = \frac{\sqrt{1-a^2-b^2}\sqrt{(1+a^2+b^2)^2 - 4a^2}}{\sqrt{2}\sqrt{(1+a^2+b^2)^2 - 4a^2}}$$

Частота полученного решения — $\omega_3 = \pi\xi_3 / 2K(k_3)$.

3.5. *Область Г4.* Движение в области Г4 — колебание в окрестности бокового положения равновесия, $u \in [u_1; u_2]$.

Проинтегрировав, получим

$$u = \frac{(u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2(\xi_4 t, k_4) - u_2(1 - u_1)}{(u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2(\xi_4 t, k_4) - 1 + u_1}, \quad \xi_4 = \frac{1}{2} \sqrt{-\alpha(1 - u_1)(u_2 + 1)}, \quad k_4 = \sqrt{\frac{2(u_2 - u_1)}{(1 - u_1)(u_2 + 1)}}$$

Решение периодическое с частотой $\omega_4 = \pi \xi_4 / 2K(k_4)$.

3.6. *Область Г5.* Движение в области Г5 — колебание, охватывающее нижнее и боковые положения равновесия, $u \in [u_1; 1]$.

Решение в этом случае выглядит следующим образом

$$u = \frac{u_2(1 - u_1) \operatorname{sn}^2(\xi_5 t, k_5) + u_2 - u_1}{(1 - u_1) \operatorname{sn}^2(\xi_5 t, k_5) + u_2 - u_1}, \quad \xi_5 = \frac{1}{2} \sqrt{2\alpha(u_1 - u_2)}, \quad k_5 = \sqrt{\frac{(1 - u_1)(u_2 + 1)}{2(u_2 - u_1)}}$$

Частота полученного решения — $\omega_5 = \pi \xi_5 / 2K(k_5)$.

3.7. *Область Г6.* В области Г6 происходят вращения, $u \in [-1; 1]$, решение имеет вид

$$u = \frac{2u_2 \operatorname{sn}^2(\xi_4 t, k_4) - u_2 - 1}{2 \operatorname{sn}^2(\xi_4 t, k_4) - u_2 - 1}$$

Частота решения — ω_4 .

3.8. *Особые кривые.* Рассмотрим теперь движение на кривых, разделяющих рассмотренные области.

Пусть $h = 1/(2\alpha)$, $\alpha > 1$. Тогда подкоренное выражение представляет собой полный квадрат, и интеграл запишется в виде

$$t = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{\alpha}(1/\alpha + \cos \psi)} = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha^2 - 1}} \ln \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - 1} \sin \psi + \cos \psi + \alpha}{1 + \alpha \cos \psi} \right)$$

Выражение для ψ достаточно громоздко и не приводится здесь. Оно асимптотически стремится к боковому положению равновесия.

Пусть теперь $h = 1 - \alpha/2$. В этом случае интеграл имеет вид

$$\begin{aligned} t &= \int_1^u \frac{du}{(u+1)\sqrt{(1-u)(u-1+2/\alpha)}} = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{1-\alpha}} \ln \left(\frac{2\sqrt{1-\alpha}\sqrt{(1-u)(u-1+2/\alpha)} + 2(u-1)\alpha + 3 - u}{1 + u} \right) \\ u &= \frac{\mu^2 + (4\alpha - 6)\mu + 1}{-\mu^2 + (4\alpha - 2)\mu - 1}, \quad \mu = e^{-2t\sqrt{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Выражение для u в области $\alpha > 1$ является периодической функцией с частотой $2\sqrt{1-\alpha}$, что отвечает колебанию около нижнего положения равновесия, а в области $\alpha < 1$ асимптотически приближается к значению $\psi = \pi$, что для данной области является движением по сепаратрисе.

Рассмотрим теперь сепаратрису $h = -1 - \alpha/2$, $\alpha < -1$.

$$\begin{aligned}
t &= \int_{-1-2/\alpha}^u \frac{du}{(1-u)\sqrt{-(1+u)(u+1+2/\alpha)}} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{-1-\alpha}} \ln \left(\frac{2\sqrt{-1-\alpha}\sqrt{-(1+u)(u+1+2/\alpha)} - 2(u+1)\alpha - 3 - u}{1-u} \right) \\
u &= \frac{\mu^2 + (4\alpha + 6)\mu + 1}{\mu^2 - (4\alpha + 2)\mu + 1}, \quad \mu = e^{2t\sqrt{-1-\alpha}}
\end{aligned}$$

На этом решении тело асимптотически приближается к нижнему положению равновесия.

4. Условие вырождения. Можно перейти к переменным действие-угол I, w и записать гамильтониан (3) в виде $\hat{H} = \hat{H}(I)$. Условие вырождения выполняется при $\partial^2 \hat{H} / \partial I^2 = 0$, что сводится к условию $\partial \omega / \partial h = 0$, где ω — частота рассматриваемого периодического решения. Это условие было проверено для областей вращения и колебания волчка. Было получено, что условие вырождения выполняется только в области Г5 на кривой, изображённой пунктирной линией на рис. 3.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No14-21-00068) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

Литература:

1. Маркеев А.П. Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // ПММ, 2011, т. 75, № 2, с. 193–203.
2. P. F. Byrd, M. D. Friedman Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists. Springer - Verlag New York Heidelberg Berlin 1971.

НЕЛИНЕЙНАЯ НЕЧЕТКАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ОХЛАЖДЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ ОБОРУДОВАНИЯ С ЧПУ

Бобырь М.В.¹, Кулабухов С.А.², Якушев А.С.³

¹Юго-Западный государственный университет, Курск, Россия,
max_bobyry@mail.ru

²Юго-Западный государственный университет, Курск, Россия,
Kulabuhov.Sergei@yandex.ru

³Юго-Западный государственный университет, Курск, Россия,
alekseyakushev@yandex.ru

Аннотация. В статье рассмотрена нелинейная система управления охлаждением элементов оборудования на базе 3-х осевого фрезерного станка с ЧПУ. Представлены электронные и механические компоненты, данной системы, в которой реализован механизм охлаждения режущего инструмента. Для охлаждения предложена нечетко-логическая SISO-система, которая регулирует интенсивность напряжения на затворе полевого транзистора, воздействующего на элемент Пельтье. Проведено численное моделирование ее работы и системы в целом.

Ключевые слова: нелинейная система управления, нечеткая логика, мягкие арифметические операторы.

К современным моделям оборудования с ЧПУ предъявляются требования увеличения производительности за счет своевременного охлаждения режущего инструмента. Достичь этого возможно за счет контроля температурных режимов процесса обработки заготовок в режиме реального времени. Современные микропроцессорные средства позволяют справиться с этой задачей, однако информация, получаемая из зоны резания, от систем активного контроля оборудования с ЧПУ для различных технологических процессов обработки изделий носит неопределенный характер [1]. Неопределенность получаемой информации вызвана наличием возмущающих воздействий, действующих на технологическую систему станок – приспособление – инструмент – деталь в режиме реального времени. К одним из наиболее существенных видов возмущающих воздействий относится температурная деформация. В большинстве случаев появление возмущающих воздействий носит случайный характер. Однако, традиционные логические модели, используемые в управляющих схемах оборудования с ЧПУ, как правило, настроены только на обработку логических нулей и единиц. Что снижает их эффективность, за счет того что система активного контроля начнет выдавать управляющих сигналы по устранению возмущающих воздействий, если с помощью датчиков определится пороговое значение. Нечетко-логические системы в зависимости от традиционных логических моделей, позволяют обрабатывать любую информацию, поступающие в режиме реального времени от сенсоров системы активного контроля оборудования с ЧПУ [2,3].

Таким образом, своевременная компенсация температурных деформаций, возникающих в процессе обработки изделий позволит увеличить скорость обработки, а, следовательно, и производительность оборудования с ЧПУ.

Структурная модель и принцип работы нелинейной системы охлаждения изделий. С целью решения поставленной задачи авторами предложена структурно-функциональная схема автоматизированной системы управления температурным режимом резания в 3-х осевых станках с ЧПУ [4]. В ее состав входит: управляющий микроконтроллер ArduinoMega 2560, платы управления шаговыми двигателями SHRampsv.1.4, блок питания, платы управления шаговыми двигателями, например MP4988, шаговые двигатели, трап валы, микропереключатели ограничения движения

суппортов оборудования с ЧПУ по каждой из осей, дрель с фрезерными, гравировальными и шлифовальными насадками.

На рисунке 1 представлена экспериментальная модель 3-х осевого станка с ЧПУ.

Рис. 1. 3-х осевой фрезерный станок с ЧПУ: 1 - Шаговый двигатель для оси Z; 2 - Шаговый двигатель для оси X; 3 - Шаговый двигатель для оси Y; 4 - Плата управления Arduino Mega 2560, плата расширения; 5 - Драйверы шаговых двигателей MP4988; 6 - дрель с насадками

Отличительной особенностью разработанной системы является использование блока контроля температурных режимов, внутреннее устройство которого основано на нечетко-логическом аппарате принятия решения и реализованного в виде специализированного программного обеспечения [5].

Принцип работы нелинейной системы управления охлаждением изделий заключается в следующем. В патрон для возможности охлаждения режущего инструмента введены элементы Пельтье и датчики температуры (термопара), контролирующие нагрев режущего инструмента [6]. При механической обработке изделий температура закрепленного в патроне режущего инструмента изменяется, что приводит к появлению температурных деформаций и как следствие ведет к ухудшению качества обработки. Схема крепления элементов охлаждения на режущем инструменте представлена на рис. 2.

Рис. 2. Схема патрона 3-х осевого станка с ЧПУ: 1- патрон; 2 – режущий инструмент; 3 – гофра с токопроводами; 4 – датчик температуры; 5- охлаждающая сторона элементов Пельтье; 6 – горячая сторона элементов Пельтье.

Нагрев режущего инструмента отслеживается термопарой. Сигнал от нее поступает по проводу на управляющую плату микроконтроллера Arduino Mega. В случае если в процессе механической обработки величина температурных деформаций увеличивается на элементы Пельтье, увеличивается интенсивность подачи постоянного тока, который при прохождении через элемент Пельтье нагревает одну часть пластины и охлаждает другую. Холодная часть прилегает к нагретой части режущего инструмента и тем самым охлаждает его. Количество отводимого тепла пропорционально силе тока, который регулируется с помощью разработанного специализированного программного обеспечения, основанного на использовании нечеткой логики [7,8].

Схема цепи контроля температуры в зоне резания и элементов охлаждения представлена на рис.3.

Рис.3 – Схема цепи контроля температуры в зоне резания: где: 1 - полевой транзистор, при этом 3 – затвор полевого транзистора, C – сток полевого транзистора, И – исток полевого транзистора; 2–микроконтроллер Arduino Mega; 3 – термопара; 4- специальная пластина с элементом Пельтье

Электрическая схема подключения и соединения компонентов 3-х осевого фрезерного станка с ЧПУ представлена на рисунке 4. Плата управления шаговыми двигателями SH Ramps устанавливается сверху на микроконтроллер Arduino Mega 2560. Драйверы двигателей, закрепляются на плате SH Ramps в специально отведенные места для данных драйверов.

Рис.4. Электрическая схема 3-х осевого фрезерного станка с ЧПУ

Нелинейная нечеткая система для охлаждения изделий. Рассмотрим нечеткую SISO-модель (Single Input Single Output), используемую в вышеуказанной схеме для управления величиной подачи интенсивности постоянного тока посредством изменения подачи от микроконтроллера на затвор полевого транзистора с целью изменения на стоке полевого транзистора величины прямого тока, подаваемого на элемент Пельтье. Нелинейная нечеткая SISO-система имеет один вход и один выход:

$$U = f(t), \quad (1)$$

где U – напряжение подаваемое от микроконтроллера на затвор полевого транзистора, t – температура в зоне резания, определяемая с помощью термопары.

Разработанная нелинейная система управления охлаждением изделий основана на последовательном выполнении следующих шагов.

1. Фаззификация входных и выходных переменных. Функция принадлежности (ФП) для входной и выходной переменной имеют треугольный вид и представлена на рис. 5, а для входных значений, и 5, б для выходных значений.

Рис 5. Функции принадлежности нелинейной нечеткой SISO-системы: а)–входная ФП; б) – выходная ФП.

ФП определяются с помощью следующих формул

$$\mu_{t_i} = \begin{cases} 0, & \text{если } t_i < a \text{ или } t_i > c \\ \frac{t_i - a}{b - a}, & \text{если } a < t_i < b, \\ \frac{c - t_i}{c - b}, & \text{если } b < t_i < c \end{cases} \quad (2)$$

где t_i (температура) – входная переменная, значение полученное от датчика температуры; a, b, c – параметры треугольной ФП.

$$t = [t_1] + [t_2] + [t_3] + [t_4] + [t_5], \quad (3)$$

где t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 – термы входной переменной.

$$U = [u_1] + [u_2] + [u_3] + [u_4] + [u_5], \quad (4)$$

где u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 – термы выходной переменной.

2. Построение нечетких правил. Для нелинейной системы используются следующие нечеткие правила управления (НПУ):

- 1: НПУ₁: ЕСЛИ « t есть t_1 » ТО « u есть U_5 »;
- 2: НПУ₂: ЕСЛИ « t есть t_2 » ТО « u есть U_4 »;
- 3: НПУ₃: ЕСЛИ « t есть t_3 » ТО « u есть U_3 »;
- 4: НПУ₄: ЕСЛИ « t есть t_4 » ТО « u есть U_2 »;
- 5: НПУ₅: ЕСЛИ « t есть t_5 » ТО « u есть U_1 ».

3. Логический вывод. Этот этап разбивается на две операции: импликацию и композицию.

Шаг импликации: находятся уровни отсечения заключений для каждого из пяти НПУ с использованием мягкой арифметической операции нахождения, определяемая формулой.

$$\min_{\delta}(t; \Delta t) = \frac{t + \Delta t + \delta^2 - \sqrt{(t - \Delta t)^2 + \delta^2}}{2} \quad (5)$$

$$\alpha 1 = \min_{\delta}\{t; \Delta t\}, \quad \alpha 2 = \min_{\delta}\{t; \Delta t\}, \quad \alpha 3 = \min_{\delta}\{t; \Delta t\},$$

$$\alpha 4 = \min_{\delta}\{t; \Delta t\}, \quad \alpha 5 = \min_{\delta}\{t; \Delta t\}.$$

Затем находятся усеченные функции принадлежности для каждого из выходного термина:

$$U'u = \bigvee_{i=1}^n U_i' = \alpha_i \wedge U_i. \quad (6)$$

Шаг композиции: для объединения усеченных функций принадлежности используется операция максимума, что приводит к получению выходной переменной с функцией принадлежности.

$$\alpha_i = \max(U_i'). \quad (7)$$

4. *Дефаззификация.* На данном этапе методом центра тяжести находится выходное значение системы по формуле (8):

$$y_{\text{вых}} = \frac{\sum_{i=1}^n U_i' u}{\sum_{i=1}^n u}. \quad (8)$$

По значению выхода определяется одно единственное значение величины напряжения на затворе транзистора.

Моделирование работы нелинейной системы управления охлаждением изделий. Пусть входная переменная задана треугольной функцией принадлежности, имеющей пять термов [9,10].

Шаг 1. Формирование функции принадлежности термов входной (рис. 4,а) и выходной (рис.4,б) переменных.

Для входной переменной температуры в зоне резания функция принадлежности имеет следующий вид:

$$t = \{t_1\} + \{t_2\} + \{t_3\} + \{t_4\} + \{t_5\} =$$

$$= \left\{ \int_{100}^{130} \left(\frac{t-100}{130-100} \right) / t + \int_{130}^{135} \left(\frac{135-t}{135-130} \right) / t \right\} +$$

$$+ \left\{ \int_{120}^{140} \left(\frac{t-120}{140-120} \right) / t + \int_{140}^{150} \left(\frac{150-t}{150-140} \right) / t \right\} +$$

$$+ \left\{ \int_{140}^{160} \left(\frac{t-140}{160-140} \right) / t + \int_{160}^{170} \left(\frac{170-t}{170-160} \right) / t \right\} +$$

$$+ \left\{ \int_{160}^{175} \left(\frac{t-160}{175-160} \right) / t + \int_{175}^{190} \left(\frac{190-t}{190-175} \right) / t \right\} +$$

$$+ \left\{ \int_{175}^{185} \left(\frac{t-175}{185-175} \right) / t + \int_{185}^{200} \left(\frac{200-t}{200-185} \right) / t \right\}.$$

Функция принадлежности для выходной переменной – напряжения передаваемого на затворе полевого транзистора имеет вид:

$$\begin{aligned}
u &= \{u_1\} + \{u_2\} + \{u_3\} + \{u_4\} + \{u_5\} = \\
&= \left\{ \int_0^{0,5} \left(\frac{u-0}{0,5-0} \right) / u + \int_{0,5}^1 \left(\frac{1-u}{1-0,5} \right) / u \right\} + \\
&+ \left\{ \int_{0,5}^1 \left(\frac{u-0,5}{1-0,5} \right) / u + \int_1^{1,5} \left(\frac{1,5-u}{1,5-1} \right) / u \right\} + \\
&+ \left\{ \int_1^{1,5} \left(\frac{u-1}{1,5-1} \right) / u + \int_{1,5}^2 \left(\frac{2-u}{2-1,5} \right) / u \right\} + \\
&+ \left\{ \int_{1,5}^2 \left(\frac{u-1,5}{2-1,5} \right) / u + \int_2^{2,5} \left(\frac{2,5-u}{2,5-2} \right) / u \right\} + \\
&+ \left\{ \int_2^{2,5} \left(\frac{u-2}{2,5-2} \right) / u + \int_{2,5}^3 \left(\frac{3-u}{3-2,5} \right) / u \right\}.
\end{aligned}$$

Шаг 2. Этот шаг делится на два шага.

Шаг импликации: Пусть температура в зоне резания равна 122°C. Используя данную информацию, находим коэффициенты $\alpha_1 \dots \alpha_n$.

Затем выбираем нечеткие правила (НП), которые имеют пересечения. Это НП с номерами 1,2, и 3. Получаем три усеченных терма по уровням 0,07 и 0,73 композиции.

Шаг композиции: Проводим логическое объединение всех новых термов и формируем нечеткий вектор функций принадлежности U' .

Шаг 3. Нечеткий вектор функции принадлежности U' преобразуется в единственное четкое значение с помощью метода центра тяжести.

$$\begin{aligned}
U &= \frac{(1,1 * 0,07) + (2,1 * 0,07) + (2,3 * 0,73) + (2,7 * 0,73)}{0,07 + 0,07 + 0,73 + 0,73} = \\
&= \frac{0,077 + 0,147 + 1,679 + 1,971}{1,6} = 2,4.
\end{aligned}$$

Таким образом, температура 122 градусов в зоне резания требует для достаточного охлаждения резца наличия напряжения на затворе транзистора 2,4В.

Далее в микроконтроллере в режиме реального времени происходит установка полученного напряжения на затворе транзистора. Напряжение на входе транзистора, меняет выходной ток стока, а изменение тока стока изменят температуру на элементе Пелетье, который охлаждает режущий инструмент.

Следует отметить, что дефазификация осуществлялась с применением метода центра тяжести и использованием мягких и жестких арифметических операций нахождения максимума и минимума в структуре нечеткого вывода. Результаты численного моделирования представлены на рис 6.

Рис. 6 – Графики выходных значений: а) с использованием жестких вычислений; б) с использованием мягких вычислений

Результаты. Анализ полученных значений показал отсутствие аддитивности алгоритма при использовании жестких операций. А применение мягких арифметических операций формирует на выходе SISO-систему реакцию, при которой все выходные значения отличны от нуля. Данный алгоритм не имеет зон нечувствительности и может быть применен для управления оборудованием с ЧПУ.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МД-707.2017.8 и Госзадания: Соглашение №2.3440.2017/ПЧ.

Литература

1. Bobyr M.V., Titov V.S., Nasser A.A. Automation of the cutting-speed control process based on soft fuzzy logic computing // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2015. Т. 44. № 7. С. 633-641.
2. Титов В.С., Бобырь М.В. Модернизация асу оборудованием с ЧПУ на основе аппарата нечеткой логики // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2010. № 2. С. 40-43.
3. Титов В.С., Бобырь М.В., Кулабухов С.А. Учет инерционности в нечетко-логических системах управления // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2014. № 12. С.14-19.
4. Пась О.В., Серков Н.А. Влияние зазора в приводах на точность воспроизведения траектории в многокоординатной машине с ЧПУ // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2015. № 5. С. 3-10.
5. Титов В.С., Бобырь М.В. Моделирование работы нечетко-логического вывода на основе мягких и жестких арифметических операций // Программа для ЭВМ. №2014614924. 2014.
6. Титов В.С., Бобырь М.В., Тевс С.С. Выбор оптимальных параметров управления технологическим процессом методами нечеткой логики // промышленные АСУ и контроллеры. 2003. № 5. с. 21-23.
7. Серков Н.А. Модель отклонения взаимного положения исполнительных органов многокоординатного станка // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 3. С. 68-78.
8. Ремизов Э.В., Лукьянов Е.А. Интеллектуальный мониторинг шпиндельного узла на базе нечеткой логики // Вестник Донского государственного технического университета. 2008. Т. 8. № 3 (38). С. 221-225.
9. Бобырь М.В., Титов Д.В., Кулабухов С.А. О некоторых свойствах мягкого алгоритма нечетко-логического вывода // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. № 2(59), –Курск, 2015.- С.39-51.
10. Бобырь М.В., Кулабухов С.А., Милостная Н.А. Обучение нейро-нечеткой системы на основе метода разности площадей// Искусственный интеллект и принятие решений. 2016. № 4. С. 15-26.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕЧЕТКОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ОБОРУДОВАНИЕМ С ЧПУ

Бобырь М.В.¹, Нассер А.А.², Абдулджаббар М. А.³

¹Юго-Западный государственный университет, Курск, Россия,
max_bobyrg@mail.ru

²Юго-Западный государственный университет, Курск, Россия,
nassier@mail.ru

³Юго-Западный государственный университет, Курск, Россия,
mohammed88@mail.ru

Аннотация. Рассмотрен анализ устойчивости нечетких регуляторов и систем управления оборудованием с ЧПУ. Представлена структурная схема системы управления охлаждением элементов на оборудовании с ЧПУ. Описаны результаты исследования факторов, влияющих на величину температурных деформаций, возникающих в зоне резания при механической обработке изделий на оборудовании с ЧПУ в режиме реального времени. Представленные результаты получены методом имитационного моделирования.

Ключевые слова: нечеткая систем; устойчивость; нечеткий ПИД регулятор.

Среди приоритетных направлений развития управляющих систем в машиностроении, одним из основных является технология учета температурных деформаций, возникающих при обработке деталей на оборудовании с ЧПУ, в режиме реального времени. От успешного решения данной задачи напрямую зависит увеличение производительности станков. Поэтому инновационные технологии управления температурными деформациями, основанные на использование интеллектуальных методов, например, нечеткой логики, являются одним из эффективных инструментов решения поставленных задач.

Многочисленные исследования зависимости температуры от различных факторов показывают, что на величину температурных деформаций в зоне резания (t) влияют следующие параметры:

- Элементы режима резания (скорость резания (v), подача (s), глубина резания (d));
- Свойства обрабатываемого материала (твердость материала (σ_B), теплопроводность (ρ));
- Геометрия режущего клина инструмента (передний угол (γ), главный угол (ϕ)).

Наибольшее влияние на температуру в зоне резания оказывают элементы режима резания, в исследованиях [1-3] предложен ряд аналитических и эмпирических формул для расчета температуры в зоне резания при увеличении величины каждого элемента режима резания, что приводит к изменению величины температуры в зоне резания.

Общее уравнение зависимости температуры в зоне резания от элементов режима резания имеет вид:

$$t = C^f \cdot v^x \cdot S^y \cdot d^z,$$

где C^f – общий коэффициент, характеризующий условия обработки; v – скорость резания, м/мин; S – подача, мм/об; d – глубина резания, мм; z , x , y – показатели степеней, характеризующие интенсивность прироста температуры с увеличением скорости, подачи и глубины резания, при этом $x \in [0.1 \div 0.2]$, $y \in [0.2 \div 0.25]$, $z \in [0.4 \div 0.6]$.

С учетом численных значений показателя степени z делаем вывод о том, что на температуру в зоне резания наиболее сильно влияет скорость резания.

Рис.1. Зависимость температуры от элементов режима резания (скорость, подача и глубина резания)

Таблица 1. Зависимость температуры от условий резания

Элементы режима резания	Скорость резания	$v \uparrow \rightarrow Q \uparrow \rightarrow t \uparrow$
	Подача	$S \uparrow \rightarrow P_z \uparrow \rightarrow Q \uparrow \rightarrow t \uparrow$
	Глубина резания	$d \uparrow \rightarrow P_z \uparrow \rightarrow Q \uparrow \rightarrow t \uparrow$
Свойства обрабатываемого материала	Твердость материала	$\sigma_B \uparrow \rightarrow t \uparrow$
	Теплопроводность	$\rho \downarrow \rightarrow t \uparrow$
геометрия режущего клина.	Передний угол (γ)	$\gamma \uparrow \rightarrow P_z \downarrow \rightarrow Q \downarrow \rightarrow t \downarrow$
	Главный угол (ϕ)	$\phi \uparrow \rightarrow t \uparrow$

Структурная схема системы управления охлаждением элементов оборудования с ЧПУ представлена на рисунке 2.

Рис. 2. Структурная схема системы управления охлаждением элементов оборудования с ЧПУ: микроконтроллер 1, полевой транзистор 2, 3-х осевой станок с ЧПУ 3, шаговый двигатель 4, датчик температуры 5, резистор 6, элемент Пельтье 7, источник питания 8

Генератор тока для управления термоэлементом может реализовываться как на полевом, так и на биполярном транзисторах [4]. Рассмотрим схему реализации генератора тока с помощью биполярного транзистора (рис. 3). Напряжение 5V (выход Vin от микроконтроллера Arduino) подается на потенциометр 1, в результате I_k становится равным 250 мА. Ток I_k формируется следующим образом. Потенциометр 1 устанавливается на 50%, деля 5V пополам, то есть на инвертирующем входе операционного усилителя (ОУ) 2 будет напряжение, равное 2,5 V. ОУ 2 выполнен по схеме повторителя напряжения, следовательно, в точке соединения резистора R 3 и инвертирующего входа ОУ 2 напряжение также будет равняться 2,5 V. Таким образом, ток I_b будет равняться $I_b = U/R = 2.5/10 = 250$ мА, а как известно в биполярном транзисторе I_b приблизительно равен I_k , следовательно на электрод термоэлемента 8 коллекторного

Для анализа устойчивости нечетко-логической системы управления охлаждением элементов оборудования с ЧПУ используется методика анализа переходных процессов путем моделирования работы нечетких П-, ПИ-, и ПИД-регуляторов [7, 8].

Схема нечеткого ПИ регулятора представлена на рисунке 4

```

graph LR
    t((t)) --> Kr[Kr]
    s((s)) --> Ks[Ks]
    v((v)) --> Kv[Kv]
    Kr --> th[t-hat]
    Ks --> sh[s-hat]
    Kv --> vh[v-hat]
    th --> HO[HO]
    sh --> HO
    vh --> HO
    HO --> ih[i-hat]
    ih --> Kik[KiΔτ]
    Kik --> Sum((+))
    Sum --> i((i))
    i --> B3[B3]
    B3 --> Sum
    
```

Для того, чтобы линеаризовать нечеткий регулятор $i = f(t, s, v)$, т.е. сделать его эквивалентным нечеткому линейному, необходимо выполнить следующие шаги [10]:

-
- $$\mu_{t,s,v,i} = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c; \\ 0, & c \leq x. \end{cases}$$

Структурные схемы модели объекта с нечетким ПИ-регулятором и ПИД-регулятором, выполненные в программном комплексе MatLab/Simulink, представлены на рисунках 6, 7 [8].

Рис.6. Структурная схема нечеткого ПИ-регулятора

Рис.7. Структурная схема нечеткого ПИД-регулятора

а) б)

Рис.7. Диаграммы для анализа устойчивости: а - переходная характеристика при неустойчивом состоянии системы, б – устойчивое состояние системы

Заключение. В работе реализован метод определения оптимальных значений параметров и продукционных правил нечеткого ПИ- и ПИД-регуляторов, использующий элементы нечеткой логики и поисковые алгоритмы пакета программ MATLAB. Найденные параметры при приведенной в работе структуре продукционных правил обеспечили высокое качество переходного процесса в замкнутой системе управления с нечетким ПИ-регулятором при значениях коэффициентов $K_d=0,2$, $K_i=1,15$ и нечетким ПИД-регулятором при $K_e = 0,01$; $K_{de} = 1,12$, $K_u = 0,2$, $K_i= 0,11$.

Литература

1. Бобырь М.В., Титов В.С., Нассер А.А. Оценка числа итераций при обучении мягких нечётких систем // Известия Юго-Западного государственного университета. 2014. № 3 (54). С. 30-37.
2. Емельянов С.Г., Титов В.С., Бобырь М.В. Интеллектуальные системы на основе нечеткой логики и мягких арифметических операций: Учебное пособие. М.:АРГАМАК-МЕДИА, 2014. - 341 с.
3. Bobyr M.V., Titov V.S., Nasser A.A. Automation of the cutting-speed control process based on soft fuzzy logic computing // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2015. Т. 44. № 7. С. 633-641.
4. Бобырь М.В., Титов В.С., Нассер А.А. Алгоритм управления охлаждением реза на основе нечеткой логики [Текст] / М.В. Бобырь, В.С. Титов, А.А. Нассер // Промышленные АСУ и контроллеры. – 2015. – №2. – С.3-9

5. Титов В.С., Бобырь М.В., Тевс С.С. Выбор оптимальных параметров управления технологическим процессом методами нечеткой логики // Промышленные АСУ и контроллеры. 2003. № 5. С. 21-23.
6. Бобырь М.В., Кулабухов С.А., Милостная Н.А. Обучение нейро-нечеткой системы на основе метода разности площадей // Искусственный интеллект и принятие решений. 2016. № 4. С. 15-26.
7. Р. Ляйне и Н. Ван-де-Воув «Устойчивость и сходимость механических систем с односторонней связью», перевод на русский язык. // Математика, механика, информатика. 2010.
8. Кудинов Ю.И., Кудинов И.Ю. Устойчивость нечетких автоматных и реляционных динамических систем. // Мехатроника. Автоматизация. Управление. 2010. №6. С. 2-12.
9. Ying H. Practical Design of Nonlinear Fuzzy Controllers with Stability Analysis for Regulating Processes with Unknown Mathematical Models. Automatica. 1994. № 30. Pp. 1185–1195.
10. Siler W., Ying H. Fuzzy control theory: The linear case // Fuzzy Sets and System. 1989. Vol. 33. P. 275-290.

РЕАКЦИЯ СВЯЗИ КАК ПАРАМЕТР ДИНАМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Большаков Р.С.

Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия,
bolshakov_rs@mail.ru

Аннотация. Предлагается применение метода определения динамических реакций для оценки динамического состояния механических колебательных систем. Рассматривается использование передаточной функции отношения динамической реакции к внешним возмущениям различного вида как параметра динамического состояния механической колебательной системы. Приведены примеры амплитудно-частотных характеристик динамических реакций в различных точках системы.

Ключевые слова: механические колебательные системы, объекты машиностроения, динамическая реакция, приведенная жесткость, оценка динамического состояния.

Введение. Промышленные объекты в процессе эксплуатации испытывают влияние воздействий различной природы, в том числе и интенсивных вибрационных нагрузок. Их действие может привести к возникновению различных нежелательных эффектов, влияющих на работу оборудования, таких как зазоры, соударения и т.д. Решение задач вибрационной защиты технических объектов получило широкое распространение в работах отечественных ученых [1 – 4], в которых расчетные схемы технических объектов представляют собой механические колебательные системы.

Оценка динамических свойств виброзащитной системы может также производиться с использованием структурных схем эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления [5 – 7]. Такой подход позволяет более детально произвести анализ структуры механической колебательной системы, выделить обратные и дополнительные связи и выполнить оценку ее свойств методами частотного анализа [8 – 10].

В большинстве случаев оценка динамического состояния сводится к учету ряда факторов. К ним можно скорость, ускорение и смещение объектов вибрационной защиты относительно положения равновесия. Однако такой набор параметров не полной мере раскрывает сущность физических эффектов, возникающих при взаимодействии различных элементов механических колебательных систем. В последние годы широкое распространение получили идеи использования в качестве динамических параметров механической колебательной системы реакций связей [11 – 13].

В предлагаемом докладе иллюстрируются возможности метода определения реакций связей в линейной механической колебательной системе с двумя степенями свободы на примере построения амплитудно-частотных характеристик различных ее частей.

I. Общие положения. Постановка задачи исследования.

Рассматривается расчетная схема механической колебательной системы с двумя степенями свободы (рис. 1, а), совершающая малые вертикальные колебания y_1 , y_2 в координатах относительно неподвижного базиса. В структуру системы входят объект вибрационной защиты m_2 , три упругих элемента с жесткостями k_1 , k_2 , k_3 и промежуточная масса m_1 . Возмущение представлено периодической силой $Q_2 = Q_0 \sin \omega t$ (гармоническое воздействие) и кинематическим возмущением z_1 (вибрации основания). Математическую модель системы составляют два дифференциальных уравнения:

$$m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_2 = k_1 z_1(t), \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + (k_2 + k_3)y_2 - k_2 y_1 = Q_2(t). \quad (2)$$

Рис. 1 Расчетная (а) и структурная (б) схемы виброзащитной системы

В предлагаемом докладе рассматривается применение передаточной функции реакции связи к возмущающему воздействию для оценки динамического состояния механической колебательной системы с двумя степенями свободы. Динамические реакции представляют собой произведение обычной или приведенной жесткости в выбранной для оценки точке на смещение. В рассматриваемой задаче силы сопротивления не учитываются, их влияние может быть рассмотрено отдельно. Используя преобразования Лапласа, можно построить структурную схему эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления, как показано на рис. 1, б.

II. Преобразования исходной структурной схемы системы для получение динамических жесткостей

Структурная схема системы (рис. 1, б) может быть преобразована (рис. 2, а и б) и разрешена относительно объектов защиты (m_1 и m_2), с передаточной функцией интегрирующего звена второго рода:

$$W_{m_1}(p) = \frac{1}{m_1 p^2}, \quad (3)$$

$$W_{m_2}(p) = \frac{1}{m_2 p^2}. \quad (4)$$

Рис. 2. Детализированные структурные схемы (рис. 1, б) для выделения объекта защиты m_1 (а) и m_2 (б) отрицательной обратной связи

На структурной схеме относительно объекта защиты также показаны жесткостные блоки: первый представляет собой обычную пружину с жесткостью k_3 , а второй отображается в виде сложной структуры, зависящей от частоты

$$k_{12}(p) = \frac{k_2 \cdot (m_2 p^2 + k_1)}{m_2 p^2 + k_1 + k_2}. \quad (5)$$

Динамическая жесткость $k_{12}(p)$, в зависимости от подбора параметров, может принимать нулевые значения, соответствующие режиму, при котором на объект защиты действует только упругая реакция со стороны элемента k_3 , или режиму динамического гашению колебаний при силовом гармоническом возмущении Q_2 [14].

Структурная схема на рис. 2, а может быть также аналогично преобразована относительно массинерционного элемента с массой m_1 . Порядок распределения динамических сил, как это следует из структурной схемы на рис. 3, отличается от порядка на структурной схеме на рис. 2.

На структурной схеме показаны упругие элементы с жесткостями k_1 и приведенной жесткостью, зависящей от частоты

$$k_{23}(p) = \frac{k_2 \cdot (m_2 p^2 + k_3)}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}. \quad (6)$$

Анализ динамической жесткости $k_{23}(p)$ показывает, что возможно проявление динамических свойств, аналогичных режимам, проявляющимся на втором массинерционном элементе. Более подробно технология преобразований структурных схем рассмотрена в [15].

Физическая сущность отрицательной обратной связи на структурной схеме по рис. 2 заключается в том, что этот упруго-инерционный компакт представляет собой, в некотором смысле, обобщенную пружину [15], обладающую динамической жесткостью. При $p \rightarrow 0$ динамическая жесткость трансформируется в приведенную жесткость упругого компакта [12], что соответствует упругим свойствам исходной системы при действии статической силы Q_0 , равной амплитуде периодического внешнего воздействия $Q_2(t)$.

III. Особенности выражений для смещений массинерционных элементов при различных внешних возмущениях

Предполагается, что внешние гармонические силы могут быть связаны между собой соотношением $Q_2 = \alpha \cdot k_1 z_1$, где, в свою очередь, α может изменяться в пределах $-\infty < \alpha < \infty$.

∞ , проходя через нулевое значение. Кинематическое возмущение заменено эквивалентное силовое воздействие $Q_{\text{экр}} = k_{1z_1}$. Окончательно получим $Q_2 = \alpha \cdot Q_{\text{экр}}$. Воспользуемся системой уравнений (1), (2), которая может быть с учетом преобразований Лапласа приведена к виду:

$$m_1 p^2 \bar{y}_1 + (k_1 + k_2) \bar{y}_1 - k_2 \bar{y}_2 = k_1 \bar{z}_1, \quad (7)$$

$$m_2 p^2 \bar{y}_2 + (k_2 + k_3) \bar{y}_2 - k_2 \bar{y}_1 = \bar{Q}_2. \quad (8)$$

Реакция связи представляет собой произведение жесткости на смещение элемента. Запишем формулы для определения координат $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$:

$$\bar{y}_1 = \frac{k_1 \bar{z}_1 a_{22} - \bar{Q}_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}; \quad (9) \quad \bar{y}_2 = \frac{-k_1 \bar{z}_1 a_{12} + \bar{Q}_2 a_{11}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, \quad (10)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ определяются из (7), (8) и представлены в табл. 1.

Таблица 1

Коэффициенты уравнений движения в системе координат $\bar{y}_1, \bar{y}_2$

a_{11}	a_{12}
$m_1 p^2 + k_1 + k_2$	$-k_2$
a_{21}	a_{22}
$-k_2$	$m_2 p^2 + k_2 + k_3$
$k_1 \bar{z}_1$	$\bar{Q}_2$
$Q_{\text{экр}}$	$\alpha Q_{\text{экр}}$

Примечание: k_{1z_1} и Q_2 – кинематическое и силовое возмущения, приложенные соответственно к опорной поверхности I и элементу системы с массой m_2 . На основании табл. 1 и формул (9), (10) могут быть найдены выражения для смещений y_1 и y_2 при входном воздействии $\bar{Q}_2(t) (\bar{z}_1(t) = 0)$:

$$\bar{y}_1(p) = \frac{k_2 \bar{Q}_2}{A_0}, \quad (11) \quad \bar{y}_2(p) = \frac{(m_1 p^2 + k_1 + k_2) \bar{Q}_2}{A_0}, \quad (12)$$

а

$$A_0 = (m_1 p^2 + k_1 + k_2) \cdot (m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2. \quad (13)$$

- представляет собой характеристическое частотное уравнение, где $p = j\omega$ - является комплексной переменной

Аналогично получим смещения при кинематическом возмущении $\bar{z}_1(t) (\bar{Q}_2(t) = 0)$, которые в этом случае определяются:

$$\bar{y}_1(p) = \frac{(m_2 p^2 + k_2 + k_3) \bar{Q}_{\text{экр}}}{A_0}, \quad (14) \quad \bar{y}_2(p) = \frac{k_2 \bar{Q}_{\text{экр}}}{A_0}. \quad (15)$$

В [10–12] рассматриваются особенности построения передаточных функций в линейных системах с несколькими входами, при этом между входными сигналами имеются функциональные связи. Связность парциальных систем зависит от изменения координат движения массоинерционных элементов.

Передаточная функция по координате y_1 при действии двух внешних возмущений в соответствии с таблицей 1 имеет вид:

$$\bar{y}_1(p) = \frac{(m_2 p^2 + k_2 + k_3) \bar{Q}_{\text{экр}} + \alpha \bar{Q}_{\text{экр}} k_2}{A_0}. \quad (16)$$

Аналогичным образом может быть рассмотрено и движение по координате y_2 , для которой в соответствии с (10) передаточная функция системы при двух внешних воздействиях имеет вид

$$\bar{y}_2(p) = \frac{k_2 \bar{Q}_{жв} + (m_1 p^2 + k_1 + k_2) \alpha \bar{Q}_{жв}}{A_0}. \quad (17)$$

Поведение системы при возникновении критических режимов подробно описано в [16].

IV. Определение динамических реакций связей в характерных точках системы относительно элемента m_2

1. Используя полученные выражения для приведенных жесткостей, а также значения для смещений m_1 и m_2 , найдем передаточные функции для реакций связей. Динамические реакции в т. A и B , имеющие схожую структуру, примут вид:

$$\bar{R}_A(p) = k_1 \cdot \bar{y}_1 = k_1 \frac{k_2 \bar{Q}_2}{A_0}, \quad (18) \quad \bar{R}_B = k_3 \cdot \bar{y}_2 = k_3 \frac{(m_1 p^2 + k_1 + k_2) \cdot \bar{Q}_2}{A_0}. \quad (19)$$

Реакция в точке A_1 формируется в результате деформации линейного упругого элемента (пружины) с жесткостью k_1 . В этом случае можно полагать, что справедливо утверждение действие равно противодействию

$$\bar{R}_A = -\bar{R}_{A_1}, \quad (20)$$

то есть реакции равны по величине и направлены в противоположенные стороны (в соответствии с третьим законом Ньютона).

Реакция в точке B_1 , где пружина k_3 контактирует с массоинерционным элементом m_2 , как и в случае с m_1 , определится:

$$\bar{R}_{B_1} = -\bar{R}_B. \quad (21)$$

Передаточные функции в этом случае примут вид:

$$W_{\bar{R}_{A_1}}(p) = \frac{\bar{R}_{A_1}}{\bar{Q}_2} = \frac{k_1 \cdot k_2}{A_0}, \quad (22)$$

$$W_{\bar{R}_{B_1}} = \frac{\bar{R}_{B_1}}{\bar{Q}_2} = \frac{k_3(m_1 p^2 + k_1 + k_2)}{A_0}. \quad (23)$$

Динамические реакции в т. A_2 и B_2 будут иметь более сложный вид из-за присутствия в выражениях приведенных жесткостей $k_{23}(p)$ и $k_{12}(p)$:

$$\bar{R}_{A_2}(p) = k_{23}(p) \cdot \bar{y}_1 = \frac{k_2 \cdot (m_2 p^2 + k_3) \cdot k_2 \bar{Q}_2}{(m_2 p^2 + k_2 + k_3) \cdot A_0}, \quad (24)$$

$$R_{B_2} = k_{12}(p) \bar{y}_2 = \frac{k_2 \cdot (m_1 p^2 + k_1) \cdot \bar{Q}_2}{A_0}. \quad (25)$$

Исходя из этого, запишем передаточные функции реакций связей в этих точках:

$$W_{\bar{R}_{A_2}}(p) = \frac{\bar{R}_{A_2}(p)}{\bar{Q}_2} = \frac{k_2^2 \cdot (m_2 p^2 + k_3)}{(m_2 p^2 + k_2 + k_3) \cdot A_0}, \quad (26)$$

$$W_{B_2}(p) = \frac{R_{B_2}}{\bar{Q}_2} = \frac{k_2 \cdot (m_1 p^2 + k_1)}{A_0}. \quad (27)$$

2. Учитывая выражения для приведенных жесткостей и смещений, составим передаточные функции системы при кинематическом возмущении z_1 :

$$W_{\bar{R}_{A1}}''(p) = \frac{\bar{R}_{A1}}{\bar{Q}_{жв}} = \frac{k_1(m_2 p^2 + k_2 + k_3)}{A_0}, \quad (28) \quad W_{\bar{R}_{B1}}'(p) = \frac{\bar{R}_{B1}}{\bar{Q}_{жв}} = \frac{k_2 k_3}{A_0}, \quad (29)$$

$$W_{\bar{R}_{A2}}(p) = \frac{\bar{R}_{A2}}{\bar{Q}_{жв}} = \frac{k_2(m_2 p^2 + k_3)}{A_0}, \quad (30) \quad W_{\bar{R}_{B2}}(p) = \frac{\bar{R}_{B2}}{\bar{Q}_{жв}} = \frac{k_2^2(m_1 p^2 + k_1)}{(m_1 p^2 + k_1 + k_2)A_0}. \quad (31)$$

3. Используя ранее полученные соотношения, найдем выражения передаточных функций реакций связей при двух внешних возмущениях:

$$W_{\bar{R}_{A1}}(p) = \frac{\bar{R}_{A1}}{\bar{Q}_{жв}} = \frac{k_1(m_2 p^2 + k_2 + k_3 + k_2 \alpha)}{A_0}, \quad (32)$$

$$W_{\bar{R}_{A2}}(p) = \frac{\bar{R}_{A2}}{\bar{Q}_{жв}} = \frac{k_2(m_2 p^2 + k_3)(m_2 p^2 + k_2 + k_3 + k_2 \alpha)}{(m_2 p^2 + k_2 + k_3)A_0}, \quad (33)$$

$$W_{\bar{R}_{B1}}(p) = \frac{\bar{R}_{B1}}{\bar{Q}_{жв}} = \frac{k_3(k_2 + (m_1 p^2 + k_1 + k_2)\alpha)}{A_0}, \quad (34)$$

$$W_{\bar{R}_{B2}}(p) = \frac{\bar{R}_{B2}}{\bar{Q}_{жв}} = \frac{k_2 \cdot (m_1 p^2 + k_1)(k_2 + (m_1 p^2 + k_1 + k_2)\alpha)}{(m_1 p^2 + k_1 + k_2)A_0}. \quad (35)$$

Определение совокупных динамических воздействий на массонерционные элементы m_1 и m_2 и проверка правильности определения реакций подробно рассмотрены в [13, 17].

Проведенные исследования позволяют предложить использование метода определения реакций для оценки динамического состояния механических колебательных систем. Показано, что исходная структурная схема системы может быть преобразована относительно объекта защиты, имеющего передаточную функцию интегрирующего звена второго порядка, таким образом, что выделяются две отрицательные обратные связи: одна представляет собой жесткость обычной пружины, а вторая – обобщенную пружину с жесткостью механической цепи. Такие структурные схемы могут быть развернуты не только относительно объекта защиты, но и для других массонерционных элементов, что предполагает возможность расширения метода на системы со многими степенями свободы. Детали предлагаемого подхода нашли отражение в [14].

VI. Особенности амплитудно-частотных характеристик. Анализ соотношений реакций связей в отдельных точках системы показывает, что передаточные функции для определения реакций связей и отношение смещения к кинематическому возмущению в большинстве случаев имеют схожий вид и различаются лишь смещением частот динамического гашения колебаний друг относительно друга. Интерес вызывает оценка динамических взаимодействий в точках A_2 (при силовом возмущении) и B_2 (при кинематическом возмущении).

Для численного моделирования выбираются следующие параметры механической колебательной системы (рис. 1, а): $m_1=1000$ кг, $m_2=200$ кг, $k_1=200$ Н/м, $k_3=1000$ Н/м, $k_2=1000$ Н/м, частотный диапазон внешних воздействий $\omega=0 \div 100$ Гц и др.

В таблице 2 приведены значения частот динамического гашения и собственных колебаний при заданных значениях параметров.

Таблица 2

Значения частот динамического гашения и собственных колебаний							
$R_{A2} = k_{23} * y_1 (\bar{Q}_2 \neq 0, \bar{z}_1 = 0)$				$R_{B2} = k_{12} * y_2 (\bar{z}_1 \neq 0, \bar{Q}_2 = 0)$			
$\omega_{дин}$	$\omega_{соб1}$	$\omega_{соб2}$	$\omega_{соб3}$	$\omega_{дин}$	$\omega_{соб1}$	$\omega_{соб2}$	$\omega_{соб3}$
2.24	0.815	3.16	3.25	0.447	0,815	1,1	3,25

На рис. 3, а приведена амплитудно-частотная характеристика отношения динамической реакции к силовому возмущению $\overline{Q}_2$.

Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики реакций связей: а) в т. А₂ при силовом воздействии $\overline{Q}_2$; б) в т. В₂ при кинематическом возмущении $\overline{z}_1$

На амплитудно-частотной характеристике видно, что вторая и третья частота собственных колебаний при действии силового возмущения возникают на графике друг за другом, что свидетельствует о формировании более сложных внутренних динамических взаимодействий, возникающих под влиянием приведенной жесткости $k_{23}(p)$.

Амплитудно-частотная характеристика отношения динамической реакции к кинематическому возмущению $k\overline{z}_1 = \overline{Q}_{эв}$ приведена на рис. 3, б.

В данном случае появление дополнительной частоты собственных колебаний обусловлено влиянием приведенной жесткости пружины $k_{12}(p)$. Это заключается в том, что на графике появляется еще один максимум, который свидетельствует о появлении в системе «вырожденной» парциальной частоты.

Построение передаточных функций реакций связей при действии двух внешних возмущений имеет более сложный характер, поэтому соотношение между воздействиями определяет параметр α , как уже отмечалось ранее. В таблице 3 приведены частоты динамического гашения и собственных колебаний.

Таблица 3

Значения частот динамического гашения и собственных колебаний при действии двух внешних воздействий

$R_{A1} = k_{12} * y_1 (\overline{Q}_2 \neq 0, \overline{z}_1 \neq 0)$					$R_{A2} = k_{23} * y_1 (\overline{Q}_2 \neq 0, \overline{z}_1 \neq 0)$				
α	$\omega_{дин1}$	ω_{cob1}	ω_{cob2}	$\omega_{дин2}$	ω_{cob1}	ω_{cob2}	ω_{cob3}		
0.5	3.54	0.815	3.25	2.24	3.54	0.815	3.15	3.26	
1	3.87	-/-	-/-	-/-	3.87	-/-	-/-	-/-	
1.5	4.18	-/-	-/-	-/-	4.18	-/-	-/-	-/-	
2	4.47	-/-	-/-	-/-	4.47	-/-	-/-	-/-	
$R_{B1} = k_{32} * y_2 (\overline{Q}_2 \neq 0, \overline{z}_1 \neq 0)$					$R_{B2} = k_{12} * y_2 (\overline{Q}_2 \neq 0, \overline{z}_1 \neq 0)$				
α	$\omega_{дин}$	ω_{cob1}	ω_{cob2}	$\omega_{дин1}$	$\omega_{дин2}$	ω_{cob1}	ω_{cob2}	ω_{cob3}	
0.5	1.79	0.815	3.25	0.447	1.79	0.815	1.1	3.25	
1	1.48	-/-	-/-	-/-	1.48	-/-	-/-	-/-	
1.5	1.37	-/-	-/-	-/-	1.37	-/-	-/-	-/-	
2	1.3	-/-	-/-	-/-	1.3	-/-	-/-	-/-	

а)

Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики реакций связей системы при действии двух внешних возмущений ($\bar{Q}_2$ и $\bar{z}_1$) и изменении параметра α : 0,5; 1; 1,5; 2: а) динамическая реакция в т. A_1 ; б) динамическая реакция в т. A_2 ; в) динамическая реакция в т. B_1 ; г) динамическая реакция в т. B_2

Анализ амплитудно-частотных характеристик показывает, что Влияние двух внешних воздействий на систему формирует амплитудно-частотные характеристики

«нетрадиционного» вида, а параметр α влияет на смещение одной из частот динамического гашения на графике. Это связано с тем, что чем интенсивнее прикладываемое силовое (или кинематическое) возмущение, приложенное к массоинерционному элементу, тем больше реакция на противоположном. Это показано изменением частот динамического гашения в зависимости от α .

Развитие дальнейших исследований может быть направлено на рассмотрение поведения реакций связей относительно массоинерционных элементов R_{m2} и R_{m1} в общем, а также их отношение, характеризующее изменение параметров межпарциальной связи между массоинерционными элементами и показывает наличие в системе устойчивых связей, которые в данном контексте могут быть названы «рычажными».

Заключение.

Предложено использование метода определения динамических реакций между составляющими элементами объектов машиностроения, основанного на правилах преобразования структурных схем механических колебательных систем. При трансформации исходной системы в ее структуре может быть выделен объект вибрационной защиты и относительно него цепь обратной отрицательной связи, которая будет являться динамической реакцией. Предложено использование передаточной функции отношения реакции связи к силовому или кинематическому возмущениям как параметра оценки динамического состояния механических колебательных систем.

Проведенные исследования показали, что динамические реакции на объекте защиты в точках крепления обычной и обобщенной пружин будут иметь различный характер. Это связано с наличием в структуре приведенной жесткости обобщенной пружины массоинерционного и двух упругих элементов, что формирует более сложный характер динамических взаимодействий между рассматриваемым блоком и объектом защиты. Также обнаружен эффект максимума реакции связи, который в физическом смысле трактуется как увеличение приведенной динамической жесткости на частоте соответствующей режиму динамического гашения колебаний. Такое свойство сложной пружины может повлиять на полную реакцию, состоящую из статической и динамической компонент, которая, в зависимости от заданных параметров, может принимать отрицательные и нулевые значения, что может негативно сказаться на техническом состоянии машин, приборов и оборудования, так как в их структуре могут присутствовать элементы без жесткого соединения, то есть имеющие неудерживающие связи. Это может привести к возникновению зазоров, соударений и других нежелательных динамических эффектов.

Таким образом, динамическое состояние механической колебательной системы может также характеризоваться изменением динамических реакций связей, которые представляют собой в операторной форме как произведение смещения на приведенную динамическую жесткость и несут информацию об особенностях резонансных режимов и динамического гашения колебаний. Это позволяет учитывать внутренние силовые факторы, возникающие в системе, что, в свою очередь, дает возможность при проектировании конструкций закладывать приемлемый предел прочности элементов для уменьшения динамических нагрузок на технические объекты.

Литература

1. Елисеев С.В., Артюнин А.И. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем / С.В. Елисеев, А.И. Артюнин. – Новосибирск.: Наука, 2016. – 459 с.
2. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection, Springer International Publishing, Switzerland, 2016, p. 708.
3. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем. - СПб: Политехника. 2013. – 374 с.4. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Наука, 1968. – 720 с.

4. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. – Иркутск: ИГУ, 2008. – 523 с.
5. Елисеев С.В., Резник Ю. Н., Хоменко А. П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. – Новосибирск: Наука, 2011. - 384 с.
6. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Системный анализ и математическое моделирование в мехатронике виброзащитных систем. Иркутск: ИрГУПС, 2012. 288 с.
7. Елисеев С.В., Трофимов А.Н., Большаков Р.С., Савченко А.А. Концепция обратной связи в динамике механических систем и динамическое гашение колебаний // technomag.edu.ru: Наука и образование: электронное научно-техническое издание. №5. 2012. URL. [http:// technomag.edu.ru/doc/378353. html](http://technomag.edu.ru/doc/378353.html) (дата обращения: 10.11.2016).
8. Елисеев С.В., Хоменко А.П. Динамическое гашение колебаний. Концепция обратной связи и структурные методы математического моделирования. Новосибирск.: - Наука. 2014. 357 с.
9. Елисеев С.В., Кузнецов Н.К., Большаков Р.С. и др. Обоснование и технологии эквивалентных преобразований структурных математических моделей технических объектов; ИрГУПС. - Иркутск , 2015. – 79 с. Деп. в ВИНТИ 20.10.2015. №179 – В 2015.
10. Елисеев С.В., Ковыршин С.В., Большаков Р.С. Особенности построения компактов упругих элементов в механических колебательных системах. Взаимодействия с элементами систем и формы соединения // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. Выпуск № 4(36). 2012. с. 61- 70.
11. Елисеев С.В., Большаков Р.С., Елисеев А.В., Паршута Е.А. Особенности статического и динамического нагружения в механических колебательных системах. задачи вибрационной защиты // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2014. Т. 18. № 1 (62). С. 37-47.
12. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Большаков Р.С. Метод структурных преобразований и его приложения в задачах динамики виброзащитных систем. Определение реакций связей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск: ИрГУПС, 2014г. – №1(41). – С. 8 – 23.
13. Елисеев С.В., Паршута Е.А., Большаков Р.С. О возможностях мехатронных подходов к задачам виброзащиты технических объектов // Межд. науч.-техн. и производственный журнал «Вибрация машин: измерение, снижение, защита». Донецк. Украина. № 4(31). 2012. с. 46 – 50.
14. Елисеев С.В., Кашуба В.Б., Ситов И.С. Приведенная жесткость цепи обратной связи. определение динамических реакций в механической колебательной системе // Системы. Методы. Технологии. 2013. № 2 (18). С. 15-22.
15. Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В., Большаков Р.С. Обобщенная теория динамического гасителя колебаний в системе с несколькими степенями свободы // Современные технологии. системный анализ. Моделирование. № 1(29). 2011. с. 45-52
16. Большаков Р.С. Система внешних воздействий. Возможные формы связности колебаний механических систем при действии нескольких внешних факторов // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. № 8. С. 5.
17. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б., Большаков Р.С., Нгуен Д.Х. Реакции связей как параметры динамического состояния колебательной системы // Системы. Методы. Технологии. 2015. № 1 (25). С. 7-18.

РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ РОТОРА ГАЗОТУРБИННОГО ПРИВОДА

Бондаренко М.Э.¹, Поляков Р.Н.²

¹«ОГУ имени И.С. Тургенева», Орел, Россия, maxbondarenko22@yandex.ru

²«ОГУ имени И.С. Тургенева», Орел, Россия, romanpolak@mail.ru

Аннотация. В статье представлены результаты расчета критических частот ротора различными методами. Описано применение метода конечных элементов, который позволяет построить более адекватную расчетную модель для определения критических частот ротора.

Ключевые слова. Ротор, критическая частота, метод конечных элементов.

Повышение энергонапряженности роторных машин, применяемых в различных сферах промышленности и транспорта, выражается главным образом в повышении скоростей вращения роторов, что позволяет получить большую эффективность. Вместе с тем, в таких режимах работы значительно возрастают нагрузки, носящие чаще всего вибрационный характер, что предъявляет строгие требования к вибронадежности роторного агрегата. Таким образом, расчет критических частот вращения роторов различных агрегатов является обязательной задачей на стадии проектирования.

Наиболее простым и распространенным является расчет критических частот вращения роторов осуществляемый с использованием программ, основанных на методе начальных параметров. Применение этого метода позволяет в короткие сроки с достаточной точностью выполнить расчет критических частот ротора. Однако моделирование роторов методом начальных параметров не всегда позволяет учесть некоторые особенности, такие как различная жесткость отдельных участков ротора, геометрия поперечного сечения, модуль упругости и сдвига. Отдельные участки, обладающие отличительными характеристиками, могут существенно изменить картину собственных частот связанного с ними ротора и, как следствие значение его критических частот вращения [1].

В качестве примера проведем расчеты критических частот ротора газового турбинного привода, представленного на рис.1. Экспериментальный стенд состоит из компрессора 1, который присоединяется к раструбу газовой турбины 2. Турбина крепится на станину 3. В корпусе 4 устанавливаются исследуемые подшипниковые узлы. Датчики 5 снимают радиальные перемещения вала, датчик 6 частоту вращения вала. Актуальность данной задачи состоит в проверке критических частот привода экспериментального стенда, так как планируется варьировать скоростью вращения от 22000 об/мин до 34000 об/мин.

Рис.1. Экспериментальный стенд с газотурбинной установкой

Рассмотрим ротор представленной газовой турбины с консольным расположением рабочего колеса (рис. 2). Для расчета ротора была использована программа APM Shaft, основанная на методе начальных параметров. Расчетная модель ротора представлена на рис. 3.

Рис.2. Ротор газовой турбины

Рис.3. Расчетная модель ротора

Жесткость опор, на которых установлен ротор, определяется жесткостью

радиальных подшипников качения. При расчетах использовался диапазон жесткости, равный от 10^8 Н/м до 10^{10} Н/м. Данный диапазон жесткости подшипников качения может быть получен за счет устройства предварительного натяга [2]. В результате расчетов были получены результаты, сведенные в таблицу 1.

Для конечно-элементного моделирования ротора применялись два типа конечных элементов: конечный элемент опоры и конечный элемент участка вала ротора [3].

Модель радиального подшипника качения может быть представлена в виде:

$$\{R\} = \{R_0\} - [K]\{S\}, \quad (1)$$

где $\{R\}$ – вектор полных реакций;

$\{R_0\}$ – вектор статических реакций;

$\{S\}$ – вектор динамических перемещений;

$[K]$ – матрица жесткости опоры;

Уравнение движения для элемента участка вала ротора можно представить в виде:

$$[m]\{\ddot{q}\} + [k]\{q\} = \{f\} \quad (2)$$

где $[m]$ – матрица масс ротора;

$\{q\}$ – вектор перемещения узла;

$[k]$ – матрица жесткости вала;

$\{f\}$ – вектор узловых сил вала;

Получение уравнений движения всего ротора основано на стандартной процедуре ансамблирования метода конечных элементов [4].

В результате расчета ротора методом конечных элементов были получены диаграммы Кэмпбелла (рис. 4-6) и значения критических частот были внесены в таблицу 1.

Рис. 4. Диаграмма Кэмпбелла для ротора с жесткостью опор 10^8 Н/м

Рис.5. Диаграмма Кэмпбелла для ротора с жесткостью опор 10^9 Н/м

Рис.6. Диаграмма Кэмпбелла для ротора с жесткостью опор 10^{10} Н/м

Таблица 1. Сравнение результатов расчета критических частот методом начальных параметров и МКЭ

Жесткость опор, Н/м	Метод начальных параметров		Метод конечных элементов		Погрешность расчета крит. частоты вращения, %	Погрешность расчета собственных частот, %
	Крит. частота вращ., рад/с	Собственная частота, Гц	Крит. частота вращ., рад/с	Собственная частота, Гц		
e8	2925	465	2850	464	2,63%	0,22%
	6607	1051	6300	1048	4,87%	0,29%
	9616	1530	9150	1526	5,09%	0,26%
e9	4252	676	4050	674	4,99%	0,30%
	11755	1870	11190	1865	5,05%	0,27%
	21563	3431	20480	3421	5,29%	0,29%
e10	4445	707	4200	705	5,83%	0,28%
	13781	2193	13020	2186	5,84%	0,32%
	29259	4656	27610	4642	5,97%	0,30%

Из результатов расчетов видно, что первая критическая частота при низкой жесткости подшипника качения попадает в рабочий диапазон экспериментальной установки, поэтому в конструкции опорного узла необходимо предусмотреть возможность предварительного натяга подшипников качения или заменить их на шариковые радиально-упорные повышенной точности, что повысит жесткость опор и диапазон работы экспериментальной установки будет находиться на докритических частотах вращения. Также стоит отметить, что результаты, полученные различными методами, находятся в пределах допустимой погрешности, однако метод конечных элементов позволяет значительно уточнить расчетную модель, изменяя отдельные параметры моделируемой секции вала, что дает преимущество в сравнении с методом начальных параметров, применяемом в известных CAE-системах.

Литература

1. Леонтьев М.К., Терешко А.Г. Использование МКЭ для решения задачи уточнения расчетной модели при определении критических частот вращения ротора классическими методами. – Вестник СГАУ им. академика С.П. Королёва. №2-2, 2006.
2. Воронин, А.В. Преднатяг подшипниковых узлов и принципы его технологического обеспечения. Автомобильная промышленность. – 1979. – № 8. – С. 24–28.
3. Майоров С.В., Соломин О.В., Иванов Д.А. Построение конечно-элементной модели роторной системы с учетом упругих, демпфирующих и инерционных свойств опор. Известия вузов. Северо-кавказский регион. Технические науки. 2007. № 4 – с. 29 – 34.
4. Зенкевич, О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.

ГИДРОМЕХАНИЧЕСКЕ МУФТЫ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ПЕРЕДАТОЧНЫМ МЕХАНИЗМОМ И УПРАВЛЯЕМЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ КОЭФФИЦИЕНТА ЖЁСТКОСТИ

Бородин М.Б.¹

¹Старооскольский технологический институт им.А.А.Угарова (филиал)
Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»,
Старый Оскол, Россия, borodina_marina@mail.ru

Аннотация. В представленной работе рассматривается возможность управления изменением коэффициента жёсткости гидромеханической муфты с дифференциальным передаточным механизмом, который, как показали исследования, зависит от параметров гидросистемы предложенной муфты. Кроме того, анализируются полученные при исследовании динамики работы привода с предложенной муфтой зависимости коэффициента динамичности технической системы от параметров гидросистемы муфты, позволяющие подобрать рациональные параметры гидросистемы, при которых динамичность системы будет минимальна. Конструкция муфты позволяет регулировать эти параметры даже в процессе работы технологической машины.

Ключевые слова. Гидромеханическая муфта, дифференциальный передаточный механизм, коэффициент жёсткости, коэффициент динамичности.

Для защиты приводов механизмов от динамических воздействий часто используют упругие муфты, так как муфта постоянной жесткости не всегда способна обеспечить устойчивость машины во всем рабочем диапазоне частот вращения.

Эффективным средством борьбы с опасными крутильными колебаниями является введение упругих муфт и демпфирующих устройств, характеристики которых чаще всего являются нелинейными. Упругая муфта может быть сама источником высоких динамических нагрузок, если будет работать в резонансных зонах.

Как показывают исследования резонансной кривой виброизолятора с нелинейной характеристикой жёсткости [1], система должна работать в определённом диапазоне частот, в котором виброизолятор эффективен. Работа виброизолятора в других диапазонах частот либо неэффективна, либо создаётся опасность выхода системы на резонансный режим. Известны два способа исключения возможности возникновения резонансных периодических режимов на частотах, лежащих в рабочем диапазоне виброизолятора ($\omega > \omega_0 \sqrt{2}$): 1) увеличение свободного хода виброизолятора, что приводит к увеличению его габаритов, 2) увеличение коэффициента сопротивления [1].

По сути, упругодемпфирующая муфта должна работать как «виброизолятор» крутильных колебаний в приводе технологической машины. Но при этом возникает проблема исключения возможности возникновения резонансных периодических режимов известными способами, так как увеличение свободного хода упругого элемента муфты приведёт к значительному увеличению габаритов, а увеличение коэффициента сопротивления зачастую ведёт к потерям энергии в приводе, снижая его к.п.д. Если муфта в приводе механизма, при определённой частоте воздействия крутильных колебаний, работает эффективно, то изменение частоты воздействия может привести к нестабильности работы муфты, либо к эффекту резонанса. Адаптировать работу муфты к изменившемуся режиму работы технологической машины можно изменив частоту собственных колебаний упругого элемента путём изменения жёсткости муфты. Но в муфтах с упругими элементами изменять характеристику жёсткости в процессе работы привода, как правило, возможности нет.

Повысить эффективность защиты привода от динамических нагрузок, можно используя в муфте упругие управляемые элементы, выполненные на базе гидравлики. Они могут работать как динамические гасители колебаний, понижая виброактивность привода. Такие элементы используются в гидромеханических муфтах с дифференциальным передаточным механизмом [2-4]. Одной из перспективных конструкций предохранительной гидромеханической муфты является муфта с зубчатым дифференциальным передаточным механизмом [4], так как такой тип муфт обладает наибольшими функциональными возможностями защиты привода от динамических нагрузок и случайных перегрузок за счёт того, что имеет наибольший угол относительного закручивания полумуфт, которые кинематически не размыкаются даже при срабатывании муфты.

Муфта (рис.1) связывает ведущий вал 1 и ведомый вал 2, зубчатым передаточным дифференциальным механизмом с двумя степенями свободы. Коническая шестерня 4 передаточного механизма, закреплённая на валу 1, связана с коническим колесом 5, на котором расположено водило с сателлитами 6, связанными с коническими колёсами 7 и 8, закреплёнными на валу 2, связанному с технологической машиной, и валу 3, связанному с гидромашинной 9 соответственно.

Рис. 1. Гидромеханическая муфта с дифференциальным зубчатым передаточным механизмом

На установившемся режиме работы технологической машины момент от ведущего вала 1 передаётся на вал 2. При этом вал 3 удерживается от поворота гидромашинной 9, так как момент со стороны гидромашинной 9, пропорциональный давлению в гидроаккумуляторе 10, равен передаваемому моменту. В этом состоянии вентиль 13 закрыт.

При возрастании момента на исполнительном валу 2 коническое колесо 8 проворачивается, и гидромашинная 9 работает в режиме насоса, закачивая жидкость в гидроаккумулятор 10, выполняющий роль основного упругого элемента гидросимистемы, и увеличивая давление в гидросистеме до тех пор, пока момент со стороны гидромашинной

9 не уравнивает момент сопротивления. При этом частично энергия рассеивается на тепловые процессы, обусловленные внутренним трением слоев гидравлической жидкости при ее движении по магистрали, а часть энергии накапливается в гидроаккумуляторе 10. При снижении момента на исполнительном валу 2, гидромашинка 9 начинает работать в режиме мотора, проворачивая колесо 8 в обратную сторону и возвращая энергию, накопленную в гидроаккумуляторе 10 в систему.

Демпфирующие свойства обеспечиваются управляемым гидродросселем 19 за счет жидкостного трения при протекании жидкости в нём. Быстрый возврат энергии в систему обеспечивается обратным клапаном 20.

Если момент на валу 2 превышает предельно допустимый момент продолжительное время, давление в гидроаккумуляторе достигает критического значения, система управления 12 открывает управляемый клапан 13. При этом рабочая жидкость из гидромашинки 9 и гидроаккумулятора 10 поступает на слив 11, падает давление в гидросистеме и гидромашинка 9 не удерживает коническое колесо 8 зубчатого передаточного механизма, что обеспечивает остановку конического колеса 7, связанного с исполнительным валом 2. Это практически означает размыкание (срабатывание) предохранительной муфты. После снижения нагрузки до допустимой величины или после устранения причины перегрузки привода, система управления 12 закрывает управляемый клапан 13, и муфта приходит в исходное состояние, то есть самовосстанавливается.

Так как гидросистема не расположена в подвижных элементах муфты [2], а закреплена на неподвижном основании [4], то в процессе работы, обеспечив безопасный подход к гидросистеме муфты, можно изменять следующие параметры гидросистемы:

- количество газа в газовой камере гидроаккумулятора 10 (увеличивая - при открытии клапана 14 и закачивая газ из ёмкости высокого давления газа 15; снижая - при открытии клапана 16), что регулирует давление в газовой камере гидроаккумулятора;
- производительность регулируемого гидромотор-насоса 9, что изменяет расход жидкости в гидросистеме;
- сечение управляемого гидродросселя 19, что позволяет изменять демпфирующие способности муфты.

Информация о давлении в гидросистеме и газовой камере гидропневмоаккумулятора 10 поступает от датчиков 17 и 18 в систему управления 12.

Упругость муфты в основном обеспечивается гидроаккумулятором, который является гидроупругим элементом системы. Кроме этого на упругость муфты влияет сжимаемость жидкости в гидросистеме и упругость элементов передаточного механизма, но влияние этих параметров значительно меньше, чем упругость пневматической камеры гидроаккумулятора.

Исследуя процессы, происходящие в газовой камере гидроаккумулятора, необходимо учитывать, что в пневмогидравлических аккумуляторах накопление энергии и её возврат в систему происходит за счёт энергии сжатого газа. Быстрое расширение газа протекает по политропному процессу. Медленно протекающие процессы расширения и сжатия газа близки к изотермическому процессу [5], поэтому при расчётах в исследуемой гидросистеме допускаем, что изменение состояния газа в гидроаккумуляторе представляет собой изотермический процесс:

$$p \cdot V = p_0 \cdot V_0, \quad (1)$$

где p_0 , V_0 - начальные давление и объём, занимаемый газом, в гидропневмодемпфере; p , V - текущие значения давления и объёма.

Текущий объём, занимаемый газом, определяем по формуле:

$$V = V_0 - V_{ж}, \quad (2)$$

где $V_{ж} = \omega \cdot \varphi_{ГС}$ - объем жидкости, вытесненный в гидропневмодемпфер, ω - объём жидкости, проходящий через гидромотор при повороте на 1 радиан; $\varphi_{ГС} = \varphi_{отн} \cdot i_{тм}$ - угол поворота вала гидромашины; $\varphi_{отн}$ - относительный угол поворота полумуфты, $i_{тм}$ - передаточное отношение зубчатой дифференциальной передачи.

Из уравнения (1) с учетом (2) выразим текущее давление в гидросистеме:

$$p = \frac{p_0 \cdot V_0}{V_0 - V_{ж}} = \frac{p_0 \cdot V_0}{V_0 - \omega \cdot \varphi_{ГС}} = p_0 + \frac{p_0 \cdot \omega}{V_0 - \omega \cdot \varphi_{ГС}} \cdot \varphi_{ГС} \quad (3)$$

Момент, действующий на вал гидромашины $M_{Г}$, зависит от давления в гидросистеме [5]:

$$M_{Г} = p \cdot \omega = p_0 \cdot \omega + \frac{p_0 \cdot \omega^2}{V_0 - \omega \cdot \varphi_{ГС}} \cdot \varphi_{ГС}, \quad (4)$$

Его можно представить в виде:

$$M_{Г} = M_{Г0} + c \cdot \varphi_{ГС}, \quad (5)$$

где $M_{Г0} = p_0 \cdot \omega$ - момент, создаваемый начальным давлением в гидросистеме; c - коэффициент жёсткости гидроупругого элемента гидросистемы, определяемый с учётом уравнений (4) и (5):

$$c = \frac{p_0 \cdot \omega^2}{V_0 - \omega \cdot \varphi_{ГС}} \quad (6)$$

Из уравнения (6), видно, что характеристика жёсткости муфты не является линейной – жёсткость увеличивается при увеличении угла поворота вала гидромашины. Кроме того, коэффициент жёсткости зависит от p_0 и ω , которые, как отмечено выше, можно изменять в процессе работы привода, а изменение коэффициента жёсткости муфты влияет на динамичность привода технической системы.

Демпфирующие свойства гидросистемы обеспечиваются жидкостным трением преимущественно в гидродросселе. Момент жидкостного трения при дросселировании рабочей жидкости представим в виде [5]:

$$M_{жид}^T = \mu \cdot \dot{\varphi}_{ГС} \pm \nu \cdot \dot{\varphi}_{ГС}^2, \quad (7)$$

где μ и ν - параметры демпфера, характеризующие соответственно трение при ламинарном и турбулентном течении жидкости через дроссельное отверстие и определяемые в зависимости от величины числа Рейнольдса [5].

Рациональные значения настройки параметров гидросистемы можно определить, исследовав математическую модель динамики работы муфты [3], построенную на базе уравнений Лагранжа 2-го рода с учетом механической характеристики привода и процессов, проходящих в гидросистеме муфты и описанных в уравнениях (5) и (7), на разных этапах работы привода:

$$\begin{cases} (J_{тп1} + J_{тп2}) \cdot \ddot{\varphi}_{ГС} + J'_{тп} \cdot \ddot{\varphi}_2 = M_{д} - M_{Г} - M_{жид}^T, \\ (J_{тп1} + J_{тп3}) \cdot \ddot{\varphi}_2 + J'_{тп} \cdot \ddot{\varphi}_{ГС} = M_{д} - M_{с} \end{cases}, \quad (8)$$

где J_{np1} , J_{np2} , J_{np3} - приведённые моменты к валам 1,2 и 3 (рис.1) соответственно; M_d - момент на валу 1 со стороны электродвигателя, который определяется из механической характеристики двигателя [6], M_c - момент сопротивления на валу 2 со стороны технологической машины, который задаётся исходя из исследуемого режима работы.

Так как полученная модель содержит в себе нелинейные дифференциальные уравнения с непостоянными коэффициентами, то для решения полученной системы уравнений используем пакет прикладных программ Matlab. В модуле Matlab Simulink задаётся производительность (расход) Q гидромашины при номинальной угловой скорости вращения вала $\Omega_{ном}$. Тогда в уравнении (6) $\omega = \frac{Q}{\Omega_{ном}}$.

Исследуя динамику работы муфты при внезапно приложенной нагрузке [7], определили, что муфта с рациональными параметрами должна быть предварительно напряженной, причем момент предварительного напряжения $M_{г0}$ должен быть равен моменту номинальной нагрузки $M_{с ном}$, так как при этом коэффициент динамичности будет минимальным. Сравнение работы упругой муфты с линейной характеристикой жёсткости и предложенной муфты, при внезапно приложенной нагрузке, показало преимущества последней (рис.2).

Рис. 2. График переходного процесса в муфте при внезапном приложении нагрузки M_n : 1) муфта с линейной характеристикой жёсткости; 2) предварительно напряженная муфта

Но в этом случае муфта при разгоне будет работать как жёсткая, что значительно снизит её возможности. Поэтому на этапе разгона необходимо снизить коэффициент жёсткости муфты путём понижения начального давления в гидроаккумуляторе, а при установившемся движении вернуть в газовую камеру гидроаккумулятора отобранный газ, то есть восстановить начальное давление (коэффициент жёсткости).

Проведённые исследования динамики муфты в условиях демпфирования серии импульсных нагрузок [8] показали влияние начального давления в гидроаккумуляторе и расхода жидкости в гидросистеме на коэффициент динамичности муфты.

Для примера был задан возмущающий импульсный момент сопротивления M_c с амплитудой $M = 80 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и периодом $T = 1 \text{ сек}$ [8]. В результате исследований получили зависимость, позволяющую подобрать рациональные параметры гидросистемы, при которых коэффициент динамичности муфты будет минимальным

(рис. 3).

Рис.3. Зависимость коэффициента динамичности муфты от параметров гидросистемы

Задав рациональные параметры гидросистемы муфты, сравнили работу жёсткой и исследуемой муфты в режиме демпфирования импульсных нагрузок (рис.4). Результаты сравнения показали, что коэффициент динамичности в гидромеханической муфте ниже в 1,9 раза, чем в жёсткой муфте, а коэффициент эффективности, равный отношению амплитуды гармонического крутящего момента, передаваемого системой, содержащей упругую муфту, к амплитуде момента передаваемого той же системой при жёстком соединении двигателя с валом технологической машины [1], $K = 0,11$. Что говорит о высокой эффективности защиты привода упруго-демпфирующей гидромеханической муфтой с дифференциальным передаточным механизмом.

Рис. 4. Зависимости момента на валу электродвигателя при импульсной нагрузке 1 – с жёсткой муфтой; 2 – с гидромеханической муфтой

Следует отметить, что при изменении параметров возмущающей нагрузки, можно рассчитать новые рациональные параметры гидросистемы муфты, влияющие на её жёсткость, и ввести в систему соответствующие коррективы в процессе работы привода технологической машины.

Для проверки функциональной работоспособности муфты и адекватности разработанной математической модели спроектирован и изготовлен экспериментальный

стенд (рис.5) при поддержке Фонда содействия инновациям по программе У.М.Н.И.К. Передаточный механизм стенда выполнен на базе автомобильного зубчатого дифференциала [9].

Рис. 5. Стенд для испытаний макета муфты

Проведённые исследования на экспериментальном стенде подтвердили функциональную работоспособность муфты, её упругодемпфирующие и предохранительные свойства, а также адекватность математической модели [9].

Вывод. По результатам проведённых исследований можно отметить, что разработана схема муфты, в которой реализована возможность управлять изменением коэффициента жёсткости основного упругого элемента, изменяя параметры гидросистемы муфты даже в процессе работы муфты. Зависимости, полученные при исследовании динамики работы муфты, позволяют определять рациональные параметры гидросистемы муфты, учитывая воздействующие нагрузки, при которых коэффициент динамичности технической системы будет минимальным.

На следующем этапе необходимо разработать систему управления муфты, способную регулировать параметры гидросистемы в автоматическом режиме с учётом поступающей от соответствующих датчиков информации. В этом случае, мы получим предохранительную упруго-демпфирующую саморегулирующуюся муфту, являющуюся мехатронным узлом технической системы, способным участвовать в управлении динамикой работы привода технологической машины.

Литература

1. Асташев В.К., Бабицкий В.И., Быховский И.И. и др. Вибрации в технике: Справочник. В 6-и т. – М.: Машиностроение, 1981. – Т.6. Защита от вибрации и ударов / Под.ред. Фролова К.В. 1981, 456с.
2. Бородина М.Б., Булавин К.А., Крахт В.Б., Сопилкин А.Г., Сопилкин Г.В., Шевченко Б.А. Гидростатическая муфта. Патент РФ № 2186270 на изобретение. МПК F16D 25/06, F16D 25/08; Бюл. № 21. Оpubл. 2002.
3. Бородина М.Б., Мироненко С.В. К расчету параметров гидромеханических муфт с дифференциальным планетарным передаточным механизмом. Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2015. Т. 58. № 7. С. 501-505.
4. Бородина М.Б., Мироненко С.В., Савин Л.А., Шевченко Б.А. Гидромеханическая муфта. Патент РФ № 2536035 на изобретение. МПК F16D 25/06, F16D 3/34, F16D 31/00. Бюл. № 1. Оpubл. 10.01.2017.
5. Башта Т. М., Руднев С. С., Некрасов Б. Б., Байбаков О. В., Кирилловский Ю.Л. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы. М.: Машиностроение, 1982. - 323с

6. Ключев В.И. Теория электропривода: Учебник для ВУЗов. – 2-е издание перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1998
7. Бородина М.Б., Булавин К.А., Мироненко С.В. Рациональные параметры гидромеханической муфты с винтовым исполнительным механизмом, демпфирующей внезапно приложенные нагрузки. Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2014. № 6 (308). С. 70-74.
8. Мироненко С.В., Бородина М.Б., Савин Л.А. Демпфирование импульсных нагрузок гидромеханической муфтой с зубчатым дифференциальным исполнительным механизмом. Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2015. № 3 (311). С. 53-58.
9. Мироненко С.В., Бородина М.Б. Экспериментальные исследования гидромеханической муфты с дифференциальным планетарным передаточным механизмом // Сборник статей регионального молодёжного научного семинара «Горизонты науки – 2015». г. Орёл: 2015г. С. 400-405

EXPERIMENTAL RESEARCH OF THE MAIN PARAMETERS OF TUBE-SHAPED ULTRASOUND WAVE GUIDE WIRE

Algimantas Bubulis¹, Jonas Navickas², Vytautas Bakanauskas³

¹Kaunas University of Technology, Kaunas, Lithuania, algimantas.bubulis@ktu.lt

²Kaunas University of Technology, Kaunas, Lithuania, jonas.navickas@ktu.lt

³Kaunas University of Technology, Kaunas, Lithuania, vytautas.bakanauskas@ktu.lt

Abstract. Cardiovascular diseases are the leading cause of death among people up to 65 years old. One of the most common cardiovascular disease is thrombosis. To remove the blood clot inside the artery, usage of advanced invasive mechanical devices is needed. Nevertheless, medicine of today is not technically ready to cope with the challenges. Because of that, tube-shaped ultrasound waveguide wire was designed and investigated by various experimental techniques.

Keywords. ultrasound, wave guide, cavitation, thrombosis.

1. Introduction

Heart and cardiovascular diseases related to iliac, femoral, and radial artery pathologies might appear because of the thrombus [1, 2]. Incensement of more and more cases of diseases such as obliterative atherosclerosis [3], obliterative thromboangiitis, venous thrombosis [4], deep vein thrombosis [5], etc is noticed. Nowadays these pathologies are being cured by huge spectra of various ways of treatment, developed to restore the blood flow inside the artery, using invasive fermentative and mechanical thrombus removal tools.

Nevertheless, application of current treatment methods is limited due to common surgery complications. There is a need for the new alternative less risky and hazardous way of arterial thrombosis treatment.

During the last few years, ultrasonic methods, which are the most perspective among restoring blood flow in the artery, affected by arterial thrombosis, attracts more and more attention. It is related to the increasing number of researches in the field of ultrasound impact human body tissues. Recent researches [6-9] showed that low frequency and intensity ultrasound increases elasticity of the damaged artery walls.

A review of currently available invasive arterial thrombosis treatment tools can be seen in the fig. 1. After the invention of ultrasonic resonator in 2003 [10], few other ultrasound systems were developed. The most noticeable one is marked as c in fig 1. Mentioned system provides the option to transfer the limited volume of drugs to the spot where arterial thrombosis caused clot appeared during the invasive surgery. Despite the novelty of the design, it is limited due to volumetric limitation and durability problems of the spring.

Fig. 1. Current patented ultrasound wave guide wire construction, where: a) Ultrasonic resonator [10], b) Steerable Ultrasound Catheter [11], c) Ultrasound wave guide wire for internal blood vessels cleaning [12].

2. Design of the tube-shaped ultrasound wire

Tube shaped ultrasound wave guide wire with holes in the working end was offered as the alternative to the current patented invasive thrombosis treatment solutions. The principal scheme of the innovative waveguide is presented in figures 2 and 3.

Fig. 2. Ultrasonic blood vessels cleaning device (cross-section)

Fig. 3. Ultrasonic blood vessels cleaning system, where: 1) Wall of the waveguide, 2) Waveguide hole, 3) Channel, 4) Intake, 5) Screw, 6) Screw hole, 7) Concentrator, 8) Transducer

The 260 mm length and 1,5 mm diameter wave guide wire is treated as invasive medical device and can be used to clean the inner walls of the artery, as well as the tool to destroy the thrombus and suck out the scurf of the blood clot at the same time.

To be able to provide a sufficient quantity of drugs to the needed place of the artery, tube-shaped wave guide wire was chosen. The drilled holes at the end of it works both, as intake and suction hole if needed.

Adequate feed of the drugs to the damaged place of the blood vessel is secured by unique design the of wire. The lug which allows the device to get attached to the concentrator is separated from the tube, through which the drugs are delivered. The construction is explained in fig. 3. The diameter of the intake 1,1 mm.

Such construction of the wave guide wire allows to affect the ocludator not only mechanically but also by the flow of physiological fluid, provided through the intake, marked as number 4 in fig. 3.

The dimensions of the waveguide were limited by normal diameter of lower human limb

arteries. To be able to work even at the level of popliteal arteries, the wave guide diameter of 1,5 mm was chosen. Selection of other dimensions, as well as length optimization of the novelty design system are disclosed in upcoming European patent application “Tube shaped ultrasound wave guide wire for internal blood vessels cleaning”.

3. Experimental research

To determine resonance frequency for the biggest displacement toward z axis, the experiments on the Polytec PSV 3D laser vibrometer experimental table were carried on. The experimental investigation setup is shown in Fig. 4 it consists of: 1 – Polytec PSV 3D laser vibrometer; 2 – ultrasound waveguide system; 3 – magnetic holder of transducer; 4 – anti-vibration table. To secure reflection of the laser beam from the tip of the waveguide the reflection film was glued on the tip. The mass of the glued reflection film is insignificant and the results of the experiment were not affected. Firstly, the FFT analysis was made to determine peaks of the system in frequency range between (15 – 30 kHz). Afterwards the biggest displacement toward z axis was determined. To determine displacements when transducer was excited with working voltage, the peak was investigated in time scanning mode.

The experimental investigation was carried out in several different conditions and different points of interest. The waveguide was investigated in free conditions as shown in Fig. 4 and placed in tube which was filled with water. In both cases the displacement of the tip of the waveguide was measured. In other case, the screw of housing of waveguide and housing of the waveguide (lug) was investigated to determine influence of housing (lug) to displacement of the waveguide.

Fig. 4. Experimental setup. 1) Polytec machine (laser sources); 2) Waveguide; 3) Holder; 4) Anti-vibration table.

Fig. 5. (FFT analysis of the tip of waveguide in the range of 15 – 30 kHz) Determining the resonance frequency for the best displacement on z axis

Ultrasonic blood vessels cleaning system was excited by periodic chirp type signal with amplitude of 10 volts to determine FFT analysis of tip of the waveguide. The results has shown

that biggest displacements in z axis occurs at resonance frequency of 23.19 kHz with amplitude of 21 nm.

Fig. 6. x, y, and z axis displacement on resonant frequency at the end point of waveguide

The resonance frequency of 23.19 kHz was determined when ultrasonic blood vessels cleaning system was excited by sine type signal with amplitude of 100 V. Investigated tip of the waveguide provided biggest 7,02 micrometer displacement towards z axis (Fig. 6).

Fig. 7. x, y, and z axis displacement on resonant frequency at the fixing element (screw) of the ultrasound system

Fig. 8. x, y, and z axis displacement on resonant frequency at the construction element (lug) of the ultrasound system

The investigation of the housing screw and housing lug was performed to determine the influence of these parts to displacements of the waveguide. The excitation signal was the same as described in the section above. The results have shown the displacements of screw towards z is 1.4 µm (Fig. 7) and displacement of the housing end towards z axis is 1.8 µm (Fig. 8), therefore it could be said that housing has impact on displacements of the tip of the waveguide towards z axis.

4. Conclusions

Unique design ultrasound invasive blood vessel cleaning device was designed and constructed. It allows not only to suck out the scurf of the just destroyed blood clot but also provides the needed amount of medicine to the needed spot of the damaged blood vessel.

The experiment have shown very significant difference between the displacement of tip of the waveguide in different conditions. In free mode (in the air) the maximum displacement towards z axis was 11,02 μm , while displacement while the waveguide was placed in the fluid-filled tube, was almost 5 times smaller and reached only 2,1 μm . Further experimentation with waveguide placed in tube filled with different kinds of fluid is needed and planned for the further research.

It is also noted that displacement of screw towards z is 1.4 μm and displacement of the housing lug towards the same z axis is 1.8 μm . So it could be said that housing parts has significant impact on displacements of the tip of the waveguide towards z axis.

5. Acknowledgement

This research is funded by Research Council of Lithuania, Project no. MIP-097/15.

Bibliography

1. Li, H., Horke, S., & Förstermann, U. Vascular oxidative stress, nitric oxide and atherosclerosis. *Atherosclerosis*, vol. 237(1), 2014, p. 208-219.
2. Alexopoulos, N., Katritsis, D., & Raggi, P. Visceral adipose tissue as a source of inflammation and promoter of atherosclerosis. *Atherosclerosis*, vol 233(1), 2014, p. 104-112.
3. Tzirtzilakis, E. E. Biomagnetic fluid flow in an aneurysm using ferrohydrodynamic principles. *Physics of Fluids*, vol 27(6), 2015, p. 1-19.
4. Abdullah, B. J. J., Mohammad, N., Sangkar, J. V., Aziz, Y. A., Gan, G. G., Goh, K. Y., & Benedict. Incidence of upper limb venous thrombosis associated with peripherally inserted central catheters (PICC). *The British journal of radiology*, vol 78, 2005 p. 596-600.
5. Yamagami, T., Kato, T., Iida, S., Tanaka, O., & Nishimura, T. Retrievable vena cava filter placement during treatment for deep venous thrombosis. *The British journal of radiology*, vol 76, 2003, p. 712-718.
6. Bubulis A., Jurėnas V., Minchenia V.T., Stepanenko D.A., Bobrovskaja A.I., Chizh D.V. Study of the process of interaction between low-frequencyultrasound and biological tissue phantoms. *Journal of Vibroengineering*, Vol.13, 2011, p. 586-589.
7. Bubulis A., Jurėnas V., Stepanenko D., Minchenya V. Effect of Design of the Distal Part of Wave Guide concentrator on efficiency of Destroying Blood Clots During Ultrasound Angioplasty. "Science and Education" International scientific seminar, 2011, p. 11-14.
8. Tun, C. Effektivnost vosstanovlenija prochodimosti porazhennix aterosklerozom arterij ultrazvukovimi volnovodami razlichnich modifikacij in vitro. *BelMAPO*, 2006, p. 21.
9. Siegal RJ., Gunn J., Ahsan A., Fishbein MC., Bowes RJ., Oaukley D., Wales C., Steffen W., Campbell S., Nita H. Use of therapeutic ultrasound in percutaneous coronary angioplasty. *Experimental in vitro studies and initial clinical experience. Circulation*, 1994, p. 1587-92.
10. Peterson T., Pal D. Ultrasonic resonator. US patent No. US6617760, 2003
11. Nita H., Sarge J. Steerable ultrasound catheter. US patent No. US7335180, 2008
12. Bansevicius R., Bubulis A., Jurėnas V., Minchenia V., Valaika M. Ultrasound wave guide wire for internal blood vessels cleaning. EU patent No. EP2065002, 2009

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАШИННОГО АГРЕГАТА

Букина С.В., Ширяев К.Е.

Костромской государственной университет, г.Кострома, Россия

E-mail: info@kstu.edu.ru**Аннотация.**

Сделана попытка найти нетрадиционный метод решения уравнения движения машинного агрегата для частного случая, позволяющий более точно учитывать переменные по величине силы инерции при исследовании новых механизмов.

Ключевые слова.

уравнение движения, машинный агрегат, аналитический метод, уравнение Риккати, частное решение.

В современных быстроходных машинах большое значение имеют силы инерции, которые будучи переменными по величине и направлению вызывают вибрацию машин, снижают к.п.д. и уменьшают прочность ее звеньев.

Более точный учет сил инерции, действующих на звенья машинного агрегата, может быть произведен в том случае, если известен истинный закон движения машины. В производственных машинах, как правило, имеется одно входное звено, которое совершает вращательное движение. Поэтому, решением 2-ой задачи динамики является определение зависимости $\omega(\varphi)$ или $\omega(t)$.

Вопросу изучения истинного движения машины посвящены работы И. И. Артоболевского, В. А. Зиновьева, М. З. Коловского и др. Нами в данной работе сделана попытка найти метод решения уравнения движения машины для частного случая.

Традиционный подход к анализу этого уравнения можно найти в [1], [2] и т.д.

В некоторых частных случаях можно попытаться использовать другой метод. Основная его идея состоит в рассмотрении величин J_{np} , $\dot{J}_{np}$ и M_{np} не как функций угла поворота φ , а сразу как функций времени t . В этом случае уравнение Лагранжа станет дифференциальным уравнением 2-го порядка:

$$J_{np}(t)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\dot{J}_{np}(t)\dot{\varphi}^2 = M_{np}(t)$$

с неизвестной функцией $\varphi(t)$, которое после замены $\dot{\varphi} = z$ сведется к уравнению Риккати:

$$a(t)\dot{z} + b(t)z^2 = c(t),$$

$$\text{где } a(t) = J_{np}(t); \quad b(t) = \frac{1}{2} \frac{dJ_{np}(t)}{d\varphi}; \quad c(t) = M_{np}(t).$$

В общем виде уравнения Риккати не могут быть решены, однако в частных случаях, когда $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ – функции одного вида, можно попытаться подобрать частное решение этого уравнения.

Например, если

$$\begin{aligned}a(t) &= a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \\b(t) &= b_2 t^2 + b_1 t + b_0, \\c(t) &= c_2 t^2 + c_1 t + c_0\end{aligned}$$

и то поиск частного решения может быть осуществлен в виде $z(t) = \alpha + \frac{\beta}{t}$.

Подставив $z(t)$ в уравнение Риккати, раскрыв скобки и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t , получим относительно неизвестных α и β систему:

$$\begin{cases} \alpha^2 b_2 = c \\ \alpha^2 b_1 + 2b_2 \alpha \beta = c_1 \\ -a_2 \beta + b_0 \alpha^2 + 2\alpha \beta b_1 + b_2 \beta = c_0 \\ -a_1 \beta + 2\alpha \beta b_0 + b_1 \beta^2 = 0 \\ -a_0 \beta + b_0 \beta^2 = 0 \end{cases}$$

Из первого и последнего уравнений (при жестком условии обращения остальных в тождества) находятся $\beta = \frac{a_0}{b_0}$ и $\alpha = \sqrt{\frac{c_2}{b_2}}$.

Конечно, полученная система может оказаться несовместной, тогда частные решения можно попытаться искать в другом виде.

После нахождения частного решения $z_{\text{ч}}(t) = \alpha + \frac{\beta}{t}$ подстановкой $z = z_{\text{ч}} + u$ уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли $a(t)\dot{u} + 2b(t)z_{\text{ч}}u + b(t)u^2 = 0$, которое хорошо изучено и. в свою очередь, сводится к линейному неоднородному заменой $V = \frac{1}{u}$, тогда $\dot{V} = -\frac{\dot{u}}{u^2}$ и $a(t)\dot{V} - 2b(t)z_{\text{ч}}V = b(t)$, и его решением является функция:

$$V(t) = W(t) \cdot e^{\int_0^t \frac{2b(s)z_{\text{ч}}(s)}{a(s)} ds},$$

где $W(t) = \int \left(\frac{b(s)}{a(s)} \cdot e^{-\int_0^s \frac{2b(r)z_{\text{ч}}(r)}{a(r)} dr} \right) ds + k_1$, k_1 – произвольная константа.

Таким образом, решение $\phi(t)$ может быть найдено в квадратурах, или, по крайней мере, в интегральном виде.

Дальнейшее применение пока разработано недостаточно, но, вероятно, можно на некотором временном интервале аппроксимировать J_{np} , J'_{np} и M_{np} квадратичными полиномами. Применяя изложенную выше идею, можно вычислить решение $z(t)$. Соответственно на всем отрезке времени можно искать решение как совокупность таких $z(t)$ на интервалах меньшего размера. Опасностью в этом случае может стать

разрывность в конечных точках интервалов, в этом случае решения можно попытаться «склеить» за счет выбора констант k_1 .

Полученные таким образом приближения будут точнее, нежели полученные традиционным методом. Поэтому предлагаемый аналитический метод решения уравнения движения машинного агрегата может быть рекомендован, как достаточно точный и надежный, при создании и исследовании новых машин. В любом случае высказанная гипотеза нуждается в проверке и ждет своих исследователей.

Литература

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин – М.: Наука, 1988, - 640с.
2. Коловский М.З. Динамика машин - Л.: Машиностроение, 1989, - 263с.
3. Приводные системы ткацких станков. Под ред. И.А. Мартынова. – М.: Легпромиздат, 1991. – 272 с

ОСОБЕННОСТИ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, СОПРОВОЖДАЮЩИХ ПОЛЕТ ТЕЛА С ГИПЕРЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ В ГАЗЕ

Герасимов С.И.^{1,2,3}, Кикеев В.А.^{2,3}, Фомкин А.П.¹, Яненко Б.А.¹

¹ Саровский физико-технический институт НИЯУ МИФИ, Саров, Россия,
s.i.gerasimov@mail.ru

² Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Россия, vkikeev@mail.ru

³ Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева,
Нижний Новгород, Россия

Аннотация. Выполнен ряд экспериментов с целью оценки возможности и методической отработки проведения аэробаллистических испытаний при гиперзвуковых скоростях обтекания. Представлены описание условий экспериментов, схемы их проведения и состав использованной регистрирующей аппаратуры. Объектом исследований являлись металлические шары, выполненных из различных сплавов. Для данных изделий показан характер обтекания, проведено численное моделирование, получены зависимости коэффициента аэродинамического сопротивления от числа Маха.

Ключевые слова. Аэробаллистические испытания, гиперзвуковое обтекание, теневое и силуэтное фотографирование, аэробаллистическая трасса, численное моделирование аэродинамических процессов, визуализация аэродинамических процессов.

Развитие современной техники наряду с возрастающими требованиями к образцам ракетно-артиллерийского вооружения, изделиям космической и других отраслей ставит ряд задач и тем для исследования, возникающих при моделировании и экспериментальном исследовании физических процессов, связанных с эксплуатацией изделий. Одной из таких проблем является увеличение скоростей полёта, что вызывает необходимость корректного моделирования, оценки возможности и методической отработки проведения аэробаллистических испытаний при сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростях обтекания. Проблема корректного моделирования физических процессов, сопровождающих гиперзвуковой полёт тела, является фундаментальной задачей аэродинамики. К тому же, полет тела при высоких скоростях обтекания может сопровождаться сильно нелинейными процессами, такими как аэротермомеханическое разрушение объекта, характеризующее уносом массы объекта, ионизацией газа. Часть экспериментальных данных, полученных по данной тематике, обсуждалась в [1, 8-13].

Основной методической особенностью проблем аэродинамики больших скоростей является трудность их экспериментального моделирования. Этим объясняется та ситуация, что теоретические исследования по уровню и глубине значительно опережают экспериментальные достижения. Основные положения теории гиперзвуковых течений представлены в [2].

В настоящей работе представлены результаты экспериментов на современной гиперзвуковой аэробаллистической установке, которые можно рассматривать как постановочные с точки зрения оценки возможности экспериментального исследования проблем гиперзвуковой аэродинамики в лабораторных условиях.

Используемая аэробаллистическая установка включает два основных элемента: легкогазовую метательную установку и измерительную трассу полета объектов общей длиной $L=160$ м. Метательная установка (МУ) и начальный участок трассы полета ($L=36$ м) расположены на открытой местности, а основной участок трассы - аэробаллистический тир (АБТ), расположен в объеме закрытого затемненного сооружения, где сосредоточена большая часть оптической аппаратуры.

АБТ представляет собой измерительную трассу закрытого типа, оснащенную 15-ю фотопостами, равномерно расположенными вдоль участка траектории полета объекта.

Типовая схема расстановки оборудования представлена на рис. 1 (1 – метательная установка, 2 – рентгеновский аппарат, 3 – импульсный источник света, 4 – аэрофотоаппарат, 5 – электронно-оптическая фотокамера, 6 – синхро-баллистическая фотокамера, 7 – экран).

Рис. 1. Состав и схема расстановки оборудования аэробаллистической установки

Основными объектами испытаний в постановочных опытах на аэробаллистической установке являлись шары диаметром 10,4 мм, массой 10 г, изготовленные из ВНЖ-90 (опыт №4), и шары из высокопрочного сплава ВР (диаметр 10,4 мм, масса 11,5 г) (опыты №1-3). Данные шары металлись с начальными скоростями 3,86 км/с (опыт №1); 4,70 км/с (опыт № 2); 5,07 км/с (опыт №3); 5,8 км/с (опыт №4).

Указанные объекты отстреливались в свободный полет из легкогазовой баллистической установки. Дальность свободного полета составляла порядка 160 м, в течение которого осуществлялись оптические, рентгенографические и хронографические измерения. Начальная температура объектов соответствовала метеоусловиям на момент проведения опытов (10 – 20°C).

Для шариков из высокопрочного сплава ВР при увеличении начальных скоростей наблюдалось увеличение яркости трека; на снимках с камер комбинированного фотопоста, производивших съемку в отраженном свете, заметно увеличение видимого следа за объектом исследования при увеличении начальной скорости полёта. Результаты оптических, рентгенографических и хронографических измерений, полученные при проведении опытов №1-3, описываются более подробно в [1].

ВНЖ-90 является композитным материалом (вольфрам, никель, железо). В отличие от сплавов стали его структура неоднородна, т.к. получают его методами порошковой металлургии спеканием компонент при определенных условиях. Основой являются зерна вольфрама размером 70...200мк (90% по массе), скрепленные пленкой расплава железо- никель.

В процессе полета под действием аэродинамического теплового потока (конвективного и излучения) происходит интенсивный нагрев лобовой поверхности объектов. Ее температура достигает температуры разрушения материала, и начинается его унос, обуславливающий изменение массы и обводов. По мере торможения тепловые потоки снижаются, унос прекращается, и в дальнейшем обводы объектов уже не меняются, а температура поверхности падает. Отмеченные обстоятельства являются характерными для всех проведенных экспериментов.

Характерным является наличие плотного трека светящегося шарика в ореоле расходящихся треков светящихся частиц значительно меньших размеров.

Представленные на рис. 2 рентгеновские снимки различных стадий полета этого шарика позволяют предложить качественную картину процессов, в том числе, и регистрируемых фотокамерами АФА.

Рис. 2. Рентгеновские снимки шарика из ВНЖ в различных стадиях полета (а) - $X = 14$ м, $V = 4,9$ км/с; б) - $X = 26$ м, $V = 4,6$ км/с, в) - $X = 43$ м, $V = 4,1$ км/с, г) - $X = 156$ м, $V = 1,5$ км/с (направление полета слева направо)

В процессе уноса на рентгеновских снимках в зоне лобовой поверхности шарика вверх по потоку регистрируется затемненная область с размытой границей. Судя по характеру границы, эта область является газообразной и распространяется вниз по потоку до окрестности точки начала резкого расширения потока (рис. 2а-2в). Наличие указанной области обусловлено особенностями процесса аэротермомеханического уноса ВНЖ и аэробаллистическими условиями полета. Как уже отмечалось, ВНЖ является композитным материалом, и его компоненты имеют отличающиеся теплофизические свойства, в частности, температуру плавления. В этой связи, по мере разогрева лобовой части шарика, первой достигается температура плавления связующего звена железоникель, которая примерно в 2 раза ниже температуры плавления основы - зерен вольфрама. В результате плавления связки зерна вольфрама или их отдельные ассоциации теряют механическую связь между собой, и начинают автономное движение в ударном слое. Судя по рентгеновским снимкам, торможение шарика оказывается более интенсивным, и, поэтому, в относительном движении зерна вольфрама продвигаются вверх по потоку относительно твердой поверхности шарика.

Начав автономное движение в ударном слое совместно с газовой фазой, омывающей твердую поверхность, они приобретают составляющую скорости, нормальную к поверхности шара. В этой связи, их траектории отклоняются от траектории шарика и формируют ореол треков, регистрируемых фотокамерами АФА.

Снимки, выполненные в этих условиях электронно-оптическими фотокамерами в проходящем свете ($t_{\text{эксп}} \approx 1$ мкс), (рис. 3) свидетельствует, что зерна вольфрама практически равномерно распределены в зоне, охватываемой головной ударной волной вниз по потоку.

Они регистрируются на фотоснимке, поскольку их полет, вероятно, сопровождается теми же световыми явлениями, что и полет шарика в целом. Воздух, прошедший через близкую к прямолинейной часть головной ударной волны, имеет высокую температуру и формирует на снимке яркий светящийся след, поперечный размер которого близок к диаметру шарика. При этом для проходящего света он остается прозрачным. Это следует из того, что теневая картина течения, регистрируемая на этом же снимке, не имеет очевидных отличий от аналогичных, регистрируемых при гиперзвуковом полете (числа $M > 6$) неразрушающихся тел. Плотность частиц в объеме, охватываемом хвостовой частью головной ударной волны, и их размеры малы так, что они не регистрируются на рентгеновских снимках (рис. 2) и на теневой картинке течения (рис. 3).

Рис. 3. Регистрация полета шарика из ВНЖ двумя камерами ЭПОС на участке траектории, где происходит унос ($X \approx 14-20$ м, $V = 4$ км/с)

Зависимости коэффициента силы лобового сопротивления $C_x(M)$ от числа Маха для шаров, изготовленных из разных конструкционных материалов, представлены на рисунке 5. Зависимость коэффициента силы лобового сопротивления $C_x(M)$ для сферы при отсутствии уноса материала ОИ (опыты №1-3) соответствуют "классическим" представлениям и практически постоянна в пределах погрешности эксперимента во всем реализованном скоростном диапазоне. В опыте № 4 зависимости $C_x(M)$ имеют больший градиент, что является косвенным доказательством наличия аэротермомеханического разрушения конструкционных материалов ОИ, сопровождающегося существенными изменениями геометрии и массы ($\sim 10-15\%$).

С точки зрения уточнения математических моделей процесса мелкодисперсного дробления чрезвычайно важными могут оказаться факты, зарегистрированные при испытаниях шарика из ВНЖ. В первую очередь имеется в виду зарегистрированный на рентгеновских снимках вынос частиц вольфрама в лобовой зоне вверх по потоку от твердой поверхности шарика (рис. 2). В имеющихся математических моделях полагается, что дробленая масса (мелкие частицы), обладая значительной деформируемостью, становится близкой по свойствам к жидкости, и в этой связи возможность распространения частиц вверх по потоку даже не предполагается. В то же время наличие этих частиц в ударном слое может оказать существенное экранирующее воздействие, по крайней мере, на уровень тепловых потоков, конвективного и излучения.

В этой связи может потребоваться уточнение математических моделей мелкодисперсного дробления в части учета аэробаллистических аспектов относительного движения частиц и основного тела.

Отмеченная совокупность фактов, зарегистрированных при проведении постановочных экспериментов, относится главным образом к аэротермомеханическим и баллистическим аспектам движения тел при гиперзвуковых скоростях обтекания. Полученные результаты свидетельствуют, что аэробаллистический метод может быть достаточно эффективным инструментом исследования данных процессов.

Для отработки методик расчета с помощью современных инженерных методов компьютерного моделирования процесса гиперзвукового обтекания произведен расчет моделей при различных скоростях обтекания.

В качестве объекта моделирования выбран шар 10,4 мм. В качестве метода моделирования выбран метод численного решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, дополненный $k-\varepsilon$ - моделью турбулентности. Этот метод реализован в современном инженерном программном пакете SolidWorks Flow Simulation [4]. Пакет представляет собой комбинацию полной версии системы SolidWorks как графической среды, и гидрогазодинамического решателя, препроцессор которого позволяет реализовывать автоматизированный или ручной метод блочного построения

расчетной сетки и ее последующей адаптации в зонах больших градиентов параметров потока. Пакет позволяет решать пространственные трехмерные задачи внешнего сверхзвукового обтекания твердых тел с учетом вязкости, теплопереноса, шероховатости стенки, степени турбулентности потока. В результате решения могут быть определены аэродинамические силы и моменты, действующие на обтекаемую поверхность объекта, получены все параметры обтекающего газа в расчетном объеме - поля давлений, плотностей, температур, скоростей. Полученные результаты могут выводиться в виде контурных распределений параметров течения в объеме и на поверхности тела и в виде соответствующих графиков для любого выбранного сечения.

Трехмерный расчет процесса внешнего обтекания шара сверхзвуковым потоком сжимаемого газа проводился с учетом соответствующих граничных условий на поверхности шара и на стенках расчетного домена. Решались полные, осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса, дополненные двухпараметрической моделью турбулентности с установленными по умолчанию параметрами. Диапазон рассмотренных начальных скоростей обтекания составлял 6 – 15 M . Для воздуха использовалось уравнение состояния совершенного газа. В процессе расчета определялись полные в объеме домена поля для всех параметров обтекающего газа, определялось значение коэффициента лобового сопротивления шара. Полученные результаты показаны на рисунке 5, характер обтекания шара при начальной скорости $M = 7$ показан на рисунке 4. Из рисунков можно заметить, что характер обтекания и вычисленные значения коэффициента сопротивления в зависимости от чисел Маха в целом соответствуют экспериментальным данным, приведенным в различных источниках ранее [3,5,6,7].

Рис. 4. Распределение полей давлений а), температур б), плотностей в) и суммарных векторов скоростей з) в потоке при обтекании шара с начальной скоростью $M = 7$

Рис. 5. Зависимость коэффициента силы лобового сопротивления (C_x) от числа Маха (M) для шаров из различных конструкционных материалов

Расчеты с начальными скоростями более $M = 10$ показали, что при данных скоростях обтекания происходит нарушение алгоритма автоматической адаптации расчетной сетки. Видимо, данное явление связано с крайне высоким значением градиента параметров потока в реализованном численном методе, что приводит к неестественным изменениям расчетной сетки. Возникают значительные осцилляции вычисляемых параметров, что не позволяет говорить о сходимости решения даже спустя достаточно большое количество расчетных итераций. Наличие вышеописанных явлений требует существенной корректировки математической модели. Тем не менее, анализ полученных результатов численного моделирования до скорости не выше $M = 10$ и экспериментальных данных, позволяет сделать вывод о возможности использования данной математической модели в определенном скоростном диапазоне.

В результате выполненной работы произведены эксперименты с целью оценки возможности и методической отработки проведения аэробаллистических испытаний для исследования процессов гиперзвукового обтекания конструкций. В ходе экспериментов тела простой формы (шары, выполненные из различных конструкционных материалов) отстреливались со скоростями $V = 3,86 - 5,8$ км/с. Для данных изделий показан характер обтекания, получены зависимости коэффициента аэродинамического сопротивления от числа Маха при различных начальных скоростях полета. С использованием оптического и рентгенографического измерительных комплексов зарегистрирован ряд явлений, сопровождающих процесс обтекания. В этой связи сделан вывод о возможности использования аэробаллистического метода для исследования широкого круга проблем гиперзвукового обтекания тел. Проведено численное моделирование в инженерном программном пакете SolidWorks Flow Simulation, получены зависимости коэффициента аэродинамического сопротивления от числа Маха.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-38-60125 мол_а_дк.

Литература

1. Герасимов С.И., Кикеев В.А., Осеева С.И., Фомкин А.П. Воздействие гиперзвуковых потоков на шары из различных материалов в свободном полете // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 2012. – Т. 39, № 1. – С. 40-51.
2. Пробстин Р.Ф., Хейз У.Д. Теория гиперзвуковых течений. Монография. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 607 с.
3. Герасимов С.И., Файков Ю. И. Теневое фотографирование в расходящемся пучке света: Монография. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2010. – 344с.
4. <https://www.solidworks.com/sw/resources/videos/flow-simulation.htm>
5. Герасимов С.И., Файков Ю. И., Холин С.А. Кумулятивные источники света. Монография. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2011. – 327с.
6. Бейли А.Б., Хайт Дж. Коэффициент сопротивления сферы в широком диапазоне чисел Маха и Рейнольдса // РТК – 1972. – Т. 10, № 11. – С. 56-62.
7. M. Van Dyke. An Album of Fluid Motion. – The Parabolic Press: Stanford, California, 1982.
8. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Кикеев В.А., Фомкин А.П. Об особенностях расчетно-экспериментальных исследований аэродинамических процессов при гиперзвуковых скоростях обтекания // Вычислительная механика сплошных сред. – 2013. – Т. 6, № 1. – С. 34-40.
9. Герасимов С.И., Каныгин И.И., Кикеев В.А., Герасимова Р.В., Тотышев К.В., Голубев В.К. Расчетно-экспериментальная визуализация сверхзвукового обтекания управляющих щитков на телах вращения сегментно-конической формы // Научная визуализация. – 2014. – Т. 6, № 3. – С. 55–67.
10. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Кикеев В.А., Фомкин А.П. Различные механизмы разрушения тел в гиперзвуковом потоке, выявленные с помощью оптической и рентгенографической регистрации // Научная визуализация – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 38-44.
11. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Кикеев В.А., Герасимова Р.В., Каныгин И.И., Фомкин А.П. Визуализация сверхзвукового обтекания фрагментов кубической формы // Научная визуализация. – 2015. – Т. 7, № 3. – С. 44–52.
12. Герасимов С.И., Кикеев В.А., Фомкин А.П. Повышение информативности аэробаллистического эксперимента как мера повышения точности // Журнал технической физики. – 2016. – Т. 86, Вып. 11 – С. 125–132.
13. Кикеев В.А., Герасимов С.И., Герасимова Р.В., Львова Е.А., Тотышев К.В. Спектры обтекания тел, движущихся со сверхзвуковой скоростью в аэродинамических исследованиях // Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». – 2016. – Т. 5, № 4. – С. 289–293.

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ КОЛЕБАНИЙ В ЧЕРВЯЧНЫХ ПЕРЕДАЧАХ

Гончаров С.Ю.¹, Поляков С.А.^{1,2}, Лычагин В.В.¹, Климов А.Ю.¹, Куц М.С.¹

¹Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, bauman@bmstu.ru

²Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия, info@imash.ru

Аннотация. Рассмотрен процесс формирования колебаний в червячных передачах. Показано, что в силу близости к гармоническим функциям, наличие доминирующей моды колебаний и по причине физических источников колебаний их следует считать автоколебаниями, а снижения их амплитуды можно добиваться снижением сил трения в контакте червячной пары за счет использования антифрикционных добавок в смазочный материал.

Ключевые слова. Червячная передача, нелинейная динамика колебаний, автоколебания.

Описания колебаний в червячных редукторах присутствуют в ряде известных исследований, упоминаемых, например, в работе [1]. В них использованы представления о вынужденных колебаниях, - это традиционно используемая гипотеза. Так, в работе [1] принято, что возбуждение колебаний происходит по причинам кинематического характера и вызвано погрешностями изготовления и монтажа, приведенными к линии зацепления, и описывается функцией

$$\delta(\omega) = \Phi(f_{\text{fl}} \cdot F_{p2}, f_{f1}, f_{f2}, \rho), \quad (1)$$

где f_{fl} – допуск на погрешность винтовой линии на длине нарезанной части червяка; F_{p2} – допуск на накопленную погрешность шага червячного колеса; f_{f1} и f_{f2} – допуск на погрешность профиля витка червяка и зуба червячного колеса соответственно; ρ – приведенный угол трения.

Однако, если единичная погрешность может давать периодическое (один раз за цикл) возбуждение, то сложный комплекс таких погрешностей, как в рассматриваемом случае, разрушает эту периодичность. Проблема заключается в том, что случайные величины, заложенные в функцию возбуждения модели (1), сами по себе не могут давать в сумме те гармонические колебания, которые наблюдаются в эксперименте. Это объясняется тем, что сумма случайных величин всегда будет случайной величиной, а не гармонической функцией, что заложено в центральной предельной теореме теории вероятности и вытекающего из нее распределения Гаусса [2]. Примеры того, как суммирование отдельных погрешностей дает в сумме график, не имеющий ничего общего с формой синусоидальных колебаний, приводится, например, в ГОСТ 3675-81 (Приложение 1, черт. 1, 2, 3).

В данной работе мы опираемся на модель, предложенную в работе [3], использующую представления об автоколебаниях [4]. Существенным отличием автоколебаний является свойство синхронизации отдельных случайных колебаний с выделением главной моды за счет подавления сопутствующих случайных мод [4]. Поэтому основным доказательством наличия именно автоколебаний является устойчиво воспроизводящаяся синусоидальная форма и период этих колебаний, который невозможно получить с помощью стохастически меняющейся возбуждающей силы. Экспериментальные данные получают тензометрированием быстрходного и тихоходного валов червячной передачи на предмет определения на них

соответствующих вращающих моментов $T_{эд}$ и $T_{тор}$. Пример ступенчатого роста момента на червячном валу $T_{эд}$ по мере роста тормозного момента $T_{тор}$ с увеличением амплитуды колебаний $T_{эд}$ и четкой периодичностью колебаний $T_{эд}$ показан на рис. 1.

Рис. 1. Зависимость совместных изменений $T_{эд}$ и $T_{тор}$ от времени

В работе [3] динамика автоколебаний описывалась через соотношение угловой скорости зуба червячного колеса $d\varphi_2/dt$ в направлении приложения окружной силы на червяке и угловой скорости движения витка червячного вала ω_0 в процессе совершения колебаний. Кроме того, на основной вид колебаний накладывается случайная составляющая, оценка которой дается в формуле (1). В итоге результирующая траектория должна определяться суммарным действием детерминированных и случайных факторов, что можно описать следующим соотношением

$$J_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + K \frac{d\varphi_2}{dt} + C_f \varphi_2 = F \left(\omega_0 - \frac{d\varphi_2}{dt} \right) d_1 + \delta(\omega), \quad (2)$$

где φ_2 - угол поворота зуба червячного колеса в направлении приложения окружной силы на червяке; J_2 - приведенный момент инерции тихоходного вала; K - характеристический коэффициент, определяемый трением в контакте, или коэффициент демпфирования; C_f - жесткость зуба червячного колеса в направлении приложения окружной силы на червяке; d_1 - делительный диаметр червяка; F - функция изменения силы трения в связи с отношением угловой скорости червяка ω_0 и скорости поворота зуба червячного колеса $d\varphi_2/dt$; $\delta(\omega)$ случайные составляющие, определяемые погрешностями изготовления.

Функция F описывает динамику окружной силы на червяке, определяемой силой трения. С учетом того, что сила трения является проекцией окружной силы на червяке на контактную поверхность, выражение для коэффициента трения в зацеплении имеет вид

$$f = \left(\frac{T_{эд} \cdot d_2}{T_{тор} \cdot d_1} \right) (\cos \gamma)^2 \cdot \cos \alpha, \quad (3)$$

где d_1 - делительный диаметр червяка; d_2 - делительный диаметр колеса; γ - угол наклона винтовой линии червяка; α - половина угла при вершине витка червяка. При этом $T_{эд} = F_{ок1} d_1 / 2$, где $F_{ок1}$ - окружная сила на червяке, а $T_{тор} = F_{ок2} d_2 / 2$, где $F_{ок2}$ - окружная сила на колесе. Очевидно, что формула (3) является прямым аналогом закона Амонтона-Кулона на наклонной плоскости, где роль силы трения играет величина $F_{ок1}$, а роль нормальной силы $F_{ок2}$. Поскольку углы γ и α в процессе работы не меняются, а величина $F_{ок2}$ определяется тормозным моментом (в рассматриваемом случае он постоянен), то

колебания окружной силы на червяке можно объяснить только колебаниями коэффициента трения в контакте червяка и колеса f или K_{Σ} (что то же самое).

Пояснения к предложенной модели даны на рис. 2. В левой части рисунка представлена кинематическая схема формирования автоколебаний, в которой пробное тело X , моделирующее зуб червячного колеса, перемещается под действием силы трения F из положения X_0 в положение X_1 . Сила трения создается в результате взаимодействия тела X с непрерывно движущимся полотном, которое моделирует фрикционное действие червяка на зуб колеса, а упругие связи C_1 и C_2 моделируют упругое поведение вала червяка и червячного колеса под действием силы трения. В правой части рис. 2 показана зависимость возвращающего момента $T_{\Sigma 0}$ на червячном валу от времени в условиях ступенчатого повышения тормозного момента на выходе из редуктора (350, 400 и 450 Нм соответственно).

Рис.2. Формирование автоколебаний $T_{\Sigma 0}$.

Формирование колебаний происходит следующим образом. При малых значениях скорости скольжения, как это происходит в первую половину периода колебаний 1, сила трения значительно больше, чем сила упругости, поэтому окружная сила на червяке нарастает и тело X перемещается в положение X_1 . Однако с ростом перемещения растет сила упругости, и превышение силой упругости силы трения приводит к возврату тела X в положение X_0 , то есть существенному увеличению скорости относительного скольжения и падению силы трения.

Дело в том, что K_{Σ} не является постоянной величиной, а существенно зависит от скорости скольжения, которая в процессе зацепления может существенно меняться, достигая в области максимальных значений 0,2 и более. При таких высоких значениях K_{Σ} проскальзывание червяка относительно зуба червячного колеса затрудняется, что ведет к уменьшению скорости проскальзывания и дальнейшему росту K_{Σ} (положительная обратная связь). Этот процесс может продолжаться до тех пор, пока сила упругой деформации деталей зацепления не превысит силы трения, и скорость проскальзывания не начнет возрастать, приведя к снижению K_{Σ} (отрицательная обратная связь).

Таким образом, сила трения и, соответственно, окружная сила на червяке в начале периода плавно нарастают вместе с нарастанием упругой деформации, провоцируемой трением, однако во второй половине периода, когда происходит срыв и быстрое проскальзывание, сила трения и окружная сила падают, что и замыкает один период. Данный механизм естественным образом объясняет строгую периодичность возникающих колебаний и пропорциональный рост $T_{\Sigma 0}$ с ростом $T_{\text{тор}}$.

Фазовый портрет такой колебательной системы будет иметь вид, показанный на рис. 2 в левом нижнем квадранте. Изображающая точка в координатах $(\omega - d\varphi/dt)$ и φ проходит через позиции 0, 1, 2, 3, 4, описывая замкнутую фазовую траекторию, что указывает на периодичность движения. Источниками информации о траектории являются: 1) зависимость силы трения от скорости проскальзывания (строится в левом верхнем квадранте на основе диаграммы Герси-Штрибека); 2) зависимость силы упругой

деформации от угла поворота (строится в правом нижнем квадранте; наклон линий определяется жесткостью контакта, то есть силой трения, обратно пропорциональной скорости проскальзывания).

Рис. 3. Фазовый портрет системы, разбит на 4 этапа: 0 – 1 – минимальное проскальзывание, максимальная сила трения; 1 – 2 – превышение силой упругости силы трения, реверс – обратное относительное движение – рост скорости проскальзывания, падение силы трения; 2 – 3 – дальнейший рост скорости проскальзывания под действием упругой силы и инерции; 3 – 4 – начало торможения проскальзывания; 4 – 0 – дальнейшее торможение с падением скорости проскальзывания до минимума, нарастание упругого сопротивления силе трения до реверса.

Для оценки достоверности выдвинутых предположений проводилась обработка экспериментальных данных – крутильных колебаний червячного вала и вала червячного колеса. Однако представленная выше модель (2) рассматривает изгибные колебания вала червячного колеса. Поэтому для анализа предлагается модель колебаний быстроходного вала, в которой функция кинематических погрешностей заменена рядом Фурье, описывающим импульсы, испытываемые в крутильном направлении червячным валом при взаимодействии погрешностей изготовления по модели, предложенной в [6]

$$J_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + C_f \varphi_1 = \left[F \left(\omega_0 - \frac{d\varphi_2}{dt} \right) \right] d_1 + \left(F_0 \Sigma F_k \left[\Phi(\delta \varphi_k) \cos \left(\frac{\pi}{T_u} \right) t \right] \cos \omega_k t \right) d_1 \quad (4)$$

где φ_2 – угол поворота зуба червячного колеса в направлении приложения окружной силы на червяке (в плоскости, перпендикулярной оси червяка); J_1 – приведенный момент инерции быстроходного вала; T – период взаимодействия погрешностей червяка и колеса ($T = L_{\varphi}/V$, где V – скорость проскальзывания, L_{φ} – размер погрешности в направлении проскальзывания); ω_k – зубцовая частота; ω – частота вращения вала электродвигателя; C_f – жесткость зуба червячного колеса в направлении приложения окружной силы на червяке.

Отметим, что в модели (4) содержится три вида частот. Первая частота – это собственная частота рассматриваемой системы, то есть частота автоколебаний, которая определяется временем торможения или накопления упругой деформации до момента начала интенсивного проскальзывания (половина периода колебаний) и оценить которую возможно с помощью гипотезы, предложенной в [4]. Она состоит в том, что половина периода собственных колебаний тратится на торможение – это участок 3–4–0 на фазовом портрете системы. В процессе торможения на погашение скорости расходуется мощность трения. Она определяется максимальной силой трения $0,2 F_{ok2}$ и

максимальной скоростью проскальзывания, оцениваемой ориентировочно как (1-3)м/с. Численно данная мощность оценивается как площадь фигуры в верхнем левом квадранте фазового портрета системы (рис.3), ограниченной осями и кривой $F(\omega_0 - d\varphi_2/dt)$. Эта мощность должна сопоставляться с жесткостью системы, которая в данной ситуации соответствует тангенциальной жесткости контакта, то есть пропорциональна силе трения. Результат вычислений по формулам, приведенным в [4], дают порядок цифр для периода прохождения участка 3-4-0 от 0,2 до 1 секунды, то есть частот автоколебаний от 1 до 5 герц. $1/T$ – частота импульсов от взаимодействия погрешностей в диапазоне от 10 000 до 100 герц, ω_k – зубцовая частота, которая для червяка находится в диапазоне 15-25 герц, а для колеса – 0,5-0,6 герц.

Для оценки вкладов каждой из частот рассмотрим анализ экспериментальных данных. Отметим, что члены в правой части в сумме составляют окружной момент на валу, определяемый силой трения, которая будет зависеть от скорости проскальзывания и нагрузки $T_{тор}$ (первый член) и от погрешностей контактирующих поверхностей в той степени в какой влияет отклонения формы трущихся поверхностей на силу трения.

Если приравнять последний член в правой части уравнения нулю, то есть пренебречь возмущающим воздействием погрешностей изготовления, то решение этого уравнения имеет вид [4].

$$T(\varphi_1(t)) = A \cos \omega t + z_1(A, t) d_1, \quad (5)$$

где A – амплитуда колебаний вращающего момента, а функция z отражает отклонения получаемого решения от идеального косинуса в связи с возможными ускорениями в местах излома фазовой траектории на фазовом портрете системы – см. рис. 3.

Однако если учесть - какой вклад будет вносить крайний правый член уравнения (4), решение можно представить в виде (5*), предположительно полагая, что последний член является составляющей, слабо зависящей от скорости проскальзывания

$$T(\varphi_1(t)) = A \cos \omega t + z_1(A, t) d_1 + \left(F_0 \Sigma F_k \left[\Phi(\delta \varphi_k) \cos\left(\frac{\pi}{T_u}\right) t \right] \cos \omega_k t \right) d_1 \quad (5^*)$$

Анализ экспериментальных данных и получение амплитудно-частотных характеристик осуществлялся с помощью применения быстрого преобразования Фурье, описанный в [7].

$$\left. \begin{aligned} F(k) &= F_0(k) + W_N^k \cdot F_1(k), k = 0..N/2-1 \\ F(k + N/2) &= F_0(k) + W_N^k \cdot F_1(k), k = 0..N/2-1 \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

где N – число дискретных значений сигнала; $W_N^k = \exp(-i2\pi/N \cdot n \cdot k)$ – поворачивающий множитель.

Поскольку аналоговый сигнал математически состоит из бесконечного непрерывного во времени множества точек-значений амплитуды, в процессе измерения мы можем выделить из него лишь конечный ряд значений в дискретные моменты времени. Мы выделяем короткий интервал сигнала, состоящий из дискретных отсчетов, который условно считаем периодическим и применяем к нему преобразование Фурье. В результате преобразования получаем массив комплексных чисел, содержащий информацию об амплитудном и фазовом спектрах анализируемого кадра. Причём спектры являются дискретными с шагом равным (частота дискретизации)/(количество отсчетов). То есть чем больше мы берём отсчетов, тем более точное разрешение

получаем по частоте. В своё время был разработан алгоритм быстрого преобразования Фурье, который минимизирует число математических операций, необходимых для его вычисления. Единственное требование алгоритма состоит в том, чтобы число отсчётов было кратно степени двойки (256, 512, 1024 и так далее).

В результате была выявлена доминирующая мода колебаний, соответствующая автоколебаниям, частота которой соответствует 1.6 герца, что невозможно объяснить дефектами (погрешностями изготовления), поскольку зубцовая частота при числе оборотов вала свыше 1000 мин^{-1} должна быть не менее 15 герц. Кроме того, выявлен ряд составляющих от взаимодействия погрешностей.

Вид распределения частот колебаний показан на рис. 4а и 4б, а детализированный вид самой колебательной кривой на рис. 5.

Рис.4 а) Распределение частот колебаний вращающего момента быстроходного вала по доле в общем спектре колебаний; б). Распределение частот колебаний вращающего момента быстроходного вала по доле в общем спектре колебаний после увеличения $T_{\text{тор}}$ в два раза.

Отличие между вариантами а и б состоит в размере тормозного момента, что влияет на характер распределения – с ростом нагрузки возникают новые частоты, которым соответствуют амплитуды случайных размеров. Тем не менее, ряд частот воспроизводится. Это в первую очередь, относится к тем частотам, которые обусловлены конструкцией и частотой вращения деталей редуктора. Так в диапазоне низких частот воспроизводится пик с частотой порядка 0,6-0,7 герц, что примерно соответствует частоте работы червячного колеса. Отметим, что пик в районе 1,2 герц, наблюдаемый в варианте а, практически отсутствует в варианте б, тогда как пик в районе 2,4 герца, имеющийся в варианте б отсутствует в а. Неизменным остается лишь абсолютный пик частоты 1,6 герц, доминирующей во всех вариантах и соответствующий нашей предварительной оценке для автоколебаний.

Кроме того, следует отметить, что высокие частоты, соответствующие зубцовой частоте червяка, ни в одном из вариантов не оказывают существенного влияния на формирование доминирующей частоты, у которой колебания приобретают максимальную амплитуду. Более того, по мере роста нагрузки ($T_{\text{тор}}$) силовое замыкание передачи усиливается, что приводит к вырождению высокочастотных импульсов и усилению доминирующей роли основной моды.

Рис.5 Детализированный вид доминирующей моды колебаний вращающего момента быстроходного вала.

На рис. 6 дана зависимость амплитуды колебаний на доминирующей частоте от тормозного момента

Рис.6 Зависимость амплитуды колебаний на доминирующей частоте от тормозного момента

Рассматривая приведенные оценки и графики, проведем анализ адекватности модели (5*) тем экспериментальным фактам, которые она призвана описывать. В качестве критериев адекватности предлагаются следующие показатели:

- 1 – форма колебаний;
- 2 – характер роста амплитуды колебаний;
- 3 – значения частот колебаний;
- 4 – значения амплитуд колебаний.

Форма колебаний. Выше отмечалось, что уравнение (5*) без последнего члена в правой части теоретически дает решения, близкие к синусоидальным [4]. В то же время, как показано в ГОСТ 3675-81, колебания, источником которых являются погрешности, суммируясь, дают стохастическую форму. Однако, как показывает анализ, синусоидальная форма колебаний принадлежит доминирующей моде (1,6 герц), которая и порождается фрикционным механизмом автоколебаний, то есть уравнением (5*) без последнего члена, что происходит в результате доминирования основной моды. Таким образом, форма колебаний подтверждает адекватность модели.

Характер роста амплитуды колебаний. Как уже отмечалось, рост амплитуды колебаний доминирующей моды происходит экспоненциально, что соответствует росту коэффициента трения в левой ветви диаграммы Герси-Штрибека и объясняется, таким образом, закономерностями процесса трения при несовершенной смазке, что

подтверждает гипотезу фрикционных автоколебаний и модель (5*).

Что касается изменений амплитуды колебаний, вызванных возбуждающим действием погрешностей изготовления, то, как видно из рис. 4а и 4б, амплитуды всех колебаний, за исключением доминирующей моды, падают, что соответствует предположению о том, что с ростом нагрузки в червячной передаче усиливается силовое замыкание зазоров, то есть амплитуды импульсов, возбуждаемых погрешностями, должны уменьшаться.

Значения частот колебаний. Частота доминирующей моды не коррелирует ни с одним из значений, кратных зубцовой частоте, что может объясняться только независимым от зубцовой частоты источником. Таким источником в рассматриваемом случае являются автоколебания. Они находятся в предсказанном выше диапазоне частот. Важно отметить, что замена синтетического масла ТМ-18, использованного в данном эксперименте, на минеральное с добавкой «Стрибойл» привела не только к повышению КПД передачи, но и к снижению частоты доминирующей моды (автоколебаний), что подтверждает предложенную модель.

В то же время, в области низкочастотных колебаний (0,6 герца и ниже) существует ряд пиков, которые могут быть связаны с погрешностью шага червячного колеса, поскольку данная погрешность может быть распределена вдоль всей окружности колеса, то есть имеет период, равный времени одного оборота колеса. Эти низкочастотные колебания проявляются в колебаниях оси доминирующих колебаний, как это показано на рис. 5, и, как это отмечалось выше, приводят к усилению колебаний силы трения, но на своей частоте, как и все погрешности.

Значения амплитуд колебаний. Амплитуды колебаний вращающего момента на быстроходном валу показаны в виде размаха колебаний на рис. 2, где они составляют до 2,5 Нм. Очевидно, что погрешность $\delta\varphi$, составляющая величину порядка нескольких минут при крутильной жесткости порядка $1 \cdot 10^4$ Нм/рад, дает вращающий момент значительно меньше (порядка 0,1 Нм). Это объясняет причину доминирования автоколебаний над вынужденными колебаниями, поскольку фрикционное усилие, формирующее автоколебания, при коэффициенте трения порядка 0,1-0,2 должно составлять не менее (10 – 20)% от нормальной силы, формирующей эту силу трения, то есть $(0,1 - 0,2)F_{ок2tg(\gamma)}$.

Это соизмеримо с окружной силой на червяке и, соответственно, при умножении ее на половину диаметра червяка – с вращающим моментом на червяке [5]. Это также подтверждает версию фрикционных автоколебаний и модель (5*).

Таким образом, как показывает проверка адекватности модели (5*), она отвечает предложенным выше критериям.

Литература

1. Андриенко Л.А., Вязников В.А. Влияние изнашивания на динамические нагрузки в червячной передаче. // Известия вузов. Машиностроение. 2011. №9. С.18-22.
2. Теория вероятностей: учебник для втузов / Печинкин А. В., Тескин О. И., Цветкова Г. М. [и др.]; ред. Зарубин В. С., Крищенко А. П. - 4-е изд., стер. - М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. - 455 с.
3. Polyakov S.A., Zakharov M.N., Goncharov S.U. and Lychagin V.V. Loading capacity of the Worm Reduction Gearboxes and possibilities to increase it by selecting and applying different lubricating materials. // Journal of machinery manufacture and reliability. 2014, No 5, p.p. 445-447. Allerton Press, inc., 2014
4. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.1981. - 568 с.
5. Поляков С.А., Гончаров С.Ю., Куксенова Л.И. Разработка метода оценки работоспособности червячных передач на основе анализа их триботехнических показателей//Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016, №5, с. 81-87.
6. Берестнев О.В., Гоман А.М., Ишин Н.Н. Аналитические методы механики в

динамике приводов. Минск, Наука и техника, 1992, 238 с.

7. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. Москва, Изд-во Радио и связь, 1985, 248с.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ МОБИЛЬНОГО РОБОТА С РОЛИКОНЕСУЩИМИ КОЛЕСАМИ

Груничев А.В.¹, Лабахуа Л.Р.¹, Меркурьев И.В.¹

¹ФГОУ ВО «НИУ «МЭИ», Москва, РФ, e-mail nir4s@ya.ru

Аннотация. С использованием методов неголономной механики получены нелинейные дифференциальные уравнения движения мобильного робота по горизонтальной шероховатой поверхности. Решена задача автономной навигации робота по измерениям лазерного дальномера с круговым полем обзора. В целях оценки реализуемости неголономных связей при движении робота с роликонесущими колесами проведено экспериментальное исследование движения робота по заданным траекториям. Построено оптимальное по быстродействию управление движением мобильного робота в виде обратной связи по оценке вектора состояния робота.

Ключевые слова. Мобильный робот, неголономные связи, нелинейная динамика, навигация, управление.

Объектом исследований является мобильный робот–манипулятор с роликонесущими колесами, предназначенный для автоматизации сложных технологических процессов и операций (рис. 1). Наличие роликонесущих колес позволяет перемещаться в стесненных условиях в любом направлении на плоскости.

Рассматриваемый в докладе автономный колёсный робот является сложной нелинейной электромеханической системой, состоящей из ходовой части и многоуровневой системы управления движением, включающей в себя комплекс измерительных датчиков, силовых электроприводов ведущих колес. В состав измерительной подсистемы входят датчики углов поворота четырех ведущих колес, оптико-электронная аппаратура наблюдения за полосой движения и лазерный дальномер для определения координат неподвижных ориентиров.

Разработка автоматических транспортных средств с роликонесущими колёсами является актуальной проблемой современного машиностроения. Основы теории неголономных систем, методы исследования динамики колесных роботов с различными типами колес изучены в [1-4]. С использованием векторно-матричного формализма неголономной механики, систем компьютерной алгебры в [1,4-6] построены новые математические модели колёсных роботов, разработаны алгоритмы ориентации, навигации и управления траекторным движением мобильных роботов в условиях изменяющейся внешней обстановки [7,8].

Анализ существующих программных решений управления мобильным роботом показывает, что для управления движением робота используется каскадный подход, основанный на кинематической модели манипулятора и мобильной платформы. Управление приводом робота реализует программное кинематическое движение подвижных элементов робота с использованием пропорционально интегро-дифференциального регулятора в канале обратной связи. Недостатками указанного подхода является пренебрежение динамическими эффектами при движении робота. Кинематический способ организации движения не позволяет решать задачи оптимального по быстродействию и по энергозатратам управления движением, что приводит к уменьшению срока автономного функционирования робота, к увеличению времени переходных процессов и погрешностей при выполнении целевых задач.

В целях повышения точности робота – манипулятора поставлена задача оценки реализуемости неголономных связей мобильного робота по измерениям дальномерной и одометрической информации на борту движущегося робота. При решении задачи

предполагается заданными координаты ориентиров на тестовом полигоне мобильного робота. При выполнении движения по заданной траектории оцениваются невязки в уравнениях неголономных связей. Для компенсации погрешностей траекторного движения построено оптимальное по быстродействию управление движением мобильной платформы при учете ограничений на силовые характеристики привода.

Рис. 1. Мобильный робот – манипулятор KUKA

1. Уравнения движения

Предполагается, что робот движется по горизонтальной плоскости. Корпус робота представляет собой платформу с характерным размером l и массой m . Расположение роликов, касающихся в данный момент поверхности качения, указано на рис.2. Будем считать, что центр масс платформы совпадает с ее геометрическим центром C , радиус инерции платформы $\rho_{cx} = \rho$, радиус колес равен r . Массой колес по сравнению с массой платформы пренебрегаем. На каждое колесо от электродвигателя передается момент M_i (индекс i соответствует номеру колеса). Для моментов, развиваемых электродвигателями, используем следующую линейную аппроксимацию

$$M_i = c_1 U_i - c_2 \omega_i, \quad (17)$$

где U_i – управляющее напряжение, подаваемое на двигатель, $c_2 \omega_i$ – момент противоэлектродвижущей силы, $\omega_i = \dot{\varphi}_i$ – угловая скорость i -го колеса, φ_i – угол поворота колеса. Здесь и далее точкой обозначено дифференцирование по времени t .

Постоянные положительные коэффициенты c_1 и c_2 определяются величинами пускового M_p и номинального M_n моментов, номинальной угловой скорости ω_n и номинального напряжения U_n :

$$c_1 = \frac{M_p}{U_n}, \quad c_2 = \frac{M_p - M_n}{\omega_n}$$

Будем считать, что колеса робота не проскальзывают, т.е. скорость точки колеса, касающегося поверхности равна нулю. В этом случае положение робота определяется

пятимерным вектором обобщенных координат $\mathbf{q} = (x, y, \psi, \varphi_1, \varphi_2)^T$, где x, y координаты центра платформы. Углы φ_3 и φ_4 связаны с углами φ_1, φ_2 и углом поворота платформы ψ интегрируемыми соотношениями

$$\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_1 - \dot{\psi} 2l / r, \quad \dot{\varphi}_4 = \dot{\varphi}_2 + \dot{\psi} 2l / r. \quad (18)$$

Рис. 2. Расчетная схема мобильного робота

Уравнения неголономных стационарных связей получаем из условий не проскальзывания первого и второго колес робота, т.е. из условий $V_{K_1 X_2} = V_{K_2 Y_2} = 0$. Из условия $V_{K_1 X_2} = 0$ имеем первое уравнение неголономных стационарных связей

$$\dot{x} \cos \tilde{\psi} + \dot{y} \sin \tilde{\psi} + \dot{\psi} a - \dot{\varphi}_1 r \sin \gamma = 0, \quad (19)$$

где $\tilde{\psi} = \gamma + \psi$.

Проведя аналогичные выкладки для условия $V_{K_2 Y_2} = 0$ получим и второе уравнение неголономных стационарных связей

$$-\dot{x} \sin \tilde{\psi} + \dot{y} \cos \tilde{\psi} + \dot{\psi} a + \dot{\varphi}_2 r \cos \gamma = 0 \quad (20)$$

Кинетическая энергия платформы

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \rho^2 \dot{\psi}^2). \quad (21)$$

Для определения вектора обобщенных сил вычислим мощность всех моментов на возможных угловых скоростях

$$\begin{aligned} N &= M_1 \dot{\varphi}_1^e + M_2 \dot{\varphi}_2^e + M_3 (\dot{\varphi}_1^e - \dot{\psi}^e 2l / r) + M_4 (\dot{\varphi}_2^e + \dot{\psi}^e 2l / r) = \\ &= \dot{\varphi}_1^e (M_1 + M_3) + \dot{\varphi}_2^e (M_2 + M_4) + \dot{\psi}^e (M_4 - M_3) 2l / r. \end{aligned}$$

Отсюда вектор обобщенных сил

$$\mathbf{Q} = (0, 0, (M_4 - M_3) 2l / r, (M_1 + M_3), (M_2 + M_4))^T \quad (22)$$

Дифференциальные неинтегрируемые (неголономные) стационарные связи представим в векторно-матричном виде

$$\mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} = 0. \quad (23)$$

Здесь $\dot{\mathbf{q}}$ – вектор обобщенных скоростей, $\mathbf{B}$ – прямоугольная матрица, элементы которой являются функциями обобщенных координат

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi} & \sin \tilde{\psi} & a & -r \sin \gamma & 0 \\ -\sin \tilde{\psi} & \cos \tilde{\psi} & a & 0 & r \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Движение мобильного робота описывается уравнениями Лагранжа с неопределенными множителями [1-3]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{Q} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (24)$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)^T$ – вектор неопределенных множителей Лагранжа. Производная от скаляра T по вектору $\mathbf{q}$ определяется в (2.2) как вектор строка

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \left[\frac{\partial T}{\partial q_1} \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} \quad \dots \quad \frac{\partial T}{\partial q_s} \right]$$

Механический смысл неопределенных множителей $\boldsymbol{\lambda}$ состоит в том, что они представляют собой реакции неголономных связей, которые однозначно восстанавливаются из уравнений связи (23).

Учитывая выражения (3), (4), (6) уравнения движения (7) системы будут иметь вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda_1 \cos \tilde{\psi} - \lambda_2 \sin \tilde{\psi} \\ m\ddot{y} &= \lambda_1 \sin \tilde{\psi} + \lambda_2 \cos \tilde{\psi} \\ m\rho^2\ddot{\psi} &= (M_4 - M_3)2l / r + a(\lambda_1 + \lambda_2) \\ 0 &= M_1 + M_3 - \lambda_1 r \sin \gamma \\ 0 &= M_2 + M_4 + \lambda_2 r \cos \gamma \end{aligned} \quad (25)$$

Исключим в (25) неопределенные множители $\lambda_1 = (M_1 + M_3) / (r \sin \gamma)$, $\lambda_2 = -(M_2 + M_4) / (r \cos \gamma)$, $\sin \gamma = \cos \gamma$, получим

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= ((M_1 + M_3) \cos \tilde{\psi} + (M_2 + M_4) \sin \tilde{\psi}) / (r \sin \gamma) \\ m\ddot{y} &= ((M_1 + M_3) \sin \tilde{\psi} - (M_2 + M_4) \cos \tilde{\psi}) / (r \sin \gamma) \\ m\rho^2\ddot{\psi} &= (M_1 - M_2 + M_4 - M_3)l / r \end{aligned} \quad (26)$$

Подставим $\tilde{\psi} = \gamma + \psi$, выполним очевидные преобразования и дополним (26) уравнениями неголономных связей

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= ((M_1 + M_3)(\cos \psi - \sin \psi) + (M_2 + M_4)(\cos \psi + \sin \psi)) / r \\ m\ddot{y} &= ((M_1 + M_3)(\cos \psi + \sin \psi) - (M_2 + M_4)(\cos \psi - \sin \psi)) / r \\ m\rho^2\ddot{\psi} &= (M_1 - M_2 + M_4 - M_3)l / r \\ \dot{x}(\cos \psi - \sin \psi) + \dot{y}(\cos \psi + \sin \psi) + \dot{\psi}l - \dot{\phi}_1 r &= 0 \\ -\dot{x}(\cos \psi + \sin \psi) + \dot{y}(\cos \psi - \sin \psi) + \dot{\psi}l + \dot{\phi}_2 r &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи движения мобильного робота. Пусть $M_3 = M_1$, $M_4 = M_2$. В этом случае из третьего уравнения (27) получаем $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \text{const}$, $\psi = \psi_0 + \dot{\psi}_0 t$, $\psi_0 = \text{const}$. Таким образом, при поступательном движении платформы ($\dot{\psi}_0 = 0$) система (27) имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2(M_1(\cos \psi_0 - \sin \psi_0) + M_2(\cos \psi_0 + \sin \psi_0)) / (mr) \\ \ddot{y} &= 2(M_1(\cos \psi_0 + \sin \psi_0) - M_2(\cos \psi_0 - \sin \psi_0)) / (mr) \\ \dot{x}(\cos \psi_0 - \sin \psi_0) + \dot{y}(\cos \psi_0 + \sin \psi_0) - \dot{\phi}_1 r &= 0 \\ -\dot{x}(\cos \psi_0 + \sin \psi_0) + \dot{y}(\cos \psi_0 - \sin \psi_0) + \dot{\phi}_2 r &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

При $M_3 = -M_1$, $M_4 = -M_2$ мобильный робот вращается вокруг неподвижной оси Cz , в этом случае

$$\dot{y} = \dot{y}_0 = 0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = 0, \quad \dot{\psi} = 2l(M_1 - M_2) / (mr\rho^2).$$

Далее сформулируем задачу управления движением мобильного робота.

2. Система управления

Обработка первичных измерительных сигналов датчиков мобильного робота ведется в бортовом компьютере робота в целях комплексной обработки разнородной

измерительной информации, оценки вектора состояния робота и управления движением.

Для решения задач управления и навигации движения робота запишем дифференциальные уравнения (27) в форме Коши

$$\begin{aligned}\dot{V}_x &= ((M_1 + M_3)(\cos \psi - \sin \psi) + (M_2 + M_4)(\cos \psi + \sin \psi)) / (mr), \\ \dot{V}_y &= ((M_1 + M_3)(\cos \psi + \sin \psi) - (M_2 + M_4)(\cos \psi - \sin \psi)) / (mr), \\ \dot{\Omega} &= (M_1 - M_2 + M_4 - M_3)l / (m\rho^2 r), \\ \dot{x} &= V_x, \\ \dot{y} &= V_y, \\ \dot{\psi} &= \Omega,\end{aligned}\tag{29}$$

где Ω – угловая скорость платформы робота.

Реализуемость неголономных связей оценим с соотношениями

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= (V_x(\cos \psi - \sin \psi) + V_y(\cos \psi + \sin \psi) + \Omega l) / r, \\ \dot{\varphi}_2 &= -(V_x(\cos \psi + \sin \psi) + V_y(\cos \psi - \sin \psi) + \Omega l) / r, \\ \dot{\varphi}_3 &= (V_x(\cos \psi - \sin \psi) + V_y(\cos \psi + \sin \psi) - \Omega l) / r, \\ \dot{\varphi}_4 &= -(V_x(\cos \psi + \sin \psi) + V_y(\cos \psi - \sin \psi) - \Omega l) / r.\end{aligned}\tag{30}$$

Измеряемыми в системе (29),(30) являются углы поворота колес φ_i , координаты и скорости робота, полученные с использованием дальномерной информации. Учитывая, что при движении робота обновляется первичная измерительная информация датчиков робота, для оценки вектора состояния робота применим фильтр Калмана. Полученную оценку состояния будем использовать для целей оптимального по быстродействию управления роботом.

Управление движением робота осуществляется подачей управляющих напряжений $|U_i| \leq U_n$ на электродвигатели (17), источник питания которых достаточно ёмкий и рассчитан на номинальное напряжение U_n . Для учета ограничений на управление роботом введем безразмерные управляющие воздействия u_i соотношениями $U_i = U_n u_i$. Введем вектор управления

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4), \quad \mathbf{u} \in U,$$

компоненты которого по модулю не превосходят единицы и принадлежат заданной области U .

Для решения задачи оптимального управления применим метод динамического программирования Беллмана [9], который позволяет определять оптимальное управление в форме обратной связи по вектору состояния.

Динамическое программирование достаточно хорошо обосновано для дискретных процессов. Дискретность обусловлена квантованием по уровню и времени всех вычислительных процессов, а, следовательно, и дискретным характером сигналов на входе и выходе ЭВМ мобильного робота.

Введем вектор состояния $\mathbf{p} = (V_x, V_y, \Omega, x, y, \psi)^T$ системы (29), обозначим $\mathbf{p}^{(0)}$ начальное состояние системы, $\mathbf{p}^{(1)}$ – состояние системы на единицу времени позже и т.д. Запишем разностный аналог уравнений (29)

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = F(\mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, N\tag{31}$$

задающий изменение состояния системы в дискретные моменты времени под действием управления $\mathbf{u}^{(k)}$ и свойств системы.

На изменения состояния системы можно влиять, выбирая на каждом шаге вектор $\mathbf{u}$ из заданного множества U . Последовательность

$$\mathbf{p}^{(0)}, \mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(N)}, \quad \mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(N)}\tag{32}$$

для системы (31) называют многошаговым процессом принятия решений [5-6]. Далее будем рассматривать конечношаговый процесс для заданного числа шагов N .

Будем качество многошагового процесса оценивать функционалом

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} h(\mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}) + S_N(\mathbf{p}^{(N)}), \quad (33)$$

где h – скалярная функция векторного аргумента, например, для задачи оптимального быстродействия $h=1$; для задачи оптимального по энергозатратам управления $h = \|\mathbf{u}^{(k)}\|^2$; $S_N(\mathbf{p}^{(N)})$ – скалярная функция, характеризующая стоимость конечного состояния. При оптимальном процессе управления функционал (33) принимает минимальное значение.

В соответствии с принципом оптимальности Беллмана движение оптимальной системы не зависит от предыстории, а определяется текущим состоянием системы и целью управления. На предпоследнем шаге $N-1$ оптимальное управление $\mathbf{u}_*^{(N-1)}$ зависит от текущего состояния системы $\mathbf{p}^{(N-1)}$ и определяется из условия минимума частичной суммы $h(\mathbf{p}^{(N-1)}, \mathbf{u}^{(N-1)}) + S_N(\mathbf{p}^{(N)})$ в функционале (33):

$$S_{N-1}(\mathbf{p}^{(N-1)}) = \min_{\mathbf{u} \in U} [h(\mathbf{p}^{(N-1)}, \mathbf{u}^{(N-1)}) + S_N(\mathbf{p}^{(N)})]. \quad (34)$$

Таким образом, определяется и запоминается оптимальное управление $\mathbf{u}_*^{(N-1)}(\mathbf{p}^{(N-1)})$ в виде обратной связи от вектора состояния $\mathbf{p}^{(N-1)}$. Наименьшее значение частичной суммы $S_{N-1}(\mathbf{p}^{(N-1)})$, которое было определено на шаге $N-1$, используется для расчета оптимального управления на шаге $N-2$. В этом случае в рекуррентном уравнении Беллмана (34) вместо N записывается $N-1$.

Вычисленное в обратном времени оптимальное управление $\mathbf{u}_*^{(k)}(\mathbf{p}^{(k)})$ используется в контуре управления роботом.

В качестве тестового примера рассмотрим оптимальное по быстродействию движение мобильного робота по прямой, без ограничения общности, совпадающую с осью x . В случае малого отклонения от заданной траектории оптимальное по быстродействию управление имеет вид релейной функции. Управляющий угловым движением робота сигнал $v = u_1 - u_2 + u_4 - u_3$ задается в виде $v = -\varepsilon \operatorname{sign} \psi$, обеспечивающий выполнение цели управления при малом положительном ε . Для оптимального по быстродействию движения робота сигналы u_1, u_2, u_3, u_4 принимают значения максимально близкие к единице.

3. Экспериментальная часть

Телеметрия мобильного робота представляет собой массив дальностей и направлений на маяки с известными координатами, углы поворота четырех ведущих колес платформы, токи во внешних цепях питания и моменты электродвигателей. При построении математической модели колесного робота предполагается, что движение мобильного робота происходит по абсолютно шероховатой поверхности и проскальзывание колес робота отсутствует. Однако, из-за высокой маневренности робота предположение об отсутствии проскальзывания колес не всегда выполняется, что наряду с погрешностями в измерениях первичной измерительной информации приводит к накоплению ошибок при автономном определении координат мобильного робота.

Исследована точность определения координат мобильного робота при различных уровнях погрешностей датчиков первичной измерительной информации. Решение задачи навигации робота сводится к интегрированию нелинейных уравнений движения мобильного робота с учетом первичных измерительных данных датчиков.

В докладе обсуждаются математические модели погрешностей измерений датчиков внешней информации, методика предстартовой калибровки датчиков и

результаты математического моделирования тестовых движений мобильного робота по заданным траекториям, первичных измерительных сигналов и полученного навигационного решения. Также обсуждаются этапы проектирования, создания и стендовых испытаний автономного мобильного робота для выполнения регламента робототехнических соревнований.

На основании проведенных исследований, анализа существующего аппаратного и программного обеспечения элементов силового и измерительного контура, предложены новые программные решения для электронного блока обработки сигналов и управления движением мобильного робота.

4. Заключение

Полученные уравнения движения мобильного робота – манипулятора описывают управляемое движение платформы робота в горизонтальной плоскости. Проведен анализ частных случаев уравнений движений робота. Предложена информационно-вычислительная схема для обработки первичных измерительных сигналов датчиков робота в целях определения координат робота и построения оптимального по быстродействию управления. Проведенные тестовые испытания мобильного робота КУКА на полигоне на заданных программных траекториях показывают высокую точность выполнения программных движений.

Литература

1. Охоцимский Д.Е., Мартыненко Ю.Г. Новые задачи динамики и управления движением мобильных колёсных роботов // Успехи механики. 2003. Т. 2, №1 – С. 3-47.
2. Буданов В. М., Девянин Е. А. О движении колёсных роботов // ПММ. – 2003. – Т. 67. вып. 2. – С. 244-255.
3. Кобрин А.И., Мартыненко Ю.Г., Письменная Е.В. Всероссийский научно-технический фестиваль молодежи «Мобильные роботы» имени проф. Е.А.Девянина // Мехатроника, автоматизация, управление № 5, 2009. стр. 76-78.
4. Мартыненко Ю. Г., Орлов И. В. Влияние переходных процессов в электроприводе на устойчивость движения мобильного колёсного робота // Мобильные роботы и мехатронные системы. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. – С. 135-149.
5. Мартыненко Ю.Г. Аналитическая динамика электромеханических систем. – М.: Изд-во МЭИ, 1985.–62 с.
6. Мартыненко Ю.Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // Прикладная математика и механика, Т. 74. Вып.4, 2010, стр. 610-619
7. Интеллектуальные роботы: Учебное пособие для вузов / И.А.Каляев, В.М.Лохин, И.М. Макаров и др.; под общей ред. Е.И. Юревича. – М.: Машиностроение, 2007.–360 с.
8. Юревич Е.И. Основы робототехники. 3-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2010. –368 с Zimmermann K., Zeidis I., Behn C. Mechanics of Terrestrial Locomotion. With a Focus on Non-pedal Motion Systems. – London: Springer, 2010 – 292 с.
9. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. М.: Наука, 1969. 118 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ МАНИПУЛЯТОРА ПАРАЛЛЕЛЬНО-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С ТРЕХ СТЕПЕННЫМ ЗАХВАТНЫМ УСТРОЙСТВОМ

Дяшкин-Титов В.В.¹, Воробьева Н.С.¹, Иванов А.Г.¹, Николаев М.Е.¹
¹ФГБОУ ВО Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград,
Россия, c_43.52.00@mail.ru

Аннотация. Проведен структурный анализ механизма манипулятора параллельно-последовательной структуры. Разработана математическая модель динамики пространственного управляемого движения манипулятора с трех степенным захватным устройством, как многозвенной механической системы с геометрическими связями и контурами управления.

Ключевые слова. Манипулятор, динамика, захватное устройство.

В современных технологических машинах получили распространение механизмы в виде параллельной структуры, обладающие широким набором функциональных возможностей [1]. Новейшие механизмы параллельной структуры представлены широким разнообразием их исполнения. Их функциональные возможности обуславливают применение во многих отраслях промышленности [2]. Одним из трудоемких технологических процессов является сортировка и упаковка разнообразных изделий в пищевой и химической промышленности, машиностроении и т.д. Очень часто в процессе производства требуется быстро упаковывать разнородные предметы в коробки, лотки или блистеры. Такого рода работа утомительна и, как правило, плохо оплачивается, так что нанимать и удерживать работников становится все труднее. Кроме того, предъявляемые требования к безопасности пищевых продуктов побуждают искать такие способы упаковки, при которых человек как можно меньше контактирует с продуктами. По этой причине существенно увеличился интерес к автоматизации данного процесса.

Для решения таких задач создан целый ряд роботов-манипуляторов [3]. Самые популярные из зарубежных производителей по производству механизмов параллельной структуры являются фирмы: Fanuc, Yaskawa Motoman, Kawasaki, Omron из Японии; Hiwin (Тайвань), ABB (Швеция), Adept (США), Codian (Нидерланды), Festo (Германия).

Рис. 2. Применение робота Fanuc (Япония) в пищевой и химической промышленности

Важными преимуществами таких механизмов по сравнению с традиционными, которые представляют собой совокупность последовательных незамкнутых кинематических цепей, являются: повышенная жесткость системы, более высокие скорости и ускорения исполнительного органа, равномерное распределение нагрузки, сравнительно небольшая металлоемкость [4].

К недостаткам манипуляторов параллельной структуры относятся: ограниченность зоны обслуживания, относительно небольшая манипулятивность, сложность системы управления перемещением исполнительного оборудования. В связи с этим возникает необходимость разработки манипуляторов параллельно – последовательной структуры, которые объединяли бы преимущества обоих структурных схем манипуляционных систем.

На рисунке 2 представлена структурная схема манипулятора параллельно-последовательной структуры, в котором оси исполнительных звеньев (актуаторов) линейного перемещения геометрически сходятся в одной точке с помощью пятиподвижного сферического шарнирного узла [5-7].

Рис. 2. Кинематическая схема манипулятора параллельно – последовательной структуры

Степень подвижности манипулятора определяется зависимостью [8]

$$W = \mu \cdot n - \sum_{i=1}^{\mu-1} (\mu - i) \cdot p_i, \quad (1)$$

где μ – количество степеней свободы пространства, в пределах которого работает механизм ($\mu = 6$ – для пространственного движения); n – число подвижных звеньев механизма; p_i – число кинематических пар механизма i класса.

Исполнительные звенья (актуаторы) имеют одну подвижность – поступательное движение штока относительно корпуса актуатора, поэтому кинематические пары 2-3, 5-6 и 8-9 являются парами V класса. Звенья управляемого трех степенного устройства также имеют одну подвижность – вращательное движение вокруг осей пятиподвижного сферического шарнирного узла, поэтому кинематические пары 12-13-14 также являются

парам V класса, тогда при $n = 14$, $p_5 = 15$, $p_4 = 0$ и $p_3 = 1$, число степеней подвижности манипулятора равно:

$$W = 6 \cdot n - 5 \cdot p_5 - 4 \cdot p_4 - 3 \cdot p_3 = 6 \cdot 14 - 5 \cdot 15 - 3 \cdot 1 = 6, \quad (2)$$

что указывает на нормальность механизма, состоящего из шести приводов.

Механическая система манипулятора рассматривается как совокупность жестких звеньев, связанных между собой кинематическими парами пятого класса. Разработанная модель позволяет решать две задачи. При решении первой задачи предполагается, что программные законы движения всех звеньев манипулятора известны. Эти движения определяются из необходимости выполнения заданного технологического процесса. В результате решения этой задачи определяются силы и моменты, необходимые для выполнения программных движений и определения динамических нагрузок в кинематических парах. Определив движущие силы и моменты выбираются двигатели, способные обеспечить осуществление заданного процесса.

При решении второй задачи определяются динамические ошибки, вызываемые механизмами передачи движения на работу двигателей.

Для решения сформулированных задач составляются дифференциальные уравнения движения с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода [9, 10]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1 \div 6} \quad (3)$$

Рассматриваемая механическая система манипулятора (рисунок 2) имеет 6 степеней свободы.

Полная абсолютная кинематическая энергия T манипулятора равна

$$T = T_e + T_r + \vec{V}_M \cdot \vec{Q} + \vec{\omega} \cdot \vec{K}_r^M \quad (4)$$

где T - полная кинетическая энергия относительно неподвижной системы координат; T_e - кинетическая энергия в переносном движении; T_r - кинетическая энергия в относительном движении; $\vec{V}_M \cdot \vec{Q} + \vec{\omega} \cdot \vec{K}_r^M$ - кинетическая энергия, зависящая от обобщенных координат в первой степени; $\vec{V}_M$ - скорость начала подвижной системы координат; $\vec{\omega}$ - вектор угловой скорости подвижной системы координат; $\vec{Q}$ - главный вектор относительных количеств движения; $\vec{K}_r^M$ - главный момент относительных количеств движения относительно центра начала подвижной системы координат.

Кинетическая энергия переносного движения

$$T_e = \frac{1}{2} \left[M V_M^2 + 2M (V_M \times \omega) \cdot r_c + \omega \cdot \Theta^M \cdot \omega \right] \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
T_e = & \frac{1}{2}(\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 + \dot{z}_M^2)(M + m_{cp}) + \frac{1}{2}I_\gamma(\alpha, \psi, \beta) \cdot \dot{\gamma}^2 + \\
& + \sin \psi (\dot{x}_m \sin \gamma - \dot{y}_m \cos \gamma) \left[m_3 l_{c3} + m_4 l_{c4} + m_{cp} l_{csp} \right] \dot{\gamma} - \\
& - \cos \alpha (\dot{x}_m \cos \gamma + \dot{y}_m \sin \gamma) \left[m_2 l_{c2} + m_3 (a + l_{c3} \cos \psi) + \right. \\
& \left. m_4 (a + l_{c4} \cos \psi) + m_{cp} (a + l_{csp} \cos \psi) \right] \dot{\gamma}, \\
\gamma = & \arctg \frac{-x_M}{y_M}.
\end{aligned} \tag{6}$$

За обобщенные координаты манипулятора принимались x_M, y_M, z_M - абсолютные координаты точки крепления трехстепенного захватного устройства; α, ψ, β - углы поворота звеньев захватного устройства (рисунок 2).

Полная кинетическая энергия (сумма)

$$\begin{aligned}
I_\gamma = & (m_3 l_{c3}^2 + m_4 l_{c4}^2 + m_{cp} l_{csp}^2) \sin^2 \psi + I_{1z} + (I_{2x} + I_{3x} \sin^2 \psi + I_{3y} \cos^2 \psi + I_{4z} + I_{cpz}) \sin^2 \alpha + \\
& \left[I_{2y} + I_{3z} + m_2 l_{c2}^2 + m_3 (a + l_{c3} \cos \psi)^2 + m_4 (a + l_{c4} \cos \psi)^2 + m_{cp} (a + l_{csp} \cos \psi)^2 + \right. \\
& \left. (I_{4x} + I_{cpx}) \cos^2 \beta + (I_{4y} + I_{cpy}) \sin^2 \beta \right] \cos^2 \alpha. \\
I_\alpha = & I_{2z} + m_2 l_{c2}^2 + m_3 (a + l_{c3} \cos \psi)^2 + m_4 (a + l_{c4} \cos \psi)^2 + m_{cp} (a + l_{csp} \cos \psi)^2 \\
& + (I_{3y} + I_{4z} + I_{cpz}) \sin^2 \psi + \\
& + \left[I_{3x} + (I_{4x} + I_{cpx}) \sin^2 \beta + (I_{4y} + I_{cpy}) \cos^2 \beta \right] \cos^2 \psi
\end{aligned} \tag{7}$$

Массово-геометрические характеристики имеют вид

$$\begin{aligned}
I_\psi = & I_{3z} + m_3 l_{3c}^2 + m_4 l_{4c}^2 + m_{cp} l_{csp}^2 + (I_{4x} + I_{cpx}) \cos^2 \beta + (I_{4y} + I_{cpy}) \sin^2 \beta \\
I_\beta = & I_{4z} + I_{cpz} = const \\
M = & m_1 + m_2 + m_3 + m_4
\end{aligned} \tag{8}$$

Кинетическая энергия относительного движения

$$(\dot{x}_M = \dot{y}_M = \dot{z}_M = 0, \dot{\gamma} = 0, (\dot{\phi} = 0)) \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
T_r = & \frac{1}{2}I_\alpha(\psi, \beta) \cdot \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}I_\psi(\beta) \cdot \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}I_\beta \dot{\beta}^2 + \\
& (I_{4y} - I_{4x} + I_{cpy} - I_{cpx}) \sin \beta \cos \beta \cos \psi \dot{\alpha} \dot{\psi} - \\
& - (I_{4z} + I_{cpz}) \sin \psi \dot{\alpha} \dot{\beta}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Составляющие кинетической энергии, зависящие от обобщенных скоростей координат захватного устройства в первой степени определяются

$$\begin{aligned} \vec{V}_M \cdot \vec{Q}_r = & \left[m_2 l_{c2} + m_3 (a + l_{c3} \cos \psi) + m_4 (a + l_{c4} \cos \psi) + m_{cp} (a + l_{csp} \cos \psi) \right] \\ & [\cos \alpha \dot{z}_m + \sin \alpha (\dot{x}_m \sin \gamma - \dot{y}_m \cos \gamma)] \dot{\alpha} + \\ & + (m_3 l_{c3} + m_4 l_{c4} + m_{cp} l_{csp}) [\sin \psi \cos \alpha (\dot{x}_m \sin \gamma - \dot{y}_m \cos \gamma) - \\ & - \cos \psi (\dot{x}_m \cos \gamma + \dot{y}_m \sin \gamma) - \sin \psi \sin \alpha \dot{z}_m] \dot{\psi} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \cdot \vec{K}_r = & \left[\begin{aligned} & m_3 l_{c3} (a + l_{c3} \cos \psi) + m_4 l_{c4} (a + l_{c4} \cos \psi) + m_{cp} l_{csp} (a + l_{csp} \cos \psi) + \\ & (I_{3x} I_{3y}) \cos \psi (I_{4z} + I_{zpz}) \end{aligned} \right] \sin \alpha \sin \psi \dot{\gamma} \dot{\alpha} + \\ & + (I_{4y} - I_{4x} + I_{zpy} - I_{zpx}) \sin \beta \cos \psi \cos \beta \cos \alpha \dot{\gamma} \dot{\alpha} + \\ & + \left[I_{3z} + (I_{4x} \cos^2 \beta + I_{4y} \sin^2 \beta) + (I_{zpx} \cos^2 \beta + I_{zpy} \sin^2 \beta) \right] \cos \alpha \dot{\psi} \dot{\gamma} + \\ & + \left\{ \begin{aligned} & m_3 l_{c3} \left[l_{c3} \sin^2 \psi + (a + l_{c3} \cos \psi) \cos \psi \right] + \\ & m_4 l_{c4} \left[l_{c4} \sin^2 \psi + (a + l_{c4} \cos \psi) \cos \psi \right] + \\ & m_{cp} l_{csp} \left[l_{csp} \sin^2 \psi + (a + l_{csp} \cos \psi) \cos \psi \right] \end{aligned} \right\} \cos \alpha \dot{\psi} \dot{\gamma} + (I_{4z} + I_{zpz}) \sin \alpha \dot{\gamma} \dot{\beta} \end{aligned} \quad (14)$$

Получение аналитических уравнений движения манипулятора с помощью формализма Лагранжа (3) для системы с шестью степенями свободы представляет большую сложность. Для исследования сложных манипуляционных систем часто используют парциальные движения-программное движение, при котором изменяется только одна из обобщенных координат. Динамические исследования всей совокупности парциальных движений используются при синтезе соответствующего передаточного механизма. Кроме того, парциальные движения используются для формирования лингвистического аппроксиматора (ЛА), предназначенного для замены заданной траектории движения конечным набором сплайнов [11]. При выборе аппроксимирующих сплайнов ставилась задача минимизации их количества и форм, способных описывать все возможные составляющие выполняемой технологической операции.

Анализ парциальных движений позволил сформировать базу моделей управления (БМУ), набор которых обеспечивает выполнение большинства технологических движений захватного устройства.

На заключительном этапе исследования для согласования работы приводов и уточнения их взаимовлияния на параметры динамической точности, предполагается провести интегрирование уравнений (3) численным методом.

Литература

1. Глазунов В.А., Колискор А.Ш., Крайнев А.Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры. М.: Наука, 1991, 95 с.
2. Бушуев В.В., Хольшев И.Г. Механизмы параллельной структуры в машиностроении // СТН. - 2001. - №1. - с. 3-8.
3. Роботы-упаковщики для щадящей работы с продуктом. - <http://www.bosh.by>, 2008.
4. Корендясев А.И., Саламандра Б.Л., Тывес Л.И. и др. Манипуляционные системы роботов. Под общ. ред. А.И. Корендясева. - М.: Машиностроение, 1989. - 472 с. ил.

5. Дяшкин-Титов В.В., Воробьева Н.С., Терехов С.Е. Алгоритм позиционирования захвата манипулятора-трипода // Современное машиностроение: Наука и образование: Материалы 5-й Междунар. науч.-практ. конференции./ Под ред. А.Н. Евграфова и А.А. Поповича. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – С. 634-644.
6. Воробьева Н.С., Дяшкин-Титов В.В., Дяшкин А.В. Робот-манипулятор параллельной структуры для технологических операций сельскохозяйственного производства // Стратегические ориентиры инновационного развития АПК в современных экономических условиях. Материалы международной научно-практической конференции: в 5 частях. 2016 / Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград. – С. 198-203.
7. Жога В.В., Дяшкин-Титов В.В., Несмиянов И.А., Воробьева Н.С. Задача позиционирования манипулятора параллельно-последовательной структуры с управляемым захватным устройством // Мехатроника, автоматизация, управление, 2016. - № 8. Том 17. - С. 525-530.
8. Семенов Ю.А., Семенова Н.С. Структурный анализ механизмов. // Теория механизмов и машин. 2003. №2. С.3-14.
9. Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику. М.: «Наука». Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971, - 264 с.
10. Лурье А.И. Аналитическая механика. М. : Физматлит, 1961 . – 824 с. : ил.
11. Юревич Е.И. Интеллектуальные роботы. Учебное пособие для вузов / под общей редакцией Е.И. Юревича / И.А. Каляев, В.М. Лохин, И.М. Макаров и др. - М.: Машиностроение, 2007. - 360 с.

СИНТЕЗ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРОПРИВОДОВ БПЛА ТИПА «КОНВЕРТОПЛАН–ТРИКОПТЕР»

Емельянова О.В., Казарян К. Г., Мартинез Леон А.С., Яцун С.Ф.,
Стуканева С.П.

ГОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», Курск, Россия,
e-mail: teormeh@inbox.ru

Аннотация. В статье рассматривается управляемое движение беспилотного летательного аппарата (БПЛА) вертикального взлета и посадки, типа конвертоплан, с тремя управляемыми приводами, причем поворотными являются все винты с двигателями. БПЛА оснащен стреловидным крылом, расчет аэродинамических параметров которого осуществлялся в программном пакете XFLR5 с учетом массогабаритных требований. Определены коэффициенты подъемной силы и сопротивления БПЛА в зависимости от угла атаки на основании вихревого метода, выполнен анализ влияния профиля крыла на расчетные аэродинамические характеристики. Предложена методика синтеза энергоэффективных параметров тяговых усилий винтов электроприводов, обеспечивающих снижение энергопотребление, повышая точность системы автоматического управления.

Ключевые слова. Конвертоплан, летательный аппарат, аэродинамика, сила тяги, центр масс, трикоптер.

Введение. В настоящее время БПЛА вертикального взлета и посадки различных структурных и конструктивных решений активно используются во многих сферах человеческой деятельности. Это связано с быстро растущими технологиями и инженерными решениями, в результате чего такие аппараты стали компактны и маневренны, достаточно простоты в изготовлении и управлении, имеют надежную и легкую конструкцию, благодаря применению современных композитных материалов, и как следствие, малую массу при существенной массе полезной нагрузки [1-4, 5, 11].

Одной из перспективных схем летательных аппаратов можно считать конвертоплан, в котором сочетаются признаки вертолетной схемы – вертикальный взлет (посадка) и самолетной схемы – полёт в горизонтальной плоскости при наличии крыла и за счёт изменения вектора сил тяги винтов [5-8,13,14, 15-20]. Преимуществом такого аппарата является снижение энергопотребления бортовой системы, которое достигается за счёт разворота тяговых сил поворотных винтов в направлении движения и применения летающего крыла, так как именно на нем образуется значительная часть аэродинамической силы. Условно полет конвертоплана можно разделить на этапы: набор высоты и снижение по вертикальной траектории и полет в горизонтальной плоскости. Режимы вертикального взлета или посадки являются более сложными, чем горизонтальный полет, так как существует дополнительное сопротивление фюзеляжа с крылом. К тому же фюзеляж конвертоплана имеет плохую обтекаемость при вертикальном подъёме. Поэтому на данных режимах тяга несущих винтов существенно возрастает [1-4].

При горизонтальном полёте конвертоплана требуется меньшая сила тяги, потому что в этом случае фюзеляж с крыльями обтекаются воздухом и лобовое сопротивление их уменьшается. Сопротивление несущих винтов также уменьшается вследствие перехода их на меньшие углы атаки или развороту по направлению движения. При любой скорости горизонтального движения конвертоплана подъемная сила крыла позволяет минимизировать потерю высоты в момент разворота поворотных винтов, обеспечивая необходимую устойчивость летательного аппарата. При этом важную роль

играет расчет аэродинамических параметров крыла, которые позволяют значительно увеличить несущую способность летательного аппарата при горизонтальном полете.

1 Описание и принцип движения конвертоплана

Рассмотрим движение конвертоплана в неподвижной декартовой системе координат $OXYZ$, тогда $CX_iY_iZ_i$, $A_ix_iy_iz_i$ ($i=1-3$) – подвижные системы координат, проходящие через центр масс корпуса аппарата C и центра масс i -го ротора A_i соответственно (рис. 1). Ориентацию в пространстве задают самолетные углы рысканья ψ , тангажа θ и крена φ [5-7,16-19].

Аппарат состоит из трех пар управляемых винтов 1-3, на основе бесколлекторных электроприводов с изменяемыми векторами тяги и фюзеляжа 4 на котором также закреплены блок питания, плата управления и приёмник сигнала, электрически связанные с приводами вращения винтов. Отклонение векторов тяги поворотных приводов 1, 2 осуществляется в плоскости $A_1X_1'Z_1'$ ($\parallel CX_iZ_i$) на угол β , который может меняться от 0 до 90° , а привода 3 – в плоскости $A_3Y_1''Z_1''$ ($\parallel CY_iZ_i$) на угол $\pm 45^\circ$. Наличие горизонтальной составляющей силы тяги хвостового привода позволит обеспечить поворот конвертоплана вокруг вертикальной оси CZ_i на угол рысканья ψ . Компенсация крутящего момента происходит за счет оппозиционно установленных винтов, вращающихся в противоположные стороны [8,9,16-19].

Рис.1. Общий вид силового каркаса конвертоплана-трикоптера

2. Расчет аэродинамических параметров конвертоплана

При расчете основных летно-технических характеристик конвертоплана, а также его устойчивости и управляемости необходимо знать силы, действующие в полете на аппарат. Условно их можно разделить на силы, действующие (рис.2) [5-7,16-19]:

- 1) в абсолютной (декартовой) системе координат $OXYZ$:
 - сила тяжести $\vec{G}$ конвертоплана, приложенная в центре масс C ;
- 2) в подвижной системе координат $CX_iY_iZ_i$:

- силы, создаваемые винтами $\vec{F}_1 - \vec{F}_3$, приложенные в центре масс роторов $A_1 - A_3$;
- аэродинамические силы, действующие на поверхность крыла, называемые силой лобового сопротивления $\vec{Q}_i$, направленной в сторону противоположную оси CX_i , и подъемной силой – $\vec{P}_i$, направленной вдоль оси CZ_i (рис.2) и, аналогично, аэродинамические силы, действующие на фюзеляж: $\vec{Q}_\phi$ и $\vec{P}_\phi$.

Рис.2. Схема сил, действующих на конвертоплан в полете

Аэродинамические силы, действующие на поверхность крыла могут быть выражены через безразмерные коэффициенты лобового сопротивления C_D и подъемной силы C_L . Из-за малости коэффициента боковой силы C_P аэродинамическую боковую силу $\vec{Q}_P$, при данном моделировании, не учитываем [3].

Тогда:

$$\begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} = q_\infty S \begin{bmatrix} C_D \\ C_L \end{bmatrix} \quad (1)$$

где $q_\infty = \frac{\rho v_\infty^2}{2}$ — скоростной напор; v_∞ — скорость набегающего воздуха; S — площадь крыла.

Аэродинамические характеристики крыла зависят от геометрических параметров профиля крыла, ориентации крыла в потоке воздуха (угла атаки α), параметров подобия и др. Поэтому для их определения воспользуемся результатами аналитических, численных и экспериментальных исследований, заложенных в программный продукт XFLR5 при заданных геометрических и аэродинамических характеристик профиля крыла.

Выбор профиля крыла является одной из главных качественных показателей при изучении аэродинамических характеристик БЛА. Для рассматриваемого летательного аппарата выбор профилей производился из серии стандартных (обычных) профилей классов «FX» и «NACA», которые при необходимости могут быть модифицированы на этапе эскизного проектирования (рис. 3). Данный выбор обусловлен тем, что профили представленных классов имеют незначительный вес и приемлемую толщину,

максимальное время парения в воздухе, обладают наибольшей подъемной силой из всех стандартных серий, устойчивость при работе на низких и высоких значениях числа Re (ламинарный и турбулентный поток) [13]. Профили являются несимметричными, поскольку за счет разности давлений, возникающих на нижней и верхней кромках, обеспечивается большее значение подъемной силы, чем на симметричных.

Рис.4. Исследуемые профили: а - FX 74-130; б - FX74-CL5-140; в - NACA 6409 9%

Затем рассмотрим влияние выбранных профилей крыльев и стреловидной формы крыла на главный вектор аэродинамических сил. Выбор стреловидной формы крыла обусловлен тем, что оно имеет высокий коэффициент подъемной силы при малых углах атаки [1,3]. Это позволяет уменьшить его габариты и массу. Для моделирования формы зададим следующие геометрические параметры (рис. 3): корневую хорду (b_0), среднюю хорду (b_{cp}), концевую хорду (b_k), угол стреловидности (α) и длину крыла ($l_{крыло}$).

Рис.3. Геометрические параметры планируемого крыла

Далее определяем оптимальное соотношение параметров, обеспечивающих максимальное значение коэффициента подъемной силы C_L от угла атаки α для различных видов профилей. Моделирование проводилось при параметрах: плотность воздуха $\rho = 1,225 \text{ кг/м}^3$, скорость встречного воздушного потока $v = 5 \text{ м/с}$. Результаты моделирования приведены на рис.4.

Рис. 4. График зависимости C_L от α при использовании профилей:
 а – FX74-130; б - FX74-CL5-140; с - NACA 6409

Аналогично определяем оптимальное соотношение параметров, обеспечивающих максимальное значение коэффициента сопротивления C_D от угла атаки α для различных видов профилей.

Далее, с учетом (1), рассчитываем аэродинамическую подъемную силу и силу лобового сопротивления для стреловидной формы крыла и различных профилей. Результаты исследований представлены в таблице 1.

Таблица 1

Аэродинамические параметры крыла							
Форма	Профиль	Наилучший угол атаки $\alpha, [^\circ]$	C_l	C_d	$S, [м]$	$\bar{P}, [Н]$	$\bar{Q}, [Н]$
Стреловидная	FX74-130	6,00	0,81	0,03	0,22	2,72	0,11
	FX74-CL5-140	8,00	1,44	0,10		4,83	0,35
	NACA 6409 9%	12,00	1,33	0,88		4,48	2,96

По результатам моделирования выбираем крыло со следующими характеристиками: профиль – NACA 6409 9%; размах крыльев - 1 м; масса крыла - 0,25 кг.

Медленный рост подъёмной силы, в зависимости от угла атаки, обеспечивает устойчивость к турбулентности потока воздуха. Диапазон углов атаки, обеспечивающий устойчивый полет, составляет 6° - 12° . Большие значения могут привести к срыву обтекания потока воздуха, падению роста коэффициента подъёмной силы конвертоплана [1,3,14].

3. Моделирование электромеханической системы приводов винтов

Рассмотрим электромеханическую систему приводов винтов трикоптера (рис.5) [9]. Винты приводятся во вращение электродвигателями, генерирующими моменты $M_{ЭД}$, а вращению винтов, с угловыми скоростями ω_i , препятствует момент внешних нагрузок $M_{Нi}$.

Восстанавливающий момент, действующий на корпус со стороны электроприводов винтов, определяется величиной управляющих напряжений, поступающих из системы автоматического управления на электроприводы четырех винтов. Причем уровень напряжений, формируемых усилителем мощности САУ, полностью зависит от типа регулятора.

Рис. 5. Упрощенная схема электропривода винта: 1 – винт; 2 – редуктор; 3 – электродвигатель; U – управляющее напряжение; $M_{ЭД}$ – момент, создаваемый электродвигателем; $M_{Нi}$ – момент внешних нагрузок винта, относительно оси вращения; M_{Bi} – крутящий момент винта; J_p , J_M – момент инерции ротора вокруг оси винта и оси мотора соответственно; ω_i , Ω_i – угловые скорости электродвигателя и пропеллера соответственно

Дифференциальные уравнения для четырех винтов, которые описывают взаимосвязанные электромагнитные и механические процессы в электромеханической системе приводов винтов конвертоплана, имеют вид:

$$\begin{cases} J_i \frac{d\omega_i}{dt} = M_{ЭДi} - M_{Нi} \\ L_i \frac{di_i}{dt} + i_i R_i + c_E \omega_i = U_i \end{cases}, \quad (2)$$

где L_i , R_i – индуктивность и активное сопротивление обмотки ротора; i – ток в обмотке электромагнита; c_E – коэффициент пропорциональности, называемый постоянной ЭДС двигателя; J_i – приведенный осевой момент инерции, U_i – управляющее напряжение.

Момент, создаваемый электродвигателями:

$$M_{ЭДi} = c_{M_i} \cdot i_i, \quad (3)$$

где c_{M_i} – постоянная момента электродвигателя.

Связь между угловой скоростью электродвигателя ω_i и ротором винта пропеллера Ω_i :

$$\omega_i / \Omega_i = N, \quad (4)$$

где N – передаточное отношение редуктора.

Момент внешних нагрузок M_{Hi} определяется как:

$$M_{Hi} = \frac{M_{Bi}}{N \cdot \eta} = \frac{\mu \Omega_i^2}{N \eta}, \quad (5)$$

где M_{Bi} – момент сопротивления вращению винта, η – КПД электропривода, который связывает механическую энергию оси двигателя и пропеллера, μ – коэффициент нагрузки, приведенный к валу двигателя.

Приближенно решая систему уравнений (2), с учетом (3), (5) получим уравнения, связывающие угловую скорость роторов пропеллеров и управляющие напряжения, поступающие на электродвигатели [8,16]:

$$\dot{\omega}_i = \frac{-\frac{c_E c_M}{R} \eta N^2 \omega_i - d \omega_i^2 + \frac{c_M}{R} \eta N U_i}{(J_p + \eta N^2 J_M)}, \quad (6)$$

где J_p, J_M – момент инерции ротора вокруг оси винта и оси мотора соответственно, d – аэродинамическая постоянная.

4. Синтез энергоэффективных параметров электропривода

В качестве критерия энергоэффективности выберем следующую величину:

$$\mathcal{E} = \frac{|A_C|}{\int_0^T W dt}, \quad (7)$$

где $\int_0^T W dt$ – потери на электроприводах, T – время движения, A_C – работа тяговых сил, сил тяжести и сопротивления движению при заданном перемещении центра масс:

$$A_C = \int_0^T \bar{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_C dt, \quad (8)$$

где m – полная масса конвертоплана, $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения, $\mathbf{r}_C = [X_C \ Y_C \ Z_C]^T$ – вектор, задающий положение центра масс аппарата, $\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{Q}} + \bar{\mathbf{G}}$ – главный вектор внешних сил.

Величину W , определяющую потери в электроприводах в формуле (7), представим в виде:

$$W = (\mathbf{u}^* - \mathbf{u})^T \mathbf{R} (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}), \quad (9)$$

где $\mathbf{R}$ – матрица приведённых сопротивлений электродвигателей, $\mathbf{u} = [M_1 \ M_2 \ M_3]^T$ – вектор управляющих воздействий, а $\mathbf{u}^* = [M_1^* \ M_2^* \ M_3^*]^T$ – вектор управляющих воздействий, необходимый для получения желаемых временных зависимостей обобщенных координат $\mathbf{q}^*(t)$:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{C} + \mathbf{G}), \quad (10)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{K}_p\mathbf{e} + \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{e}}), \quad (11)$$

где $\mathbf{H}$ – обобщенная матрица инерции механизма, $\mathbf{C}$ – вектор обобщенных Кориолисовых и нормальных сил инерции, $\mathbf{G}$ – вектор обобщенной силы тяжести, $\mathbf{B}$ – матрица, связывающая вектор управляющих воздействий с вектором обобщенных сил, создаваемых приводами, $\mathbf{K}_p$ и $\mathbf{K}_d$ – диагональные матрицы коэффициентов регулятора:

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} k_4 & 0 & 0 \\ 0 & k_5 & 0 \\ 0 & 0 & k_6 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где k_j – положительные коэффициенты регулятора ($j = \overline{1,6}$).

Значения указанных выше матриц и векторов, а также способ их нахождения даны в публикациях [12-15]. Общие методы анализа уравнений кинематики и динамики летающих аппаратов раскрыты в работах [5-9]. Регулятор, описан в статье [7].

Токи в обмотках электроприводов связаны с создаваемыми моментами выражением $C_\tau \eta I_i = M_i$, где I_i – ток в обмотках i -ого электропривода, C_τ – постоянная момента электродвигателей, η – передаточное отношение редуктора. Желаемые значения токов I_i^* определим по формуле: $I_i^* = M_i^* / (\eta C_\tau)$, а M_i^* получим из уравнения (10). Токи I_i^* определяют потери энергии $W^* = \sum_{i=1}^3 I_i^{*2} R_i$ при движении экзоскелета по желаемой траектории, где R_i – активное сопротивление обмоток i -ого электропривода. Величина W^* соответствует минимальному значению потерь энергии при заданной траектории движения центра масс конвертоплана. Определим величину W в скалярной форме:

$$W = \sum_{i=1}^3 (I_i^* - I_i)^2 R_i. \quad (13)$$

С учетом (13) матрица приведённых сопротивлений $\mathbf{R}$ имеет вид:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 / (C_\tau^2 \eta^2) & 0 & 0 \\ 0 & R_2 / (C_\tau^2 \eta^2) & 0 \\ 0 & 0 & R_3 / (C_\tau^2 \eta^2) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Формула (13) позволяет найти дополнительные потери в электроприводах, возникающие из-за отклонения реальной траектории от желаемой. Минимизируя Q можно повысить энергоэффективность конвертоплана.

Система управления конвертопланом, описана в [7,8] состоит из следующих блоков: «Генератор задающих воздействий», определяющий желаемую траекторию центра масс конвертоплана, «Блок решения», вычисляющий значение $\mathbf{q}^*(t)$, реализующее эту траекторию, компаратор, вычисляющий ошибку управления $\mathbf{e} = \mathbf{q}^* - \mathbf{q}$, регулятор и объект управления – модель конвертоплана.

Способ управления летательным аппаратом должен обеспечивать большую энергоэффективность при условии минимизации отклонения центра масс конвертоплана от заданной траектории движения.

5. Оптимизация параметров системы управления

В качестве вектора варьируемых параметров выберем $\mathbf{k} = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4 \ k_5 \ k_6]^T$. Компоненты вектора $\mathbf{k}$ определены на интервалах:

$$0 \leq k_j \leq k_{\max, j}, \quad (15)$$

где $k_{\max, j}$ - максимальное допустимое значение коэффициента регулятора, $j = \overline{1,6}$.

Зададим целевую функцию $J = J(\mathbf{k})$, как взвешенную сумму двух интегральных критериев качества:

$$J = \mu_1 J_1 + \mu_2 J_2, \quad (16)$$

$$J_1 = \frac{0}{\int_0^T [(\mathbf{q}^* - \mathbf{q})^T (\mathbf{q}^* - \mathbf{q})] dt}, \quad (17)$$

$$J_2 = \frac{\int_0^T W dt}{\int_0^T W^* dt}, \quad (18)$$

где μ_1, μ_2 – весовые коэффициенты. Варьируя коэффициенты μ_1, μ_2 можем получить регуляторы, обеспечивающие большую точность, или большую энергоэффективность. Критерий J_1 растет при увеличении модуля ошибки управления $\mathbf{e}$, а критерий J_2 - при росте величины W . Таким образом минимизация J обеспечивает уменьшение как ошибки управления, так и величины потерь.

Решение задачи по определению оптимальных параметров регулятора состоит в нахождении вектора $\mathbf{k}_m$, приводящего J к минимуму.

В основе методики определения оптимальных параметров лежит метод зондирования пространства варьируемых величин, определяются значения критериального параметра в различных точках пространства, с дальнейшим решением задачи аппроксимации точек гладкой поверхностью второго порядка.

Выводы.

В результате проведенных исследований предложена конструкция конвертоплана, учитывающая оптимальные геометрические параметры крыльев, которые отвечают необходимым аэродинамическим характеристикам и обеспечивают повышенную маневренность, скоростные характеристики данной конструкции. С помощью программного продукта XFRLR5 определены коэффициенты подъемной силы и силы сопротивления, которые позволят определить параметры винтов и электродвигателей конвертоплана.

Сформулирована задача нелинейной оптимизации параметров регулятора конвертоплана, реализующего полет в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Целевая функция задана как взвешенная сумма двух интегральных критериев качества, связанных с точностью и энергопотреблением механической системы. Оптимизация выполняется численными методами глобальной оптимизации для различных значений весовых коэффициентов целевой функции, показано, что выбор оптимального вектора

$\mathbf{K}_m$ многократно снижает величину целевой функции, повысив точность работы системы автоматического управления и снизив энергопотребление.

Литература:

1. Под ред. Бюшгенс Г.С. Динамика полета. М.: Машиностроение, 2011. – 776 с.
2. Афанасьев П.П. Голубев И.С. Новиков В.Н. и др. Беспилотные летательные аппараты. М.: МАИ, 2008. – 650 с.
3. Краснов Н.Ф. Аэродинамика профиля и крыла / Н.Ф. Краснов // Основы теории аэродинамики, Москва, 1976.
4. Миль М.Л. и др. Вертолеты. Т.1 и Т.2, М., Машиностроение, 1967.
5. Павловский В.Е. Математическое моделирование робота с переменным вектором тяги / В.Е Павловский, С.Ф Яцун, О.В Емельянова, С.П Стуканева //Беспилотные транспортные средства с элементами искусственного интеллекта (БТС-ИИ-2015): труды второго Всероссийского научно-практического семинара. – Санкт-Петербург: Изд-во «Политехника сервис», 2015. С. 99 – 106.
6. Моделирование полета конвертоплана в различных режимах движения. / С.Ф Яцун, О.В Емельянова, А.И Савин, С.П. Стуканева // Известия ЮЗГУ, 2015. №1(14) – С. 55 – 66.
7. Яцун С.Ф. Алгоритм управления беспилотным летательным аппаратом типа конвертоплан / С.Ф Яцун, О.В Емельянова, К.Г. Казарян //Беспилотные транспортные средства с элементами искусственного интеллекта (БТС-ИИ-2016): труды третьего Всероссийского научно-практического семинара. – Иннополис: Изд-во «Перо», 2016. С. 147-157.
8. Павловский В.Е. Моделирование и исследование процессов управления квадрокоптером / В.Е. Павловский, С.Ф. Яцун, О.В. Емельянова, А.В. Савицкий // Робототехника и техническая кибернетика: научно-техн. журнал / Санкт-Петербург.–2014.– №4(5). –С.49-57.
9. Яцун С.Ф. Математическое моделирование конвертоплана с центрально расположенным управляемым приводом./ С. Ф. Яцун, О. В. Емельянова, А. И. Савин // Известия ЮЗГУ. Серия техника и технологии. –2015. - №4(17) – С. 31-37.
10. Сайт «Podelise» [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://tnu.podelise.ru/docs/index-385011.html?page=5>, свободный
11. Сайт «Airfoil Tools» [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://airfoiltools.com/search/index>, свободный
12. Сайт «Советские вертолеты» [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://wiki.nashtransport.ru/wiki/Советские_вертолёты

13. Salazar Cruz, G. Real-Time Stabilization of a Small Three-Rotor Aircraft / G. Salazar - Cruz // Aerospace and Electronic Systems Conference, 2008.
14. Atsushi Oosedo, Satoko Abiko, Shota Narasaki, Atsushi Kuno, Atsushi Konno, Masaru Uchiyama. Flight control systems of a quad tilt rotor unmanned aerial vehicle for a large attitude change. Robotics and Automation (ICRA), 2015 IEEE International Conference on. –P. 2326-2331.
15. Патент на полезную модель № 157967, МПК В64С 25/62. Двигатель воздушный с изменяемым вектором тяги [Текст] / Яцун С.Ф., Ефимов С.В., Мищенко В.Я., Яцун А.С., Емельянова О.В., Мартинез А (РФ). № 2015131037/11 от 27.07.2015.
16. Яцун С.Ф. Мехатроника и робототехника: моделирование и управление мультироторными летающими роботами: учебное пособие / С.Ф. Яцун, О.Г. Локтионова, О.В. Емельянова, Г.В. Климов // Юго-Зап. гос. ун-т – Курск, 2016. – 127с. – Библиогр.:с.116-126.
17. Яцун С.Ф. Математическое моделирование летательного аппарата с переменным вектором тяги / С.Ф. Яцун, О.В. Емельянова, А.И. Савин. // Мехатроника и робототехника. Моделирование гидромеханических систем: сборник научных трудов Всероссийского молодежного научного семинара «Робототехника и мехатроника» и Регионального молодежного научного семинара «Моделирование гидромеханических систем» – Орел: ПГУ, 2015. С.6-13
18. Jatsyn S.F. Mathematical model of the quadrotor type unmanned aerial vehicle with neurocontroller / S.F. Jatsyn, V.E. Pavlovsky, O.V.Emelyanova, A.S.Savitsky // Advances in Robotics, Mechatronics and Circuits: proceedings of the 18th International Conference on Circuits (CSCC'14) and proceedings of the 2014 International Conference on Mechatronics and Robotics, Structural Analysis (MEROSTA 2014), Santorini Island, Greece, 2014, P. 46-50
19. Яцун С.Ф. Моделирование движения квадрокоптера при отклонении осей несущих винтов относительно корпуса / С.Ф. Яцун, О.В. Емельянова, А.И. Савин. // Вибрационные технологии, мехатроника и управляемые машины: сб. науч. ст.: в 2ч. Ч.1/ Юго-Зап. гос. ун-т. Курск, 2014.-С.329-338.
20. Патент на полезную модель №166334, заявл.29.02.2016; опубл. 20.11.2016, бюл.№ 32. Мультироторный аппарат с изменяемым вектором тяги [Текст] / С.Ф. Яцун, В.Я. Мищенко, О.В. Емельянова, А.И. Савин.

УЧЕТ ДЕМПФИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ПЛОСКОГО ФРЕЗЕРОВАНИЯ

Жуков Н.А.¹, Киселев И.А.²

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, РФ, jukov.n@yandex.ru

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, РФ, i.a.kiselev@yandex.ru

Аннотация. В процессе лезвийной обработки податливых изделий могут возникать высокоамплитудные вибрации, негативно сказывающиеся на качестве получаемой поверхности. Существенное влияние на динамику технологической системы оказывает явление, называемое демпфированием процесса, вызванное контактным взаимодействием между изношенной частью задней поверхности режущей кромки инструмента и материалом детали. На основе приведенных в литературных источниках методов учета рассматриваемого явления при исследовании динамики лезвийной обработки, авторами настоящей работы предлагается новая модель демпфирования процесса. В данной модели вводится соотношение жесткости между контактным усилием со стороны задней поверхности инструмента и глубиной проникновения изношенной части режущей кромки в деталь. В работе приведены результаты многовариантного численного моделирования динамики плоского концевоего фрезерования в одномерной постановке для различных частот вращения шпинделя и значений длины изношенной части задней поверхности режущей кромки. Анализ полученных расчетных данных показал, что демпфирование процесса оказывает заметное влияние на динамическое поведение технологической системы при использовании режимов обработки из области низких частот вращения шпинделя.

Ключевые слова. Динамика лезвийной обработки, автоколебания, демпфирование процесса, износ инструмента, задняя поверхность.

Введение

В современном машиностроении широкое распространение получила механическая обработка изделий. При лезвийной обработке из-за усилий резания в податливой системе инструмент-деталь возникают вибрации как вынужденного, так и автоколебательного типа. Появление последних связано с эффектом резания по следу: режущая кромка, находящаяся в текущий момент в контакте с материалом детали, обрабатывает поверхность, сформированную предыдущей кромкой. При определенных технологических параметрах процесса амплитуды вибраций в системе инструмент-деталь могут значительно возрастать вследствие возникающих автоколебаний, что приводит к ухудшению качества поверхности изделия. Существенное влияние на динамику обработки резанием оказывает явление, называемое демпфированием процесса, вызванное контактным взаимодействием между изношенной частью задней поверхности режущей кромки инструмента и материалом обрабатываемой детали. К следствиям, вызванным данным явлением, относится увеличение областей устойчивости на карте технологических режимов, повышенный износ инструмента, возрастание сил резания [1]. В работах Lee [2] и Sisson [3] отмечается, что данное явление особенно заметно проявляется при малых скоростях вращения шпинделя (low-speed stability).

Для определения областей рациональных режимов обработки, свободных от высокоамплитудных вибраций в системе инструмент-деталь, необходимо проводить исследование динамики рассматриваемой технологической операции. В настоящее время предложено множество подходов для учета эффекта демпфирования процесса при изучении динамики резания. В ряде работ [2,3] взаимодействие по изношенной части режущего клина учитывается с помощью дополнительных усилий, величина которых пропорциональна объему материала, ометаемому задней поверхностью. В работе

Gouskov [1] используется подход, связанный с введением дополнительной фиктивной режущей кромки, характеризующейся своим коэффициентом резания, большим, чем у основной кромки.

В настоящей работе за основу взяты подходы, предложенные в статьях [1,2]. Особенностью данного исследования является использование в качестве модели демпфирования процесса соотношения жесткости между контактным усилием со стороны задней поверхности инструмента и глубиной проникновения изношенной части режущей кромки в деталь. В работе приведены результаты моделирования динамики плоского фрезерования и анализ влияния контактного взаимодействия по изношенной части задней поверхности режущей кромки на динамическое поведение технологической системы.

Описание используемого подхода

Модель динамики резания, применяемая в настоящей работе, включает в себя следующие составляющие: алгоритм геометрического моделирования, модель динамики обрабатываемой детали, феноменологическую модель сил резания и модель демпфирования процесса. Взаимодействие по задней поверхности режущего клина рассматривается как контактное, вводится соотношение жесткости между величиной максимального проникновения и возникающей дополнительной силой:

$$\begin{aligned} dF_n^{fl} &= K_{fl} * dS * fl_w * f(h_{max}^{fl}) \\ dF_t^{fl} &= \mu * dF_n^{fl} \end{aligned} \quad (1)$$

где dF_n^{fl} - нормальная составляющая силы от взаимодействия по задней поверхности для элементарной режущей кромки; dF_t^{fl} - касательная составляющая силы от взаимодействия по задней поверхности; K_{fl} - коэффициент жесткости; h_{max}^{fl} - величина максимального проникновения; dS - ширина элементарной режущей кромки; fl_w - длина площадки изношенной части; μ - коэффициент трения.

Величина максимального проникновения задней грани в материал h_{max}^{fl} определяется с использованием геометрического алгоритма на текущем временном шаге. Так как величины толщины срезаемого слоя, максимального проникновения и суммарной силы, действующей на резец, взаимосвязаны и неизвестны на конец текущего временного шага, то для их определения используется итерационное уточнение. Таким образом в любой дискретный момент времени достигается выполнение соотношения (1).

Результаты

В качестве тестового примера рассматривался процесс плоского фрезерования двузубой цилиндрической концевой фрезой диаметром 12мм. Основные технологические параметры обработки: осевая глубина резания 4 мм, радиальная глубина резания 1 мм, материал заготовки – алюминий. Динамические характеристики системы и значения коэффициентов модели сил резания взяты из работы [4]. Для рассматриваемой системы проводилась серия численных расчетов динамики резания с использованием предложенного подхода к учету демпфирования процесса для различных скоростей вращения шпинделя и размеров площадки изношенной части задней поверхности режущей кромки.

Рис. 1. Трехмерное отображение амплитуд вибраций в технологической системе инструмент-деталь для различных скоростей вращения шпинделя и размеров площадки изношенной части режущей кромки

Результаты расчетов представлены в виде трехмерного отображения, представленного на рисунке 1. Вдоль одной горизонтальной оси отложены величины относительной частоты вращения шпинделя W_{rel} - отношения собственной частоты детали к частоте прохождения режущих кромок фрезы. Значения вдоль второй горизонтальной оси соответствуют различным размерам длины площадки изношенной части задней поверхности режущей кромки fl_w . Для каждой пары варьируемых параметров из установившейся части временной реализации перемещений податливой системы определяются максимальные и минимальные значения, откладываемые на трехмерном отображении вдоль вертикальной оси.

Построенная картина позволяет оценить влияние эффекта демпфирования процесса на динамику технологической системы для широкой области скоростей вращения по мере износа инструмента. Из рисунка 1 видно, что с увеличением значений fl_w существенно уменьшается амплитуда вибраций при относительных частотах вращения $W_{rel} > 3$. Наблюдаемый эффект связан с ростом интенсивности взаимодействия по изношенной части задней поверхности режущей кромки в области низких значений частот вращения шпинделя [2,3].

Полученные результаты могут быть использованы для выбора рациональных режимов обработки фрезерованием, а предложенный алгоритм в дальнейшем может быть распространен на случай пространственной многокоординатной обработки сложногопрофильных деталей.

Литература

1. Gouskov A. M. et al. Influence of flank face on the condition of chatter self-excitation during turning //International Journal of Machining and Machinability of Materials. – 2017. – Т. 19. – №. 1. – С. 17-40.
2. Lee, B. Y., Targ, Y. S., & Ma, S. C. (1995). Modeling of the process damping force in chatter vibration. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 35(7), 951-962.
3. Sisson, T. R., & Kegg, R. L. (1969). An explanation of low-speed chatter effects. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 91(4), 951-958.
4. Киселев И. А. Моделирование динамики процесса фрезерования тонкостенных сложногопрофильных деталей: автореф. дисс.... канд. тех. наук: 01.02. 06 М //МГТУ им. НЭ Баумана. – 2013.

ЭРГАТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ МАНИПУЛЯТОРОМ-ТРИПОДОМ

Захаров Е.Н.¹, Иванов А.Г.²

¹Волгоградский государственный аграрный университет, г.Волгоград, Россия,
evgeny_zakharov@mail.ru

²Волгоградский государственный аграрный университет, г.Волгоград, Россия,
leha_2106@list.ru

Аннотация. Разработана эргатическая система ручного управления манипулятором-триподом, позволяющая управлять непосредственно сразу несколькими обобщёнными координатами, задавая траекторию выходного звена. Получены зависимости точности позиционирования и отклонения от задаваемой траектории при различных скоростях управляющих воздействий.

Ключевые слова. Манипулятор-трипод, система управления, ручное управление, точность позиционирования.

Одними из наиболее трудоемких видов работ в промышленности и в сельскохозяйственном производстве остаются погрузочно-разгрузочные работы, выполняемые с штучными и затаренными грузами, доля которых может составлять до 35...46% от общей номенклатуры в зависимости от видов технологических процессов. Механизацию этих операций целесообразно выполнять с использованием погрузочных манипуляторов.

На кафедре «Механика» Волгоградского ГАУ разработан ряд погрузочных манипуляторов, представляющих собой пространственный механизм параллельно-последовательной структуры, в основе которого лежит трипод с поворотным основанием (рис.1). Такие манипуляторы обладают высокими показателями жесткости конструкции, низкой материалоемкостью и легко монтируются на самоходные шасси и мобильные роботы [1].

Рис. 1 – Манипулятор – трипод на подвижном основании

Механизм (рис.1) состоит из трех звеньев 1, 2, 3, концы которых закреплены с помощью специальных двух - подвижных шарниров на поворотном основании 5, что позволяет увеличить зону обслуживания. Противоположные концы исполнительных звеньев соединены специальным шарниром 6, обеспечивающим пересечение

геометрических осей этих звеньев в одной точке, что исключает появление изгибающих моментов в механизме манипулятора от внешних нагрузок [1, 2]. В результате образуется пространственная структура повышенной жёсткости с высокими динамическими характеристиками. Основание 5 имеет возможность поворачиваться вокруг горизонтальной оси за счёт изменения длины звена 4. Перемещаемый груз с помощью захвата крепится на жестком подвесе, который с помощью цилиндрического шарнира прикреплен к узлу 6.

В качестве исполнительных звеньев в данном манипуляторе используются линейные двигатели постоянного тока – актуаторы *САНВ-21 series*, скорость перемещения штоков регулируется за счет изменения управляющего ШИМ-сигнала. Актуаторы снабжены датчиками обратной связи по положению.

При изменении длины хотя бы одного звена изменяется геометрическая форма "пирамиды" и её вершина, несущая грузозахватный орган, начинает перемещаться в пространстве. Парциальные движения звеньев обеспечивают перемещение захвата по дуге окружности. Работой одного, двух или всех четырех звеньев грузозахватный орган перемещается в заданную точку пространства, лежащую в пределах зоны обслуживания манипулятора.

Ручное управление погрузочным манипулятором с пространственным исполнительным механизмом, имеющим несколько степеней подвижности, требует от оператора повышенной сосредоточенности и вызывает быструю утомляемость, и как следствие, появление ошибок позиционирования. Как отмечается в работе [3]: «... практикой установлено, что мысленная координация трёх одновременно производимых движений является верхним пределом возможности человека», в связи с чем, создание систем управления с совмещённым одновременным управлением несколькими обобщёнными координатами является актуальной задачей. Оптимальным решением становится комбинация ручного и автоматизированного управления погрузочным средством.

Эффективным средством для существенного повышения производительности манипулятора является оснащение специальными системами управления, которые позволяют совместить рабочие операции, облегчить сам процесс управления и в результате – уменьшить утомляемость оператора.

Наиболее совершенным и широко известным принципом управления манипуляторами с участием человека-оператора является копирование [2, 4, 5, 6, 7], заключающийся в том, что управление манипулятором производится с помощью рукоятки управления, геометрически подобной рабочему оборудованию манипулятора. Перемещение конца рукоятки под воздействием оператора с определенной степенью точности воспроизводится (копируется) в масштабе грузозахватным устройством.

Для спроектированного манипулятора-трипода с исполнительными звеньями в виде электроцилиндров разработана система управления, позволяющая управлять не каждой отдельной степенью подвижности, а непосредственно сразу несколькими обобщёнными координатами, задавая траекторию выходного звена.

В состав системы управления (рис.2) входят платформа 1, манипуляционная рукоятка 2, установленная на сферическом шарнире 3, штанг 4 датчиков позиционирования 5 с цилиндрическими шарнирами 6. При этом дополнительно к платформе 1 неподвижно крепится треугольная рама 7, к которой, в свою очередь, крепятся штанги 4 реохордных датчиков позиционирования 5 посредством цилиндрических шарниров 6 одними концами, другими концами штанги 4 датчиков позиционирования 5 посредством шарнирного соединения 8 крепятся на сферическом шарнире 3, образуя полую пирамиду, внутри которой расположена манипуляционная рукоять 2. Сферический шарнир 3 имеет возможность перемещения в зависимости от хода штанг 4 датчиков позиционирования 5. Дополнительно на платформе 1 установлены микроконтроллерный блок управления 9 и мостовой усилитель сигнала 10,

при этом микроконтроллерный блок управления 9 (рис. 3) связан посредством каналов связи с датчиками позиционирования 5 и мостовым усилителем сигнала 10. Функциональная схема управления манипулятором-триподом представлена на рисунке 3.

Рис. 2 - Общий вид устройства ручного управления манипулятором-триподом.

Рис. 3 – Функциональная схема управления манипулятором-триподом

Для управления захватом в пространстве, размещенном на сферическом шарнире 3 (рис. 2) можно управлять несколькими электроцилиндрами манипулятора-трипода одновременно. Управление электроцилиндрами манипулятора-трипода происходит посредством манипуляционной рукоятки 2, через которую оператор воздействует на реохордные датчики позиционирования 5 перемещающей штанги 4. Штанги 4 перемещают в свою очередь ползунки реохордных датчиков позиционирования 5 (рис. 3). Сигнал в виде тока от реохордных датчиков позиционирования поступает на входы каналов связи A_1 , A_2 , A_3 микроконтроллерного блока управления 9. Одновременно микроконтроллерный блок управления 9 сравнивает сигналы от датчиков электроцилиндров манипулятора-трипода, которые в виде тока поступают на микроконтроллерный блок управления 9 по каналам связи q_1 , q_2 и q_3 соответственно. Если сигналы на каналах связи q_1 , q_2 , q_3 идентичны соответственно сигналам на каналах связи A_1 , A_2 , A_3 , то микроконтроллерный блок управления 9 не выдает управляющих сигналов. Если, например, значение сигнала на канале связи A_1 больше сигнала на канале связи q_1 , то микроконтроллерный блок управления 9 выдает управляющий ШИМ-сигнал по каналу связи x_1 на мостовые усилители сигнала 10 и управляющее напряжение по каналу связи u_1 блока 10 подается на электроцилиндр манипулятора-трипода до тех пор, пока значения сигналов на каналах связи q_1 и A_1 не сравняются. Аналогично происходит управление всеми электроцилиндрами манипулятора-трипода.

Алгоритм опроса датчиков и выдачи управляющих ШИМ-сигналов для управления одним актуатором представлен в виде блок-схемы на рисунке 4. Цифровые значения в блоках сравнения алгоритма означают сопротивление реохордных датчиков постоянному току в килоомах.

Рис.4 – Фрагмент алгоритма опроса датчиков и выдачи управляющих ШИМ-сигналов

При создании алгоритма принято допущение об идеальном отслеживании взаимного положения подвижных частей приводных механизмов звеньев рукоятки управления и штоков соответствующих им электроцилиндров, т.е. перемещения и скорости подвижных частей приводных механизмов звеньев рукоятки и штоков электроцилиндров (прямые и обратные) связаны только масштабным коэффициентом λ .

Скорость штоков электроцилиндров ($V_{ши}$), используемых в манипуляторе-трипода, составляет при полной нагрузке 45 мм/с, в отсутствии нагрузки 65 мм/с. При

ручном управлении манипулятором-триподом посредством предложенного устройства следует учитывать эти значения максимальных скоростей. Если скорость штоков управляющего устройства (V_{yi}) будет больше скорости штоков электроцилиндров ($V_{шл}$) манипулятора, то будет происходить заметное запаздывание движения выходного звена манипулятора от управляющего воздействия и значительно возрастает ошибка позиционирования и отклонение от заданной траектории (рис.5, а.). Задание движения выходного звена по заданной траектории с наибольшей точностью будет при условии $V_{yi} < V_{шл}$ (рис.5, б).

а)

б)

Рис.5. - Парциальные движения манипулятора (1 – движение, задаваемое управляющим механизмом, 2 – фактическое движение штока актуатора): а) при $V_{yi} > V_{шл}$, б) при $V_{yi} < V_{шл}$.

Данное устройство ручного управления манипулятором-триподом обеспечивает удобство и точность ручного управления манипулятором-триподом при

воспроизведении заданных траекторий выходного звена в пределах допустимых интервалов скоростей.

Задающее устройство может использоваться для обучения робота-манипулятора движениям по часто повторяющимся заданным траекториям, при этом перемещение выходного звена манипулятора – захвата может быть осуществлено по требуемым законам движения по траектории [8, 9].

Литература.

1. Герасун, В.М. Манипуляторы для мобильных роботов. Концепции и принципы проектирования / В.М. Герасун, В.И. Пындак, И.А. Несмиянов, В.В. Дяшкин-Титов, В.Е. Павловский // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. №44. 24 с.
2. Несмиянов, И.А. Системы прямого и позиционного управления погрузочным манипулятором с пространственным исполнительным механизмом. / И.А. Несмиянов, Е.Н. Захаров, В.И. Токарев // Робототехника в сельскохозяйственных технологиях: материалы Международной научно-практической конференции. - Мичуринск-Наукоград: Издательство Мичуринского госагроуниверситета, 2014. - С.239-245.
3. Жавнер, В.Л. Погрузочные манипуляторы / В.Л. Жавнер, Э.И. Крамской. – Л.: Машиностроение, 1975. – 160 с.
4. Герасун, В.М. Системы управления манипуляторами на основе пространственных исполнительных механизмов / В.М. Герасун, И.А. Несмиянов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2010. - №2. - С.24-28.
5. Несмиянов, И.А. Система управления манипулятора сельскохозяйственного робота / И.А. Несмиянов, В.В. Жога, В.Е. Павловский, Н.С. Воробьева // Известия Нижневолжского агроуниверситетского комплекса: наука и высшее профессиональное образование. – 2014. - №3(35). – с.226-231.
6. Жога, В.В. Система управления манипулятора-трипода. / В.В. Жога, И.А. Несмиянов, В.В. Дяшкин-Титов, Н.С. Воробьева // Робототехника и техническая кибернетика. - №4 (5) – 2014. – С.58-62.
7. Патент №2501648 РФ, МПК В25J13/02. Устройство ручного управления манипулятором-триподом. / И.А. Несмиянов, В.М. Герасун, В.В. Дяшкин-Титов, В.В. Жога, В.Н. Скакунов. – Опубл. 20.12.2013.
8. Жога, В.В. Динамический синтез оптимальных программных движений манипулятора-трипода. / В.В. Жога, И.А. Несмиянов, Н.С. Воробьева, В.В. Дяшкин-Титов // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2015. - №2. – с.85-92.
9. Synthesis of Control Algorithm and Computer Simulation of Robotic Manipulator-Tripod. Ivan Nesmiyanov Victor Zhoga, Vladimir Skakunov, Stanislav Terekhov, Natalia Vorob'eva, Victor Dyashkin-Titov, Farea Ali Hussein Al-hadsha. Creativity in Intelligent Technologies and Data Science. First Conference, CIT&DS 2015. Volgograd, Russia. Springer, pp 392-404.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРИОЛИСОВА РАСХОДОМЕРА

Иванов А.Д.¹, Лукин. А.В.¹

¹СПбПУ, ИПММ, каф. «Механика и процессы управления», Санкт-Петербург, Россия, fm751ps@mail.ru

Аннотация. В данной статье представлены результаты первого этапа работы по моделированию поведения кориолисова расходомера с учетом различных внешних и внутренних факторов. Построены динамические уравнения пространственного изгиба и кручения трубки круглого сечения, имеющей в начальный момент времени форму полукольца, с учетом кориолисовых сил инерции, действующих на трубку со стороны протекающей жидкости. Получено аналитическое решение задачи о свободных колебаниях системы. Построена зависимость первой собственной частоты пространственных колебаний трубки от величины скорости потока жидкости.

Ключевые слова. Кориолисов расходомер, массовый расход, изгиб и кручение стержня, колебания

1. Описание проблемы

Развитие экономики ведет к модернизации и реорганизации системы учета сырьевых и продуктовых потоков. Возрастают требования к качеству измерения расхода на узлах коммерческого учета. Так на нефтеперерабатывающем заводе в процессе налива нефтепродукта из РВС (резервуар вертикальный стальной) в железнодорожные цистерны важно с очень высокой точностью определять массу отгружаемого продукта. Для учета наливаемого нефтепродукта используют расходомеры. Одним из основных видов расходомеров, используемых в нефтепромышленности, является кориолисов расходомер, имеющий ряд преимуществ перед остальными устройствами подобного типа: высокая точность измерений, работа вне зависимости от направления потока, длительный срок службы благодаря отсутствию движущихся и изнашивающихся элементов, возможность измерения расхода сред с высокой вязкостью, надежная работа при наличии вибраций трубопровода и изменении температуры окружающей среды.

Кориолисов массовый расходомер измеряет массовый расход рабочей среды по величине кориолисовых сил, возникающих при протекании рабочей среды по измерительной трубке, подвергнутой вибрации. Принцип измерений схематично представлен на *Рис.1*.

Рис.1. Принцип действия кориолисового расходомера

U-образная трубка колеблется на жестко закрепленном кронштейне; по мере движения жидкости по трубке возникают кориолисовы силы F_c , действующие на входной и выходной поток в соответствии с направлением колебательного движения трубки. Так

как направления сил на входе и выходе противоположны, создается крутящий момент, отклоняющий трубку.

Рис.2. Основные элементы расходомера

На Рис.2 показан расходомер с основными элементами, необходимыми для измерения. На вершине U-образной трубки установлены магнит и задающая катушка, а на начальном и конечном сегментах – магнит и катушка сенсора. Положительная обратная связь между электромагнитным выходом катушки сенсора и задающей катушкой вызывает автоколебания измерительной трубки на ее резонансной частоте. Угол отклонения трубки может быть вычислен по сдвигу фаз между выходными сигналами двух сенсорных катушек. Таким образом, массовый расход может быть рассчитан на основе измерения сдвига фаз двух сигналов. Одновременно по частоте сигнала можно вычислить массу жидкости, и, следовательно, ее плотность.

Проблема, поставленная ПАО «Газпромнефть» состоит в том, что используемые в процессе тактового налива расходомеры имеют погрешность, превышающую значения, указанные в характеристиках прибора. Для решения подобной задачи в работе будет предпринята попытка вывести уравнения движения трубки с протекающей по ней жидкостью, построить численную модель расходомера, а также путем учета дополнительных внешних факторов оценить, какие из них могут иметь наибольшее влияние на погрешность и каким образом их влияние можно нивелировать.

Обзор литературы на данную тему показал, что подобные задачи уже рассматривались. Например, S.S Chen в статье «Out-of-Plane Vibration and Stability of Curved Tubes Conveying Fluid» [1] рассматривает движение трубки с протекающей по ней жидкостью, однако скорость потока считалась постоянной, что не соответствует реальной ситуации на производстве. Кроме того, не учитывались внешние факторы, такие как вибрации от железнодорожных цистерн, а также неверные условия эксплуатации, способные повлиять на качество измерений. В данной статье, являющейся первым этапом работы о моделировании поведения расходомера, мы рассмотрим свободные колебания трубки с протекающей по ней средой, имеющей постоянную скорость потока.

2. Математическая постановка задачи

Рассмотрение свободных колебаний системы является важным шагом исследования, поскольку при решении задачи о вынужденных колебаниях трубки с протекающим по ней потоком жидкости переменной скорости дифференциальные уравнения движения становятся неавтономными, а коэффициенты при производных – функциями времени. Точного аналитического решения такого рода дифференциальных уравнений, вообще говоря, не существует, что приводит к необходимости применения приближенных

методов, в частности – проекционного метода Галеркина. Для верификации метода целесообразно решить дифференциальное уравнение свободных колебаний прямым аналитическим методом и методом Галеркина и убедиться, что решения совпадают с достаточной степенью точности.

Прежде чем сформулировать математическую постановку задачи, примем ряд предположений, касающихся поведения трубки и жидкости. В процессе решения поставленной задачи, мы:

- пренебрегаем турбулентностью жидкости;
- предполагаем, что жидкость несжимаема;
- предполагаем, что трубка нерастяжима;
- пренебрегаем силой тяжести и эффектами демпфирования материала трубки;
- пренебрегаем инерцией трубки на поворот и сдвиговой деформацией;
- считаем все движения малыми;
- давление на выходе из трубки считаем равное нулю, что не повлияет на динамический характер задачи, но сделает уравнения более компактными.

В конечном счете можно сформулировать математическую постановку задачи: с учетом принятых предположений необходимо получить уравнения свободных колебаний трубки, заделанной на обоих концах и имеющей в недеформированном состоянии форму полукольца, с протекающей по ней жидкостью (см. Рис.3).

Рис.3. а) Недеформированное состояние трубки;
б) деформированное состояние трубки

Здесь u – радиальное перемещение вдоль оси N ; v – поперечное перемещение вдоль оси B ; w – перемещение вдоль оси T ; φ – угол закручивания.

3. Вывод уравнения движения трубки, с протекаемой по ней жидкостью в форме Лагранжа

Первое, с чем предстоит столкнуться при выводе уравнений движения трубки с протекаемой жидкостью – тот факт, что система является открытой, ее энергия не сохраняется [2]. В связи с этим предполагается рассмотреть трубку как совокупность маленьких трубок, заполненных жидкостью, соединяемых между собой безынерционными шарнирами. Жидкость рассматривается как ансамбль частиц, соединенных безынерционными связями. Таким образом, внутри одной трубки частицы относительно друг друга не движутся, что по сути означает выполнение условия отсутствия силы трения жидкости о стенки трубки.

Для подобной дискретизированной системы могут быть записаны уравнения Лагранжа второго рода. Пусть $q_k, k = 1 \dots m$ – набор обобщенных координат, которые определяют конфигурацию трубок. Так как система голономная, q_k независимы, m – число степеней свободы, которое может быть равно числу соединенных трубок или превышать его. Силы, действующие со стороны жидкости консервативны и могут быть определены потенциалом V_1 , являющийся функцией координат $q_1, q_2, \dots, q_m$. Эти силы включают в себя вес трубок и упругие силы, действующие в нерастяжимых шарнирах. Кинетическая энергия трубок T_1 является функцией обобщенных координат и скоростей $q_1, q_2, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m$.

Уравнения Лагранжа для системы трубок могут быть записаны в обычном виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial T_1}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial V_1}{\partial q_k} = Q_k, \quad (1)$$

где Q_k – компоненты обобщенных сил, выражающие действие жидкости на трубку. Виртуальная работа этих сил на малых перемещениях $Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_m \delta q_m$. В написанном уравнении Лагранжа второго рода необходимо определить выражения для Q_k .

Для дальнейших рассуждений, мы можем считать, что внутренних связей между частицами жидкости достаточно, чтобы в данный момент времени положение частицы определялось конфигурацией трубок – то есть, координатами $q_1, q_2, \dots, q_m$. Однако, так как частицы движутся относительно трубки, время t войдет как дополнительная переменная. Следовательно, вектор, определяющий положение каждой частицы, будет представлен в форме $\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_s(q_1, q_2, \dots, q_m, t)$, где индекс s относится к i -й частице.

Второй закон Ньютона для i -й частицы имеет вид:

$$m_s \ddot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{F}'_s + \mathbf{F}_s, \quad (2)$$

где $\mathbf{F}'_s$ выражают силы, вызванные внутренними связями, а $\mathbf{F}_s$ – результирующие внешних сил. Сложив подобные выражения для всех s частиц, и заметив, что при сложении большинство сил $\mathbf{F}'_s$, равных по величине и обратных по направлению, взаимно сократятся, исключая частицы, лежащие возле стенки трубки и находящиеся возле входа и выхода из цепи трубок, а оставшиеся силы представляют из себя давление жидкости, получим выражение

$$\sum_s m_s \ddot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{P} + \sum_s \mathbf{F}_s, \quad (3)$$

где $\mathbf{P}$ – давление жидкости.

Учтя тот факт, что давление на выходе из цепи трубок равно нулю, окончательно получим уравнение

$$\sum_s m_s \ddot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{P}_{in} + \sum_s \mathbf{F}_s. \quad (4)$$

Проварьировав написанное выше уравнение, придем к выражению

$$\sum_s m_s \ddot{\mathbf{r}}_s \cdot \delta \mathbf{r}_s = -\delta V_2 - (Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_m \delta q_m). \quad (5)$$

Здесь следует отметить, что работа сил давления на виртуальных перемещениях равна нулю, а работа внешних сил есть сумма изменения гравитационного потенциала V_2 , относящегося к ансамблю соединенных частиц, не движущихся относительно трубки, и работы, равной по величине, но обратной по знаку к работе, совершаемой жидкостью над трубками.

После чего, расписав вариации $\delta \mathbf{r}_s$ и δV_2 , и воспользовавшись правилом дифференцирования произведения функций, получим

$$Q_k = -\frac{\partial V_2}{\partial q_k} - \sum_s m_s \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_s \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial q_k} \right) - \dot{\mathbf{r}}_s \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_s}{\partial q_k} \right\} = -\frac{\partial V_2}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T'}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial T'}{\partial q_k}, \quad (6)$$

где $T' = \sum_s \frac{1}{2} m_s \dot{\mathbf{r}}_s^2$ – кинетическая энергия ансамбля частиц, заполняющих трубки в данный момент времени.

Так как частицы движутся относительно трубок, T' должна зависеть от времени $T' = T'(q_1, q_2, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m, t)$, что затрудняет вычисление Q_k по формуле (6).

В связи с этим, удобно рассмотреть другую функцию $T_2 = T_2(q_1, q_2, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_m)$, выражающую собой кинетическую энергию частиц внутри замкнутого объема трубки, и явно не зависящую от времени. Тогда T' может быть выражена через T_2 следующим образом:

$$T' = T_2 + MV \left(\frac{1}{2} v_o^2 - \frac{1}{2} v_i^2 \right) (t - t_0), \quad (7)$$

где v_i и v_o – скорости потока жидкости на входе и на выходе соответственно, t и t_0 – рассматриваемые времена, M – масса жидкости на единицу длины, V – постоянная скорость потока жидкости. С учетом вышесказанного, $v_i = V, v_o = |\dot{\mathbf{R}} + V\boldsymbol{\tau}|$, где

$\mathbf{R}$ – вектор, определяющий положение трубки, из которой выливается жидкость, $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор, касательный последней трубке в цепи. Следовательно,

$$T' = T_2 + MV \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + V\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{R}} \right) (t - t_0), \quad (8)$$

откуда

$$\frac{\partial T'}{\partial q_k} = \frac{\partial T_2}{\partial q_k} + MV(\dot{\mathbf{R}} + V\boldsymbol{\tau}) \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{R}}}{\partial q_k} (t - t_0), \quad (9)$$

и в момент времени t_0

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T'}{\partial q_k} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_2}{\partial q_k} \right) + MV(\dot{\mathbf{R}} + V\boldsymbol{\tau}) \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{R}}}{\partial q_k}. \quad (10)$$

Учтя, что $\frac{\partial T'}{\partial q_k} = \frac{\partial T_2}{\partial q_k}, \frac{\partial \dot{\mathbf{R}}}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{\mathbf{R}}}{\partial q_k}$, получим

$$Q_k = -\frac{\partial V_2}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_2}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial T_2}{\partial q_k} - MV(\dot{\mathbf{R}} + V\boldsymbol{\tau}) \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{R}}}{\partial q_k}. \quad (11)$$

Подставив теперь это выражение в написанное ранее уравнение Лагранжа второго рода, получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = -MV(\dot{\mathbf{R}} + V\boldsymbol{\tau}) \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{R}}}{\partial q_k}, (k = 1, 2 \dots m). \quad (12)$$

Легко показать, что полученные m уравнений эквивалентны уравнению, записанному в следующем виде:

$$\delta \int_{t_2}^{t_1} L dt - \int_{t_2}^{t_1} MV(\dot{\mathbf{R}} + V\boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \dot{\mathbf{R}} dt = 0, \quad (13)$$

где $L = T_1 + T_2 - U_1 - U_2$ – Лагранжиан.

Можно заметить что выражение (13) по своей структуре похоже на принцип Гамильтона, с добавкой $\int_{t_2}^{t_1} MV(\dot{\mathbf{R}} + V\boldsymbol{\tau}) \cdot \delta \mathbf{R} dt$, порожденной протекающей в трубке жидкостью.

4. Вывод уравнений движения трубки с протекающей жидкостью

Здесь и далее индекс « f » – *fluid* относится к жидкости, « t » – *tube* к трубке.

После вывода уравнения движения трубки с протекающей по ней жидкостью в форме Лагранжа, естественным шагом видится подставить в него выражения для кинетической и потенциальной энергии трубки и жидкости. Здесь стоит отметить, что в силу введенного нами предположения о несжимаемости жидкости, ее потенциальная энергия равна нулю.

$$U_f = 0. \quad (14)$$

Выражения для кинетической энергии трубки и жидкости имеют следующий вид:

$$T_t = \int_0^\alpha \frac{m}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] R d\theta, \quad (15)$$

$$T_f = \int_0^\alpha \frac{M}{2} V_a^2 R d\theta, \quad (16)$$

где V_a – абсолютная скорость движения потока жидкости, складывающаяся из скорости движения объема жидкости относительно трубки $V\boldsymbol{\tau}$ и переносной скорости $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}$.

Выражение для потенциальной энергии трубки включает в себя изгибающие и крутящие моменты, которые могут быть получены из уравнений равновесия стержня, имеющего в недеформированном состоянии форму полукольца [3]:

$$U_t = \int_0^\alpha \left\{ \frac{M_N^2}{2EI} + \frac{M_Z^2}{2EI} + \frac{M_T^2}{2GJ} \right\} R d\theta. \quad (17)$$

здесь E – модуль Юнга материала трубки, G – модуль сдвига материала трубки, I – осевой момент инерции сечения, J – полярный момент инерции сечения, EI – изгибная жесткость трубки, GJ – крутильная жесткость трубки

Записав уравнения равновесия криволинейного стержня, можно получить выражения для упругих моментов:

$$M_N = \frac{EI}{R^2} \left(R\varphi - \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right), \quad (18)$$

$$M_Z = \frac{EI}{R^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad (19)$$

$$M_T = \frac{GJ}{R^2} \left(R \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right). \quad (20)$$

Теперь, подставив полученные выражения в формулу для потенциальной энергии трубки, а также выразив векторы $\mathbf{R}$ и $\boldsymbol{\tau}$ через векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ – единичные векторы осей $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$ соответственно,

$$\mathbf{R} = [(R - u)\cos\theta - w\sin\theta]\mathbf{i} + [(R - u)\sin\theta + w\cos\theta]\mathbf{j} + v\mathbf{k}, \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \left[-\sin\theta - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right) \cos\theta \right] \mathbf{i} + \left[\cos\theta - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right) \sin\theta \right] \mathbf{j} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} \mathbf{k}, \quad (22)$$

получим окончательные выражения для энергий трубки и жидкости:

$$T_t = \int_0^\alpha \frac{m}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] R d\theta, \quad (23)$$

$$U_t = \int_0^\alpha \left[\frac{EI}{2R^4} \left(R\varphi - \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right)^2 + \frac{EI}{2R^4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{GJ}{2R^4} \left(R \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 \right] R d\theta, \quad (24)$$

$$T_f = \int_0^\alpha \frac{M}{2} \left[V^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + 2V \frac{\partial w}{\partial t} + 2 \frac{V}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right) \frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{V}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial t} + \right. \\ \left. + \frac{V^2}{R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right)^2 + \frac{V^2}{R^2} \frac{\partial v^2}{\partial \theta} \right] R d\theta, \quad (25)$$

$$U_f = 0. \quad (26)$$

Остается подставить эти выражения в полученное ранее уравнение движения трубки с жидкостью в форме Лагранжа. Проварьировав соответствующие слагаемые по правилам синхронного варьирования, получим три уравнения

$$\frac{EI}{R^3} \left(\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{MV^2}{R} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) + 2MV \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^3 \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial t} \right) + \\ + R(m + M) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = 0, \quad (28)$$

$$\frac{EI}{R^3} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} - R \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) - \frac{GJ}{R^3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + R \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) + \frac{MV^2}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + 2MV \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial t} + \\ + R(m + M) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{EI}{R^2} \left(R\varphi - \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) - \frac{GJ}{R^2} \left(R \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (30)$$

и соответствующие им шесть граничных условий

$$\frac{EI}{R^3} \left(\frac{\partial^5 w}{\partial \theta^5} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{MV^2}{R} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + 2MV \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial t} \right) + MV \frac{\partial w}{\partial t} + \\ + R(m + M) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \theta \partial t^2} \right) \delta(w)|_0^\alpha + \left(MV \frac{\partial w}{\partial t} + MV^2 \right) \delta w|_{\theta=\alpha} = 0, \quad (31)$$

$$\left[-\frac{EI}{R^3} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{MV^2}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) + MV \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial t} \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \Big|_0^\alpha + \\ + \left[MV \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial t} + \frac{MV^2}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \right] \delta \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\alpha} = 0, \quad (32)$$

$$\frac{EI}{R^3} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \Big|_0^\alpha = 0, \quad (33)$$

$$\left[\frac{EI}{R^3} \left(R \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right) + \frac{GJ}{R^3} \left(R \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \frac{MV^2}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - MV \frac{\partial v}{\partial t} \right] \delta v|_0^\alpha + \\ + \left(MV \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{MV^2}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \delta v|_{\theta=\alpha} = 0, \quad (34)$$

$$\frac{EI}{R^3} \left(R\varphi - \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) \delta \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \Big|_0^\alpha = 0, \quad (35)$$

$$\frac{GJ}{R^2} \left(R \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \delta \varphi|_0^\alpha = 0. \quad (36)$$

Видно, что (28), (31), (32), (33) относятся к колебаниям трубки в плоскости, их мы рассматривать не будем. Уравнения (29), (30) и соответствующие им граничные условия (34), (35), (36) имеют отношение к движениям вне плоскости, и будут предметом нашего исследования в дальнейшем.

5. Безразмерный вид уравнений движения

Как уже было сказано в предыдущем пункте, предметом нашего интереса являются движения вне плоскости, выражаемые уравнениями (29) и (30). Для удобства и большей наглядности, обезразмерим их:

$$\xi = \frac{v}{R}, \quad v = \left(\frac{M}{EI}\right)^{\frac{1}{2}} RV, \quad k = \frac{GJ}{EI},$$

$$\beta = \frac{M}{m+M}, \quad \tau = \left(\frac{EI}{m+M}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{t}{R^3}.$$

С учетом новых обозначений, наши уравнения преобразуются к виду:

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial \theta^4} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - k \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) + v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + 2\beta^{\frac{1}{2}} v \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta \partial \tau} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = 0, \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} - \varphi + k \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0, \quad (38)$$

Пусть

$$\xi(\theta, \tau) = \eta(\theta) e^{i\Omega\tau}, \quad (39)$$

$$\varphi(\theta, \tau) = \psi(\theta) e^{i\Omega\tau}, \quad (40)$$

где $\Omega = \left(\frac{m+M}{EI}\right)^{\frac{1}{2}} R^2 \omega$ – безразмерная круговая частота

Подставляя (39) и (40) в (37) и (38), получим

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \theta^4} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - k \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) + v^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} + 2i\beta^{\frac{1}{2}} v \Omega \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \Omega^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0, \quad (41)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} - \psi + k \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (42)$$

И, после исключения η , придем к единственному уравнению относительно ψ :

$$\frac{\partial^6 \psi}{\partial \theta^6} + (2 + v^2) \frac{\partial^4 \psi}{\partial \theta^4} + 2i\beta^{\frac{1}{2}} v \Omega \frac{\partial^3 \psi}{\partial \theta^3} + \left(1 - \frac{v^2}{k} - \Omega^2\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - 2i\beta^{\frac{1}{2}} v \Omega \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\Omega^2}{k} \psi = 0. \quad (43)$$

Его решение можно представить в виде:

$$\psi = \sum_{n=1}^6 C_n e^{i\lambda_n \tau}, \quad (44)$$

в котором константы C_n находятся из граничных условий, а λ_n – шесть корней уравнения

$$\lambda^6 - (2 + v^2)\lambda^4 - 2i\beta^{\frac{1}{2}} v \Omega \lambda^3 + \left(1 - \frac{v^2}{k} - \Omega^2\right) \lambda^2 - 2i\beta^{\frac{1}{2}} v \Omega \lambda - \frac{\Omega^2}{k} = 0. \quad (45)$$

Систему уравнений для определения C_n можно записать в виде:

$$[a_{jn}]\{C_n\} = \{0\}, \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned} a_{1n} &= \frac{1}{\lambda_n^2} + k, & a_{3n} &= 1, & a_{5n} &= \lambda_n \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + k \right) e^{i\lambda_n \alpha}, \\ a_{2n} &= \lambda_n \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + k \right), & a_{4n} &= \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + k \right) e^{i\lambda_n \alpha}, & a_{6n} &= e^{i\lambda_n \alpha}. \end{aligned} \quad (47)$$

Приравнявая к нулю определитель системы (46) получаем уравнение для определения частот. Сложность при решении подобной задачи заключается в том, что характеристические числа λ_n определяются полиномом шестой степени, и поэтому не могут быть представлены в виде явной аналитической зависимости от параметров системы и искомых частот свободных колебаний Ω . В связи с этим, элементы матрицы $[a_{jn}]$ также не могут быть выписаны явно. Следовательно, нет возможности получить аналитическое выражение для условия разрешимости системы (46) – равенства нулю детерминанта матрицы $[a_{jn}]$, из которого находится спектр собственных частот задачи. Эти обстоятельства приводят к необходимости решать задачу численно. В программной среде Matlab реализован алгоритм, позволяющий путем перебора значений Ω определять те значения частоты и, соответственно, характеристических чисел, при которых определитель системы (46) равен 0. При этом скорость потока считается постоянной во времени, но варьируется в пределах от 25 м/с до 27 м/с. Размеры трубки показаны на Рис.4.

$$\begin{aligned} R &= \\ a &= 0.014 \\ b &= 0.016 \text{ м} \end{aligned}$$

Рис.4. Размеры рассматриваемой трубки

В качестве материала трубки выбрана сталь, в качестве протекаемой среды – бензин АИ95. Интересующие нас параметры материала трубки и среды представлены в Таб.1.

	Сталь	Бензин АИ95
Модуль Юнга, ГПа	210	—
Модуль сдвига, ГПа	80	—
Плотность, Г/см ³	—	0.750

Таб.1. Параметры трубки и среды

В результате проведенной процедуры получена зависимость значения первой частоты свободных колебаний от скорости потока жидкости в заданных пределах (Рис.5.)

Рис.5. Зависимость первой частоты от скорости потока

Таким образом, построено решение задачи о свободных колебаниях трубки с протекающей по ней жидкостью прямым аналитическим методом. Следующим шагом является решение задачи приближенным методом Галеркина [4] и сравнение результатов. После верификации метода Галеркина можно будет строить решение задачи о вынужденных колебаниях системы с переменной скоростью протекающей жидкости и пытаться учесть дополнительные факторы, действующие на систему.

Литература

1. Chen S.S. Out-of-Plane Vibration and Stability of Curved Tubes Conveying Fluid - J. Appl. Mech 40(2), 362-368 (Jun 01, 1973) (7 pages)
2. Benjamin T.B. Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid – Proc. R. Soc. Lond. A, 1961, 261, 457-486
3. Ляв А.Е. Математическая теория упругости – М.: ОНТИ, 1935
4. Paidoussis M.P. Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow – Academic Press, 1998

О ВЫБОРЕ ФОРМЫ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ДЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Кваша Ю.С.¹, Скобелев М.О.¹, Хачатрян А.А.¹, Швидкая А.А.¹

Научный руководитель Брискин Е.С.¹

¹Волгоградский Государственный Технический Университет, Волгоград, Россия,
dtm@vstu.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача определения оптимальной формы плоской кривой, по которой движется материальная точка в отсутствие сил трения и в поле силы тяжести под действием постоянной следящей разгоняющей силы. В качестве критериев оптимальности используются критерии: длина кривой, минимальный радиус кривизны, конечная скорость и время движения точки.

Ключевые слова. Брахистохрона, характеристики поперечного профиля, уравнение кривой, показатели качества.

1. Введение. Одна из известных задач механики – задача о брахистохроне – до сих пор привлекает к себе внимание исследователей. Решение поставленной задачи в случае действия потенциальных сил, предложенное И. Ньютоном, легло в основу вариационного исчисления. Развитие эта задача получила за счет учета дополнительно действующих на точку или твердое тело потенциальных сил: сил трения, разгоняющих и др. [1, 2, 3]. Методы решения этих задач в большинстве случаев основаны на применении принципа максимума Понтрягина [4]. Полученные результаты могут быть использованы, например, при проектировании профиля дорожного полотна для обеспечения наискорейшего достижения цели движения транспортным средством, в технологических процессах подачи сыпучих материалов и др. Однако, широкого практического применения они не получили. По-видимому, это связано с другими, не учитываемыми при анализе характеристиками поперечного профиля. К таким характеристикам, например, может относиться ее длина, радиус кривизны и др. Поэтому, с точки зрения практического применения, задача о брахистохроне, состоящая в определении уравнения кривой, движение по которой обеспечивает перемещение твердого тела из одной точки в другую за минимальное время может быть дополнена и другими показателями, например, указанными ранее.

2. Постановка задачи. Ставится задача определения оптимальной формы плоской кривой, двигаясь по которой в отсутствие сил трения, в поле силы тяжести и под действием постоянной следящей разгоняющей силы материальная точка достигает цели при приемлемых показателях качества [5, 6].

3. Расчетная схема. В качестве расчетной схемы (рис. 1) решаемой задачи рассматривается плоская кривая, уравнение которой имеет вид

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad (1)$$

по которой из точки с координатами $(0, h)$ под углом α_0 к оси OX начинает двигаться материальная точка массой m , под действием разгоняющей силы Q , направленной в каждой точке по касательной к направляющей, и силы тяжести mg , таким образом, чтобы в конце траектории с координатами (L, H) иметь скорость, направленную также по касательной к направляющей под заданным углом α_k к оси OX .

Рис.1. Расчетная схема

4. Метод решения. Метод решения основан на применении процедуры определения постоянных a, b, c, d (1) при заданных граничных условиях и последующих определениях таких показателей кривой, как ее длина S и минимальный радиус кривизны траектории - $\rho_{\min}$:

$$\begin{aligned}
 d &= h; \\
 c &= tg(\alpha_0); \\
 a &= \frac{(tg(\alpha_k) + tg(\alpha_0))L^2 - 2L(H - h)}{L^4}; \\
 b &= \frac{3(H - h) - L(tg(\alpha_k) - tg(\alpha_0))}{L^2}; \\
 S &= \int_0^1 \sqrt{1 + (3ax^2 + 2bx + c)^2} dx; \\
 \rho_{\min} &= \frac{[1 + (3ax_*^2 + 2bx_* + c)^2]^{3/2}}{bax_* + 2b},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где x_* - координата, при которой $\rho = \rho_{\min}$.

Также определяется и скорость V материальной точки в момент ее схода с направляющей при начальной скорости равной нулю

$$V = \sqrt{\frac{2QS}{m}}. \tag{3}$$

Варьируемыми параметрами являются начальная координата $y(0)=h$ и начальный угол α_0 .

В таблице 1 представлены некоторые из рассчитанных вариантов при $L = 3$ м, $H = 4$ м, $\alpha_k = 30^\circ$, $m = 10$ кг, $Q = 500$ Н. На графике (рис. 2) представлен профиль направляющей при $y(0) = 0,5$ м, $\alpha_0 = -15^\circ$.

Здесь же показана и прямолинейная направляющая с начальной координатой $y(0)=4-\sqrt{3}$ м и $\alpha_0 = 30^\circ$

В таблице 2 представлены показатели для этих случаев.

Таблица 1. Показатели движения точки по направляющей.

$h, \text{ м}$ $\alpha_0, \text{ град}$	-1	0	1
-15	$S=6,003 \text{ м}$ $V=22,411 \text{ м/с}$ $\rho_{\min}=0,317 \text{ м}$	$S=5,162 \text{ м}$ $V=20,922 \text{ м/с}$ $\rho_{\min}=0,4 \text{ м}$	$S=4,386 \text{ м}$ $V=19,486 \text{ м/с}$ $\rho_{\min}=0,542 \text{ м}$
0	$S=5,964 \text{ м}$ $V=22,3 \text{ м/с}$ $\rho_{\min}=0,337 \text{ м}$	$S=5,108 \text{ м}$ $V=20,792 \text{ м/с}$ $\rho_{\min}=0,433 \text{ м}$	$S=4,327 \text{ м}$ $V=19,336 \text{ м/с}$ $\rho_{\min}=0,607 \text{ м}$
15	$S=5,918 \text{ м}$ $V=22,22 \text{ м/с}$ $\rho_{\min}=0,36 \text{ м}$	$S=5,07 \text{ м}$ $V=20,7 \text{ м/с}$ $\rho_{\min}=0,473 \text{ м}$	$S=4,288 \text{ м}$ $V=19,234 \text{ м/с}$ $\rho_{\min}=0,692 \text{ м}$

Таблица 2. Значения длины, скорости, времени и радиуса кривизны направляющей при данных значениях начального угла и начальной координаты.

Показатели Координата и угол	Длина $S, \text{ м}$	Конечная скорость $V_k, \text{ м/с}$	Время движения $\tau, \text{ с}$	Радиус кривизны $\rho_{\min}, \text{ м}$
$\alpha_0=30^\circ$ $y(0)=4-\sqrt{3} \text{ м}$	3,46	17,67	0,39	∞
$\alpha_0=-15^\circ$ $y(0)=0,5 \text{ м}$	4,763	20,191	0,47	0,46

Рис. 2. Профили направляющих
1-кривая, 2-прямая

5. Анализ результатов. Анализ показывает, что в случае использования криволинейной направляющей ее длина увеличивается на 37,6% и появляется кривизна $\rho_{\min}=0,46 \text{ м}$. Однако скорость схода точки с направляющей увеличивается на 14,3%, а время движения по направляющей увеличивается только на 20,5%.

Для определения оптимальной формы направляющей, её профиль следует искать в форме многочлена степени выше третьей.

Литература

1. Голубев Ю.Ф. Брахистохрона с трением // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. №5. С. 41-52.
2. Голубев Ю.Ф. Брахистохрона с сухим и произвольным трением // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. №1. С. 24-39.
3. Голубев Ю.Ф. Брахистохрона для твердого тела, скользящего по кривой // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. №4. С. 71-87.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
5. Брискин Е.С., Калинин Я.В., Леонард А.В., Малолетов А.В. О прикладных экстремальных задачах с комплексным критерием качества // XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ – 2014. Институт проблем и управления им. В.А. Трапезникова РАН. 2014. С. 2184 – 2195
6. Малолетов А.В., Брискин Е.С. Оптимизация структуры, параметров и режимов движения шагающих машин со сдвоенными движителями: монография // ВолгГТУ-Волгоград, 2015.-175 с.

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАСЩЕПЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА, ВЫЗВАННОГО МАЛЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ ФОРМЫ ОТ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Козубняк С.А.¹, Нарайкин О.С.², Сорокин Ф.Д.³

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, НИЦ «Курчатовский институт», Москва, Российская Федерация, e-mail: kozubnyak_sa@nrcki.ru

²НИЦ «Курчатовский институт», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация, e-mail: naraykin_os@nrcki.ru

³МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация, e-mail: sorokin_fd@mail.ru

Аннотация. Методом возмущений исследованы свободные колебания цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа, имеющего малые неосесимметричные отклонения формы от идеальной (малая некруглость). Разработан алгоритм расчёта расщепления собственной частоты резонатора. Представлены графики зависимости расщепления частоты от геометрических параметров резонатора.

Ключевые слова. волновой твердотельный гироскоп, расщепление собственной частоты, метод возмущений.

Прогресс техники, в первую очередь, всё большая автоматизация и интеллектуализация технических систем, их усложнение при одновременном росте требований к надёжности и безопасности функционирования обуславливают постоянное увеличение насыщенности объектов техники разнообразными датчиками первичной информации. Такие датчики, являясь ключевыми элементами любых информационно-измерительных систем управления, контроля и диагностики, должны обладать всё более высокими метрологическими характеристиками и одновременно удовлетворять целому комплексу сложных и, зачастую, противоречивых требований (высокая надёжность, помехоустойчивость, малая масса и габариты, малое энергопотребление, низкая стоимость и т.д.) [1].

Одним из широко применяемых и наиболее перспективных классов датчиков инерциальной информации, удовлетворяющих всему комплексу современных требований, являются волновые твердотельные гироскопы (ВТГ) [2], относящиеся к классу микроэлектромеханических систем (МЭМС) [3].

Принцип действия ВТГ основан на явлении прецессии упругой стоячей волны, возбуждённой в осесимметричном упругом теле (резонаторе) при его вращении вокруг оси симметрии [4]. При этом скорость прецессии пропорциональна угловой скорости вращения резонатора [4]. В реальных ВТГ резонатор, как правило, представляет собой либо стержень кольцевой формы, либо тонкостенную упругую оболочку вращения, изготовленные из плавленого кварца, сапфира или другого материала, имеющего малый коэффициент внутренних потерь при колебаниях [2, 4].

Система возбуждения-съёма (фиксации) обеспечивает возбуждение и поддержание колебаний резонатора по одной из его собственных форм (стоячей волны) и определение положения пучностей стоячей волны на резонаторе [2, 4]. При вращении резонатора стоячая волна прецессирует относительно него, и в силу этого положение пучностей изменяется во времени. Измеряя скорость прецессии, мы получаем возможность определять проекцию угловой скорости вращения объекта, на котором установлен ВТГ, на ось симметрии резонатора. При этом резонатор с системой возбуждения-съёма

составляет электромеханическую автоколебательную систему, обеспечивающую возбуждение колебаний и поддержание их постоянной амплитуды. С её помощью в резонаторе устанавливают так называемую вторую форму колебаний, у которой стоячая волна имеет четыре пучности через каждые 90 градусов.

Из сказанного ясно, что с точки зрения проектирования и оптимизации ВТГ важнейшее значение имеет расчёт собственных частот и форм резонатора с учётом всех реальных особенностей его геометрии и материала.

К числу наиболее значимых факторов, влияющих на метрологические характеристики ВТГ, относятся отклонения параметров геометрии резонатора от идеальных (номинальных) и неоднородность материала резонатора. Это обусловлено тем, что ни одна из существующих технологий не обеспечивает возможности изготовления резонаторов с номинальными параметрами. Можно лишь добиваться, чтобы отклонения этих параметров от номинала, а, следовательно, и степень влияния указанных отклонений на рабочие характеристики ВТГ, находились в приемлемых пределах.

При этом необходимо иметь в виду, что указанные отклонения, сохраняющие осевую симметрию резонатора, вызывают лишь сдвиг спектра его частот и могут быть компенсированы сравнительно простыми средствами. Неидеальности параметров геометрии и/или материала резонатора, приводящие к нарушению осевой симметрии, влекут за собой, зачастую, неприемлемое снижение метрологических характеристик, называемое метрологическим отказом. Это связано с тем, что при малых возмущениях осевой симметрии возникает эффект расщепления собственных частот и форм колебаний резонатора. Эффект выражается в том, что вместо одной частоты в спектре неидеального резонатора возникают две близкие частоты и возбуждаются две близкие собственные формы, что и приводит к метрологическому отказу системы.

В данной работе рассмотрены алгоритм и некоторые результаты расчёта расщепления частот цилиндрического резонатора ВТГ, вызванного наиболее важным на практике дефектом – малыми отклонениями геометрии оси резонатора от осевой симметрии.

Учитывая малость несовершенств, а также тот факт, что на практике колебания резонатора ВТГ являются малыми, воспользуемся аппаратом теории возмущений линейных операторов [5].

В общем случае для самосопряжённых линейных операторов $\mathbf{T}$, $\mathbf{G}$ задача на собственные значения имеет вид [5]

$$\mathbf{T}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{G}\mathbf{u}, \quad (1)$$

где $\mathbf{T}$, $\mathbf{G}$ – линейные самосопряжённые операторы; $\mathbf{u}$ – собственный вектор; λ – соответствующее собственное значение.

Для возмущения $\lambda^{(1)}$ собственного значения λ , вызванного малыми возмущениями операторов $\mathbf{T}$, $\mathbf{G}$, имеет место выражение [5]

$$\lambda^{(1)} = \frac{\left(\left(\mathbf{T}^{(1)} - \lambda\mathbf{G}^{(1)} \right) \mathbf{u}, \mathbf{u} \right)}{\left(\mathbf{G}\mathbf{u}, \mathbf{u} \right)}, \quad (2)$$

где верхним индексом отмечены возмущения соответствующих операторов.

В случае несамосопряжённых операторов выражение для возмущения $\lambda^{(1)}$ имеет вид [6]

$$\lambda^{(1)} = \frac{\left(\left(\mathbf{T}^{(1)} - \lambda \mathbf{G}^{(1)} \right) \mathbf{u}, \mathbf{v} \right)}{(\mathbf{G} \mathbf{u}, \mathbf{v})}, \quad (3)$$

где $\mathbf{v}$ – сопряжённое решение.

В одномерных задачах механики система уравнений для определения собственных векторов (форм свободных колебаний) может быть записана в виде

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y} - \lambda \mathbf{B}\mathbf{y}, \quad (4)$$

где $\lambda = p^2$ – квадрат собственной круговой частоты системы; $\mathbf{y}$ – собственный вектор системы (вектор амплитуд обобщённых перемещений и обобщённых внутренних сил в произвольном сечении системы); $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – квадратные матрицы.

В частности, для тонкостенной оболочки собственный вектор имеет вид

$$\mathbf{y} = \left\{ u \quad v \quad w \quad \vartheta_1 \quad BT_1^* \quad BS^* \quad BQ_1^* \quad BM_1 \right\}^T, \quad (5)$$

где u , v , w – амплитуды перемещений произвольной точки срединной поверхности в направлениях её единичных векторов; J_1 – амплитуда угла поворота нормали к срединной поверхности в меридиональной плоскости; B – параметр Ламе срединной поверхности; T_1^* , S^* , Q_1^* – амплитуды отнесённых к единице длины параллели обобщённых мембранной, сдвигающей и поперечной сил в произвольной точке оболочки, соответственно; M_1 – амплитуда отнесённого к единице длины параллели обобщённого меридионального изгибающего момента в произвольной точке оболочки. Для определения сопряжённого решения необходимо рассмотреть сопряжённую систему. Представляя (4) в виде

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{F}\mathbf{y}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}, \quad (6)$$

получим сопряжённую систему [6]

$$\frac{d\mathbf{v}}{dx} = -\mathbf{F}^T \mathbf{v}, \quad (7)$$

где $\mathbf{v}$ – вектор сопряжённого решения.

Системы (5) и (6) можно представить в блочном виде [7]

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{[1]} \\ \mathbf{y}_{[2]} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{[11]} & \mathbf{F}_{[12]} \\ \mathbf{F}_{[21]} & \mathbf{F}_{[22]} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{[1]} \\ \mathbf{y}_{[2]} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где скалярное произведение векторов $\mathbf{y}_{[1]}^T \mathbf{y}_{[2]}$ пропорционально работе:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{[1]} \\ \mathbf{v}_{[2]} \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{[11]}^T & \mathbf{F}_{[12]}^T \\ \mathbf{F}_{[21]}^T & \mathbf{F}_{[22]}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{[1]} \\ \mathbf{v}_{[2]} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Блоки матрицы $\mathbf{F}$ обладают следующими свойствами [7]

$$\mathbf{F}_{[11]}^T = -\mathbf{F}_{[22]}, \quad \mathbf{F}_{[12]}^T = \mathbf{F}_{[12]}, \quad \mathbf{F}_{[21]}^T = \mathbf{F}_{[21]}.$$

В силу этого систему (9) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{[1]} \\ -\mathbf{v}_{[2]} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{[22]} & \mathbf{F}_{[12]} \\ \mathbf{F}_{[21]} & \mathbf{F}_{[11]} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{[1]} \\ -\mathbf{v}_{[2]} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Сопоставляя (8) и (10), получаем для решения сопряжённой системы (10)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{[1]} \\ \mathbf{v}_{[2]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{y}_{[2]} \\ \mathbf{y}_{[1]} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Для оболочки векторы решений исходной и сопряжённой систем имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \left\{ u \quad v \quad w \quad \vartheta_1 \quad BT_1^* \quad BS^* \quad BQ_1^* \quad BM_1 \right\}^T; \\ \mathbf{v} &= \left\{ -BT_1^* \quad -BS^* \quad -BQ_1^* \quad -BM_1 \quad u \quad v \quad w \quad \vartheta_1 \right\}^T, \end{aligned} \quad (12)$$

Собственное значение λ , собственный вектор $\mathbf{y}$ и матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ коэффициентов системы (4) представим в виде рядов по малому параметру ε :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots \\ \mathbf{y} &= \mathbf{y}_0 + \varepsilon \mathbf{y}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{y}_2 + \dots \\ \mathbf{A} &= \mathbf{A}_0 + \varepsilon \mathbf{A}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{A}_2 + \dots \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \varepsilon \mathbf{B}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{B}_2 + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь индексом 0 отмечены соответствующие объекты для идеальной системы, а индексами 1, 2, ... – их возмущения.

Если $\mathbf{v}_0$ – вектор идеального сопряжённого решения, то есть такой вектор, который удовлетворяет сопряжённому уравнению

$$-\frac{d\mathbf{v}_0^T}{ds} = \mathbf{v}_0^T \mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{v}_0^T \mathbf{B}_0, \quad (14)$$

то, умножая скалярно (4) с учётом (13) на $\mathbf{v}_0$ справа и отбрасывая все степени ϑ , кроме первой, придём к выражению первого приближения для возмущения собственной частоты

$$\lambda_1 = \frac{\int_0^l (\mathbf{v}_0^T \cdot \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_0 - \lambda_0 \mathbf{v}_0^T \cdot \mathbf{B}_1 \mathbf{y}_0) ds}{\int_0^l \mathbf{v}_0^T \cdot \mathbf{B}_0 \mathbf{y}_0 ds}. \quad (15)$$

Если (15) умножить на ϑ и обозначить $\vartheta/l = D/$, $\varepsilon \mathbf{A}_1 = \Delta \mathbf{A}$, $\varepsilon \mathbf{B}_1 = \Delta \mathbf{B}$, то (15) приобретает совершенно чёткий смысл, а именно

$$\Delta \lambda = \frac{\int_0^l \mathbf{v}_0^T \cdot (\Delta \mathbf{A} - \lambda_0 \Delta \mathbf{B}) \mathbf{y}_0 ds}{\int_0^l \mathbf{v}_0^T \cdot \mathbf{B}_0 \mathbf{y}_0 ds}. \quad (16)$$

Возмущение собственного значения линейно выражается через возмущения матричных операторов системы уравнений (4).

Расщепление Δp круговой частоты связано с $D/$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta \lambda &= \Delta p^2 = (p_0 + \Delta p)^2 - p_0^2 \approx 2p_0 \Delta p; \\ \Delta p &= \frac{\Delta \lambda}{2p_0}, \end{aligned} \quad (17)$$

где p_0 – собственная круговая частота идеальной системы.

Если l_0 не является кратным корнем, то (16) даёт одно определённое значение. Кратным корням соответствует не один собственный вектор, а семейство собственных векторов. Следовательно, для кратных l_0 выражение (16) будет давать некоторый интервал значений. Границы этого интервала – экстремальные значения $\Delta \lambda_{\min}$, $\Delta \lambda_{\max}$ являются двумя значениями, на которые расщепляется l при возмущении коэффициентов системы уравнений (8). То, что из всего интервала нужно выбирать именно экстремальные значения, следует из свойств отношения Рэлея [8, 9]. Очевидно, что экстремальные значения лежат на границах полученного из (16) интервала: Собственные круговые частоты согласно (13) равны:

$$\begin{aligned} p_{\min} &= p_0 + \frac{\Delta \lambda_{\min}}{2p_0}; \\ p_{\max} &= p_0 + \frac{\Delta \lambda_{\max}}{2p_0}. \end{aligned} \quad (14)$$

Искомая величина расщепления круговой частоты равна

$$p_{\max} - p_{\min} = \frac{\Delta\lambda_{\max} - \Delta\lambda_{\min}}{2p_0}. \quad (15)$$

Описанный выше алгоритм применим ко всем задачам о расщеплении собственной частоты, которые могут быть решены на основе обыкновенных дифференциальных уравнений (одномерные уравнения). В [10] этот алгоритм был успешно применён для расчёта расщеплений частоты кольцевого резонатора ВТГ. Резонатор ВТГ в виде полусферической оболочки может быть проанализирован только на основе дифференциальных уравнений в частных производных (двумерные уравнения). Алгоритм расчёта расщепления частоты оболочечного резонатора целесообразно разрабатывать таким образом, чтобы он был применим для оболочки вращения с произвольной формой меридиана. Тестирование такого алгоритма, который в общем случае требует использования уравнений в частных производных, удобно проводить на оболочке, допускающей применение одномерных дифференциальных уравнений. Одной из целей статьи является подготовка такого теста.

Рис. 1. Некруговой цилиндр с закреплениями Навье.

----- Невозмущенная геометрия
 ————— Возмущённая геометрия

Из всех неосесимметричных оболочек только для цилиндрической оболочки некруговой формы с граничными условиями Навье (рис. 1) можно исследовать расщепление частот, используя обыкновенные дифференциальные уравнения, т.е. применить описанный выше алгоритм. Одномерный характер задачи позволяет получать результат с любой заданной наперёд точностью при минимальных затратах. Как раз это и придаёт некруговому цилиндру с граничными условиями Навье большую ценность при тестировании.

Условия Навье допускают решение в виде одной гармоники:

$$\begin{aligned}
u(s, \varphi) &= u_{(1)}(\varphi) \cos \frac{\pi s}{l} \\
v(s, \varphi) &= v_{(1)}(\varphi) \sin \frac{\pi s}{l}, \\
w(s, \varphi) &= w_{(1)}(\varphi) \sin \frac{\pi s}{l}
\end{aligned} \tag{18}$$

где $u(s, \varphi), v(s, \varphi), w(s, \varphi)$ – проекции перемещения на орты естественного трёхгранника [7].

Пользуясь известной системой обыкновенных дифференциальных уравнений 8-го порядка [7] для определения коэффициентов $w_{(1)}, v_{(1)}, u_{(1)}$ и заменяя в ней внешние нагрузки q_1, q_2, q_3 динамическими нагрузками

$q_{1(i)} = -u_{(1)} p^2 \rho h, \quad q_{2(i)} = -v_{(1)} p^2 \rho h, \quad q_{3(i)} = -w_{(1)} p^2 \rho h$, получим систему для расчёта частот и форм колебаний неидеальной цилиндрической оболочки с граничными условиями Навье.

Система уравнений имеет стандартный вид (6)

$$\frac{dy}{dj} = (A - B)y, \tag{19}$$

где $y = \{u_{(1)}, v_{(1)}, w_{(1)}, J_{2(1)}, S_{(1)}, T_{2(1)}, Q_{2(1)}^*, M_{2(1)}\}^T$; S – сдвигающая сила, T_2 – мембранное усилие в окружном направлении, Q_2^* – приведённая поперечная сила, M_2 – интенсивность момента в окружном направлении, J_2 – угол поворота нормали в окружном направлении; $\lambda = p^2$;

$$A = L \begin{pmatrix} 0 & -\frac{p}{l} & 0 & 0 & \frac{2(1+m)}{Eh} & 0 & 0 & 0 \\ m\frac{p}{l} & 0 & -\frac{1}{R_2} & 0 & 0 & \frac{1-m^2}{Eh} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m\frac{p^2}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12(1-m^2)}{Eh^3} \\ Eh\frac{p^2}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & -m\frac{p}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p}{l} & 0 & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Eh^3}{12}\frac{p^4}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & m\frac{p^2}{l} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Eh^3}{6(1+m)}\frac{p^2}{l} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\mathbf{B} = \rho h L \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

h, l, R – размеры оболочки (рис. 1); $1/R_2$ – кривизна в окружном направлении деформированной поверхности; L – параметр Ламе (масштаб). Для идеального кругового цилиндра $L = L_0 = R = \text{const}$.

Возмущение масштаба ΔL и кривизны $\Delta(1/R_2)$ возмущённой поверхности формально совпадает с аналогичными параметрами для кольца [10].

$$\begin{aligned} \Delta L &= \xi; \\ \Delta\left(\frac{1}{R_2}\right) &= -\frac{1}{R^2} \left(\xi + \frac{d^2 \xi}{d\varphi^2} \right) \\ \Delta\left(\frac{L}{R_2}\right) &= -\frac{d^2 \xi}{R d\varphi^2}; \end{aligned} \quad (22)$$

где $X(\prime)$ – отклонение срединной поверхности оболочки от кругового цилиндра в радиальном направлении (не зависит от осевой координаты, так как возмущённая геометрия тоже цилиндрическая (рис. 1)).

Возмущение собственного значения определяется выражением, аналогичным (12)

$$\Delta\lambda = \frac{\int_0^{2\pi} \left(\mathbf{v}_0^T \Delta \mathbf{A} \mathbf{y}_0 - \lambda_0 \mathbf{v}_0^T \Delta \mathbf{B} \mathbf{y}_0 \right) d\varphi}{\int_0^{2\pi} \mathbf{v}_0^T \mathbf{B}_0 \mathbf{y}_0 d\varphi} \quad (23)$$

Идеальное решение $\mathbf{l}_0, \mathbf{y}_0$ получалось путём подстановки вектора

$$\mathbf{y}_0 = \left\{ u_{(1)k} \cos k\varphi, v_{(1)k} \sin k\varphi, w_{(1)k} \cos k\varphi, \vartheta_{2(1)k} \sin k\varphi, S_{(1)k} \sin k\varphi, \right.$$

$\left. T_{2(1)k} \cos k\varphi, Q_{2(1)k}^* \sin k\varphi, M_{2(1)k} \cos k\varphi \right\}^T$ в систему (19), в результате чего вместо

системы дифференциальных уравнений получили задачу на собственные значения для системы линейных алгебраических уравнений. Несоввершенство (радиальное возмущение) задавалось в виде $\xi(\varphi) = \xi_{2k} \cos 2k\varphi$, (ξ_{2k} в данном случае принято не зависящим от меридиональной координаты), поскольку как было показано выше, именно для этой гармоники расщепление частоты в первом приближении отлично от нуля.

Вычисление расщепления частот цилиндрической оболочки с условиями Навье по изложенной выше методике (первое приближение) сравнивалось с результатом, полученным точным интегрированием по окружности при следующих параметрах: модуль упругости $E = 7,36 \times 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,17$, плотность

$\rho = 2210 \text{ кг/м}^3$ (материал – плавленный кварц); радиус срединной поверхности $R = 40$ мм, длина $l = 80$ мм, толщина стенки $h = 1$ мм, максимальная величина отклонения радиуса от номинального значения – 0,01 мм; волновое число $k = 2$. Результаты расчётов приведены в табл. 1.

		Таблица 1	
		Точное интегрирование	Метод возмущений (первое приближение)
Величина расщепления	Гц	23,859	23,834
	рад/с	149,878	149,755

Как видно из таблицы, погрешность вычисления величины расщепления с помощью метода возмущений по первому приближению составляет около 0,1%.

Ниже представлены результаты расчётов для волнового числа $k = 2$ (рис. 2 – 4).

Рис. 2. Зависимость а) относительного и б) абсолютного расщепления частоты от толщины стенки цилиндра ($R=40\text{мм}$, $l=80\text{мм}$).

Рис. 3. Зависимость а) относительного и б) абсолютного расщепления частоты от радиуса цилиндра ($h=1\text{мм}$, $l=80\text{мм}$)

Рис. 4. Зависимость а) относительного и б) абсолютного расщепления частоты от длины цилиндра ($h=1\text{ мм}$, $R=40\text{ мм}$).

Как видно из рис. 2 а) – 4 а), при варьировании геометрических параметров цилиндрического резонатора относительное расщепление частоты меняется очень незначительно.

При этом абсолютное значение расщепления (в рад/сек) может меняться в широких пределах (рис. 2 б) – 4 б)). Объясняется это тем, что при изменении геометрических параметров расщепление частоты, вызванное фиксированным радиальным возмущением формы оболочки, меняется примерно в той же степени, что и частота собственных колебаний оболочки с невозмущённой геометрией. Это наблюдение может в дальнейшем существенно упростить исследования в затронутой области.

Заключение.

1. На основе метода возмущений и одномерных дифференциальных уравнений для цилиндрической оболочки с граничными условиями Навье построен алгоритм расчёта расщепления собственной частоты цилиндрического резонатора ВТГ.
2. Построенное решение может использоваться, в том числе, и в качестве теста при отладке алгоритма расчёта расщепления частот для резонаторов более сложной формы.

Литература

1. Гуськов А.М., Коровайцева Е.А., Пановко Г.Я., Шохин А.Е. Динамика кварцевого генератора в условиях внешней вибрации. М.-Ижевск, 2014. 210 с.
2. Матвеев В.А., Липатников В.И., Алехин А.В. Проектирование волнового твердотельного гироскопа. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. 168 с.
3. Джексон Р.Г. Новейшие датчики. М.: Техносфера, 2007. 384 с.
4. Bryan G.H. On the beats in the vibrations of revolving cylinder or belle. Proc.Camb.Phil.Soc. Math.Phys.Sci. 1890. V.7, pp.101–111.
5. Като Т. Теория возмущённых линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
6. Марчук Г.И. Сопряжённые уравнения и анализ сложных систем. М.: Наука, 1992. 336 с.
7. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
8. Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 504 с.
9. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1973. 280 с.
10. Нарайкин О.С., Сорокин Ф.Д., Козубняк С.А. Расщепление собственных частот кольцевого резонатора твердотельного волнового гироскопа, вызванное возмущением формы / Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2012. №6. С. 176-185.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ МИКРОСИСТЕМНОЙ ТЕХНИКИ

Колударов П.Ю.¹, Лукин А.В.¹, Скубов Д.Ю.^{1,2}

¹СПбПУ, ИПММ, каф. «Механика и процессы управления»,
mrpetrkol@gmail.com

²ИПМАШ РАН, Санкт-Петербург, Россия, skubov.dsk@yandex.ru

Аннотация. В данной работе исследуются методы конечно-элементного анализа микроэлектромеханических систем в нелинейной физической и геометрической постановках. Выполняется расчет статического и динамического отклика одномерного МЭМС-осциллятора. Проводится конечно-элементный расчет базовых элементов микросистемной техники: балок и пластин под действием пондеромоторных сил электрического поля. Строятся диаграммы ветвления форм равновесия упругих элементов. Производится сравнение численных результатов с аналитическими решениями.

Ключевые слова. микросистемная техника, метод конечных элементов, статическая устойчивость, бифуркации положений равновесия, пластина.

Введение

В данной работе выполняется сравнительный анализ численных методов моделирования и расчета упругих элементов нано/микросистемной техники (НМСТ). В настоящее время с развитием микросистемной технологии возникают задачи быстрого и точного определения статических и динамических характеристик элементов НМСТ, действующих в электромагнитных полях. Интерес представляют численные методы, которые позволяют решать возникающие здесь физически и геометрически нелинейные задачи механики деформируемого твердого тела.

Целью данного исследования является изучение эффективности и точности методов конечно-элементного расчета НМСТ, реализованных в программной системе ANSYS [1].

Статический расчет микроэлектромеханического осциллятора

Частным примером объекта связанной задачи электромеханики является одномерный микроэлектромеханический осциллятор, построенный на основе плоско-параллельного конденсатора, приведенного на Рис. 1,а. Математическая модель осциллятора изображена на Рис. 1,б, и состоит из массы на пружинке, прикрепленной к подвижному электроду конденсатора.

В обозначениях рисунка d – расстояние между неподвижной обкладкой и точкой крепления осциллятора, m – масса подвижной пластины, a – коэффициент диссипации, k – жесткость пружины, l – длина недеформированной пружины. Пондеромоторная сила в конденсаторе определяется выражением [3,4]:

$$F_e = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial \eta} V^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S V^2}{(d - u)^2}, \quad (1)$$

где C – емкость конденсатора.

Уравнение движения осциллятора записывается в следующей форме:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + a \frac{du}{dt} + k(u - l) = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S V^2}{(d - u)^2}. \quad (2)$$

а) – Плоский конденсатор с прямоугольными обкладками

б)- Модель микромеханического осциллятора

Рис. 2

Перейдя к безразмерным величинам

$$x = \frac{u - l}{d - l}, \tau = \sqrt{\frac{k}{m}} t, \alpha = \frac{a}{\sqrt{mk}} \quad (3)$$

приведем уравнение движения (2) к виду:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \alpha \frac{dx}{d\tau} + x = \frac{\lambda}{(1 - x)^2}. \quad (4)$$

Исследование зависимости числа и характера положений равновесия системы (4) может быть выполнено аналитически. Можно показать [2], что при $\lambda < \lambda_* = \frac{4}{27} \cong 0,148$ система имеет два положения равновесия, одно из которых устойчиво, другое – неустойчиво.

Выполним численный расчет рассматриваемой модели с помощью конечных элементов TRANS126 программной системы ANSYS [1]. Алгоритм расчета состоит в следующем.

На первом этапе выполняется электростатический расчет микромеханической системы, представляющей собой группу электродов, произвольным образом расположенных в пространстве. На Рис. 2,а показана построенная конечно-элементная (КЭ) модель плоско-параллельного конденсатора. С помощью элементов PLANE121 моделируется воздушная среда, окружающая конденсатор. Элементы INFIN110 используются для моделирования бесконечно-удаляющегося поля. Производится расчет емкости конденсатора в зависимости от расстояния между пластинами (пример полученной зависимости показан на Рис. 2,б).

а) – КЭ модель плоскостепенного конденсатора, окруженного воздухом. Используются элементы SOLID121 и INFIN110 (обозначены фиолетовым цветом)

б)- Вычисленная зависимость емкости плоскостепенного конденсатора от расстояния между обкладками

Рис. 2

Полученная зависимость передается в конечный элемент-преобразователь электрической энергии в механическую (TRANS126). Данный элемент представляет собой микроэлектромеханический осциллятор с заданной зависимостью силы электрического поля от расстояния между обкладками (Рис. 3).

Рис.3 – Структура КЭ модели

На Рис. 4 показано сравнение численно полученной диаграммы ветвления положений равновесия с точной аналитической зависимостью. Как видно из графиков, решения для устойчивой ветви бифуркационной диаграммы совпадают вплоть до критического значения λ_* , физически соответствующего «схлопыванию» упругого элемента (подвижной обкладки конденсатора) с неподвижным электродом. Данное явление в англоязычной литературе имеет название «static pull-in instability» [2].

Рис. 4 – Диаграммы ветвления положений равновесия

Статический расчет круглой пластинки в электрическом поле

Также особый интерес в силу своей нелинейности представляет статическая задача о пластинке в электрическом поле. Исследуется заделанная по краю пластинка в поле одного неподвижного электрода. Модель пластины представлена на Рис. 5.

Рис.5 – Мембрана в поле одного электрода

В обозначениях рисунка R – радиус мембраны, h – толщина мембраны, d – толщина воздушной прослойки между мембранами, V – разность потенциалов между электродами. Уравнения нелинейной теории гибких пластинок (уравнения Кармана) имеют вид [5]:

$$D\nabla^4 w = L(w, \Phi) + h\Pi(\sigma, w) + F,$$

$$\nabla^4 \Phi = -\frac{Eh}{2}L(w, w), \quad (5)$$

где w – прогиб пластинки; Φ – функция напряжений; h – толщина пластинки; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – изгибная жесткость пластинки; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала; F – интенсивность внешней поперечной нагрузки.

Запишем уравнения в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}\delta \nabla^4 w &= \beta L(w, \Phi) + \nabla^2 w + \lambda \tilde{F}_e, \\ \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2} L(w, w),\end{aligned}\quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}r &= \frac{\hat{r}}{R}, & w &= \frac{\hat{w}}{d}, & \Phi &= \frac{\hat{\Phi}}{Ehd^2}, & \delta &= \frac{D}{R^2T}, \\ \beta &= \frac{Eh}{T} \left(\frac{d}{R}\right)^2, & \lambda &= \frac{\epsilon_r \epsilon_0 R^2 V^2}{2d^3 T}\end{aligned}\quad (7)$$

При малой степени геометрической нелинейности задачи, характеризуемой параметром β и при значительном преобладании мембранной жесткости пластинки над изгибной ($\delta = 0$) уравнения (6) принимают вид:

$$0 = \nabla^2 w + \lambda \tilde{F}_e, \quad (8)$$

что соответствует задаче о равновесии мембраны в электрическом поле. Аналитическое решение данной задачи приведено в работе [6].

Производится расчет с помощью четырех методов конечно-элементного расчета, реализованных в программной системе ANSYS.

Первый метод используется при расчете больших по площади объектов и состоит в создании с помощью команды EMTGEN множества элементов TRANS126, что позволяет рассчитывать емкость между узлами тела и поверхностью электрода (земли) локально. Метод позволяет быстро решать связанную задачу микроэлектромеханики, однако не учитываются краевые эффекты, вызванные неоднородностью электрического поля у границы мембраны. КЭ модель мембраны показана на Рис. 6.

Рис. 6 – КЭ модель мембраны; фиолетовым цветом обозначены элементы TRANS126

Второй метод состоит в решении связанной задачи электроупругости с помощью конечных элементов, имеющих в качестве степеней свободы трансляционные перемещения и электрические напряжения («Electroelastic analysis»). Проводник проявляет деформацию, когда подвергается действию электрического поля.

Электростатические силы, вызывающие деформацию, определяются тензором напряжений Максвелла. Затем применяется вариационный принцип к уравнениям движения и заряда, что дает уравнение для метода конечных элементов. Таким образом, достигается "прямое" решение задачи. Данный метод позволяет учесть нелинейность электрического поля, однако вычисления проводятся медленно. КЭ модель показана на Рис. 7.

Рис. 7 – Конечно-элементная модель мембраны для методов ELECTROELASTIC, MULTI-PHYSICS, Reduced Order Modelling. Голубым цветом изображены структурные элементы SOLID186, являющие собой мембрану; фиолетовым обозначены которые представляют собой воздушную прослойку (SOLID226 в случае ELECTROELASTICS или SOLID122 в случае MFS)

Третий метод носит название «Multi-field analysis» и основан на предположении, что каждый объект физического взаимодействия можно представить в виде поля с независимой моделью и КЭ сеткой. Нужно определить поверхности или объемы, через которые будет передаваться нагрузка. Решение производится пошаговым вычислением состояния одного из полей и его взаимодействия с другими. Данный метод обладает широкой областью применимости, однако неэффективен с вычислительной точки зрения. КЭ модель показана на Рис. 7. Элементы, моделирующие диэлектрик (SOLID122), обладают только электрическими свойствами.

Четвертый метод, «Reduced Order Modelling», состоит в разложении отклика системы по собственным формам и представляет собой численную реализацию проекционных методов математической физики, в частности, метода Галеркина. Итоговая расчетная модель является, в сущности, аналитической и позволяет определить для отклика системы на произвольное возбуждение с учетом геометрических и физических нелинейностей задачи. Данный метод характеризуется высокой скоростью вычислений, т.к. используется несколько основных собственных форм, однако требует тщательной настройки системы для выделения основных частот.

Данный метод состоит из четырех этапов (Рис. 8):

1. Подготовка модели
 - создание геометрии
 - создание КЭ сетки
2. Создание упрощенной модели
 - задание тестовых нагрузок
 - выделение собственных частот, характеризующих типичный отклик системы
 - создание упрощенной модели

3. Использование модели

- задание интересующих нагрузок, расчет полного отклика системы на реальное воздействие

4. Детализация

- конвертация упрощенной модели в исходную детальную КЭ модель и определение напряженно-деформированного состояния системы

Рис. 8 – Схематичное изображение метода «Reduced order modelling»

В конечно-элементной модели мембранные усилия натяжения или сжатия заданы с помощью температурных деформаций: $T = h \cdot \sigma$ — сила натяжения пластины; σ — напряжение в пластине. Тогда температура пластины задается как: $t = \frac{\sigma}{\alpha E}$ — где α — коэффициент объемного теплового расширения.

На Рис. 9 показано сравнение численно полученных диаграмм ветвления форм равновесия мембраны в поле одного электрода с аналитическим решением [6].

Рис.9 – Диаграммы ветвления форм равновесия для методов EMTGEN, ELECTROELASTIC, ROM

Заключение

Из сравнения методов можно заключить, что метод «EMTGEN» является наиболее оптимальным для решения связанных задач микроэлектромеханики, поскольку обеспечивает лучшую сходимость, обладая высокой эффективностью. Метод «Reduced Order Modelling» также обладает значительной эффективностью, несмотря на расхождение с аналитическим решением, которое может быть уменьшено путем более точного выбора собственных форм, учитываемых в расчете.

В дальнейшем, с помощью вышеописанных методов планируется смоделировать реальные объекты микроэлектромеханики, в частности, микромеханические гироскопы и резонаторы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 17-01-00414 А.

Литература

1. ANSYS. Theory reference. Ed. P. Kohnke / ANSYS Inc. Houston, 2016
2. Wen-Ming Zhang, Han Yan, Zhi-Ke Peng, Guang Meng, Electrostatic pull-in instability in MEMS/NEMS: A review – Sensors and Actuators A 214 (2014) 187–218
3. Тамм И.Е. Основы теории электричества: Учеб. пособие для вузов. – 11-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 616 с.
4. Jackson J.D. Classical Electrodynamics – New York: Wiley, 1999
5. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем – М.: Наука, 1967
6. Лукин А.В., Попов И.А., Скубов Д.Ю. Исследование устойчивости и ветвления форм равновесия упругих элементов микросистемной техники – 4-я Международная школа-конференция молодых ученых "Нелинейная динамика машин" (School-NDM-2017)

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАНИПУЛЯЦИОННОЙ СИСТЕМЫ РОБОТА

Крахмалев О.Н.

Брянский ГТУ, Брянск, Россия, olegkr64@mail.ru

Аннотация. Получена динамическая модель, описывающая движение манипуляционной системы робота, структура которой представляет собой систему твёрдых тел, соединённых между собой последовательно шарнирами, имеющими шесть степеней свободы. При составлении матриц коэффициентов динамической модели были исключены элементы матриц тождественно равные нулю, что существенно снизило объём вычислений по данной модели. Полученная динамическая модель позволяет определить движение манипуляционного робота с учетом отклонений, возникающих в его шарнирах, например, из-за упругих деформаций или имеющихся в них зазоров. Результаты могут быть использованы в задачах компьютерного моделирования при проведении комплексного анализа динамики манипуляционных систем роботов.

Ключевые слова. Динамические модели, манипуляционные системы, роботы.

Введение

Исполнительные механизмы манипуляционных роботов представляют собой многозвенные пространственные структуры, называемые манипуляционными системами. Звенья в таких структурах последовательно соединяются друг с другом шарнирами, имеющими одну степень свободы (кинематические пары 5 класса), образуя разомкнутую кинематическую цепь. Как правило, звенья моделируются твёрдыми телами.

Однако реальные конструкции исполнительных механизмов в силу ряда причин имеют разного рода отклонения от описанной выше модели, иногда называемой идеальной. Например, отклонения, возникающие из-за неточности изготовления деталей и их последующей сборки, относят к первичным геометрическим отклонениям. При эксплуатации механизмов первичные геометрические отклонения усугубляются и дополняются из-за износа и повреждения деталей, составляющих звенья механизма, а также изменения температуры. Такого рода отклонения относятся к неизменяющимся за время движения манипуляционной системы, они могут быть определены и скомпенсированы специальными методами коррекции [1–4].

Изменяющиеся геометрические отклонения в шарнирах манипуляционных систем представляют собой, как правило, малые упругие деформации, приводящие к смещению шарниров относительно их недеформированных положений. Наличие зазоров в шарнирах также приводит к возникновению изменяющихся геометрических отклонений. Такого рода отклонения могут быть как угловыми, так и линейными.

Отдельно рассматривают отклонения позиционирования, отражающие отклонения основных шарнирных координат, обеспечивающих функциональное назначение шарниров. Отклонения позиционирования возникают из-за малых упругих деформаций в передаточных механизмах и приводе. Определение такого рода отклонений рассмотрено в работах [5 и 8], где разными методами были выделены медленно изменяющиеся (квазистатические) упругие отклонения и быстро изменяющиеся отклонения, связанные с возникающими упругими колебаниями.

В данной работе для определения изменяющихся геометрических отклонений в шарнирах манипуляционных систем предложено использовать динамическую модель, состоящую из уравнений движения, составленных для манипуляционных систем, звенья которых соединены шарнирами, в которых может учитываться до шести степеней свободы. Степень свободы (вращательную или поступательную) обеспечивающую

программное движение манипуляционной системы и реализуемую конструктивным исполнением шарнира, будем называть основной, а возникающие в шарнире отклонения (линейные и угловые) – дополнительными степенями свободы.

1. Постановка задачи

С каждым звеном манипуляционной системы и неподвижным основанием свяжем прямоугольные системы координат. Матрица преобразования однородных координат из системы S_k , связанной с k -м звеном, в абсолютную (неподвижную) систему S_0 может быть определена как последовательность произведений:

$$A_{0,k} = A_{0,1} A_{1,2} \dots A_{(i-1),i} A_{i,(i+1)} \dots A_{(k-1),k} = \prod_{i=1}^k A_{(i-1),i}, \quad (1)$$

где $A_{(i-1),i}$ – матрица преобразования однородных координат из системы S_i в систему $S_{(i-1)}$, имеющая размерность 4×4 .

Введём систему обобщённых координат $s_i = (X_i, \Omega_i)$ ($i=1, \dots, n$), где $X_i = (x_i, y_i, z_i)$ – линейные, а $\Omega_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ – угловые обобщённые координаты, реализуемые в i -м шарнире; n – число звеньев. При этом число степеней свободы манипуляционной системы будет равно $6n$. Если i -й шарнир предназначен реализовывать поступательное перемещение, то главной координатой в этом шарнире будем считать z_i , если вращательное, то – γ_i .

Последовательность преобразований координат внутри i -го шарнира может быть представлена выражением, отражающим функциональную зависимость соответствующих матриц от обобщённых координат $s_i = (X_i, \Omega_i)$

$$A_{(i-1),i}(s_i) = A_{(i-1),i}^{***}(x_i, y_i, z_i) A_{i^{***}j^{***}}(\alpha_i) A_{i^{**}j^{**}}(\beta_i) A_{i^{*}j^{*}}(\gamma_i), \quad (2)$$

где $A_{(i-1),i}^{***}$ – матрица параллельного переноса, соответствующая обобщенным координатам s_i и отражающие линейные отклонения в шарнире; $A_{i^{***}j^{***}}$, $A_{i^{**}j^{**}}$, $A_{i^{*}j^{*}}$ – матрицы поворота на углы $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ вокруг соответствующих осей, связанной с i -м звеном системы координат, и отражающие угловые отклонения в шарнире.

Из (2) видно, что угловые обобщённые координаты должны рассматриваться как углы Эйлера. Поскольку эти углы не обладают свойством коммутативности, последовательность преобразований угловых координат должна быть определена однозначно.

К моделированию динамики манипуляционных систем с шарнирами, в которых могут учитываться изменяющиеся отклонения, применим подход, основывающийся на численном интегрировании уравнений движения, полученных одним из методов теоретической механики, например, методом Лагранжа – Эйлера. Запишем выражение для кинетической энергии манипуляционной системы [7]:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{tr}(\dot{A}_{0,k} H_k \dot{A}_{0,k}^T), \quad (3)$$

где H_k – матрица (4×4) инерции k -го звена, рассматриваемого как твердое тело.

2. Динамическая модель

Запишем уравнение Лагранжа второго рода и подставим в него выражение (3). После преобразования уравнения получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{s}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial s_i} = \sum_{k=1}^n tr \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial s_i} H_k \ddot{A}^T_{0,k} \right), \quad (4)$$

где $tr(M)$ – операция вычисления суммы диагональных элементов матрицы M .

Дважды продифференцировав матрицу $A_{0,k}$ получим сумму:

$$\begin{aligned} \ddot{A}_{0,k} = & \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial x_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial y_i} \ddot{y}_i + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial z_i} \ddot{z}_i + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial \alpha_i} \ddot{\alpha}_i + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial \beta_i} \ddot{\beta}_i + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial \gamma_i} \ddot{\gamma}_i \right) + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\begin{aligned} & \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \alpha_i \partial \beta_j} \dot{\alpha}_i \dot{\beta}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \alpha_i \partial \gamma_j} \dot{\alpha}_i \dot{\gamma}_j + \\ & + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \beta_i \partial \alpha_j} \dot{\beta}_i \dot{\alpha}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \dot{\beta}_i \dot{\beta}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \beta_i \partial \gamma_j} \dot{\beta}_i \dot{\gamma}_j + \\ & + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \gamma_i \partial \alpha_j} \dot{\gamma}_i \dot{\alpha}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \gamma_i \partial \beta_j} \dot{\gamma}_i \dot{\beta}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j \end{aligned} \right) + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\begin{aligned} & \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \alpha_i \partial x_j} \dot{\alpha}_i \dot{x}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \alpha_i \partial y_j} \dot{\alpha}_i \dot{y}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \alpha_i \partial z_j} \dot{\alpha}_i \dot{z}_j + \\ & + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \beta_i \partial x_j} \dot{\beta}_i \dot{x}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \beta_i \partial y_j} \dot{\beta}_i \dot{y}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \beta_i \partial z_j} \dot{\beta}_i \dot{z}_j + \\ & + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \gamma_i \partial x_j} \dot{\gamma}_i \dot{x}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \gamma_i \partial y_j} \dot{\gamma}_i \dot{y}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial \gamma_i \partial z_j} \dot{\gamma}_i \dot{z}_j \end{aligned} \right) + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\begin{aligned} & + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial x_i \partial x_j} \dot{x}_i \dot{x}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial x_i \partial y_j} \dot{x}_i \dot{y}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial x_i \partial z_j} \dot{x}_i \dot{z}_j + \\ & + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial y_i \partial x_j} \dot{y}_i \dot{x}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial y_i \partial y_j} \dot{y}_i \dot{y}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial y_i \partial z_j} \dot{y}_i \dot{z}_j + \\ & + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial z_i \partial x_j} \dot{z}_i \dot{x}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial z_i \partial y_j} \dot{z}_i \dot{y}_j + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial z_i \partial z_j} \dot{z}_i \dot{z}_j \end{aligned} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) последний блок слагаемых тождественно равен нулю, так как имеет место свойство

$$\frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial X_i \partial X_j} = 0 \quad (i, j=1, \dots, n), \quad (6)$$

где $X_i=(x_i, y_i, z_i)$, $X_j=(x_j, y_j, z_j)$.

Свойство (6) отражает отсутствие кориолисовых и центробежных ускорений при рассмотрении относительного движения поступательно движущихся систем координат.

Выражение (5) с учётом свойства (6) подставим в уравнение (4). Сгруппировав слагаемые и выделив векторы скоростей и ускорений обобщённых координат,

представим уравнения движения в матричном виде для каждой обобщённой силы, соответствующей одной из обобщённых координат.

$$\begin{aligned}
& [M_i^{sx}] \{\ddot{x}\} + [M_i^{sy}] \{\ddot{y}\} + [M_i^{sz}] \{\ddot{z}\} + \\
& + [M_i^{sa}] \{\ddot{\alpha}\} + [M_i^{sb}] \{\ddot{\beta}\} + [M_i^{sy}] \{\ddot{\gamma}\} + \\
& + \{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{saa}] \{\dot{\alpha}\} + \{\dot{\beta}\}^T [C_i^{sbb}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{\gamma}\}^T [C_i^{syy}] \{\dot{\gamma}\} + \\
& + 2 \left(\{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{sab}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{\alpha}\}^T [C_i^{say}] \{\dot{\gamma}\} + \{\dot{\beta}\}^T [C_i^{sby}] \{\dot{\gamma}\} \right) + \\
& + 2 \left(\{\dot{x}\}^T [C_i^{sxa}] \{\dot{\alpha}\} + \{\dot{x}\}^T [C_i^{sxb}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{x}\}^T [C_i^{sxy}] \{\dot{\gamma}\} \right) + \\
& + 2 \left(\{\dot{y}\}^T [C_i^{sya}] \{\dot{\alpha}\} + \{\dot{y}\}^T [C_i^{syb}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{y}\}^T [C_i^{syy}] \{\dot{\gamma}\} \right) + \\
& + 2 \left(\{\dot{z}\}^T [C_i^{sza}] \{\dot{\alpha}\} + \{\dot{z}\}^T [C_i^{szb}] \{\dot{\beta}\} + \{\dot{z}\}^T [C_i^{szy}] \{\dot{\gamma}\} \right) = Q_i^s.
\end{aligned} \tag{7}$$

где $\{\dot{x}\}, \{\ddot{x}\}, \{\dot{y}\}, \{\ddot{y}\}, \{\dot{z}\}, \{\ddot{z}\}, \{\dot{\alpha}\}, \{\ddot{\alpha}\}, \{\dot{\beta}\}, \{\ddot{\beta}\}, \{\dot{\gamma}\}, \{\ddot{\gamma}\}$ – векторы $(n \times 1)$ скоростей и ускорений обобщённых координат; Q_i^s – обобщённые силы, соответствующие различным значениям обобщённых координат s_i ($i = 1, \dots, n$).

В динамической модели (7) матрицы, имеющие размерность равную $n \times n$ и $1 \times n$, обозначаются в квадратных скобках, а векторы $n \times 1$ в фигурных.

3. Анализ модели

Матричные коэффициенты полученной динамической модели могут быть представлены в развёрнутом виде. Символы v и w использованы для условного обозначения индексов соответствующих обобщённым координатам $s_i = (X_i, \Omega_i)$:

$$[M_i^{sv}] = \sum_{k=1}^n \left[tr \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial s_i} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial v_1} \right) \quad tr \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial s_i} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial v_2} \right) \quad \dots \quad tr \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial s_i} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial v_n} \right) \right] \tag{8}$$

$$[C_i^{svw}] = \sum_{k=1}^n \left[tr \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial s_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial v_1 \partial w_1} \right) \quad tr \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial s_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial v_1 \partial w_2} \right) \quad \dots \quad tr \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial s_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial v_1 \partial w_n} \right) \right. \\ \left. tr \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial s_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial v_2 \partial w_1} \right) \quad tr \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial s_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial v_2 \partial w_2} \right) \quad \dots \quad tr \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial s_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial v_2 \partial w_n} \right) \right. \\ \left. \dots \dots \dots \right. \\ \left. tr \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial s_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial v_n \partial w_1} \right) \quad tr \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial s_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial v_n \partial w_2} \right) \quad \dots \quad tr \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial s_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial v_n \partial w_n} \right) \right] \tag{9}$$

Так, например, в обозначении $[M_i^{sv}]$ для матрицы $[M_i^{xx}]$ оба символа s и v соответствуют x , для матрицы $[M_i^{\alpha\alpha}]$ символ s соответствует α , а символ v соответствует x , для матрицы $[M_i^{yz}]$ соответственно $s - y$, а $v - z$ и т.д. В обозначении $[C_i^{svw}]$ для матрицы $[C_i^{aaa}]$ все символы соответствуют α , для матрицы $[C_i^{x\beta\beta}]$ символ s соответствует x , символ v соответствует y , а символ w соответствует β , для матрицы $[C_i^{\alpha\beta\gamma}]$ соответственно $s - \alpha$, $v - \beta$, а $w - \gamma$ и т.д.

Матрицы-строки $[M_i^{sv}]$, имеют размерность $1 \times n$. Элементы этих матриц не обращаются в ноль одновременно. Выражения $tr \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial s_i} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial v_j} \right)$ ($i, j=1, \dots, n$) обращаются в ноль только в случае если $i)k$, или $j)k$, но так как, анализируемые матрицы-строки представляют собой суммы $[M_i^{sv}] = \sum_{k=1}^n [M_{ki}^{sv}]$ то, в конечном счете, их элементы будут отличны от нуля. Сформированные из этих строк симметрические матрицы $[M^{sv}] = [[M_1^{sv}] \dots [M_n^{sv}]]^T$, имеющие размерность $n \times n$, не будут вырожденными, так как все обобщенные координаты $s_i = (X_i, \Omega_i)$ являются инерционными.

Анализ матриц $[C_i^{svw}]$, имеющих размерность $n \times n$, также показывает, что в общем случае, их элементы не равны нулю.

Правые части полученных уравнений представляют собой обобщенные силы в i -м шарнире по соответствующей обобщенной координате. Поскольку в левой части уравнения Лагранжа второго рода (4) не была отражена потенциальная энергия, то её влияние должно быть учтено в правой части уравнения движения. Если обобщенная координата соответствует упругим деформациям, то обобщенная сила может быть задана выражением

$$Q_{P_i}^s = -a_i^s s_i - b_i^s \dot{s}_i \quad (10)$$

где a_i^s и b_i^s – коэффициенты жёсткости и вязкости i -го шарнира по направлению, соответствующему s_i -й обобщенной координаты.

Выражение для обобщенных сил соответствующих действию внешних сил представленных главным вектором и главным моментом, приложенным к центрам тяжести звеньев, рассмотрено в работе [6].

4. Методика моделирования

Методику моделирования продемонстрируем на примере моделирования манипуляционной системы содержащей одно звено, соединенное с неподвижным основанием вращательным шарниром (рис. 1). Исследуемая манипуляционная система имеет две степени свободы, одна основная вращательная – γ_1 , соответствующая конструктивной подвижности шарнира, вторая поступательная – x_1 , обусловленная упругой податливостью шарнира по оси X_0 . Звено представляет собой стержень длиной l_1 и массой m_1 . Активными силами, действующими на звено, являются вращающий момент D_1 , развиваемый приводом, сила тяжести звена $G_1 = m_1 g$ ($g = 9.81 \text{ м/с}^2$) и сила упругости $P_1 = -a_1 x_1$, возникающая в шарнире при его деформации в направлении оси X_0 , соответственно a_1 – жесткость шарнира по данному направлению.

Рис. 1. Расчётная схема

Динамическая модель для рассматриваемой манипуляционной системы будут иметь вид

$$[M_1^{xx}]\ddot{x}_1 + [M_1^{xy}]\ddot{\gamma}_1 + [C_1^{xy\gamma}]\dot{\gamma}_1^2 + 2\dot{x}_1[C_1^{xy\gamma}]\dot{\gamma}_1 = Q_1^x, \quad (11)$$

$$[M_1^{\gamma\gamma}]\ddot{\gamma}_1 + [M_1^{\gamma x}]\ddot{x}_1 + [C_1^{\gamma\gamma}]\dot{\gamma}_1^2 + 2\dot{x}_1[C_1^{\gamma xy}]\dot{\gamma}_1 = Q_1^\gamma. \quad (12)$$

Матричные коэффициенты в полученных уравнениях в соответствии с (8) и (9) сводятся к скалярному виду:

$$\begin{aligned} [M_1^{xx}] &= tr\left(\frac{\partial A_{0,1}}{\partial x_1} H_1 \frac{\partial A_{0,1}^T}{\partial x_1}\right), \quad [M_1^{xy}] = tr\left(\frac{\partial A_{0,1}}{\partial x_1} H_1 \frac{\partial A_{0,1}^T}{\partial \gamma_1}\right), \\ [M_1^{\gamma\gamma}] &= tr\left(\frac{\partial A_{0,1}}{\partial \gamma_1} H_1 \frac{\partial A_{0,1}^T}{\partial \gamma_1}\right), \quad [M_1^{\gamma x}] = tr\left(\frac{\partial A_{0,1}}{\partial \gamma_1} H_1 \frac{\partial A_{0,1}^T}{\partial x_1}\right), \\ [C_1^{xy\gamma}] &= tr\left(\frac{\partial A_{0,1}}{\partial x_1} H_1 \frac{\partial^2 A_{0,1}^T}{\partial \gamma_1^2}\right), \quad [C_1^{xyx}] = tr\left(\frac{\partial A_{0,1}}{\partial x_1} H_1 \frac{\partial^2 A_{0,1}^T}{\partial x_1 \partial \gamma_1}\right), \\ [C_1^{\gamma\gamma\gamma}] &= tr\left(\frac{\partial A_{0,1}}{\partial \gamma_1} H_1 \frac{\partial^2 A_{0,1}^T}{\partial \gamma_1^2}\right), \quad [C_1^{\gamma xy}] = tr\left(\frac{\partial A_{0,1}}{\partial \gamma_1} H_1 \frac{\partial^2 A_{0,1}^T}{\partial x_1 \partial \gamma_1}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Матрицы преобразования однородных координат и их частные производные для исследуемой манипуляционной системы имеют вид:

$$A_{0,1} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_1 & -\sin \gamma_1 & 0 & x_1 \\ \sin \gamma_1 & \cos \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A_{0,1}}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial A_{0,1}}{\partial \gamma_1} = \begin{bmatrix} -\sin \gamma_1 & -\cos \gamma_1 & 0 & 0 \\ \cos \gamma_1 & -\sin \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial^2 A_{0,1}}{\partial \gamma_1^2} = \begin{bmatrix} -\cos \gamma_1 & \sin \gamma_1 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma_1 & -\cos \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 A_{0,1}}{\partial \gamma_1 \partial x_1} = 0.$$

Матрица инерции звена относительно системы координат $S_1(X_1, Y_1, Z_1)$, в соответствии с правилом преобразования матриц инерции [6], будет иметь вид:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{l_1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m_1 l_1^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{l_1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 l_1^2}{3} & 0 & 0 & \frac{m_1 l_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_1 l_1}{2} & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Используя полученные матрицы в выражениях для соответствующих матричных коэффициентов получим выражения:

$$\begin{aligned} [M_1^{xx}] &= m_1, \quad [M_1^{xy}] = -\frac{m_1 l_1}{2} \sin \gamma_1, \quad [M_1^{yy}] = \frac{m_1 l_1^2}{3}, \quad [M_1^{yz}] = -\frac{m_1 l_1}{2} \sin \gamma_1, \\ [C_1^{xy}] &= -\frac{m_1 l_1}{2} \cos \gamma_1, \quad [C_1^{xx}] = 0, \quad [C_1^{yy}] = 0, \quad [C_1^{yz}] = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставив, полученные выражения для матричных коэффициентов, и обобщенные силы, полученные в соответствии с (10), в уравнения (11–12), составим систему дифференциально-алгебраических уравнений

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 - \frac{m_1 l_1 \sin \gamma_1}{2} \ddot{\gamma}_1 - \frac{m_1 l_1 \cos \gamma_1}{2} \dot{\gamma}_1^2 = -a_1 x_1, \\ \frac{m_1 l_1^2}{3} \ddot{\gamma}_1 - \frac{m_1 l_1 \sin \gamma_1}{2} \ddot{x}_1 = D_1 - \frac{1}{2} l_1 m_1 g \sin \gamma_1. \end{cases} \quad (17)$$

Составленная на основе динамической модели (7) система уравнений движения (17) исследуемой манипуляционной системы, рассматриваемой как твёрдое тело, совершающее одновременно поступательное и вращательное движения (рис.1), может быть получена также и другими известными методами теоретической механики.

Выводы

Представлена динамическая модель, состоящая из матричных дифференциальных уравнений, описывающих движение манипуляционной системы, структура которой представляет собой систему твёрдых тел, соединённых между собой последовательно шарнирами, имеющими шесть степеней свободы. При формировании матричных коэффициентов этих уравнений исключены элементы тождественно равные нулю, что существенно снизило объём вычислений по данным уравнениям. Исключенными являются элементы, отражающие взаимовлияние степеней

подвижности, отвечающих за линейные смещения шарниров. Полученная динамическая модель может быть использована в системах компьютерного моделирования для проведения комплексного анализа динамики манипуляционных роботов. Динамическая модель позволяет определить движение манипуляционного робота с учетом отклонений, возникающих в его шарнирах, например, из-за упругих деформаций или имеющихся в них зазоров.

Литература

1. Серков, Н.А. Модель отклонения взаимного положения исполнительных органов многокоординатного станка / Н.А. Серков // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2011. – №3. – С. 68–78.
2. Серков, Н.А. Методы и средства измерения интегрального отклонения взаимного положения рабочих органов многокоординатных станков с ЧПУ / Н.А. Серков // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – №4. – С. 112–124.
3. Крахмалев, О.Н. Коррекция интегральных отклонений движения исполнительных механизмов промышленных роботов и многокоординатных станков / О.Н. Крахмалев, Д.И. Петрешин // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2015. – Т16. – №7. – С. 491–496.
4. Крахмалев, О.Н. Математическое обеспечение систем управления промышленными роботами и многокоординатными станками для коррекции влияния на их движение геометрических отклонений / О.Н. Крахмалев, Д.И. Петрешин, О.Н. Федонин // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – №3. – С. 28–35.
5. Крахмалев, О.Н. Определение динамической точности манипуляционных систем роботов с упругими шарнирами / О.Н. Крахмалев, Л.И. Блейшмидт // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2014. – №1. – С. 29–36.
6. Крахмалев, О.Н. Моделирование обобщенных сил, действующих на звенья манипуляционных систем / О.Н. Крахмалев, А.П. Болдырев // Вестник Брянского государственного технического университета. – 2011. – №1. – С. 115–121.
7. Крахмалев, О.Н. Математическое моделирование динамики манипуляционных систем промышленных роботов и кранов-манипуляторов: монография / О.Н. Крахмалев. – Брянск: БГТУ, 2012. – 200 с. (Электронный ресурс: http://atechs.ru/wp-content/uploads/2014/02/МОНОГРАФИЯ-О.Н.-Крахмалев_испр.-и-доп..pdf)
8. Черноусько, Ф.Л. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация / Ф.Л. Черноусько, Н.Н. Болотник, В.Г. Градецкий. – М.: Наука. 1989. – 368 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СТРУКТУР В СТАЦИОНАРНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Крылова Е. Ю.,¹ Яковлева Т.В.,² Баженов В.Г.³

¹НИИМ Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия, kat.krylova@bk.ru

²НИИМ Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия, uan-tan1987@mail.ru

³НИИМ Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия, bazhenov@mech.unn.ru

Аннотация: Исходя из вариационных принципов Гамильтона – Остроградского сформулированы математически модели контактного взаимодействия некоторых распределенных механических структур, находящихся в стационарном температурном поле с учетом внешних флуктуаций. Рассмотрены такие структуры с зазором как: две гибких прямоугольных в плане пластины, прямоугольная в плане пластинка, подкрепленная ребром в центре, две гибких балки. Для анализа рассматриваемых структур, уравнения в частных производных сводятся к задаче Коши методом конечных разностей второго порядка точности, задача Коши решается одним из методов типа Рунге-Кутты. Исследуется сходимость решения в зависимости от количества точек разбиения по пространственным координатам, а так же типа метода решения задачи Коши. Эллиптическое уравнение теплопроводности для пластинчатых структур рассматривается трехмерным, для балочных - двумерным. При решении трехмерных и двумерных уравнений теплопроводности методом конечных разностей учитываются условия согласования в угловых точках, ребрах и гранях.

Ключевые слова: нелинейная динамика, контактные задачи, истинный хаос, стационарное температурное поле, белый шум, пластина, балка, ляпуновские показатели.

В процессе эксплуатации реальных инженерных конструкций, машин и механизмов возникает проблема сложного взаимодействия их элементов между собой, что приводит к необходимости решения контактных задач теории пластин и оболочек.

Данные задачи очень актуальны на сегодняшний момент. В статье [1] решена задача определения напряжений, возникающих между прямоугольной пластиной и жесткой накладкой при установившихся вынужденных колебаниях, и прогиба срединной поверхности пластины. Работы [2-3] посвящены исследованию параметрических колебаний пластинчато-балочных структур с зазором без учета температурных воздействий. Исследования динамики механических систем в условиях отсутствия контактного взаимодействия приведены в статьях [4-6].

Для повышения точности расчетов в математических моделях следует учитывать не только влияние различных механических нагрузок, но и случайные флуктуации внешней среды, а также температурные воздействия.

В данной работе, исходя из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского, сформулированы математические модели контактного взаимодействия механических структур в виде двух гибких прямоугольных в плане пластинок, прямоугольной в плане гибкой пластинки, подкрепленной ребром в центре, двух гибких балок.

При построении моделей сделаны следующие предположения относительно геометрии конструкций, свойств материалов и условий эксплуатации:

- тела распределенных структур являются изотропными упругими однородными;
- нагрев не велик и не изменяет механических свойств материала, коэффициент теплового расширения не зависит от температуры, удельная объемная теплоемкость материала пластин и балок, а так же коэффициент теплопроводности постоянны, внутренние источники тепла отсутствуют;
- геометрическая нелинейность вводится по модели Кармана [7];
- температурное поле учитывается по модели Фурье. Никаких ограничений, при этом на распределение температуры по толщине структуры не накладывается, то есть рассматривается двумерное для балочных структур и трехмерное для пластинчатых эллиптическое уравнение теплопроводности;
- для пластинок принята кинематическая гипотеза Кирхгофа, для балок – Бернулли – Эйлера;
- инерция вращения элементов не учитывается;
- внешние силы не меняют своего направления при деформации структуры;
- принимается также дополнительное допущение о том, что нормальными напряжениями в направлении нормали к срединной поверхности (линии) можно пренебречь по сравнению с основными напряжениями;
- контактное взаимодействие учитывается по теории Б. Я. Кантора – обобщенной модели Винклера, что позволяет исключить из числа неизвестных функций контактного давления;
- для описания внешних случайных флуктуаций используется модель гауссова белого шума предложенная Perry R. Cook и Gary P. Scavone.

1. Математическая модель контактного взаимодействия двух гибких прямоугольных в плане пластинок.

Рис.1

Учитывая сделанные допущения, запишем выражения для полных деформаций удлинения (ϵ_x^{zm} , ϵ_y^{zm}) и сдвига пластин (γ_c^{zm}):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^m &= \frac{\partial u^m}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^m}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w^m}{\partial x^2} - \alpha_t^m T^m(x, y, z, t) = \varepsilon_x^m + \varepsilon_x^{um}, \\ \varepsilon_y^m &= \frac{\partial v^m}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^m}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w^m}{\partial y^2} - \alpha_t^m T^m(x, y, z, t) = \varepsilon_y^m + \varepsilon_y^{um}, \\ \gamma_c^m &= \frac{\partial u^m}{\partial y} + \frac{\partial v^m}{\partial x} + \frac{\partial w^m}{\partial x} \frac{\partial w^m}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w^m}{\partial x \partial y} = \gamma_c^m + \gamma_c^{um}.\end{aligned}$$

Здесь $m = 1, 2$ - номер пластины, u^m, v^m, w^m - перемещения точек срединной плоскости m -ой пластины соответственно по x, y и z , α_t^m -- коэффициент теплового расширения материала m -ой пластины, $T^m(x, y, z, t)$ - функция приращения температуры для m -ой пластины.

Уравнения движения, граничные и начальные условия для каждой пластины были получены из энергетического принципа Остроградского-Гамильтона [8]. Согласно этому принципу производится сравнение близких движений, приводящих систему материальных точек из начального положения в момент времени t_0 в конечное положение в момент времени t_1 . Для истинных движений должно выполняться условие:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K^m - \delta \Pi^m + \delta W^m) dt = 0,$$

где K^m - кинетическая энергия системы m -ой пластины; Π^m - потенциальная энергия m -ой пластины; W^m - сумма элементарных работ внешних сил m -ой пластины. Кинетическая энергия определяется выражением:

$$K^m = \frac{\gamma^m h}{2g} \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial u^m}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^m}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^m}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy,$$

где γ^m - удельный вес материала m -ой пластины; g - ускорение свободного падения, h - толщина пластин, a, b - размеры пластин в плане по x и по y соответственно. Потенциальная энергия Π^m представляет собой сумму энергии деформации изгиба m -ой пластины Π_u^m и энергии деформации срединной плоскости m -ой пластины Π_c^m , которые определяются из соотношений:

$$\begin{aligned}\Pi_u^m &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left(-M_x^m \frac{\partial^2 w^m}{\partial x^2} - M_y^m \frac{\partial^2 w^m}{\partial y^2} - 2H^m \frac{\partial^2 w^m}{\partial x \partial y} \right) dx dy, \\ \Pi_c^m &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (N_x^m \varepsilon_x^m + N_y^m \varepsilon_y^m + T^m \gamma^m) dx dy,\end{aligned}$$

где M_x^m, M_y^m и H^m изгибающие и крутящий момент m -ой пластины, N_x^m, N_y^m и T^m нормальные и касательное усилие срединной плоскости m -ой пластины. Подставляя выражения для вариаций кинетической и потенциальной энергии в уравнение принципа Остроградского-Гамильтона и учитывая вариации $\delta u^m, \delta v^m$ и δw^m как функции t ,

получим систему уравнений движения m -ой пластины с учетом стационарного температурного поля и поля белого шума:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} + \frac{1-\nu^m}{2} \frac{\partial^2 u^m}{\partial y^2} + \frac{1+\nu^m}{2} \frac{\partial^2 v^m}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w^m}{\partial x} \frac{\partial^2 w^m}{\partial x^2} + \frac{1+\nu^m}{2} \frac{\partial w^m}{\partial y} \frac{\partial^2 w^m}{\partial x \partial y} + \\ & + \frac{1-\nu^m}{2} \frac{\partial w^m}{\partial x} \frac{\partial^2 w^m}{\partial y^2} - \frac{(1+\nu^m)}{h} \frac{\partial N_t^m}{\partial x} - \frac{\gamma^m}{g} \frac{1-(\nu^m)^2}{E^m} \frac{\partial^2 u^m}{\partial t^2} = 0; \\ & \frac{1+\nu^m}{2} \frac{\partial^2 u^m}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v^m}{\partial y^2} + \frac{1-\nu^m}{2} \frac{\partial^2 v^m}{\partial x^2} + \frac{\partial w^m}{\partial y} \frac{\partial^2 w^m}{\partial y^2} + \frac{1+\nu^m}{2} \frac{\partial w^m}{\partial x} \frac{\partial^2 w^m}{\partial x \partial y} + \\ & + \frac{1-\nu^m}{2} \frac{\partial w^m}{\partial y} \frac{\partial^2 w^m}{\partial x^2} - \frac{(1+\nu^m)}{h} \frac{\partial N_t^m}{\partial y} - \frac{\gamma^m}{g} \frac{1-(\nu^m)^2}{E^m} \frac{\partial^2 v^m}{\partial t^2} = 0; \\ & \frac{h^2}{12} (\nabla^4 w^m + \nabla^2 M_t^m) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w^m}{\partial x} \left(\frac{\partial u^m}{\partial x} + \nu^m \frac{\partial v^m}{\partial y} - \frac{(1+\nu^m)}{h} N_x^t \right) + \frac{1-\nu^m}{2} \frac{\partial w^m}{\partial y} \left(\frac{\partial u^m}{\partial y} + \frac{\partial v^m}{\partial x} \right) \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial w^m}{\partial y} \left(\nu^m \frac{\partial u^m}{\partial x} + \frac{\partial v^m}{\partial y} - \frac{(1+\nu^m)}{h} N_y^t \right) + \frac{1-\nu^m}{2} \frac{\partial w^m}{\partial x} \left(\frac{\partial u^m}{\partial y} + \frac{\partial v^m}{\partial x} \right) \right] - \\ & - \frac{1-(\nu^m)^2}{E^m h} (q^m \pm P(w^1 - h_k - w^2) \Psi) + \frac{\gamma^m}{g} \frac{1-(\nu^m)^2}{E^m} \frac{\partial^2 w^m}{\partial t^2} + \frac{\gamma^m}{g} \frac{1-(\nu^m)^2}{E^m} \varepsilon^m \frac{\partial w^m}{\partial t} = 0. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Здесь $\psi = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(w^1 - h_k - w^2)]$ – функция контактного давления, $\Psi = 1$, если

$w^1 > w^2 + h_k$ – есть контакт между пластинами, иначе $\Psi = 0$, h_k – зазор между пластинами, $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ – бигармонический оператор, ε^m – коэффициент

диссипации среды m -той пластины; P – коэффициент жесткости трансверсального обжатия структуры в зоне контакта, ν^m – коэффициент Пуассона m -ой пластины, $q^m = q_n^m + q^{m \text{ noise}}$, где $q_n^m = q_0^m \sin \omega_{pq} t$ – внешняя нормальная нагрузка, приложенная к m -той пластине, q_0^m и ω_{pq}^m – ее амплитуда и частота, соответственно, $q^{m \text{ noise}} = q_{0n}^m L$ – внешний аддитивный белый шум, действующий на m -тую пластину q_{0n}^m – интенсивность шумового поля, L – функция, принимающая произвольные значения в

диапазоне $(-1; 1)$, $N_t^m = \frac{E^m \alpha_t^m}{1-\nu^m} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T^m(x, y, z) dz$, $M_t^m = \frac{E^m \alpha_t^m}{1-\nu^m} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T^m(x, y, z) z dz$ –

температурные компоненты усилий и моментов m -той пластины, E^m – модуль Юнга материала m -той пластины.

К уравнениям (1) следует присоединить следующие варианты краевых условий

$$\begin{aligned} w^m(0, t) = w^m(a, t) = w^m(b, t) = v^m(0, t) = v^m(a, t) = v^m(b, t) = u^m(0, t) = u^m(a, t) = \\ = u^m(b, t) = \partial^2 w^m(0, t) / \partial x^2 = \partial^2 w^m(a, t) / \partial x^2 = \partial^2 w^m(b, t) / \partial x^2 = 0, \end{aligned}$$

начальные условия

$$w^m(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial w^m(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = u^m(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial u^m(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = v^m(x,t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial v^m(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

и трехмерное эллиптическое уравнение теплопроводности для каждой из пластин

$$\frac{\partial^2 T^m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T^m}{\partial z^2} = 0.$$

Граничные и начальные условия, в общем случае, могут быть различными для каждой из пластин. Кроме того, для каждого из уравнений теплопроводности следует задать краевые условия I, II или III типа.

Исключая из рассмотрения одну пространственную координату, можно получить уравнение движения для элемента гибкой балки. Как частные случаи приведем модели контактного взаимодействия прямоугольной в плане пластинки, подкрепленной ребром в центре и двух гибких балок.

2. Математическая модель контактного взаимодействия прямоугольной в плане гибкой пластинки, подкрепленной ребром в центре.

В данном случае к уравнениям движения балки следует присоединить двумерное эллиптическое уравнение теплопроводности.

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2} + \frac{1-\nu^1}{2} \frac{\partial^2 u^1}{\partial y^2} + \frac{1+\nu^1}{2} \frac{\partial^2 v^1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w^1}{\partial x} \frac{\partial^2 w^1}{\partial x^2} + \frac{1+\nu^1}{2} \frac{\partial w^1}{\partial y} \frac{\partial^2 w^1}{\partial x \partial y} + \right. \\
& + \frac{1-\nu^1}{2} \frac{\partial w^1}{\partial x} \frac{\partial^2 w^1}{\partial y^2} - \frac{(1+\nu^1)}{h} \frac{\partial N_t^1}{\partial x} - \frac{\gamma^1}{g} \frac{1-(\nu^1)^2}{E^m} \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} = 0; \\
& \frac{1+\nu^1}{2} \frac{\partial^2 u^1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v^1}{\partial y^2} + \frac{1-\nu^1}{2} \frac{\partial^2 v^1}{\partial x^2} + \frac{\partial w^1}{\partial y} \frac{\partial^2 w^1}{\partial y^2} + \frac{1+\nu^1}{2} \frac{\partial w^1}{\partial x} \frac{\partial^2 w^1}{\partial x \partial y} + \\
& + \frac{1-\nu^1}{2} \frac{\partial w^1}{\partial y} \frac{\partial^2 w^1}{\partial x^2} - \frac{(1+\nu^1)}{h} \frac{\partial N_t^1}{\partial y} - \frac{\gamma^1}{g} \frac{1-(\nu^1)^2}{E^m} \frac{\partial^2 v^1}{\partial t^2} = 0; \\
& \frac{h^2}{12} \left(\nabla^4 w^1 + \nabla^2 M_t^1 \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w^1}{\partial x} \left(\frac{\partial u^1}{\partial x} + \nu^m \frac{\partial v^1}{\partial y} - \frac{(1+\nu^1)}{h} N_t^1 \right) + \frac{1-\nu^1}{2} \frac{\partial w^1}{\partial y} \left(\frac{\partial u^1}{\partial y} + \frac{\partial v^1}{\partial x} \right) \right] - \\
& - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial w^1}{\partial y} \left(\nu^1 \frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial v^1}{\partial y} - \frac{(1+\nu^1)}{h} N_t^1 \right) + \frac{1-\nu^1}{2} \frac{\partial w^1}{\partial x} \left(\frac{\partial u^1}{\partial y} + \frac{\partial v^1}{\partial x} \right) \right] - \\
& - \frac{1-(\nu^1)^2}{E^1 h} (q^1 + P(w^1 - h_k - w^2) \Psi) + \frac{\gamma^1}{g} \frac{1-(\nu^1)^2}{E^1} \frac{\partial^2 w^1}{\partial t^2} + \frac{\gamma^1}{g} \frac{1-(\nu^1)^2}{E^1} \varepsilon^1 \frac{\partial w^1}{\partial t} = 0; \\
& \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial w^2}{\partial x} \frac{\partial^2 w^2}{\partial x^2} - \frac{(1+\nu^2)}{h} \frac{\partial N_t^2}{\partial x} - \frac{\gamma^2}{g} \frac{1-(\nu^2)^2}{E^m} \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} = 0; \\
& \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 w^2}{\partial x^4} + \nabla^2 M_t^2 \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w^2}{\partial x} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{(1+\nu^2)}{h} N_t^2 \right) \right] - \\
& - \frac{1-(\nu^2)^2}{E^1 h} (q^2 - P(w^1 - h_k - w^2) \Psi) + \frac{\gamma^2}{g} \frac{1-(\nu^2)^2}{E^1} \frac{\partial^2 w^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma^2}{g} \frac{1-(\nu^2)^2}{E^1} \varepsilon^2 \frac{\partial w^2}{\partial t} = 0; \\
& \frac{\partial^2 T^1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T^1}{\partial z^2} = 0; \\
& \frac{\partial^2 T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^2}{\partial z^2} = 0.
\end{aligned}$$

3. Математическая модель контактного взаимодействия двух гибких балок.

Рис. 3

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} + \frac{\partial w^m}{\partial x} \frac{\partial^2 w^m}{\partial x^2} - \frac{(1+\nu^m)}{h} \frac{\partial N_t^m}{\partial x} - \frac{\gamma^m}{g} \frac{1-(\nu^m)^2}{E^m} \frac{\partial^2 u^m}{\partial t^2} = 0; \\ \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 w^m}{\partial x^4} + \nabla^2 M_t^m \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w^m}{\partial x} \left(\frac{\partial u^m}{\partial x} - \frac{(1+\nu^m)}{h} N_t^m \right) \right] - \\ - \frac{1-(\nu^m)^2}{E^1 h} (q^m - P(w^1 - h_k - w^2) \Psi) + \frac{\gamma^m}{g} \frac{1-(\nu^m)^2}{E^m} \frac{\partial^2 w^m}{\partial t^2} + \frac{\gamma^m}{g} \frac{1-(\nu^m)^2}{E^1} \varepsilon^m \frac{\partial w^m}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial^2 T^m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^m}{\partial z^2} = 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Методы решения.

Система уравнений (3) приводится к безразмерному виду. Дифференциальная задача в частных производных с учетом граничных и начальных условий, описывающая движение элемента балок, сводится к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (СОДУ) методом конечных разностей с аппроксимацией $O(c^2)$ по пространственной переменной (здесь c – шаг по пространственной координате):

$$\ddot{w}_i + \varepsilon_i \dot{w}_i = L_{1,c}(w_i, u_i), \ddot{u}_i = L_{2,c}(w_i, u_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Здесь n – число разбиений по пространственным координатам, $L_{1,c}$, $L_{2,c}$ конечно-разностные операторы. Полученная задача Коши решается одним из следующих методов: Рунге-Кутта 4-го/2-ого порядка (RK4/2), Рунге-Кутта-Фелберга 4-го порядка (RK4F), Рунге-Кутта принца Дорманда 8-ого порядка (RK8pD), неявный метод Рунге-Кутта 2-го/4-го порядка (RK2i/4i). Каждое из уравнений теплопроводности сводится к системе линейных алгебраических уравнений методом конечных разностей и решается методом Гаусса.

Так как система уравнений в частных производных сводится к задаче Коши, методом конечных разностей, то необходимо учитывать условия согласования в угловых точках, точках смены краевых условий на границе областей, а в уравнении теплопроводности – в углах на ребрах и на гранях. Данная задача решается с помощью метода изложенного в работе [9].

Математические модели рассматриваются авторами с целью численного исследования влияния различных факторов на хаотические состояния механических систем. Однако, не корректный выбор шага в численных методах может повлечь погрешности в вычислениях, которые приводят к регистрации хаотических колебаний там, где их нет [10]. Для выявления истинности хаоса необходимо соблюдение следующих условий. Хаос существует тогда, когда-либо имеется существенная зависимость от начальных условий, либо функция имеет положительный показатель Ляпунова, в каждой точке области ее определения.

Количественной мерой хаоса является знак старшего показателя Ляпунова, по этому для обоснования истинности хаоса при численной реализации математической модели контактного взаимодействия двух гибких балок с учетом стационарного и шумового полей рассмотрим сходимость старших показателей Ляпунова в зависимости от выбора числа разбиений в МКР и метода решения задачи Коши. Показатели Ляпунова будем строить тремя методами: Вольфа [11], Розенштейна [12] и Канца [13].

Параметры численного эксперимента: $\lambda = 50$ - отношение толщин балок к их длине, $t \in [0, 2048]$ - время, на котором рассматривались колебания пакета, $\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = 1$, $q_0^2 = 0$, $q_0^1 = 5000$, $\omega_{pq}^1 = 5.1$, $q_{0n}^{1,2} = 0$, $T^{1,2}(x, z, t) = 0$, $h_k = 0.1$, $P = 11000$.

В таблице 1 приведены ляпуновские показатели для каждой из балок в зависимости от числа разбиений в МКР. Задача Коши в данном эксперименте решалась Рунге-Кутта принца Дорманда 8-ого порядка (RK8pD). Из данных таблицы видно, что необходимо 320-400 точек разбиение по пространственной координате. Именно в этом диапазоне числа разбиений сигналы и спектры мощности Фурье полностью совпадают.

Таблица 1

N	1 балка			2 балка		
	Вольф	Розенштейн	Кантц	Вольф	Розенштейн	Кантц
400	0.03866	0.02371	0.00172	0.04921	0.01581	0.01058
320	0.03867	0.02406	0.00196	0.04920	0.02028	0.01066
80	0.02190	0.02432	0.00604	0.03720	0.01819	0.01305
40	0.01485	0.05186	0.01248	0.02666	0.06738	0.01322

В таблице 2 приведены ляпуновские показатели для каждой из балок при количестве разбиений в МКР $n = 400$ в зависимости от метода решения задачи Коши. Результаты показывают, что при таком количестве разбиений все рассмотренные численные методы позволяют говорить об истинности хаоса.

Таблица 2

Метод	1 балка			2 балка		
	Вольф	Розенштейн	Кантц	Вольф	Розенштейн	Кантц
RK8pD	0.03866	0.02371	0.00172	0.04921	0.01581	0.01058
Rk4i	0.02249	0.02766	0.00181	0.02623	0.04043	0.01114
RKF45	0.02249	0.02766	0.00181	0.02569	0.03028	0.00267
RK4	0.02249	0.02767	0.00181	0.02569	0.03028	0.00267
RK2	0.02249	0.02767	0.00181	0.02569	0.03025	0.00267
RK2i	0.02250	0.02772	0.00180	0.02571	0.03039	0.00267

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ проект № 15-19-10039

Литература

1. Коноплев Ю.Г., Кузнецов С.А., Саченков А.А., Точкасова М.А. Исследование контактного взаимодействия прямоугольной пластины с жесткой накладкой при гармонических колебаниях Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2011. Т. 153. № 4. С. 98-111.
2. Яковлева Т.В., Баженов В.Г., Крысько В.А., Крылова Е.Ю. Контактное взаимодействие пластины с системой балок при наличии зазоров с учетом белого шума Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2015. № 4. С. 259-272.
3. Яковлева Т.В., Крылова Е.Ю., Баженов В.Г., Крысько В.А. сложные колебания и контактное взаимодействие пластины, подкрепленной балкой с зазором между ними, в условиях экстремальных режимов нагружения Известия высших учебных заведений. Строительство. 2016. № 3 (687). С. 13-23.
4. Awrejcewicz Jan, Kutepov I., Pavlov S.P., Papkova I.V., Krysko A.V. Non-linear dynamics of flexible curvilinear Bernoulli-Euler nano-beams in a stationary temperature field, Journal of Engineering and Applied Sciences, 2016

5. Krysko A.V., Kutepov I.E., Papkova I.V., Saltykova O.A., Pavlov S.P. The Study of the Size-Dependent Geometrically Nonlinear Bernoulli-Euler Beam in the Temperature Field Impacted by the Transversal Load // International Journal of Applied Engineering Research, Volume 11, pp. 10398-10401, 2016
6. Синичкина А.О., Крылова Е.Ю., Мицкевич С.А., Крысько В.А. Динамика гибких балок при действии ударных нагрузок с учетом белого шума Проблемы прочности и пластичности. 2016. Т. 78. № 3. С. 280-288
7. Karman, Th. Festigkeits probleme in Maschinen bau/ Th. Karman // Encykle. D. Math. Wiss. 1910. Vol. 4, №4, P. 311 – 385
8. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М.: Наука. 1972,- 432с.
9. Awrejcewicz J., Krysko V. A., Krysko A. V. Thermo-Dynamics of Plates and Shells. Springer, Berlin (2007)
10. R. Lozi. Can we trust in numerical computations of chaotic solutions of dynamical systems? March 24, 2012 20:24 Proceedings Trim Size: 9.75in x 6.5in
11. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov Exponents from a time series // Physica 16 D. - 1985. - P. 285-317.
12. Rosenstein M.T., Collins J.J., Carlo J. De Luca A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets / Neuro Muscular Research Center and Department of Biomedical Engineering, Boston University, November 20, 1992.
13. Kantz H. A robust method to estimate the maximum Lyapunov exponent of a time series // Phys. Lett. A, 185, 1994. P. 77-87.

К ВОПРОСУ ВЗАИМНОГО ДВИЖЕНИЯ СЕКЦИЙ МНОГОСЕКЦИОННЫХ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ ПОЗИЦИОНИРОВАНИИ СХВАТА

Лапиков А.Л.¹, Масюк В.М.², Пашенко В.Н.³

¹КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Калуга, Россия, anton.lapikov@inbox.ru

²КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Калуга, Россия, masyuk77@mail.ru

³КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Калуга, Россия, pashenkovn@inbox.ru

Аннотация. В работе рассмотрены преимущества и недостатки многосекционных механизмов параллельной структуры. Поднимается проблема выбора варианта относительного движения секций при перемещении выходного звена механизма. Предлагаются возможные способы движения секций. Разбираются преимущества и недостатки предложенных подходов. Для одного из вариантов предлагается способ редукции сложности динамической модели. Формулируются предложения по дальнейшим исследованиям.

Ключевые слова. Многосекционные механизмы параллельной структуры, относительное движение секций, динамическая модель.

Многосекционные механизмы параллельной структуры, кинематическая схема одного из представителей которых, а именно трехсекционного механизма параллельной структуры с поступательными кинематическими парами в каждой секции, изображена на рис. 1, представляют собой консольное объединение нескольких механизмов параллельной структуры [1]. Подобные устройства, сохраняя преимущества механизмы параллельной структуры [2,3], значительно превосходят их по таким параметрам, как объем рабочего пространства, число степеней подвижности, манипулятивность. К основным недостаткам данного типа механизмов следует отнести, во-первых, сложность построения моделей кинематики, требующих формирования отдельных подходов, направленных на снижение сложности получаемого математического описания [4,5], во-вторых, отсутствие моделей, описывающих динамику систем подобного рода, и, в-третьих, отсутствие оптимального варианта взаимного движения секций при совершении требуемого движения выходного звена, обусловленное высокой избыточностью представителей данного типа механизмов.

Данная работа посвящена поиску вариантов взаимного движения секций многосекционных механизмов параллельной структуры при требуемом перемещении выходного звена.

Прежде всего отметим, что однозначного решения данной проблемы скорее всего не существует. Высокая избыточность, присущая представителям этого типа механизмов, позволяет достигать одного и того же положения в пространстве различными способами. В контексте задачи перемещения выходного звена из заданного положения в требуемое это, во-первых, позволяет сформировать некоторый набор траекторий, вдоль которых возможно само перемещение и, во-вторых, для каждой точки сформированной траектории возможно несколько, в том числе и бесконечное число, конфигураций, которые позволят выходному звену ее достичь.

Рис. 1. Кинематическая схема трехсекционного механизма параллельной структуры с поступательными кинематическими парами в каждой секции

Нами предлагается два основных варианта относительного движения секций в многосекционных механизмах параллельной структуры:

1. движение приводящих пар секций происходит последовательно: каждая секция полностью совершает требуемое движение, секции совершают движение в соответствии с порядковым номером в многосекционном механизме;
2. движение во всех приводящих парах всех секций происходит одновременно.

Первый подход есть ни что иное как попытка описать работу многосекционного механизма в терминах совместной работы нескольких механизмов параллельной структуры, выполняющих движение друг за другом.

В этом случае при движении i -ой секции все остальные секции жестко зафиксированы, т.е. все секции от 0-ой до $(i-1)$ -ой не меняют своего положения в пространстве, а секции от $(i+1)$ -ой до N -ой не меняют своего относительного положения друг относительно друга. В следствии этого математическую модель динамики многосекционного механизма можно декомпозировать на модели каждой

отдельной секции, дополнив их уравнениями, описывающими влияние секций друг на друга. На данном этапе проработки модели, влияние секций друг на друга предлагается описывать в виде модели секции с полезной нагрузкой. Под полезной нагрузкой для i -ой секции понимаем массу всех вышележащих секций. Поскольку в данном варианте вышележащие секции движения не совершают, то положение центра масс полезной нагрузки будет всегда постоянно в системе координат, связанной с i -ой подвижной платформой.

Рассмотрим динамическую модель секции с учетом полезной нагрузки. В качестве вектора обобщенных координат выберем декартовы координаты центра подвижной платформы в неподвижной системе координат и углы поворота осей подвижной системы координат относительно неподвижной на углы прецессии, нутации и собственного вращения. Под нагрузкой будем понимать точечную массу $M_{нагр}$, сосредоточенную в точке S . Подразумевается, что точечная масса жестко связана с платформой и не может перемещаться относительно нее, т.е. координаты точки S в локальной системе координат, связанной с подвижной платформой – постоянны.

В качестве обобщенных координат для записи уравнения динамики выберем элементы вектора $[x_o \ y_o \ z_o \ \alpha \ \beta \ \gamma]$, где x_o, y_o, z_o – декартовы координаты центра подвижной платформы в неподвижной системе координат, а α, β, γ – углы поворота осей подвижной системы координат относительно неподвижной на углы прецессии, нутации и собственного вращения. Переобозначим однородные координаты следующим образом

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z, \quad q_4 = \alpha, \quad q_5 = \beta, \quad q_6 = \gamma.$$

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех ее звеньев. Кинетическая энергия подвижной платформы с грузом может быть представлена в следующем виде:

$$T = T_{pl} + \sum_{i=1}^6 \tilde{T}_i, \quad (1)$$

где T_{pl} – кинетическая энергия платформы с грузом, $\tilde{T}_i$ – кинетическая энергия штанги.

Для рассматриваемого случая кинетическая энергия штанг с учетом принятых допущений выражается согласно формуле

$$\tilde{T}_j = \frac{1}{8} m \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \left(2(B_{i,j} - A_{i,j}) \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial B_{i,j}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \right) \right)^2}{\sum_{i=1}^3 (A_{i,j} - B_{i,j})^2}, j = \overline{1..6}. \quad (2)$$

Кинетической энергии платформы с грузом описывается следующим образом

$$T_{pl} = \frac{1}{2} (M + M_{нагр}) \sum_{i=1}^3 (\dot{q}_i^2) + \frac{1}{2} (\tilde{J}_x \omega_x^2 + \tilde{J}_y \omega_y^2 + \tilde{J}_z \omega_z^2), \quad (3)$$

где $\tilde{J}_x, \tilde{J}_y, \tilde{J}_z$ – главные центральные моменты инерции платформы с грузом относительно осей подвижной системы координат, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – составляющие вектора

мгновенной угловой скорости подвижной платформы, выражаемые из кинематических уравнений Эйлера:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(q_5)\sin(q_6) & \cos(q_6) & 0 \\ \sin(q_5)\cos(q_6) & -\sin(q_6) & 0 \\ \cos(q_5) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix}.$$

Выразим необходимые моменты инерции через известные центральные моменты инерции подвижной платформы J_x, J_y, J_z . Если однородные координаты центра подвижной платформы в неподвижной системе координат $(x_o \ y_o \ z_o \ 1)^T$, а однородные координаты точки $(x_s \ y_s \ z_s \ 1)^T$. Тогда искомые моменты инерции представляются следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{J}_x &= J_x + M_{нагр} \left((y_s - y_o)^2 + (z_s - z_o)^2 \right), \\ \tilde{J}_y &= J_y + M_{нагр} \left((x_s - x_o)^2 + (z_s - z_o)^2 \right), \\ \tilde{J}_z &= J_z + M_{нагр} \left((x_s - x_o)^2 + (y_s - y_o)^2 \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив соотношения (2) - (4) в формулу (1) запишем выражение для кинетической энергии механической системы с грузом

$$T = \left(\frac{1}{2} (M + M_{нагр}) \sum_{i=1}^3 (\dot{q}_i^2) + \frac{1}{2} (\tilde{J}_x \omega_x^2 + \tilde{J}_y \omega_y^2 + \tilde{J}_z \omega_z^2) + \frac{1}{8} m \sum_{j=1}^6 \frac{\left(\sum_{i=1}^3 \left(2(B_{i,j} - A_{i,j}) \sum_{k=1}^6 \left(\frac{\partial B_{i,j}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial t} \right) \right) \right)^2}{\sum_{i=1}^3 (A_{i,j} - B_{i,j})^2} \right). \quad (5)$$

Перейдем к нахождению обобщенных сил. Составим выражение работы на элементарных перемещениях. Работа каждой силы будет равна скалярному произведению вектора силы на вектор элементарного перемещения

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_{i=1}^6 \left(F_i^x \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_i^y \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_i^z \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right), \quad j = 1, 2, 4, 5, 6, \\ Q_3 &= - (M + M_{нагр} + 6m) g + \sum_{i=1}^6 \left(F_i^x \frac{\partial x_i}{\partial q_3} + F_i^y \frac{\partial y_i}{\partial q_3} + F_i^z \frac{\partial z_i}{\partial q_3} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Вычислив необходимые производные (5), и подставив выражения для обобщенных сил (6) получим шесть дифференциальных уравнений, описывающих динамику платформы с грузом.

Задача определения координат центра масс нагрузки $(x_s \ y_s \ z_s \ 1)^T$, может быть сведена к определению положению секций в пространстве, т.е. к прямой задаче о положении. Решение данной задачи рассмотрено в работе [4].

Плюсом второго подхода является очевидное быстроедействие системы. Причем с увеличением числа секций в манипуляторе преимущество по времени реализации одного и того же движения для второго подхода будет значительно увеличиваться по сравнению с первым. С другой стороны при построении динамической модели многосекционного механизма в данном случае придется учитывать взаимовлияние секций друг на друга, что приведет к получению громоздкой и сложной модели. Данная задача требует проработки и является наиболее перспективной для управления

На текущий многосекционные механизмы параллельной структуры являются малоизученным типом механизмов, требующим дальнейших исследований в области создания моделей динамики и поиска способов уменьшения сложности получаемых моделей. Вопросы, связанные со способом относительного движения секций, требуют формирования критериев, способных определить наиболее оптимальный способ движения в контексте решаемой задачи.

Литература

1. Merlet J. P. Parallel robots–Kluwer Academic Publishers, 2000. 372p.
2. Глазунов В.А., Чунихин А.Д. Развитие исследований механизмов параллельной структуры. Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. №3. С.37-43.
3. Хейло С.В., Глазунов В.А., Ширинкин М.А., Календарев А.В. Возможные применения механизмов параллельной структуры // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. №5. С.19-24.
4. Лапиков А.Л., Пашенко В.Н. Алгоритм решения прямой задачи кинематики многосекционного манипулятора параллельной структуры // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. № 12. С. 76-95.
5. Лапиков А.Л., Пашенко В.Н. Алгоритм решения обратной задачи о положении многосекционных механизмов параллельной структуры с использованием кривых Безье // В сборнике: XXVII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС - 2015) Труды конференции. 2015. С. 320-324.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И ВЕТВЛЕНИЯ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ МИКРОСИСТЕМНОЙ ТЕХНИКИ

Лукин А.В.¹, Попов И.А.¹, Скубов Д.Ю.^{1,2}

¹СПбПУ, ИПММ, каф. «Механика и процессы управления», luvin_av@spbstu.ru

²ИПМАШ РАН, Санкт-Петербург, Россия, skubov.dsk@yandex.ru

Аннотация. В данной статье представлены результаты исследований устойчивости и ветвления форм равновесия упругих элементов микросистемной техники (проводящих мембран и пластин) при действии пондеромоторных сил электростатического поля различных конфигураций. Для нахождения решений возникающих здесь нелинейных эллиптических краевых задач математической физики используются аналитические методы, а также численные алгоритмы продолжения по параметру решений нелинейных операторных уравнений.

Ключевые слова. микросистемная техника, мембрана, пластина, теория ветвления, устойчивость упругих систем.

Введение

Разработка нано/микросистемной техники (НМСТ) является одним из наиболее перспективных направлений развития приборостроения в XXI веке, которое влечет за собой коренное изменение технологий производства приборов и обеспечивает беспрецедентный диапазон применения измерительных и исполнительных устройств. В качестве основных областей применения технологий НМСТ следует назвать следующие [1-6]:

- 1) военная и гражданская авиация (микромеханические акселерометры, микродатчики давления);
- 2) космические навигационные системы, системы навигации подводного и надводного флота (микромеханические гироскопы);
- 3) технологии струйной печати (пьезоэлектрические микроэлектромеханические системы – микронасосы);
- 4) оптические и телекоммуникационные системы (линзы, диафрагмы, оптические переключатели, микрозеркала и дифракционные решетки);
- 5) биологические (биомедицинские) нано/микро-электромеханические системы (биосенсоры, детекторы массы прилипающей частицы, системы направленного транспорта лекарственных веществ в организме);
- 6) ультразвуковые преобразователи;
- 7) системы охлаждения микроэлектроники (электростатические ускорители жидкости).

Широкое применение НМСТ в современном приборостроении связано с высокой чувствительностью данных систем к нано- и микро-масштабным изменениям физических (давление, ускорение, температура, длина волны, интенсивность магнитного поля, напряжение), химических и биологических параметров (состав и концентрация вещества, скорость реакции). Причиной этому является определяющее влияние совместного действия физических полей различной природы (механического, температурного, электромагнитного) на состояние элементов НМСТ. В связи с масштабным фактором, внутренняя связанность (междисциплинарность) задачи анализа прочности и работоспособности элементов НМСТ приводит к необходимости исследования существенно нелинейных эффектов, вызванных совместным действием указанных физических полей.

Целью данной работы является исследование устойчивости и ветвления форм

равновесия упругих элементов микросистемной техники (проводящих мембран и пластин) при действии пондеромоторных сил электростатического поля.

Важной характеристикой датчиков и актуаторов, работающих на электростатическом принципе возбуждения, является максимальное допустимое значений разности потенциалов между неподвижными электродами и проводящим упругим элементом. Сильная физическая нелинейность системы приводит к исчезновению устойчивых форм равновесия при достижении напряжением некоторого предельного значения - «схлопыванию» подвижного упругого элемента с неподвижным электродом. В англоязычной литературе данная бифуркация часто называется «*static pull-in instability*» [21].

1. Постановка связанной задачи электроупругости микропластинок

Уравнения нелинейной теории гибких пластинок (уравнения Кармана) имеют вид [7]:

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w &= L(w, \Phi) + h\Pi(\sigma, w) + F, \\ \nabla^4 \Phi &= -\frac{Eh}{2}L(w, w), \end{aligned} \quad (1)$$

где w – прогиб пластинки; Φ – функция напряжений; h – толщина пластинки; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – изгибная жесткость пластинки; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала; F – интенсивность внешней поперечной нагрузки, вообще говоря, зависящей от прогиба w .

Оператор $L(w, \Phi)$ в полярных координатах (r, θ) определяется формулой

$$\begin{aligned} L(w, \Phi) &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ &\quad - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right); \end{aligned} \quad (2)$$

заменой Φ на w находим $L(w, w)$.

Оператор $\Pi(\sigma, w)$ в уравнении (1) выражает действие усилий $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ в срединной поверхности пластинки:

$$\Pi(\sigma, w) = \sigma_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2\tau_{r\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \quad (3)$$

Для оператора Лапласа ∇^2 в полярных координатах имеем выражение

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (4)$$

Рассмотрим круглую пластинку, равномерно растянутую натяжением T . В этом случае $\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{T}{h}$, $\tau_{r\theta} = 0$, и оператор $\Pi(\sigma, w)$ принимает вид

$$\Pi(\sigma, w) = \frac{T}{h} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{T}{h} \nabla^2 w. \quad (5)$$

Для осесимметричных задач уравнения статики гибких пластинок записываются в форме

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{dw}{dr} \frac{d\Phi}{dr} \right) + \frac{T}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) + F(r, w), \\ \nabla^4 \Phi &= -\frac{Eh}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} \frac{dw}{dr}, \end{aligned} \quad (6)$$

где бигармонический оператор ∇^4 имеет вид

$$\nabla^4 = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2. \quad (7)$$

Перейдем к определению внешней силы F , действующей на пластинку в электрическом поле. Как известно, объемные пондеромоторные силы электрического поля могут быть сведены к поверхностным силам натяжения, характеризуемым максвелловым тензором натяжений $\mathbf{T}$ [8,9]. Компоненты тензора $\mathbf{T}$ в произвольной декартовой системе координат x_α , $\alpha = 1, 2, 3$ выражаются формулами:

$$T_{\alpha\beta} = \epsilon_r \epsilon_0 \left(E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right), \quad (8)$$

где $\mathbf{E}$ – вектор напряженности электрического поля.

Рассмотрим круглую пластинку в поле одного неподвижного электрода (Рис. 1).

Рис.1 – Круглая пластинка в поле одного электрода

Начало O декартовой системы координат расположим в центре пластины; ось Oz направим вертикально вниз. Пренебрегая неоднородностью электрического поля вблизи краев пластины и электрода, найдем, что вектор напряженности $\mathbf{E} = E_z \mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ – единичный вектор оси Oz . Примем прогиб пластинки w положительным в направлении Oz . Внешняя сила F , входящая в уравнения равновесия (1), равна компоненте T_{zz} тензора натяжений:

$$F = T_{zz} = \epsilon_r \epsilon_0 \left(E_z^2 - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right) = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = -\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{2} |\nabla \varphi|^2, \quad (9)$$

где φ – потенциал электрического поля. Для нахождения φ необходимо решить уравнение Пуассона [8]

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho_q, \quad (10)$$

где ρ_q – объемная плотность электрического заряда. В рассматриваемом случае $\rho_q = 0$. С учетом сделанных предположений об однородности электрического поля уравнение Лапласа для потенциала примет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (11)$$

Положим $\varphi = V$ на пластине (т.е. при $z = w$ – величине прогиба в данной точке пластины) и $\varphi = 0$ на неподвижном электроде ($z = d$). Тогда

$$\varphi = \frac{z-d}{w-d} V, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{V}{d-w}, \quad (12)$$

и для пондеромоторной силы F из (9) получаем выражение

$$F(w) = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 V^2}{2(d-w)^2}. \quad (13)$$

Рассмотрение системы с двумя неподвижными электродами, расположенными симметрично относительно упругого элемента, приводит к следующему выражению для пондеромоторной силы:

$$F(w) = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 V_1^2}{2(d-w)^2} - \frac{\epsilon_r \epsilon_0 V_2^2}{2(d+w)^2}, \quad (14)$$

где V_1, V_2 – разности потенциалов между пластинкой и двумя неподвижными электродами.

В дальнейшем исследуются формы равновесия растянутых с натяжением T круглых пластинок в электрических полях одного и двух электродов. Для удобства процедуры приведения к безразмерному виду, присвоим размерным величинам функции напряжений Φ , прогиба w и радиальной координаты r , а также дифференциальным операторам ∇ и L символ " $\hat{}$ ":

$$\begin{aligned} D\hat{\nabla}^4 \hat{w} &= \hat{L}(\hat{w}, \hat{\Phi}) + T\hat{\nabla}^2 \hat{w} + \hat{F}, \\ \hat{\nabla}^4 \hat{\Phi} &= -\frac{Eh}{2} \hat{L}(\hat{w}, \hat{w}). \end{aligned} \quad (15)$$

2. Ветвление форм равновесия круглых мембран и их устойчивость

Конкретный метод перехода к безразмерным уравнениям зависит от принимаемых физических предположений. Имея в виду рассмотрение форм равновесия круглой натянутой мембраны радиуса R в электрическом поле, приведем уравнения (15) к виду

$$\begin{aligned} \delta \nabla^4 w &= \beta L(w, \Phi) + \nabla^2 w + \lambda \tilde{F}_e, \\ \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2} L(w, w), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} r &= \frac{\hat{r}}{R}, & w &= \frac{\hat{w}}{d}, & \Phi &= \frac{\hat{\Phi}}{Ehd^2}, & \delta &= \frac{D}{R^2 T}, \\ \beta &= \frac{Eh}{T} \left(\frac{d}{R}\right)^2, & \lambda &= \frac{\epsilon_r \epsilon_0 R^2 V^2}{2d^3 T}. \end{aligned} \quad (17)$$

Приведенная пондеромоторная сила в системе с одним неподвижным электродом имеет вид

$$\tilde{F}_e = \frac{1}{(1-w)^2}, \quad (18)$$

в системе с двумя электродами при $V_1 = V_2 = V$ (см. формулу **Ошибка!** **Источник ссылки не найден.**)

$$\tilde{F}_e = \frac{1}{(1-w)^2} - \frac{1}{(1+w)^2}. \quad (19)$$

Введенные параметры имеют понятный физический смысл: параметр δ характеризует соотношение между изгибной и мембранной жесткостями пластинки; параметр β определяет значение геометрической нелинейности уравнений равновесия при данном отношении расстояния между обкладками d к радиусу пластинки R .

Широкий класс микроэлектромеханических систем с математической точки зрения описывается уравнениями равновесия и колебаний тонких мембран. К таким

системам, в частности, относятся ультразвуковые преобразователи, микрофоны, микронасосы и резонаторы [10]. Характерными особенностями данных систем являются:

1) малость зазора между обкладками (расстояния между подвижным элементом и неподвижным электродом) по сравнению с продольным размером упругого элемента (радиусом пластинки);

2) малая толщина упругого элемента (пластинки) и преобладание мембранной жесткости над изгибной.

2.1. Равновесия в поле одного неподвижного электрода

В указанных предположениях примем в уравнениях равновесия (16) параметры β и δ равными нулю. В результате получаем уравнение равновесия натянутой мембраны в электрическом поле одного неподвижного электрода:

$$\nabla^2 u = \frac{\lambda}{(1+u)^2}, \quad (20)$$

где выполнен переход к новой искомой функции прогиба $u = -w$. Функция прогиба $u(r, \theta)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} r = 0: \quad & u - \text{огр.}; \\ r = 1: \quad & u = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Аналитический метод решения нелинейной краевой задачи (20)-(21), основанный на сведении уравнения (20) к уравнению Эмдена-Фаулера описан в работах [11,12]. В статье авторов [13] выполнена численная реализация данного метода и найдена диаграмма ветвления форм осесимметричных равновесия. В дальнейшем будут рассматриваться математические модели микромеханических систем, для которых аналитические методы не разработаны. Это приводит к необходимости применения более универсальных, но приближенных методов решения нелинейных краевых задач эллиптического типа. Основным методом такого класса является метод Галеркина в применении к исходному нелинейному уравнению («Reduced order method», [14]).

Применим метод Галеркина к исходному уравнению осесимметричных прогибов мембраны:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = \frac{\lambda}{(1+u)^2}. \quad (22)$$

Решение будем искать в виде ряда по формам свободных осесимметричных колебаний:

$$u(r) = \sum_{m=1}^n C_m J_0(\gamma_{0m} r). \quad (23)$$

. С учетом граничного условия на краю мембраны, коэффициенты γ_{0m} определяются корнями функций Бесселя:

$$J_0(\gamma_0) = 0. \quad (24)$$

Подставив ряд (23) в (22) и записав проекционные условия, мы получим систему нелинейных уравнений, в которой неизвестные коэффициенты C_m находятся под знаком интеграла, что затрудняет поиск решений. Чтобы преодолеть эту трудность, можно либо предварительно умножить уравнение (22) на $(1+u)^2$, либо разложить правую часть в ряд Тейлора по функции прогиба u . Последовательно рассмотрим эти две возможности.

Следуя первому методу, приходим к следующей системе нелинейных уравнений:

$$\int_0^1 r \left[1 + \sum_{m=1}^n C_m J_0(\gamma_{0m} r) \right]^2 \left(\sum_{m=1}^n C_m \gamma_{0m}^2 J_0(\gamma_{0m} r) \right) J_0(\gamma_{0s} r) dr =$$

$$= -\lambda \int_0^1 r J_0(\gamma_{0s} r) dr, \quad s = 1, \dots, n. \quad (25)$$

Система нелинейных алгебраических уравнений (24), зависящих от физического параметра λ , решается численно с помощью алгоритмов продолжения по параметру решений нелинейных операторных уравнений MATCONT [15]. На Рис. 2 показано сравнение диаграмм ветвления, полученных прямым численным методом и методом Галеркина с учетом различного числа координатных функций ($n = 1, 2, 4, 7$).

Рис. 2 – Диаграмма ветвления форм равновесия

Как видно из рисунка, неточность метода Галеркина проявляется лишь для заостренных к центру форм прогиба, которые не соответствуют исходному предположению о малости кривизны мембраны. Представляющие основной интерес устойчивые формы равновесия определяются точно, и при этом для их нахождения достаточно использовать две координатные функции $J_0(\gamma_{01}r), J_0(\gamma_{02}r)$. Отметим, что при решении задач динамики мембран в электрическом поле под действием периодического внешнего возбуждения точное нахождение неустойчивых ветвей диаграммы, соответствующих большим прогибам, имеет большое значение, т.к. они определяют области притяжения различных установившихся динамических режимов.

Рассмотрим второй вариант применения метода Галеркина к решению уравнения (22), связанный с разложением нелинейного члена в ряд Тейлора. Ограничиваясь первыми N членами ряда Тейлора и представляя решение в виде ряда по собственным функциям (23), получим следующую систему уравнений для определения коэффициентов $C_1, \dots, C_n$:

$$\lambda \int_0^1 r J_0(\gamma_{0s} r) \cdot \left[\sum_{j=0}^N (-1)^j (j+1) \left(\sum_{m=1}^n C_m J_0(\gamma_{0m} r) \right)^j \right] dr = -C_s \gamma_{0s}^2 \|J_0(\gamma_{0s} r)\|^2, \quad (26)$$

$$s = 1, \dots, n.$$

На Рис. 3 показано сравнение диаграмм ветвления, полученных прямым

численным методом и методом Галеркина с учетом двух координатных функций ($n = 2$) и различного числа слагаемых в ряде Тейлора ($N = 2, 5, 7$). На рисунке приведена также бифуркационная кривая для $n = 2$, полученная методом домножения уравнения (22) на $(1 + u)^2$.

Как видно из рисунка, степенное разложение нелинейного члена с учетом трех слагаемых позволяет достаточно точно определять устойчивые положения равновесия мембраны. При этом важная для динамических расчетов неустойчивая ветвь вычисляется точно лишь при учете семи членов в степенном разложении.

Рис. 3 – Диаграмма ветвления форм равновесия

2.2. Равновесия в поле двух неподвижных электродов

Рассмотрим задачу о нахождении форм равновесия и исследовании их устойчивости для круглой мембраны, расположенной между двумя электродами. В этом случае приведенные к безразмерному виду уравнения равновесия записываются следующим образом:

$$\nabla^2 w = \lambda \left[\frac{1}{(1+w)^2} - \frac{1}{(1-w)^2} \right]. \quad (27)$$

Рассматриваемая задача в двух отношениях математически существенно отличается от задачи о мембране в поле одного электрода. Во-первых, для уравнения (27) не выполняются условия теоремы Ниренберга о радиальной симметричности решений [16], т.е. в системе возможно существование косимметричных форм равновесия. Во-вторых, для рассматриваемой задачи не разработаны эффективные аналитические методы, подобные методу сведения исходного уравнения к уравнению Эмдена-Фаулера, которые позволяли бы проводить качественный анализ зависимости числа и вида форм равновесия от физического параметра λ .

В статье авторов [13] показано, что точки ответвления от нулевого решения нетривиальных форм равновесия с индексом осевой симметрии k определяются соотношением

$$4\lambda = \gamma_{km}^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (28)$$

где γ_{km} – корни функции Бесселя порядка k :

$$J_k(\gamma_k) = 0. \quad (29)$$

При этом задача нахождения конкретного вида ненулевых форм равновесия не поддается прямому аналитическому исследованию. Непосредственное применение

численных методов, таких как метод конечных элементов, в данном случае также затруднительно в связи с необходимостью задания начального приближения к искомому решению, что требует предварительного изучения характера ветвления в окрестности точек бифуркации.

Приближенное аналитическое решение задачи (27) может быть получено с помощью методов теории ветвления решений нелинейных уравнений [17,18]. Однако подобные аналитические приближения, вообще говоря, действительны только в малой окрестности точек бифуркации, т.к. аналитические методы теории ветвления задействуют процедуру линеаризации исследуемых уравнений. С целью изучения зависимости от физического параметра λ осесимметричных форм равновесия с конечными амплитудами, применим метод Галеркина.

Решение уравнения (27) будем искать в виде ряда по формам свободных колебаний с индексом осевой симметрии k :

$$w_k(r, \theta) = \sum_{m=1}^n C_m J_k(\gamma_{km} r) \cos k\theta. \quad (30)$$

Подставив ряд (30) в (27) и записав проекционные условия, получим следующую систему нелинейных уравнений для определения коэффициентов $C_1, \dots, C_n$:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r \left[1 - \left(\sum_{m=1}^n C_m J_k(\gamma_{km} r) \cos k\theta \right)^2 \right] \left(\sum_{m=1}^n C_m \gamma_{km}^2 J_k(\gamma_{km} r) \right) J_k(\gamma_{ks} r) \cos^2 k\theta \, dr d\theta = 4\pi \lambda C_s \cdot \|J_k(\gamma_{ks} r)\|^2, \quad s = 1, \dots, n. \quad (31)$$

На Рис. 4 показана вычисленная диаграмма ветвления форм равновесия мембраны в поле двух электродов. Пунктирными линиями обозначены осесимметричные формы, штрих-пунктирными – формы с индексом симметрии $k = 1$. Точки ответвления данных форм от нулевого решения обозначены квадратными и круглыми маркерами соответственно.

Рис.4 – Диаграмма ветвления форм равновесия мембраны в поле двух электродов

Сплошной линией обозначено устойчивое тривиальное положение равновесия. Согласно общим принципам теории ветвления [19], в первой точке субкритической бифуркации $\lambda = \lambda_1$ нейтральное положение равновесия теряет устойчивость; ответвляющиеся от него ненулевые формы равновесия также неустойчивы.

3. Ветвление форм равновесия круглых пластинок и их устойчивость

Перейдем к изучению статической устойчивости круглых пластинок. Приведем геометрически нелинейные уравнения равновесия пластинки (15) к безразмерному виду

$$\nabla^4 w = \beta L(w, \Phi) + \delta \nabla^2 w + \lambda \tilde{F}_e, \quad (32)$$

$$\nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w),$$

где

$$r = \frac{\hat{r}}{R}, \quad w = \frac{\hat{w}}{d}, \quad \Phi = \frac{\hat{\Phi}}{Ehd^2}, \quad \delta = \frac{R^2 T}{D}, \quad (33)$$

$$\beta = \frac{12d^2(1-\nu^2)}{h^2}, \quad \lambda = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 R^4 V^2}{2d^3 D}.$$

Рассмотрим осесимметричные формы равновесия круглой пластинки в поле одного электрода. В случае заземленной по краю пластинки граничные условия записываются следующим образом [7,20]:

$$r = 0: \quad w, \Phi = \text{огр.};$$

$$r = 1: \quad w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0, \quad \frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \nu \frac{d\Phi}{dr} = 0. \quad (35)$$

Выполняя поиск решения в виде ряда по собственным формам колебаний пластинки к геометрически линейной постановке и записывая проекционные условия метода Галеркина, определим зависимость прогиба в центральной точке пластинки от величины параметра λ . На Рис. 5 показаны бифуркационные диаграммы, вычисленные при различных значениях параметра δ , характеризующего величину приложенных к пластинке мембранных усилий (растягивающих или сжимающих). В расчете учитывались две первые координатные функции; коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$.

Рис. 5 – Диаграмма ветвления форм равновесия пластинки при различных δ

Как видно из рисунка, величина мембранных усилий определяет бифуркационное значение параметра λ , соответствующее исчезновению равновесных положений пластинки (явлению «pull-in»).

Заключение

Выполненное исследование устойчивости и ветвления форм равновесия круглых пластинок представляет практическую важность при проектировании элементов микросистемной техники, т.к. позволяет определить рабочие зоны приборов по параметру разности потенциалов между электродами. Кроме того, полученные аналитические результаты являются верификационной базой при применении численных методов расчета элементов НМСТ, реализованных в программных системах ANSYS, COMSOL и т.д.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 17-01-00414 А.

Литература

1. Pelesko, John A. Modeling MEMS and NEMS // Chapman & Hall/CRC, 2003
2. MEMS : introduction and fundamentals / edited by Mohamed Gad-El-Hak // Taylor & Francis Group, LLC, 2006
3. Lyshevski, Sergey Edward MEMS and NEMS : systems, devices, and structures // CRC Press LLC, 2002
4. MEMS/NEMS Handbook Techniques and Applications / edited by Cornelius T. Leondes // Springer Science, 2006
5. В. Варадан, К. Виной, К. Джозе. ВЧ МЭМС и их применение // М.: Техносфера, 2004
6. Распопов В.Я. Микромеханические приборы: учебное пособие. – М.: Машиностроение, 2007
7. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем – М.: Наука, 1967
8. Тамм И.Е. Основы теории электричества: Учеб. пособие для вузов. – 11-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 616 с.
9. Jackson J.D. Classical Electrodynamics – New York: Wiley, 1999
10. Saghir S., Bellaregi M.L. et. al. Initially curved microplates under electrostatic actuation: theory and experiment – J. Micromech. Microeng. 26 (2016)
11. Khodzhaev K. Nonlinear problems on the deformation of elastic bodies by a magnetic field – Journal of Applied Mathematics and Mechanics, vol. 34, issue 4, pp. 622-641 (1970)
12. Скубов Д.Ю., Ходжаев К.Ш., Нелинейная электромеханика – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003
13. Skubov D. Yu. et. al. Bifurcations of Equilibrium Forms of NEMS/MEMS as a Sensor of Microphysical Alterations - MATEC Web of Conferences 76(01001), October 2016
14. Younnis M.I. MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics – Springer Science, 2011
15. Kuznetsov Yu.A., Govaerts W. et. al. MATCONT and CL_MATCONT: Continuation toolboxes in MATLAB – Utrecht University, 2011
16. B.Gidas, Wei-Ming Ni, L. Nirenberg – Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle – Commun. Math. Phys. 68. 209-243 (1979)
17. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений – М.: Наука, 1969
18. Антман С., Келлер Дж. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения – М.: Мир, 1974
19. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций – М.: Мир, 1983
20. Nayfeh A.H., Pai P.F. Linear and Nonlinear Structural Mechanics – New York: Wiley, 2004
21. Wen-Ming Zhang, Han Yan, Zhi-Ke Peng, Guang Meng, Electrostatic pull-in instability in MEMS/NEMS: A review – Sensors and Actuators A 214 (2014) 187–218

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧЕ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ МАССЫ И ПОЛОЖЕНИЯ МИКРОЧАСТИЦЫ С ПОМОЩЬЮ МИКРОСИСТЕМНОЙ ТЕХНОЛОГИИ

Лукин А.В.¹, Скубов Д.Ю.², Абдуллаев Р.А.³

СПбПУ, ИПММ, каф. «Механика и процессы управления», Россия

¹lukinalexei@yandex.ru, ²skubov.dsk@yandex.ru, ³caboose7@yandex.ru

Аннотация. В данной работе известное решение задачи о детектировании массы и положения микрочастицы рассматривается с помощью численных методов продолжения по параметру и метода конечных элементов. Для использования численного продолжения по параметру построено многомодальное разложение методом Галеркина. Обоиими методами построены зависимости сдвигов первых двух собственных частот в зависимости от массы и положения частицы, которые затем сравнены.

1. Введение

Одна из областей, в которой задача о детектировании массы и положения микрочастицы находит практическое применение - это медицина. Использование того факта, что добавление массы в систему уменьшает ее собственные частоты, используется для детектирования биологических частиц, таких как бактерии и вирусы. Из всех разработанных методов определения характеристик этих частиц, наиболее чувствительным является измерение сдвигов собственных частот. В [1] – [3], методом одномодального приближения Галеркина и возмущения по параметру, построены явные аналитические выражения для сдвига частот. В данной статье рассмотрены численные методы продолжения по параметру, примененные к многомодальному разложению Галеркина, и конечно-элементное решение.

2. Постановка задачи

Рассматриваемая микроэлектромеханическая система моделируется как балка Бернулли-Эйлера с геометрической нелинейностью, связанной с изменением длины балки, и электрического поля, конфигурация которого соответствует модели плоскопараллельного конденсатора. Следует отметить, что такое приближение электрического поля не учитывает краевые эффекты и располагает к такому выбору параметров, при котором изменение кривизны балки будет малой величиной, т. е. $d/L < 1$. Сила тяжести микрочастицы не учитывается из-за ее малости, однако учитывается влияние частицы на инерционное слагаемое, и оно моделируется как точечная добавка:

$$\left[\rho b h + \frac{m}{L} \delta(\tilde{x} - \tilde{l}) \right] \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} + EI \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^4} = \left[\tilde{P} + \frac{EA}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{2} \varepsilon b \frac{[V_{dc} + V_{ac} \cos(\Omega \tau)]^2}{(d - \tilde{u})^2} \quad (1)$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\tilde{u} \big|_{\tilde{x}=0} = 0 \quad \tilde{u}' \big|_{\tilde{x}=0} = 0 \quad \tilde{u} \big|_{\tilde{x}=L} = 0 \quad \tilde{u}' \big|_{\tilde{x}=L} = 0$$

Здесь ρ – плотность, b – толщина, h – высота, L – длина, E – модуль упругости, I – момент инерции, A – площадь, d – зазор, m – масса частицы, $\tilde{l}$ – положение частицы,

$\tilde{P}$ – продольная сила, ε – диэлектрическая проницаемость среды, $V_{dc/ac}$ – постоянная/переменная составляющая напряжения.

Обезразмерим задачу, введя соответствующие характерные параметры в системе:

$$\begin{aligned} [1 + \alpha_1 \delta(x-l)] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = & \left[P + \alpha_3 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ & + \alpha_2 \frac{[V_{dc} + V_{ac} \cos(\omega t)]^2}{(1-u)^2} \end{aligned} \quad (2)$$

С соответствующими однородными граничными условиями. Здесь $\alpha_1 = \frac{m}{pbhL}$ – характеризует массу частицы, $\alpha_2 V_{dc/ac} = \frac{6\varepsilon L^4}{Eh^3 d^3} V_{dc/ac}$ – характеризует величину электрического поля, $\alpha_3 = \frac{Ad^2}{2l}$ – характеризует геометрическую нелинейность.

3. Статическая задача.

Рассмотрим электростатическое поле и найдем соответствующие положения равновесия. Убирая из уравнения (2) все слагаемые, зависящие от времени, приходим к нелинейной краевой задаче четвертого порядка с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \left[P + \alpha_3 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{V_{dc}^2}{(1-u)^2} \quad (3)$$

Далее везде будем полагать $P = 0$. Для численного решения такого уравнения избавимся от производных и интеграла, построив конечно-разностную схему. Получившуюся систему нелинейных алгебраических уравнений можно решить, пользуясь численными методами продолжения по параметру, реализованными в модуле MATCONT [Kuznetsov Yu.A., Govaerts W. et. al. MATCONT and CL_MATCONT: Continuation toolboxes in MATLAB – Utrecht University, 2011]. Решение любой системы алгебраических уравнений можно рассматривать как нахождение стационарного режима системы дифференциальных уравнений, правая часть которых и является искомой алгебраической системой. Таким образом, для любого набора параметров можно найти (если существует) статический прогиб.

Так как уравнение нелинейное, единственность его решения не гарантируется. Зная, что одно из характерных особенностей микроэлектромеханических систем это явление “pull-in” или явление катастрофической потери устойчивости, используем процедуру продолжения по параметру V_{dc} к нулевому прогибу (положение равновесия в отсутствии электрического поля). Получившаяся диаграмма ветвления имеет вид:

Рис. 1

Таким образом, для каждого значения V_{dc} (в интервале до критического значения в точке ветвления, соответствующего эффекту “pull-in”) существует 2 решения – устойчивое и неустойчивое. Найдя область существования решений, зафиксируем два значения для дальнейшего исследования влияния величины электрического поля, так как, вспоминая оговорку про допущения в электрическом поле, хотелось бы сравнить результаты исследования такой модели с численным решением МКЭ:

Рис. 2

4. Динамическая задача.

Рассмотрим малые колебания относительно найденных положений равновесия: $u \rightarrow u_{st} + u$, $u \ll 1$. Положим $V_{ac} = 0$. Подставляя в уравнение (2) и линеаризуя, получим уравнение в вариациях:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - f_2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f_1(x)u - 2\alpha_3 \frac{d^2 u_{st}}{dx^2} \int_0^1 \frac{du_{st}}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} dx + [1 + \alpha_1 \delta(x-l)] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

$$\text{Где } f_1(x) = \frac{2u_{st}''''}{1-u_{st}} - \frac{2u_{st}''}{1-u_{st}} (P + \alpha_3 \int_0^1 \left(\frac{du_{st}}{dx}\right)^2 dx), f_2(x) = P + \alpha_3 \int_0^1 \left(\frac{du_{st}}{dx}\right)^2 dx.$$

Оператор в уравнении (4) линейный, поэтому можно поставить задачу о нахождении его собственных чисел. Подставляя $u = \phi e^{i\omega t}$ в уравнение (4), приходим к задаче на собственные значения:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - f_2(x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - f_1(x) \phi - 2\alpha_3 \frac{d^2 u_{st}}{dx^2} \int_0^1 \frac{du_{st}}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx - \omega^2 [1 + \alpha_1 \delta(x-l)] \phi = 0 \quad (5)$$

С соответствующими однородными граничными условиями.

Следуя [1] - [3], для получения явных выражений частот используются одномерный метод Галеркина и метод возмущения по параметру. Показано, что метод возмущения по параметру показывает более точные результаты, однако при его реализации уже в случае линейного разложения возникает альтернатива Фредгольма, для разрешения которой требуется решить сопряженную задачу. В следствии несамосопряженности оператора, такая задача представляет собой дополнительное уравнение. Авторы в [1] - [3] полагают, что использование нескольких мод в методе Галеркина в комбинации с разложением по параметру дадут хорошую сходимость. Рассмотрим для начала разложение Галеркина по произвольному числу собственных форм. Подставим его в (5) и запишем систему проекций на собственные формы:

$$\sum_{j=0}^n a_j \left((\omega_j^2 - \omega^2) \delta_{js} - \int_0^1 f_2 \phi_s \phi_j'' dx - \int_0^1 f_1 \phi_s \phi_j dx - 2\alpha_3 \int_0^1 u_{st}' \phi_s dx \int_0^1 u_{st}' \phi_j' dx - \omega^2 \alpha_1 \phi_j(l) \phi_s(l) \right) = 0, \quad s = 1:n \quad (6)$$

Система линейная относительно коэффициентов формы, для нетривиального решения требуется равенство нулю ее определителя. Таким образом, получена неявная функция вида $\Phi(\alpha_1, l, \omega) = 0$, связывающая частоту колебаний с характерными параметрами детектируемой частицы. Такая функция является полиномом относительно ω^2 с коэффициентами, зависящими от α_1 и l . Однако степень этого полинома зависит от числа учтенных форм в разложении.

Рассмотрим первые две формы в разложении и возьмем $V_{dc} = 1.1481$, который выбрали в статической задаче. Зафиксируем α_1^* соответствующий массе одной частицы и, используя MATCONT, будем продолжать решение $\Phi(\alpha_1^*, 0, \omega) = 0$ по параметру положения частицы l . Так как $\Phi(\alpha_1^*, 0, \omega) = 0$ при учете двух форм имеет два корня, продолжать решение можно с двух различных ω_0 . Для первой частоты:

Рис. 3

Видно, что при положении массы в центре балки происходит наибольший сдвиг первой частоты. Интуитивно это кажется понятным из-за того, что и первая форма, и система с массой обладают симметрией относительно середины балки. Теперь зафиксируем несколько значений l , и будем в каждом фиксированном месте осажждать различное количество частиц:

Рис. 4

Сравнивая крутизну наклона со степенью чувствительности из рис.3, видно, что зависимости сдвига от количества частиц идут в правильном порядке – чем дальше от вершины холма, тем меньше наклон (величина сдвига) в зависимости от количества частиц.

Аналогичные результаты получаются для второй частоты:

Рис. 5

Наибольшая чувствительность наблюдается в местах, где прогиб второй собственной формы наибольший. Осаждая частицы в характерных l :

Рис. 6

Наибольший сдвиг частоты наблюдается при значении, близком к максимальной чувствительности в точках 0.29 и 0.73, наименьший – минимальной чувствительности (концы + узел).

5. Численное решение.

Решение проводилось в ANSYS с моделированием частицы как слоя элементов с другой плотностью, интегрирование которой по объему этого слоя давало искомую массу. Электрическое поле моделировалось с использованием элементов TRANS126, которые удобно использовать для моделирования электрического поля на больших поверхностях. Решение статической задачи хорошо совпадает, если использовать функцию учета нелинейных эффектов NLGEOM (роль которых в рассматриваемом нами уравнении играет интегральное слагаемое):

Однако в ANSYS нельзя провести модальный анализ при учете нелинейных эффектов, поэтому сравним с решением без их учета.

Для выбранного нами значения $V_{dc} = 1.1481$ и $l = 0.3$, сдвиг первой частоты при численном решении:

Сдвиг второй частоты при численном решении:

Рис. 9

Таким образом, видно, что уже при умеренном напряжении наблюдается расхождение между численным и аналитическим решением.

Расхождение для напряжения $V_{dc} = 3.7648$, близкого к точке “pull - in”:

Рис. 10

6. Заключение

Таким образом, следуя ходу [1]-[3], для решения задачи о детектировании положения и массы частицы был использован модуль для работы с динамическими системами MATCONT. Полученное в общем виде разложение и построенный на его основе алгоритм численного решения позволяют таким образом без затруднений перейти к другим конфигурациям этой микроэлектромеханической системы (пример: два электрода), и продолжить анализ этих систем, учтя переменную составляющую

электрического поля, уже в полной мере используя возможности MATCONT для исследования динамических систем.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 17-01-00414 А.

Литература

1. Bouchaala A., Nayfeh A.H., Younis M.I. 2016 Analytical study of the frequency shifts of micro and nano clamped–clamped beam resonators due to an added mass. *Meccanica*
2. Bouchaala A., Nayfeh A.H., Younis M.I. 2016 Frequency shifts of micro and nano cantilever beam resonators due to added masses. *J. Dyn. Syst. Meas. Control*
3. Bouchaala A., Nayfeh A.H., Younis M.I., Jaber N. 2016 Mass and position determination in MEMS mass sensors: A theoretical and an experimental investigation. *Journal of Micromechanics and Microengineering*
4. Найфэ А. Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976.

ПРОГРАММИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ВЕНТИЛЬНО-ИНДУКТОРНЫМ ПРИВОДОМ С ПОМОЩЬЮ ВЕРОЯТНОСТНОЙ МОДЕЛИ

Майлатов И.С.¹

¹БГТУ им. В.Г.Шухова, Белгород, Россия, IMaylatov@gmail.com

Аннотация. Дается описание системы управления вентильно-индукторным двигателем в терминах решения динамической системы векторного управления с помощью метода вероятностного моделирования. Такое решение позволит в зависимости от состояния системы в различное время задать воздействие на систему в соответствии с требуемыми изменениями.

Ключевые слова: вентильно-индукторный двигатель, математическое моделирование, динамические системы.

Введение. Вентильно-индукторный двигатель – это относительно новый тип электромеханического преобразователя энергии, который сочетает в себе свойства и электрической машины, и интегрированной системы регулируемого электропривода. Как система регулируемого электропривода, ВИД дает возможность осуществлять управление этим процессом в соответствии с особенностями конкретной нагрузки: регулировать частоту вращения, момент, мощность и т.д. [1]

Хороший обзор применения и особенностей инжиниринга ВИД приведен в статье [6] и описанная там ситуация, а также ссылки, являются актуальными.

ВИД представляет собой достаточно сложную электромехатронную систему, структурная схема которой приведена на рис. 1 (см. [2])

Рис.1. Структурная схема ВИД

Принцип работы заключается в том, чтобы подавать напряжение на фазы А, В, С в течение определенного промежутка времени для возникновения крутящего момента. Для определения в случае конфигурации, например, 9/6, значений напряжений U_d на обмотках двигателя, моментов t_ϕ и периодов T воздействия, управление приводом моделируется способом векторного управления, введенным для моделирования широкого ряда электрических машин в компании Siemens в 1971 году (см. [7] и [8]). В нашем случае векторное управление представляется в виде системы алгебро-дифференциальных уравнений следующего вида.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma L_s \frac{dI_d}{dt} = -R_s I_d + U_d + \sigma L_s \omega_\psi I_q - \frac{L_m}{L_r} \frac{d\psi_r}{dt} \\ \sigma L_s \frac{dI_q}{dt} = -R_s I_q + U_q - \sigma L_s \omega_\psi I_d - \frac{L_m \omega_\psi \psi_r}{L_r} \\ T_r \frac{d\psi_r}{dt} = -\psi_r + L_m I_d \\ \omega_\psi = \omega_r + \frac{L_m I_d}{T_r \psi_r} \\ M = \frac{3}{2} R_r \frac{L_m}{L_r} \psi_r I_q \end{array} \right. \quad (1)$$

где σ – коэффициент рассеяния, L_s, L_r, L_m – индуктивности статора, ротора и взаимная, соответственно, R_s и R_r – активные сопротивления статора и ротора, соответственно, I_d, I_q – токи, спроецированные на соответствующие оси, U_d – напряжение в обмотке по оси d , напряжение $U_q = 0$ по построению, ω_ψ – частота вращения потокоцепления ротора, ψ_r – потокоцепление ротора, T_r – постоянная времени роторной цепи, ω_r – частота вращения вала двигателя, M – механический момент двигателя.

Система (1) нелинейна и ее точное решение затруднено. Даже численное решение встречает трудности, связанные с сильными осцилляциями и чувствительностью к начальным условиям. В настоящей работе для решения этой системы используется метод вероятностного моделирования, предложенный в докладе [5] на Международной конференции по стохастическим методам в 2016 году. Он основывается на методе временных рядов, но использует принципиально иной подход: моделируется не само значение функции, а вероятность для функции принять определенное значение.

Решение системы векторного управления. Для начала преобразуем систему (1) уравнений векторного управления в систему с 1 дифференциальным и 2-мя алгебраическими уравнениями. Это можно сделать прямыми алгебраическими преобразованиями. В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{d\psi_r}{dt} \\ &= \psi_r \left(\frac{L_m^2 + L_r L_s T_r \sigma (2 + L_m \omega_r)}{2 L_r L_s T_r \sigma} - \frac{L_r M}{3 \psi_r^2 R_r T_r} \right) \\ & \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} \left(\frac{L_m^2}{L_r L_s T_r \sigma} - \omega_r + \frac{2 L_r M}{3 L_m \psi_r^2 R_r T_r} \right)^2 + \frac{L_m^2 \omega_r}{L_r L_s T_r \sigma} \right) \psi_r^2 + \frac{2 L_r M}{3 R_r} \left(\frac{R_s}{L_s T_r \sigma} + \frac{1}{T_r^2} \right)}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & I_d \\ &= -\frac{L_m \psi_r}{2 L_r L_s \sigma} + \frac{T_r \omega_r \psi_r}{2} - \frac{L_r M}{3 L_m \psi_r R_r} \\ & \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{L_m \psi_r}{L_r L_s \sigma} - T_r \omega_r \psi_r + \frac{2 L_r M}{3 L_m \psi_r R_r} \right)^2 + \frac{2 L_r M}{3 L_m^2 R_r} \left(\frac{R_s T_r}{L_s \sigma} + 1 \right) + \frac{T_r \omega_r \psi_r^2}{L_r L_s \sigma}}, \end{aligned} \quad (3)$$

U_d

$$\begin{aligned}
&= L_s \sigma (L_m I_d - \psi_r) \left(-\frac{L_m}{2L_r L_s \sigma} + \frac{T_r \omega_r}{2} + \frac{L_r M}{3L_m \psi_r^2 R_r} \right. \\
&\quad \left. \pm \frac{\left(\frac{L_m \psi_r}{L_r L_s \sigma} - T_r \omega_r \psi_r + \frac{2L_r M}{3L_m \psi_r R_r} \right) \left(\frac{L_m}{L_r L_s \sigma} - T_r \omega_r - \frac{2L_r M}{3L_m \psi_r^2 R_r} \right) + 4 \frac{T_r \omega_r \psi_r}{L_r L_s \sigma}}{2T_r \sqrt{\left(\frac{L_m \psi_r}{L_r L_s \sigma} - T_r \omega_r \psi_r + \frac{2L_r M}{3L_m \psi_r R_r} \right)^2 + \frac{2L_r M}{3L_m \psi_r R_r} \left(\frac{R_s T_r}{L_s \sigma} + 1 \right) + \frac{4T_r \omega_r \psi_r^2}{L_r L_s \sigma}}} \right) \\
&\quad + R_s I_q - \frac{2\sigma L_r L_s M}{3R_r} \left(\frac{\omega_r}{L_m \psi_r} - \frac{I_d}{T_r \psi_r^2} \right) + \frac{L_m}{L_r T_r} (L_m I_d - \psi_r),
\end{aligned} \tag{4}$$

Для вычисления подаваемого напряжения U_d необходимо знать значение потокоцепления, которое можно найти, принимая во внимание то, что в момент отключения напряжения эта величина максимальна, а следовательно, может быть найдена из условия экстремума, которое приводит к формуле

$$\psi_r = \frac{L_r \sqrt{2MR_s T_r}}{\sqrt{-3R_r(L_r L_s \sigma T_r \omega_r + L_m^2 T_r \omega_r - L_r L_s \sigma - L_m^2)}} \tag{5}$$

Продолжительность подачи напряжения вычисляется как $T = tn$, где n – номер последней итерации алгоритма, при котором вероятность функции принять значение вблизи предыдущих итераций равна 0.

Для того, чтобы найти параметры T и U_d , необходимо знать характеристики мотора и параметры воздействия на систему: требуемый механический момент M , и частоту вращения ω . Требуемый механический момент задается оператором системы (с помощью манипулятора), угловую скорость можно определить из показания датчика положения ротора (ДПР). Обозначив промежуток времени между двумя последовательными срабатываниями датчика через $t_{об}$, можно выразить угловую скорость следующим образом: $\omega_r = \frac{2\pi}{t_{об}}$. Исходя из конфигурации индукторной машины 9/6, определяем, что время работы одной фазы при текущей угловой скорости будет равно $t_\phi = \frac{2\pi}{18\omega_r}$. Эта величина также является максимальным временем подачи напряжения U_d . Параметр t_ϕ должен быть больше величины T , так как он отвечает за период между включениями фаз, а подача напряжения должна прекращаться до перехода к другой фазе.

Для программирования системы была выбрана микроконтроллерная плата Arduino Due на базе процессора Atmel SAM3x8E ARM Cortex-M3. Алгоритм работы программы в виде UML-диаграммы представлен на рис. 2.

Рис.2. Алгоритм управления вентильно-индукторным двигателем в укрепленных блоках

Вычисленное напряжение U_d подается на рабочую фазу индукторной машины в течении времени T через каналы широтно-импульсной модуляции (ШИМ) микроконтроллера. Управляя скважностью, через время открытия канала $T_{\text{шим}}$, можно получить различные значения эффективного напряжения на выходе. Значения $T_{\text{шим}}$ вычисляются из условия, что за 255 тактов работы процессора открытый канал ШИМ через транзисторный блок выдаст максимальное напряжение $U_{\text{max}} = 12 \text{ В}$. В итоге процесс подачи напряжения на фазу будет выглядеть так, как показано на рис. 3.

Рис.3. Выход ШИМ на фазы А и В

Выходные импульсы подаются на транзисторный блок (рис. 4) для увеличения напряжения.

Рис.4. Транзисторный блок

Выводы и результаты. В результате работы была собрана экспериментальная модель индукторной машины конфигурации 9/6, подключенной к модулю транзисторных блоков, обеспечивающих усиленное напряжение, подаваемое на фазы двигателя. Также ИМ оснащена датчиком положения ротора, который срабатывает на магнит, закрепленный на роторе. Модуль транзисторных блоков содержит интерфейс каналов входных импульсов, подключенный к блоку с микроконтроллером.

Литература

1. Кузнецов В.А., Кузьмичев В.А. Ветильно-индукторные двигатели. М.: Издательство МЭИ, 2003. 70 с.
2. Miller T.J.E. Switched reluctance motors and their control. - Oxford: Magna Physics Publishing and Clarendon Press, 1993. 205p
3. Виноградов А.Б. Векторное управление электроприводами переменного тока. Иваново, 2008. 298 с.
4. Черенков Д.М., Зуев С.В. Вероятностный подход к некорректной задаче Коши // Сибирские электронные математические известия. 2015. Т. 12. с. 42 – 47.
5. Черенков Д.М., Зуев С.В. Управление вентильно-индукторным приводом на основе вероятностного моделирования. XXIV Международная конференция “Математика. Экономика. Образование.” IX Международный симпозиум “Ряды Фурье и их приложения”. Международная конференция по стохастическим методам. Труды. Издательство “Фонд науки и образования”. Ростов н/Д, 2016. 103 с.
6. Птах Г.К. Вентильно-индукторный реактивный электропривод средней и большой мощности: зарубежный и отечественный опыт. // Электротехника: сетевой электронный научный журнал. – 2015. – Т.2, №3. – С. 23-33.
7. Blaschke F. Das Prinzip der Feldorientierung, die Grundlage für die TRANSVEKTOR-Regelung von Drehfeldmaschinen // Siemens-Zeitschrift. – 1971. – V. 45. – S. 757–760.
8. Bayer K.-H., Waldmann H., Weibezahl M. Die TRANSVEKTOR-Regelung für den feldorientierten Betrieb einer Synchronmaschine // Siemens-Zeitschrift. – 1971. – V. 45. – S.765–768.

О КРИТИЧЕСКОМ ЗНАЧЕНИИ СКОРОСТИ ОСЦИЛЛЯТОРА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО БАЛКЕ БЕРНУЛЛИ-ЭЙЛЕРА

Мальханов А.О.¹, Москва Е.С.², Сандалов В.М.^{1,2}

¹Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Россия,
alexey.malkhanov@gmail.com

²Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний
Новгород, Россия, katkogtina@mail.ru, sandalovvm@gmail.com

Аннотация. В работе рассмотрена модель, описывающая равномерное движение одномассового осциллятора вдоль бесконечно длинной балки Бернулли-Эйлера с учетом и без учета демпфирования. В случае отсутствия трения аналитически и с помощью метода Д-разбиений найдено условие устойчивого движения осциллятора. Показано, что при введении в модель трения, область устойчивого движения осциллятора увеличивается.

Ключевые слова. Балка Бернулли-Эйлера, метод Д-разбиений, устойчивость движения.

Введение

Среди различных устройств, применяемых при испытаниях авиационной и ракетной техники, наиболее универсальными являются реактивные катапультирующие установки, называемые ракетными треками. Их строительство вызвано необходимостью экспериментальной проверки в условиях, близких к условиям эксплуатации, отдельных элементов и систем новых образцов авиационной и ракетной техники. Ракетные треки имеют ряд преимуществ над другими экспериментальными установками: практическое отсутствие ограничений по габаритам и массе объектов испытания, простота регистрации параметров, характеризующих внешние воздействия на испытываемые объекты и их реакцию на эти воздействия, а также меньшие по сравнению с летными испытаниями стоимость экспериментов и длительность подготовки.

При постановке экспериментов на ракетных треках требуются всё более высокие скорости разгона полезной нагрузки. Для разгона полезной нагрузки на ракетном треке используются ракетные поезда, состоящие из нескольких ступеней. При большой массе полезная нагрузка оснащается собственными башмаками для скольжения по рельсовым направляющим.

Несущая способность рельсовых направляющих при динамическом нагружении ее ракетным поездом, а также энергетические и габаритно-массовые характеристики двигателей ограничивают достижимые скорости разгона полезной нагрузки.

В некоторых случаях движение высокоскоростных ступеней ракетных поездов сопряжено с развитием колебаний в их поперечном движении. Их возникновение обусловлено возмущениями, вызываемыми объектом, движущимся по упругой направляющей. Динамическое воздействие объекта испытания на направляющую вызывает в ней колебания в виде бегущих волн. Колебания в рельсовых направляющих приводят к износу рабочих поверхностей и разрушению опорных башмаков ступени, повреждению рельсовых направляющих ракетного трека.

Одним из наиболее важных для исследования является эффект неустойчивости колебаний объекта, движущегося вдоль (горизонтальной) упругой направляющей. Вертикальные колебания такого объекта могут стать неустойчивыми. Существует два существенных различия между резонансом и неустойчивостью. Во-первых, неустойчивость имеет место в некотором диапазоне скоростей, тогда как резонанс возможен только при определенных, значениях скорости. Во-вторых, амплитуда неустойчивых колебаний растет во времени экспоненциально, а в случае резонанса этот

рост является линейным. Если путем увеличения демпфирования возможно «погасить» резонанс, то в случае неустойчивости соответствующие этому явлению области лишь смещаются в пространстве параметров рассматриваемой системы. Из этого видно, что неустойчивость – гораздо более неблагоприятное явление, чем резонанс.

Данная работа посвящена исследованию эффекта неустойчивости колебаний объекта, движущегося вдоль распределенной упругой системы. В качестве системы «объект - упругая направляющая» рассматривается осциллятор, равномерно движущийся по балке.

Постановка задачи

Рассмотрим одномассовый осциллятор массы m и жесткости k , равномерно движущийся вдоль бесконечно длинной балки Бернулли-Эйлера (Рис. 1). Полагается, что масса и балка колеблются безотрывно, а верхний конец пружины осциллятора движется строго горизонтально.

Рис. 1. Равномерное движение одномассового осциллятора вдоль балки Бернулли-Эйлера.

В [3] показано, что уравнения движения и краевые условия для данной модели имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, -\infty < x < \infty \quad (1)$$

$$u_0(t) = u(l(t), t), \quad (2)$$

$$[u]_{x=l(t)} = [u_x]_{x=l(t)} = [u_{xx}]_{x=l(t)} = 0, \quad (3)$$

$$EI[u_{xxx}]_{x=l(t)} = -\left(m \frac{d^2 u_0}{dt^2} + k u_0\right), \quad (4)$$

$$\lim_{|x-l(t)| \rightarrow \infty} |u(x, t)| < \infty; \quad (5)$$

где $l(t) = vt$, v – скорость движения осциллятора, $u_0(t)$ и $u(x, t)$ – вертикальное отклонение массы m и поперечное смещение балки; E – модуль Юнга; ρF – погонная плотность материала балки; F – площадь поперечного сечения балки; I – момент инерции сечения балки на поворот, $\alpha^2 = \frac{EI}{\rho F}$; квадратные скобки означают разность значений функции, стоящей в них, справа и слева от указанного значения аргумента:

$$[f(x)]_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x).$$

Исследование эффекта неустойчивости колебаний осциллятора, движущегося по балке

Будем искать смещение балки в виде суперпозиции волн, а смещение массы осциллятора в виде колебаний:

$$u(x, t) = \sum_j c_j e^{i(\omega_j t - k_j x)}, \quad (6)$$

$$u_0(t) = A e^{i\Omega t}, \quad (7)$$

где частоты ω_i и Ω , а так же волновые числа k_i вообще говоря, являются комплексными величинами.

Подставляя (6) и (7) в (1) и (2), а так же учитывая, что $l(t) = vt$, получим систему двух уравнений для определения волновых чисел и частот волн, излучаемых осциллятором:

$$\omega_j^2 = \alpha^2 k_j^4,$$

$$\omega_j = k_j v + \Omega.$$

Первое уравнение является дисперсионным уравнением для изгибных волн в балке, а второе - так называемым кинематическим инвариантом, ответственным за равенство фаз излучаемых волн фазе колебаний осциллятора. Разрешая эту систему, найдем:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{(v + \sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega})}{2\alpha}, k_2 = -\frac{(v + \sqrt{v^2 - 4\alpha\Omega})}{2\alpha}, \\ k_3 &= \frac{(v - \sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega})}{2\alpha}, k_4 = \frac{(-v + \sqrt{v^2 - 4\alpha\Omega})}{2\alpha}. \end{aligned} \quad (8)$$

Будем считать, что в случае, когда частота осциллятора является комплексной, ветвь радикалов в (8) зафиксирована неравенствами:

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(\sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega}) < 0, \\ \operatorname{Im}(\sqrt{v^2 - 4\alpha\Omega}) > 0, \end{cases} \quad \text{при } \operatorname{Im}\Omega < 0.$$

При таком выборе имеем:

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(k_1, k_2) < 0, \\ \operatorname{Im}(k_3, k_4) > 0, \end{cases} \quad \text{при } \operatorname{Im}\Omega < 0. \quad (9)$$

В связи с требованием ограниченности смещения балки на бесконечном расстоянии от осциллятора, в соответствии с (6), получаем, что при $x \rightarrow +\infty$ мнимые части волновых чисел должны быть неположительными, а при $x \rightarrow -\infty$ - неотрицательными. Поэтому из (9) следует, что волны с волновыми числами k_1 и k_2 распространяются впереди осциллятора ($x > vt$), а с k_3 и k_4 - сзади ($x < vt$).

В случае действительной частоты колебаний осциллятора ($\operatorname{Im}\Omega = 0$) либо два, либо все четыре волновых числа в (8) являются действительными. В этом случае необходимо

использовать условие излучения, согласно которому излучаемые движущимся осциллятором волны должны отводить от него энергию. Следовательно, для волн, распространяющихся впереди осциллятора ($x > vt$) групповая скорость волны должна быть больше скорости осциллятора ($v_i^{\text{rp}} = d\omega_i/dk_i > v$), а для волн, распространяющихся позади осциллятора ($x < vt$) – меньше ($v_i^{\text{rp}} < v$). Таким образом, смещения балки впереди осциллятора (u^+) и позади него (u^-) имеют вид:

$$\begin{aligned} u^+ &= c_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + c_2 e^{i(\omega_2 t - k_2 x)}, \\ u^- &= c_3 e^{i(\omega_3 t - k_3 x)} + c_4 e^{i(\omega_4 t - k_4 x)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя выражения (10) и (7) в (1) – (4) получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = c_3 + c_4, \\ k_1 c_1 + k_2 c_2 = k_3 c_3 + k_4 c_4, \\ k_1^2 c_1 + k_2^2 c_2 = k_3^2 c_3 + k_4^2 c_4, \\ iEI(k_1^3 c_1 + k_2^3 c_2 - k_3^3 c_3 - k_4^3 c_4) = A(m\Omega^2 - k), \\ c_1 + c_2 = A \end{cases} \quad (11)$$

Первое уравнение системы (11) получено из условия непрерывности балки в точке контакта, второе – из условия непрерывности наклона балки, третье – из условия отсутствия внешнего момента, четвертое – из баланса вертикальных сил в точке контакта, пятое – из условия неразрывности контакта балка-осциллятор. Характеристическое уравнение, определяющее собственные частоты колебаний движущегося осциллятора, взаимодействующего с балкой, получается путем приравнивания детерминанта системы (11) к нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ k_1 & k_2 & -k_3 & -k_4 & 0 \\ k_1^2 & k_2^2 & -k_3^2 & -k_4^2 & 0 \\ iEI k_1^3 & iEI k_2^3 & -iEI k_3^3 & -iEI k_4^3 & -m\Omega^2 + k \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

После некоторых упрощений, это уравнение примет вид:

$$k - m\Omega^2 - \frac{iEI(k_1 - k_3)(k_1 - k_4)(k_2 - k_3)(k_2 - k_4)}{2(k_1 + k_2)} = 0$$

Используя выражения (8) для волновых чисел k_i , перепишем характеристическое уравнение:

$$\omega_0^2 - \Omega^2 - i \frac{EI}{2\alpha^3 m} \frac{\sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega} \sqrt{v^2 - 4\alpha\Omega} (v^2 + \sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega} \sqrt{v^2 - 4\alpha\Omega})}{\sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega} - \sqrt{v^2 - 4\alpha\Omega}} = 0, \quad (12)$$

где $\omega_0^2 = k/m$.

Сначала проанализируем уравнение (12) в случае, когда влияние балки на колебания осциллятора мало (например, велика масса m осциллятора). Ищем выражение для Ω в виде $\Omega \approx \omega_0 + \delta$, ($\delta \ll \omega_0$):

$$\Omega \approx \omega_0 + EI \frac{\sqrt{v^2 + 4\alpha\omega_0}\sqrt{4\alpha\omega_0 - v^2} \left(\sqrt{v^2 + 4\alpha\omega_0}(v^2 - 2\alpha\omega_0) + i\sqrt{4\alpha\omega_0 - v^2}(v^2 + 2\alpha\omega_0) \right)}{8\alpha^4 m \omega_0^2}$$

при $v^2 < 4\alpha\omega_0$,

$$\Omega \approx \omega_0 - iEI \frac{\sqrt{v^2 + 4\alpha\omega_0}\sqrt{v^2 - 4\alpha\omega_0}(\sqrt{v^2 + 4\alpha\omega_0} + \sqrt{v^2 - 4\alpha\omega_0})(v^2 + \sqrt{v^2 + 4\alpha\omega_0}\sqrt{v^2 - 4\alpha\omega_0})}{16\alpha^4 m \omega_0^2}$$

при $v^2 > 4\alpha\omega_0$.

Из данных выражений видно, что при $v^2 < 4\alpha\omega_0$ мнимая часть частоты колебаний осциллятора положительна, то есть колебания осциллятора являются устойчивыми.

Иная ситуация возникает при $v^2 > 4\alpha\omega_0$. В этом случае мнимая часть частоты колебаний осциллятора отрицательна. Это означает, что при подстановке $\Omega = \Omega_0 - i\delta$, ($\delta > 0$) в выражение для смещения, получим

$$u_0(t) = A \exp(i\Omega t) = A \exp(it(\Omega_0 - i\delta)) = A \exp(it\Omega_0) \exp(\delta t), \quad (13)$$

Таким образом, выражение (13) показывает, что при малом влиянии балки на колебания осциллятора, они становятся экспоненциально неустойчивыми при $v^2 > 4\alpha\omega_0$.

Теперь рассмотрим общий случай, когда влияние балки на колебания осциллятора не мало. В этом случае определять область неустойчивости системы будем с помощью метода Д-разбиений [4]. Следуя этому методу, отобразим мнимую ось комплексной плоскости Ω на плоскость комплексного переменного k (физический смысл имеют только действительные k) по правилу:

$$k = m\Omega^2 + i \frac{EI}{2\alpha^3} \frac{\sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega}\sqrt{v^2 - 4\alpha\Omega}(v^2 + \sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega}\sqrt{v^2 - 4\alpha\Omega})}{\sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega} - \sqrt{v^2 - 4\alpha\Omega}}, \quad (14)$$

которое получено из (12) домножением на m .

В выражении (14) выделим действительную и мнимую части. Будем рассматривать три случая:

$$\Omega \in \left[-\frac{v^2}{4\alpha}; 0\right) \cup \left(0; \frac{v^2}{4\alpha}\right], \Omega \in \left[\frac{v^2}{4\alpha}; +\infty\right), \Omega \in \left(-\infty; -\frac{v^2}{4\alpha}\right]$$

Полученная Д-кривая разделяет плоскость k на области с различным количеством корней уравнения (12), лежащих в нижней полуплоскости комплексной частоты Ω . Колебания осциллятора будут устойчивы, если уравнение (12) таких корней не имеет.

Рис. 2. Разбиение комплексной плоскости k на области с различным порядком неустойчивости D_i (i – порядок неустойчивости, $k^* = mv^4/16\alpha^2$).

На Рис. 2 качественно изображен результат отображения при фиксированной скорости осциллятора v . Кривая Д-разбиения имеет одну точку пересечения $k = k^*$ с положительной полуосью оси $\text{Re}(k(\Omega))$. Воспользуемся правилом штриховки границы Д-разбиения. Штриховкой отмечаем сторону границы, обращенную к области с большим числом корней с $\text{Im}(\Omega) < 0$. При помощи данного правила заключаем, что в области D_0 число корней с отрицательной мнимой частью наименьшее, то есть интервал значений $\text{Re}(k(\Omega)) \in [k^*; +\infty)$, возможно, принадлежит области устойчивости системы. Из выражения (14) получаем, что $\text{Im}(k(\Omega)) = 0$ при $\Omega = \frac{v^2}{4\alpha}$. Отсюда следует, что

$$k^* = m \frac{v^4}{16\alpha^2} \Rightarrow \omega_0^* = \frac{v^2}{4\alpha}.$$

Таким образом, получили то же значение, которое было найдено в предположении о слабости взаимодействия между балкой и осциллятором. Данное совпадение позволяет заключить, что область $D_0(\text{Re}(k(\Omega)) \in [k^*; +\infty))$ действительно является областью устойчивости, а область $D_2(\text{Re}(k(\Omega)) \in [0; k^*))$ – областью неустойчивости, в которой характеристическое уравнение (12) имеет два «неустойчивых» корня. Итак, поперечные колебания осциллятора, равномерно движущегося по балке Бернулли-Эйлера, являются неустойчивыми при выполнении условия:

$$\omega_0 < \frac{v^2}{4\alpha} \Rightarrow v > 2 \left(\frac{kEI}{m\rho F} \right)^{1/4}.$$

Исследование эффекта неустойчивости колебаний осциллятора с трением, движущегося по балке

Предположим, что в исходной модели движущегося вдоль балки осциллятора наряду с пружиной имеется демпфер с коэффициентом демпфирования h , тогда система уравнений, описывающая движение осциллятора вдоль балки Бернулли-Эйлера примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, -\infty < x < \infty \quad (15)$$

$$u_0(t) = u(l(t), t), \quad (16)$$

$$[u]_{x=l(t)} = [u_x]_{x=l(t)} = [u_{xx}]_{x=l(t)} = 0, \quad (17)$$

$$EI[u_{xxx}]_{x=l(t)} = -\left(m \frac{d^2 u_0}{dt^2} + h \frac{du_0}{dt} + k u_0\right), \quad (18)$$

$$\lim_{|x-l(t)| \rightarrow \infty} |u(x, t)| < \infty; \quad (19)$$

Продельвая выкладки, аналогичные случаю без трения, приходим к следующему характеристическому уравнению:

$$k = m\Omega^2 + i \left[\frac{EI}{2\alpha^3} \frac{\sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega} \sqrt{v^2 - 4\alpha\Omega} (v^2 + \sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega} \sqrt{v^2 - 4\alpha\Omega})}{\sqrt{v^2 + 4\alpha\Omega} - \sqrt{v^2 - 4\alpha\Omega}} - h\Omega \right]. \quad (20)$$

Аналогично случаю без трения, критическое значение скорости находится из условия $\text{Im}(k(\Omega)) = 0$. В данном случае, получить для него аналитическое выражение через параметры системы не представляется возможным. Численные эксперименты показывают, что при одних и тех же значениях параметров системы, наличие трения увеличивает значение скорости, при котором наступает неустойчивость. Таким образом, трение можно рассматривать как некий стабилизирующий фактор, препятствующий возникновению неустойчивости.

Заключение

В данной работе была рассмотрена модель осциллятора, равномерно движущегося по балке с учетом и без учета демпфирования. Проанализирован эффект неустойчивости колебаний осциллятора, движущегося по балке. Показано, что при движении осциллятора вдоль балки имеется предельное значение скорости, превышение которой приводит к неустойчивости. При этом, наличие демпфирования увеличивает предельное значение скорости, играя роль стабилизирующего фактора.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 14-19-01637.

Литература

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин, С. Э. Теория колебаний. Второе издание, переработанное и дополненное Н. А. Железцовым. - М.: Физматлит, 1959. - 915 с.
2. Веричев С.Н. Математические методы исследования устойчивости объекта, движущегося по упругой направляющей //Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Н. Новгород, 2008. С. 117-121.
3. Весницкий А. И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. - М.: Физматлит, 2001. -320 с.

4. Весницкий А. И., Каплан Л.Э., Уткин Г.А. Вывод естественных граничных условий для одномерных задач динамики с движущимися нагрузками и закреплениями // Дифференциальные и интегральные уравнения. Горький, 1982. С. 75 – 80.
5. Вибрации в технике. Справочник. Т.1. Колебания линейных систем. М.: Машиностроение, 1979.- 352 с.
6. Горяченко В. Д. Элементы теории колебаний. – Красноярск: изд-во Красноярского ун-та, 1995. – 429 с.
7. Неймарк Ю. И. Динамические системы и управляемые процессы. – М. Наука, 1978. – 336 с.

ДИНАМИКА МНОГОПОРШНЕВЫХ ВИБРОУДАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ С КРИВОШИПНО-ШАТУННЫМ ВОЗБУДИТЕЛЕМ КОЛЕБАНИЙ

Метрикин В.С.¹, Никифорова И.В.²

¹ННГУ им.Н.И.Лобачевского, Нижний Новгород, Россия, v.s.metrikin@mail.ru

²ННГУ им.Н.И.Лобачевского, Нижний Новгород, Россия, irina.nikiforova@itmm.unn.ru

Аннотация. Приведены результаты численно-аналитического исследования динамики виброударных механизмов с кривошипно-шатунным возбудителем колебаний и с различным числом поршней-ударников. Представлены в пространстве параметров бифуркационные диаграммы и области существования и устойчивости для различных типов движения рассматриваемых механизмов. Проведен сравнительный анализ влияния параметров и числа поршней на динамику механизмов.

Ключевые слова. Кривошипно-шатунный механизм, метод точечных отображений, устойчивость, бифуркационная диаграмма, хаос

В настоящее время существует целый ряд различных типов вибрационных и виброударных машин, имеющих разнообразное назначение, в частности, наряду с ударно - вибрационными механизмами с дебалансным возбудителем колебаний достаточно широкое применение в строительстве нашли эксцентриковые ударно - вибрационные механизмы с кривошипно-шатунным возбудителем колебаний. В основу нового конструктивного решения был положен принцип «перевернутого вибратора», у которого рабочий орган, являясь дебалансом, шарнирно посажен на эксцентриковом валу и уравновешен при вращении дебалансом [1],[2]. Силовой импульс, передаваемый поверхности (грунту, сваи и т.п.), возникает как за счет распора с плечом эксцентрикового вала, так и за счет кинетической энергии падения рабочего органа. Эффективность уплотняющих и погружающих машин существенно зависит не столько от количества энергии передаваемой обрабатываемой среде, сколько от характера передачи этой энергии – «формы» импульса, которую следует изменять за счет перераспределения отдельных динамических факторов единичного цикла нагружения. Очевидно, что плотная и вместе с тем прочная структура грунта достигается лишь в том случае, когда в процессе уплотнения удельное давление на поверхности контакта рабочего органа с грунтом повышается постепенно, нижняя граница которого определяется физическими свойствами грунта в исходном по отношению к процессу уплотнения состоянии, а верхняя - пределом прочности грунта или технологическими условиями. В этой связи параметры таких машин и механизмов следует определять из условий близких к квазиластическому взаимодействию. При этом частота следования импульсов в каждом одиночном цикле должна быть такой, чтобы исключить возможность развития упругого последствия обрабатываемой среды в промежутках между импульсами. Такой многоимпульсный способ нагружения может быть реализован с помощью многоударниковых механизмов с кривошипно-шатунным возбудителем колебаний, конструкция которых позволяет достаточно просто регулировать режимы работы посредством изменения геометрии кинематических связей и решать задачи уплотнения грунтов в стесненных условиях промышленного и гражданского строительства.

В работе построена математическая модель ударно-вибрационного механизма с кривошипно-шатунным возбудителем колебаний с различным числом поршней-ударников (ПУ) как с учетом, так и без учета (с неподвижным ограничителем) обрабатываемой среды.

Работу рассматриваемых вибрационных механизмов можно описать следующим образом (рис.1): вращательное движение вала с постоянной частотой ω с помощью

кривошипно-шатунного механизма преобразуется в возвратно-поступательное движение корпуса массы M относительно шабota. При этом ползуны-ударники попеременно наносят удары по соответствующим наковальням высоты h_i и, создаваемое таким образом ударно-вибрационное воздействие передается через шабот обрабатываемой среде. Благодаря выбору величин сдвига по фазе φ_i между кривошипами, эксцентриситетов r_i , высот наковален может быть обеспечено требуемое (может быть оптимальное в некотором смысле) ударное взаимодействие ползунов-ударников о шабот, при котором ползуны-ударники имеют максимальную скорость, обеспечивая устойчивость периодического режима работы. Следует отметить, что наличие нескольких ПУ способствует более продолжительному воздействию на обрабатываемую среду, а, следовательно, более эффективному процессу пластического деформирования.

Рис.1

Вследствие того, что эксцентрики могут быть сдвинуты относительно друг друга по фазе на углы φ_i и имеют, вообще говоря, различные длины, колебания корпуса совершаются относительно того механизма, сумма проекций геометрических размеров на вертикальную ось которого в данный момент наибольшая. Удар о наковальню одновременно одного или нескольких ПУ происходит либо при смене взаимодействующих с наковальней ПУ, либо после отрыва корпуса вместе с эксцентриковыми механизмами.

Уравнения, описывающие ударно - колебательные движения механизма с неподвижным ограничителем в безразмерных координатах при условии $r_i \ll l$ $l_i \approx l, i = 1, N$, имеют вид

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = -p \quad (x > f(\tau))$$

$$\left. \frac{dx}{d\tau} \right|_+ = -R \left. \frac{dx}{d\tau} \right|_- + (1+R) \frac{df}{d\tau} \quad (x = f(\tau), \dot{x} - \frac{df}{d\tau} < 0) \quad (1)$$

где $x = \frac{y - s_2 - l}{l} \tau = \omega t$, $\mu = r_1 / l$, $\gamma_i = r_i / r_1$, $\varepsilon_i = (s_i - s_2) / l$, $p = g / \omega^2 l$,

$f(\tau) = \max \{f_1(\tau), f_2(\tau), \dots, f_N(\tau)\}$, $f_i(\tau) = \varepsilon_i - \mu \gamma_i \cos(\tau - \varphi_i)$,

$\left. \frac{dx}{d\tau} \right|_+ = \dot{x}^+$, $\left. \frac{dx}{d\tau} \right|_- = \dot{x}^-$ - скорости непосредственно после и до удара, s_i - расстояние от

точки крепления i -го шатуна до нижнего основания ПУ.

Фазовое пространство системы (1) $\Phi(x \geq f(\tau), \dot{x} < +\infty, \tau)$ в координатах $x, \dot{x}, \tau$ усечено по x поверхностью $S(x = f(\tau))$, представляющей собой «гофрированную» цилиндрическую поверхность, образованную пересечением N поверхностей

$x = f_i(\tau), i=1,2,...,N$. Все фазовые траектории располагаются либо на поверхности S , либо выше ее. Случай $x > f(\tau)$ соответствует свободному движению механизма, а $x = f(\tau)$ – ударному взаимодействию одного из поршней с ограничителем (шаботом). Качественный вид фазовых траекторий приведен на рис. 2.

Рис.2

Следует отметить, что указанный на рис.2 вид поверхности Пуанкаре S может иметь место лишь при условии попарного пересечения двух последующих поверхностей $f_i(\tau), f_{i+1}(\tau)$.

С учетом структуры фазового пространства Φ системы (1) и поведения траекторий в нем, исследование динамики рассматриваемой математической модели проведено с помощью изучения свойств точечного преобразования T поверхности S в себя, которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} f_{k+2}(\tau_{k+1}) &= \Delta\tau_{k+1}(\dot{x}_k - p\Delta\tau_{k+1}/2) + f_{k+1}(\tau_k) \\ \dot{x}_{k+1} &= R(p\Delta\tau_{k+1} - \dot{x}_k) + (1+R)\frac{df(\tau_{k+1})}{d\tau} \\ (\Delta\tau_{k+1} &= \tau_{k+1} - \tau_k, k=0,1,...,N-1) \end{aligned} \quad (2)$$

Координаты неподвижных точек $M^*(\tau^*, \dot{x}^*)$, соответствующих периодическим режимам движения с поочередным соударением каждого поршня-ударника (основному режиму), определяются из системы $2(N+1)$ уравнений (2), дополненных условиями периодичности $\dot{x}_N = \dot{x}_0 = \dot{x}^*, \tau_N = \tau_0 + n\Gamma = \tau^*$, имеющих вид

$$\begin{aligned} \dot{x}^* &= \frac{b_N - R^N \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} b_{N-k}}{1 + (-1)^{N-1} R^N} \\ \dot{x}_{k+1} &= R^k [(-1)^{k+1} \dot{x}^* + \sum_{i=0}^N (-1)^i b_{k-i}] \end{aligned} \quad (3)$$

где компоненты N -мерной вектор - функции $b(b_1, ..., b_N)$ не зависят от $\dot{x}^*, \dot{x}_{k+1}$, а являются функциями τ^*, τ_{k+1} и параметров системы

$$b_j = Rp(\tau_{j+1} - \tau_j) + (1+R)\frac{df_{j+1}(\tau_{j+1})}{d\tau} \quad (4)$$

Времена движения по отдельным участкам фазовой траектории определяются из решения системы нелинейных уравнений вида

$$\begin{aligned} f_{j+1}(\tau_{j+1}^*) + \Delta\tau_{j+1}^*(p\Delta\tau_j/2 - \dot{x}_j^*) &= f_j(\tau_0^*) \\ f_1(\tau^*) - f_N(\tau_N) + (\tau^* - \tau_N^*)[p(\tau^* - \tau_N^*)/2 - \dot{x}_N^*] &= 0 \\ (j &= 1,2,...,N-1) \end{aligned} \quad (5)$$

Устойчивость в малом неподвижной точки отображения, соответствующей основному периодическому режиму движения, как известно [3],[4], определяется величиной корней характеристического уравнения

$$\chi(z) = 0$$

а именно,

$$\begin{vmatrix} A(z) & B \\ C(z) & D(z) \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

где $A(z)$, B , $C(z)$, $D(z)$ - квадратные матрицы, ненулевые элементы которых имеют вид

$$a_{i,i+1} = (-1)^j (p \Delta \tau_{i+1} - \dot{X}_i^*) + \frac{df_{i+j}(\tau_{i+j}^*)}{d\tau};$$

$$a_{N,1} = z[p(\tau_N^1 - \tau^*) + \dot{X}_N^* - \frac{df_1(\tau^*)}{d\tau}];$$

$$c_{i,i+j} = -R(-1)^j p + (1+R)j \frac{d^2 f_{i+1}(\tau_{i+1}^*)}{d\tau^2};$$

$$c_{N,1} = z(Rp + (1+R) \frac{d^2 f_1(\tau^*)}{d\tau^2});$$

$$b_{i,j} = \Delta \tau_{i+1}^*, d_{i,i+j} = (j-1)R - j; d_{N,1} = -z, j = 0,1; i = 1,2,..., N$$

Периодическое решение устойчиво, если все корни (6) расположены внутри единичного круга, т.е. выполняется неравенство $|z| < 1$. Нарушение условий устойчивости неподвижной точки происходит либо когда абсолютное значение одного из корней характеристического уравнения становится равным $z = \pm 1$, либо когда $z = \exp(\pm j\varphi), 0 \leq \varphi \leq \pi$. Границы области устойчивости рассматриваемого периодического движения, обозначаемые N_+, N_-, N_φ , удовлетворяют уравнениям

$$\chi(1) = 0,$$

$$\chi(-1) = 0,$$

$$\chi(e^{\pm j\varphi}) = 0, 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Кроме того известно [4], что при непрерывном изменении параметров интересующий нас периодический режим движения исчезает либо из-за нарушений условий устойчивости, либо из-за выхода фазовой траектории из области определения соответствующего точечного преобразования. Выход фазовой траектории из области определения точечного отображения, определяемой бифуркационной поверхностью N_c , связан с касанием траектории в некоторые моменты времени τ_i^* поверхности S (рис.2). Таким образом, область существования устойчивых периодических движений рассматриваемой системы ограничена поверхностями N_+, N_-, N_φ и поверхностью N_c .

Математическая модель виброударного механизма с КШВК с двумя ПУ без учета свойств обрабатываемой среды. Поскольку особый интерес вызывает режим работы системы с поочередными ударами ПУ, то, используя уравнения поверхности Пуанкаре S , получены соотношения между параметрами системы, при которых этот режим возможен, а именно

$$(\varepsilon - \Delta k)^2 = \mu^2 (1 - \gamma \cos \varphi)^2 + \gamma^2 \sin^2 \varphi, \quad (7)$$

$$(\varepsilon_1 = \varepsilon, \gamma_2 = \gamma, \Delta k = k_2 - k_1)$$

На рис.3 в плоскости $(\gamma, ((\varepsilon - \Delta k) / \mu)^2)$ приведены границы (7) при различных значениях величины сдвига по фазе φ между эксцентриситетами r_1, r_2 . Только для значений параметров, расположенных в областях в направлениях штриховки, возможен основной

режим с поочередным соударением ПУ, а в областях, лежащих выше этих кривых, могут существовать режимы с ударами только одного из ПУ. Соотношения (7) позволяют подобрать значения параметров для настройки механизма на требуемый режим работы.

Рис. 3

На рис.4 в плоскости (p, R) представлены области существования и устойчивости периодических движений основного режима движения $D(1,1)$ (цифры в скобках означают периодический режим движения с одним ударом каждым поршнем за период) для следующих значений параметров $\mu = 0.1, \gamma = 4, \varphi = 0.52, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, k_1 = 0, \Delta k = 0$ и двух значений $\varepsilon = 0.02$ (рис.4а) и $\varepsilon = 0.15$ (рис.4б). В области $D(m_1, m_2)$, где m_1 и m_2 не равны одновременно 1, существуют движения с несколькими (больше двух) ударами каждым из поршней.

Сравнивая рис.4а,5 и рис.4б,6 можно увидеть, что увеличение параметра ε (расстояние от точки крепления шатуна до нижнего основания ПУ) приводит к уменьшению размеров области существования и устойчивости периодических режимов движения механизма и смещению области периодических режимов в сторону уменьшения значений частотного параметра p .

а)

б)

Рис.4

На рис.5 приведены области существования и устойчивости при следующих значениях параметров $\mu = 0.1, \varepsilon = 0.02, \gamma = 4, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, k_1 = 0, \Delta k = 0$ и двух значений $\varphi = 0.3$ (рис.5а) и $\varphi = 2$ (рис.5б).

а)

б)

Рис.5

На рис.6,7 представлены бифуркационные диаграммы по частотному параметру p при том же наборе параметров, что и рис.5а,б соответственно, но при $R = 0.4$.

Рис.6

Рис.7

Анализ представленных областей устойчивости и бифуркационных диаграмм показал, что увеличение φ (сдвига по фазе между эксцентриситетами) приводит к увеличению областей существования и устойчивости периодических режимов, т.е. интервал значений частотного параметра p , при которых существуют периодические движения, становится шире.

На рис.8 представлена область устойчивости в плоскости параметров (p, R) , где $\mu = 0.1, \varepsilon = 0.02, \gamma = 4, \varphi = 0.52, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, k_1 = 0.1, \Delta k = 0.1$, но на рис.8а $k_1 = 0, \Delta k = 0$ (не учитываются высоты наковален), на рис.8б $k_1 = 0.1, \Delta k = 0.1$ (высоты наковален учитываются).

Рис.8

А на рис.9,10 представлены бифуркационные диаграммы для того же набора параметров, что и рис.8а,б но для $R = 0.25$.

Рис.9

Рис.10

Анализ представленных диаграмм и областей устойчивости показал, что учет высот подставок наковален $k_1, k_1 + \Delta k$ приводит к увеличению областей существования периодических режимов движения. Так на рис. 9 видно, что периодический режим для выбранных значений параметров существует при $0.195 \leq p \leq 0.215$ (без учета высот наковален), а на рис.10 периодический режим существует при $0.15 \leq p \leq 0.21$.

Результаты исследований влияния остальных параметров на периодический режим работы приведены в диссертации. Проведенные численные эксперименты позволили сделать вывод о том, что наиболее существенно влияют на динамику механизма параметры $\varepsilon, \varphi, k_1, \Delta k$.

Математическая модель виброударного механизма с КШВК с тремя ПУ без учета свойств обрабатываемой среды. Уравнение бифуркационной поверхности в пространстве параметров виброударного механизма (8), выделяющая области значений параметров, при которых возможен основной режим, имеет вид

$$\frac{\varepsilon_1^2}{\mu^2} = (\gamma_2 - \cos \varphi_2)^2 + \sin^2 \varphi_2$$

$$\frac{\varepsilon_3^2}{\mu^2} = \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2}{\mu^2} - \sin^2 \varphi_2} + \cos \varphi_2 - \gamma_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) \right)^2 + (\gamma_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2))^2 \quad (8)$$

Так, на рис. 11 при $\gamma_3 = 3, \varphi_3 = 1.1$ и различных значений угла $\varphi_2 = 0.3$ (верхняя поверхность), 0,7 и 1(нижняя поверхность) приведен вид поверхностей, выделяющих область значений параметров Ω , согласно уравнениям (8), при которых возможны режимы движения механизма с поочередным соударением каждым поршнем-ударником о наковальню. Эти значения, несомненно, могут послужить достаточно удобному настраю механизма на требуемый режим движения. Показано, что увеличение размера области Ω происходит с ростом γ_3, φ_3 при выполнении неравенства.

$$\gamma_3 > \frac{\cos \varphi_2 + \sqrt{(\varepsilon_1 / \mu)^2 - \sin^2 \varphi_2}}{\cos(\varphi_3 - \varphi_2)}$$

Рис.11

На рис. 12 изображены бифуркационные диаграммы по частотному параметру p трехпоршневого механизма, построенные для следующего набора параметров

$\mu = 0.12$, $\varepsilon_1 = 0.018$, $\varepsilon_3 = 0.02$, $\gamma_2 = 3$, $\gamma_3 = 3$, $\varphi_2 = 0.2$, $\varphi_3 = 1.1$, $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.2$, $\lambda_3 = 0.3$ и различных R , равных 0.2 (рис.12а) и 0.4 (рис.12б)

Из рис.12а видно, что при частотах $0.13 \leq p \leq 0.15$ и $0.16 \leq p \leq 0.28$ существует периодическое движение с $m_i = 1, i = 1, 2, 3$; тогда как при частотах $0.11 \leq p \leq 0.12$ и $0.15 \leq p \leq 0.16$ наблюдается хаотический режим движения. Также видно, что значение $p = 0.13$ - бифуркационное значение параметра, при котором наблюдается процесс удвоения числа ударов первым, вторым и третьим поршнями. Из рис.12б следует, что при частотах $0.2 \leq p \leq 0.3$ наблюдается основной режим движения ($m_i = 1, i = 1, 2, 3$); а с уменьшением частотного параметра существуют периодические движения с различным числом ударов каждым из ПУ. При $0.11 \leq p \leq 0.14$ наблюдается хаотический режим движения.

Таким образом, сравнивая рис.12а и рис.12б можно сделать вывод, что периодический режим движения $D(1,1,1)$ с увеличением R смещается в сторону больших значений частотного параметра p .

На рис.13 также приведены бифуркационные диаграммы по частотному параметру p , построенные для параметров из набора P , в котором параметр $R = 0.5$, а γ_2 равно 3 (рис.13а) и 2 (рис.13б).

Из рисунка 13а видно, что при $0.22 \leq p \leq 0.3$ существует основной периодический режим ($m_i = 1, i = 1, 2, 3$), а при других значениях частотного параметра существуют периодические движения с различным числом ударов каждым из ПУ. При

$0.11 \leq p \leq 0.13$ наблюдается хаотический режим движения. Из рис.13б следует, что при $\gamma_2 = 3$ основной режим движения отсутствует.

Динамика виброударного механизма с учетом влияния обрабатываемой среды.
Первая модель двухпоршневого виброударного механизма с КШВК с учетом обрабатываемой среды приведена на рис.14. Обрабатываемая среда (грунт, свая и т.п.) представлена в виде упруго закрепленной с коэффициентом упругости k массы M_1 . Потери энергии в среде учитываются в виде вязкого трения с коэффициентом демпфирования b .

Рис.14

На рис.15 представлена бифуркационные диаграммы для набора параметров $\varepsilon = 0.018, R = 0.3, \mu_0 = 5, \mu = 0.1, \gamma = 4, \varphi = 0.6$, и $h = 0.06$ (рис.15а) и $h = 0.04$ (рис.15б), а на рис.16 - осциллограммы движения при тех же значениях параметров, что и на рис.17а, но на рис.16а $p = 0.02$, а на рис.16б $p = 0.025$ (красным цветом на рис.16а,б обозначена осциллограмма движения первого поршня, зеленым - второго).

Рис.16

Из этих рисунков видно, что при $0.0185 \leq p \leq 0.0235$ ($h = 0.06$) существует периодическое движение с $m_1 = 1, m_2 = 1$; при $0.0235 \leq p \leq 0.026$ наблюдается хаотический режим движения. При $p \geq 0.0235$ наблюдается процесс удвоения числа ударов ПУ. Проведенные исследования показали, что основной режим движения

существует и устойчив при меньших частотах с уменьшением коэффициента демпфирования.

Вторая модель механизма с одним ПУ с учетом обрабатываемой среды (аналог основополагающей работы Ю.И.Неймарка [5]) в виде пробки, на которую действует постоянная сила Q и сухое трение приведена на рис.17.

Уравнения движения механизма с пробкой можно представить в виде

$$\begin{cases} x_p > x_1 + \eta \\ \ddot{x}_p = -p - \mu \cos \tau \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x_p = x_1 + \eta \\ \lambda_0^2 (x_1 - x_p + \eta) < \mu_0 \tilde{f} - p + q \\ x_1 = x_{10} \\ \ddot{x}_p + \lambda_0^2 (x_p - x_{10} - \eta) = -p - \mu \cos \tau \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \lambda_0^2 (x_1 - x_p + \eta) \geq \mu_0 \tilde{f} - p + q \\ \ddot{x}_p + \lambda_0^2 (x_p - x_1 - \eta) = -p - \mu \cos \tau \\ \ddot{x}_1 + \lambda^2 (x_1 - x_p + \eta) = -\mu_0 \tilde{f} \text{sign}(\dot{x}_1) - p + q \end{cases} \quad (11)$$

где $\tau = \omega t$, $x = \frac{y-s-l}{l}$, $x_p = \frac{y_p}{l}$, $x_1 = \frac{y_{np}}{l}$, $\mu = \frac{r}{l}$, $p = \frac{g}{\omega^2 l}$, $\lambda_0^2 = \frac{k}{M \omega^2}$, $\lambda^2 = k/M_{np} \omega^2$, $\eta = h/l$, $\tilde{f} = F_0/M_{np} l \omega^2$, $q = Q/M_{np} l \omega^2$.

Приведены осциллограммы движения поршня и пробки. Так, на рис. 18 приведена одна из осциллограмм при следующем наборе параметров $p = 0,1$; $\lambda_0 = 120$; $\lambda = 140$, $\mu = 0,1$; $\mu_0 = 0,1$; $\eta = 0,1$; $f = 10$; $q = 1$.

Из рис.18 следует, что когда нет взаимодействия между поршнем и пробкой, ее координата остается постоянной, а при взаимодействии с поршнем пробка начинает совместное движение с ним и опускается на некоторую глубину.

Третья модель уплотнения грунта с двумя ПУ представлена на рис.19.

Рис.19

В этой модели принято, что при уплотнении среды сила сопротивления зависит от величины предыдущей осадки грунта. Анализ результатов численных экспериментов показал, что наиболее эффективно процесс уплотнения происходит для грунтов с меньшим показателем жесткости. Так на рис.20,21 приведены осциллограммы движения, представляющие собой процесс уплотнения грунта при различных значениях параметров модели, характеризующих свойства грунта. Рис.20 представлен для следующего набора параметров $p = 0.1, \varepsilon = 0.018, \mu = 0.1, \gamma = 4$,

$\varphi = 0.52, h_1 = 20, \lambda_1 = 40, \lambda_2 = 40, \lambda_3 = 30, h_2 = 150, \alpha = 5, \beta = 2, \eta = 0.05$. Для построения рис.21 использованы те же значения параметров, что и рис.20, но $h_2 = 7$

Рис.20

Рис.21

Литература

1. А.с. 1020479 СССР. Вибротрамбовка / Шилков. В.А., Савалюк А.Д., Метрикин В.С., Поляков А.А., Шабардин А.К., Алехин А.И., Омененко И.Я. (СССР) - N 3376593/29-33; заявлено 05.01.1982; опубликовано 30.05.1983. Бюл. N 20
2. Метрикин В.С., Никифорова И.В. К теории виброударной системы с кривошипно-шатунным возбудителем колебаний //Вестник Нижегородского университета им.Н.И.Лобачевского, 2010, №5(1), с.185-192.
3. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний, . М.: Наука, 1972. 471 с.
4. Фейгин М.И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994. 285 с.
5. Неймарк Ю.И. Теория вибрационного погружения и вибровыдергивания// Инж. сб. М.: АН СССР, 1953, Т.16, с.13-48.

КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНОМ ПОДПРУЖИНЕННОМ МЕХАНИЗМЕ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Миронова Л.И.¹, Кондратенко Л.А.²

¹Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II (МИИТ), Москва, Россия, mironova_lub@mail.ru

²ГНЦ РФ Центральный научно-исследовательский институт технологии машиностроения (ЦНИИТМАШ), Москва, Россия, kondrat.leonid@yandex.ru

Аннотация. Изложен новый метод исследования динамики в нелинейном подпружиненном механизме, заключающийся в описании пружины, как упругого сплошного стержня с условными плотностью и модулем упругости. При исследовании колебаний в таком стержне вместо известного дифференциального уравнения 2-го порядка используются выведенные уравнения 1-го порядка, связывающие скорость и ускорения частиц тела с напряжением. Получено уравнение движения, учитывающее переменность условного модуля упругости. Рассмотрено поведение механизма при наличии существенной нелинейности. Определены параметры автоколебаний, дающие возможность оценки ресурса конструкции.

Ключевые слова. Пружина, колебания, амплитуда, частота, напряжения, трение, преобразование Лапласа

Устройства с подпружиненными деталями применяются во многих механизмах. При анализе их работы обычно исследуются перемещения. Однако во время колебаний, особенно вынужденных, часто являющихся основным режимом работы, важно знать не только особенности движения, но и законы изменения напряжения, оказывающие значительное влияние на работоспособность изделия.

Рассмотрим устройство (рис. 1), где ведущий стержень (толкатель), движущийся со скоростью v_1 , через пружину перемещает вдоль оси x тело массой m , расположенное в направляющих, причем колебания на ведомом конце не влияют на движение толкателя.

Рис. 1. Схема подпружиненного механизма

На тело действует также сила сопротивления F и сила трения $F_m = h v_2$, где h – коэффициент потерь на трение, пропорциональное скорости движения тела.

Пусть в статике пружина имеет характеристику $\Delta x C = F_0$, где Δx – перемещение; C – коэффициент жесткости; F_0 – сила. Приведенное соотношение перепишем в форме

$$\Delta x = \frac{l F_0}{j E_y}, \quad (1)$$

$$f = \frac{\pi(D_n^2 - D_e^2)}{4}, \quad E_y = \frac{lC}{f}.$$

Здесь l – длина пружины, f – площадь сечения пружины; E_y – условный модуль упругости пружины; D_n, D_e – наружный и внутренний диаметры пружины.

Известно, что под действием продольных нагрузок в скручивающейся проволоке диаметром d пружины возникают касательные напряжения, которые можно определить с помощью соотношений

$$\tau_{\max} = \frac{4F}{\pi d^2} \left(1 + \frac{2D_0}{d} \right).$$

С учетом разнообразных перекосов и искривлений максимальные касательные напряжения определяются соотношением [1]

$$\tau_{\max} = K \frac{8D_0 F}{\pi d^3}, \quad (2)$$

$$K = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0,615}{c}, \quad c = \frac{D_0}{d},$$

где D_0 – средний диаметр пружины по центрам окружностей проволоки; K – коэффициент, учитывающий кривизну витка и влияние поперечной силы; c – индекс пружины, $c = D_0 / d$, табл. 1 [1].

Таблица 1. Индекс пружины

Диаметр проволоки d , мм	Индекс пружины, c
1- 2,5	5- 10
3- 5	4- 10
6- 12	4- 9

Если пружину рассматривать как стержень сечением f , то под действием продольной силы в нем будут развиваться условные напряжения сжатия - растяжения

$$\sigma_y = \frac{F}{f} = \frac{\Delta x E_y}{l}. \quad (3)$$

Выразив F , например из (2), с учетом (1) и (3) получим

$$\sigma_y = \frac{d^3}{2KD_0(D_n^2 - D_e^2)} \tau_{\max} = K_1 \tau_{\max}. \quad (4)$$

Здесь коэффициент K_1 характеризует геометрические параметры пружинного механизма.

Положим, что пружина работает в пределах упругости, а после поджатия некоторым статическим усилием F_0 на тело действует переменная составляющая силы малой амплитуды F_a . При таких условиях можно считать условную плотность материала пружины постоянной и равной величине

$$\rho_y = k_n \rho_m \frac{l_1 d^2}{D_n^2 - D_0^2}, \quad (5)$$

где ρ_m – реальная плотность материала проволоки; k_n – коэффициент, учитывающий изменение диаметра проволоки на торцах пружины l_1 – длина проволоки.

При указанных допущениях, в рамках одномерной модели, известное уравнение продольных упругих колебаний для перемещений можно записать в форме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E_y}{\rho_y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Уравнение (6) дополним уравнением количества движения в дифференциальной форме [2, 3]

$$\rho_y \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial \sigma_y}{\partial x}, \quad (7)$$

где $v = \partial u / \partial t$.

Из уравнений (6), (7) вытекает

$$E_y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{\partial \sigma_y}{\partial x}. \quad (8)$$

После дифференцирования по координате x и интегрирования по t (8) уравнения, получим

$$E_y \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial \sigma_y}{\partial t}. \quad (9)$$

Выведенные уравнения (7), (9) сравнительно полно описывают упругие колебания в пружине, и они аналогичны уравнениям, полученным для металлических стержней [2] в результате перехода при нулевых начальных условиях и одномерному преобразованию Лапласа к уравнениям

$$\rho_y s v(s) = - \frac{d \sigma_y(s)}{dx}; \quad (10)$$

$$E_y \frac{dv(s)}{dx} = - s \sigma_y(s), \quad (11)$$

где $v(s)$, $\sigma_y(s)$ – изображения по Лапласу соответственно $v(t)$ и $\sigma_y(t)$; s – оператор Лапласа.

Решение уравнений (10), (11) имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_y(s, x) &= \sigma_{1y}(s, 0) ch[\theta_n(s)x] - \frac{\theta_n(s)}{s} E_y v_{1y} sh[\theta_n(s)x]; \\ v(s, x) &= v_{1y}(s, 0) ch[\theta_n(s)x] - \frac{s}{\theta_n(s) E_n} \sigma_{1y}(s, 0) sh[\theta_n(s)x], \end{aligned}$$

где $\theta_n(s)$ – операторный коэффициент распространения волн; ψ – функция, учитывающая потери на трение при движении витков пружины.

$$\theta_n(s) = \pm \sqrt{\frac{s}{E_y} [\rho_y s + \psi(s)]}.$$

Функции $\sigma_y(s, x)$, $v(s, x)$ описывают колебания скоростей движения и напряжений в силовой упругой магистрали.

Полагая, что количество движения от толкателя к телу передается полностью, т.е. отраженные волны отсутствуют, трение витков незначительно, получим уравнение движения в изображениях по Лапласу в виде [2]

$$v_2(s) [1 - c + h_n \mathcal{G}_n(s)s + m \mathcal{G}_n(s)s^2] = \frac{1 - c}{ch[\theta(s)l]} v_1(s) - F(s) \mathcal{G}_n(s)s,$$

а уравнение колебаний условных напряжения

$$\sigma_y(s) = \frac{1}{f(1 - c) [1 - c + h_n \mathcal{G}_n(s)s + m \mathcal{G}_n(s)s^2]} \left[F(s) + \frac{v_1(s)(h_n + ms)}{ch[\theta_n(s)l]} \right];$$

$$\mathcal{G}_n(s) = \frac{l}{fE_y} Z(s); \quad Z(s) = \frac{th[l\theta_n(s)]}{l\theta_n(s)}; \quad \theta_n(s) = \pm s \sqrt{\frac{\rho_y}{E_y}}.$$

Здесь $Z(s)$ функция упругости пружины [2].

Положим далее, что влиянием распределенных свойств пружины, гистерезисными явлениями в ней на динамику тела можно пренебречь. Тогда уравнение движения перепишем в линейном виде

$$\begin{aligned} v_2(1 + h\mathcal{G}_{n0}p + m\mathcal{G}_{n0}p^2) &= v_1 - F\mathcal{G}_{n0}p, \\ p &\equiv \frac{d}{dt}. \end{aligned} \tag{12}$$

Это операторное уравнение заменим системой

$$\begin{aligned} v_1(t) &= v_2(t) \mathcal{G}_{n0} f p \sigma_y(t); \\ \sigma_y(t) f &= F(t) + h v_2(t) + m p v_2(t). \end{aligned} \tag{13}$$

Такое разложение легко проверяется обратным алгебраическим решением. Первое уравнение, иллюстрирует закон сохранения количества движения, полученного системой тело – пружина от толкателя. Второе уравнение – второй закон Ньютона.

Под действием веса тела $P = mg$ и составляющей F_1 развиваются силы трения F_m . Поскольку известно, что трение зависит от контактного давления p_k и скорости относительного движения трущихся поверхностей v_2 , то изменение силы трения после разложения функции $F_m(p_k, v_2)$ в ряд Тейлора можно представить выражением

$$\Delta F_m = \Delta p_k \frac{\partial F_m}{\partial p_k} + \Delta v_2 \frac{\partial F_m}{\partial v_2} = c \Delta p_k + h \Delta v_2. \tag{14}$$

Второе слагаемое характеризует потери, пропорциональные скорости движения. Оно вошло в систему уравнений (13) в форме произведения $h v_2(t)$. Первое слагаемое преобразуем следующим образом

$$c \Delta p_k = \frac{c F_1}{f_k} \cong c f \sigma_y.$$

Это слагаемое приводит к дополнительному увеличению напряжения в пружине. Причем в случае изменения направления движения знак этой составляющей силы меняется на противоположный. Для смазываемых минеральным маслом поверхностей $c = 0,025 \div 0,09$ [4]. В этой связи, рассматривая малые отклонения, перепишем второе уравнение системы (13) в виде

$$\sigma_y f (1 - c \operatorname{sgn} v_2) = F + h v_2 + m p v_2. \quad (15)$$

Совместное решение (14) и (15) приводит к уравнению

$$v_2 (1 - c \operatorname{sgn} v_2) + h g_{n0} p v_2 + m g_{n0} p^2 v_2 = v_1 (1 - c \operatorname{sgn} v_2) - p F g_{n0}.$$

Физические процессы хорошо иллюстрируются структурной схемой на рис. 2. Здесь вследствие разности скоростей движения ведущего и ведомого концов под действием упругой деформации в пружине развиваются напряжения, создающие движущее усилие, преодолевающее силу сопротивления F , силы трения и инерции.

Рис. 2. Структурная схема подпружиненного механизма

Приведенные формулы позволяют рассчитать изменение скорости движения тела или напряжений в линейной механической системе. В реальных условиях всегда имеются нелинейности, нередко оказывающие существенное влияние. В таких случаях оценить поведение системы можно графоаналитическим методом Попова Е.П. [5], либо численным способом с применением ПЭВМ.

Для рассматриваемого примера, где при $v_1 \equiv 0$ тело (затвор клапана) перемещается под действием силы F , а силы трения и инерции направлены на снижение F , уравнение движения (12) будет записываться в форме

$$v_2 (1 + h g_{n0} p + m g_{n0} p^2) = F g_{n0} p. \quad (16)$$

Во многих случаях зависимость коэффициента трения h от скорости движения характеризуется уравнением, подобному квадратному трехчлену, и поэтому имеет две ветви: ниспадающую и восходящую (рис. 3).

Первая оказывает сильное влияние при малых скоростях перемещения, и такое трение часто называют «отрицательным сопротивлением». При работе в этой зоне механизмы впадают в автоколебания.

Положим, для примера, что скорость перемещения тела такова, что движение происходит в зоне ниспадающей характеристики коэффициента трения, когда $0 < v_2 < v_0$.

Рис. 3. Зависимость коэффициента трения от скорости движения пружины

Примем также, что сила сопротивления состоит из 2-х составляющих: постоянной F_0 и нелинейной F_n частей, и $F_c = F_0 + F_n$. В этом случаях, применив метод гармонической линеаризации Е.П. Попова [5], после разложения (16) на два уравнения и подстановки $F_c = F_0 + q_0 + q_1 v'$, получим

$$(1-c)f\sigma_y = (h+mp)v_2 + F_0 + q_0 + q_1 v', \quad v_1 = v_2 + v \vartheta_{n0} f p \sigma_y.$$

Здесь q_0, q_1 – коэффициенты гармонической линеаризации, и

$$v_1 = v_{20} + v', \quad v' = A \sin(\omega, t). \quad (17)$$

Определим условия, когда из-за собственных свойств в нелинейном механизме могут возникнуть устойчивые периодические колебания. Такие условия приводят пружинный механизм к потере устойчивости. С этой целью выполним обратное решение, тогда

$$v_1 = \vartheta_{n0} p (F_0 + q_0) + v_2 [1 - c + (h + q_1) p m \vartheta_{n0}] = 0. \quad (18)$$

Рассматривая случай отсутствия колебаний внешних воздействий, с учетом (17) приведем уравнение (18) к виду

$$v' [1 - c + (h + q_1) p m \vartheta_{n0}] = 0, \quad v' = v_{20} - v_2 \quad (19)$$

Подставим в (19) $p = j\omega$. Здесь j – мнимая единица. Найдем вещественные и мнимые части характеристического полинома и приравняем их нулю. Получим

$$X(\omega, \mu) = (h + q_1) \omega \vartheta_{n0} = 0, \quad Y(\omega, \mu) = 1 - c - \omega^2 m \vartheta_{n0} = 0.$$

На основании критерия Михайлова автоколебания возможны лишь при $h = -q_1$. Тогда частота автоколебаний определяется выражением

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m g_{n0}}},$$

и она практически совпадает с частотой свободных колебаний.

Амплитуда колебаний скорости перемещения определяется по известному значению h и графику $q_1(\mu)$. На рис 4 представлен график зависимости коэффициента гармонической линеаризации q_1 от относительной амплитуды μ автоколебаний в соответствии с полученным решением в работе [2]. Напряжения при этом изменяются по закону

$$\sigma_y = \frac{A[h \sin(\omega_0 t) + m \omega_0 \cos(\omega_0 t)]}{(1-c)f}.$$

Рис. 3. Зависимость коэффициента гармонической линеаризации q_1 от относительной амплитуды μ автоколебаний.

Поскольку выражение $(\partial X / \partial \mu)(\partial Y / \partial \omega) > 0$, то автоколебания будут устойчивыми.

Таким образом, зная частотную характеристику механизма и параметры нелинейности можно на устойчивом или неустойчивом режимах определять амплитуду колебаний напряжений в силовой линии. При этом в каждой точке сечения проволоки пружины будет выделяться удельная энергия $w = 0,5 k \tau^2 / G$, где $k = J_p / (f r)$; J_p, f, r – соответственно, полярный момент инерции, площадь и радиус сечения проволоки. Используя эти сведения и критерий Одингса [6], по которому разрушение детали наступает, если в сечении остается удельная энергия $q = \rho c T_s$ (здесь соответственно, ρ, c, T_s – плотность, удельная теплоемкость и температура плавления проволоки), можно оценивать ресурс конкретного механизма.

Литература

1. Анурьев В.И. Справочник конструктора машиностроителя, т.3. – М: Машиностроение, 1980, 560с.

2. Кондратенко Л.А. Расчет колебаний в деталях и узлах машин. – М.: Спутник, 2008, 317с.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т1, Т2. – М.: Недра, 1970, 492с., 490 с.
4. Прокофьев В.Н. (ред). Аксиально-поршневой регулируемый гидропривод. – М.: 1969. Машиностроение. С. 495
5. Попов Е.П. Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. – М.: ФМЛ, 1973, с. 583.
6. Одинг И.А. Допускаемые напряжения в машиностроении и циклическая прочность металлов. – М-С.: Машгиз, Л. 1962.

К ВОПРОСУ ОЦЕНКИ РЕСУРСА КОНСТРУКЦИЙ СТАБИЛИЗАТОРОВ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ СЛУЧАЙНОМ НАГРУЖЕНИИ

Москвитин Г.В., Балашова А.В., Пугачев М.С., Поляков А.Н.
ИМАШ РАН, Москва, РФ, GVMoskvitin@yandex.ru

Аннотация. В статье представлена методика расчета долговечности стабилизаторов волновых процессов (СВП) при действии реальных нагрузок. Последовательность оценки ресурса включает следующие этапы: исследование вероятностных характеристик изменения давления в различных трубопроводных системах, проведение математического моделирования динамики конструкций СВП в зависимости от конструктивных и эксплуатационных параметров с применением численных и аналитических методов, определение временных реализаций случайных процессов напряжений в наиболее нагруженных зонах конструкций СВП, построение кривых повторяемости амплитуд приведенных регулярных циклов напряжений по спектральной плотности напряжений и приведенных кривых усталости, расчет показателей долговечности конструкций СВП на основе скорректированной линейной гипотезы накопления усталостных напряжений.

Ключевые слова. Стабилизаторы волновых процессов, аналитические и численные методы, ресурс, долговечность, случайное нагружение.

Основными видами нагружения стабилизаторов волновых процессов (СВП) [1,2] являются изменения давления: полигармоническое воздействие с постоянными амплитудами, возникающее вследствие неравномерности работы насосов; ударное воздействие (гидроудар) при пуске и остановке насосов; ударное воздействие при открывании и закрывании задвижек; случайные воздействия, вызываемые различными факторами. Каждой из указанных нагрузок соответствует свой частотный интервал воздействия, что позволяет представить эти воздействия в виде $S_i^p(f)$ -спектральных плотностей давления. Выполненные ранее расчеты динамических моделей различных СВП (примеры показаны на рис.1-5) на основе конечно-элементного моделирования [3,4] позволили определить их собственные частоты и формы колебаний, а также напряжения в наиболее нагруженных точках конструкции, возникающие при частотах f_i (Гц), соответствующих указанным выше изменениям давления.

1 – участок трубопровода, 2 – предкамера, 3 – упругая камера с эллиптическим поперечным сечением, 4 – боковой коллектор, 5 – вентиль.

Рисунок 1. Схема стабилизатора с эллиптическими трубками

Рисунок 2. А- расчетная схема (показана половина трубки), Б - формы трубки: в исходном состоянии – 1, в деформированном состоянии после приложения внутреннего давления – 2.

Рисунок 3. Эквивалентные мембранные (А) и изгибные (Б) напряжения (по Мизесу) в трубке при стационарном режиме (показана половина трубки), н/м^2 .

Рисунок 4. Формы собственных колебаний эллиптической трубки (показана половина трубки): А – первая, Б – вторая, В – третья, Г – четвертая.

$\sigma_{\text{экв}}, \text{ МПа}$

Рисунок 5. График изменения максимальных эквивалентных напряжений $\sigma_{\text{экв}}$, МПа в наиболее нагруженном сечении эллиптической трубки в середине пролета в зависимости от частоты пульсаций потока.

Спектральные плотности напряжений в каждой рассматриваемой j -й точке определяются по формуле

$$S_j^{\sigma}(f) = [H_{ij}(f)]^2 * S_i^p(f),$$

где $H_{ij}(f)$ – частотная характеристика конструкции СВП.

Для построения функции повторяемости циклов напряжений необходимо иметь временные зависимости действующих в элементах СВП напряжений. Применяя методы статистического моделирования, получаем временные реализации случайного процесса напряжений $\sigma(t)$ в виде гармонического ряда

$$\sigma(t) = \sum \sqrt{S_j^{\sigma}(\omega_j) * \Delta\omega_j} * \cos(\omega_j' t + \alpha_j)$$

где $\omega_j' = \omega_j + \delta\omega_j$, ω_j – частота (рад/с), $\delta\omega_j$ – случайные флуктуации частоты в интервале $\Delta\omega_j$, α_j – независимые случайные величины в интервале 2π [5,6].

При оценке долговечности необходима схематизация процессов изменения напряжений разного уровня в соответствии с числом циклов. Для схематизации процесса используется метод «дождя», который реализуется на ЭВМ с помощью пакета Matlab. Результатом являются однопараметрические таблицы распределения амплитуд симметричных циклов напряжений для ранее выбранных наиболее нагруженных точек конструкции СВП, которые используются для построения кривых повторяемости циклов напряжений.

Долговечность определяется в виде произведения $\Delta t \cdot \lambda$, где Δt – отрезок времени, в течение которого происходят все упомянутые выше изменения давления, λ – число этих отрезков до выхода СВП из строя. На основании скорректированной гипотезы линейного суммирования усталостных повреждений [7,8]

$$a = \sum_{i=1}^N \frac{n_i \lambda}{N_i},$$

Где a – сумма относительных долговечностей; n_i – число циклов с напряжениями σ_i за принятый отрезок времени Δt ; N_i – число циклов изменения напряжений с амплитудой σ_i , при котором происходит образование трещины; N – число ступеней изменения напряжений на кривой повторяемости циклов, используемое при проведении расчета. Значение N_i получается из рассмотрения кривой усталости

$$N_i = \frac{N_G \sigma_{r_d}^m}{\sigma_i^m},$$

где N_G – число циклов, соответствующее пределу выносливости детали σ_{r_d} ; m – показатель наклона ветви кривой усталости. При этом

$$a = \sum_{i=1}^N \frac{n_i \lambda \sigma_i^m}{\sigma_{r_d}^m N_G}$$

тогда

$$\lambda = a \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_{r_d}^m N_G}{n_i \lambda \sigma_i^m}$$

Предел выносливости детали определяется в виде $\sigma_{r_d} = \frac{\sigma_r}{K_d}$, где σ_r – предел выносливости материала, K_d – коэффициент, учитывающий концентрацию напряжений, масштабный фактор, вид обработки поверхности, наличие коррозионной среды и упрочнение при изготовлении детали.

Выводы. В статье представлена дальнейшая модернизация метода расчета долговечности СВП при действии реальных нагрузок. Последовательность оценки ресурса включает следующие этапы: предполагается исследование вероятностных характеристик изменения давления в различных трубопроводных системах. Проведение математического моделирования динамики конструкций СВП в зависимости от конструктивных и эксплуатационных параметров с применением численных и аналитических методов. Определение временных реализаций случайных процессов напряжений в наиболее нагруженных зонах конструкций СВП, построение кривых повторяемости амплитуд приведенных регулярных циклов напряжений по спектральной плотности напряжений и приведенных кривых усталости. Оценка долговечности конструкций СВП на основе скорректированной линейной гипотезы накопления усталостных напряжений. Обработка и обобщение полученных результатов с целью оценки эффективности метода решения данной научной проблемы.

Литература

1. Ганиев Р.Ф., Низамов Х.Н., Дербуков Е.И. Волновая стабилизация и предупреждение аварий на трубопроводах. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. – 260 с.
2. Р.Ф. Ганиев, Л.Е. Украинский. Нелинейная волновая механика и технологии. – М.: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2008, 712с.
3. Программный комплекс ANSYS, версия 13, лицензия № 660578.
4. Москвитин Г.В., Балашова А.В., Поляков А.Н. Численное исследование напряженно-деформированного состояния упругой камеры стабилизатора волновых

процессов (СВП) // XXII Международный семинар «Технологические проблемы прочности» 26-27 июня 2015 года. – Подольск, 26-27 июня 2015 года.

5. 5.Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем.– М.: Наука, 1979. – 336 с.
6. 6.Гусев А.С., Светлицкий В.А. Расчет конструкций при случайных воздействиях. – М.: Машиностроение, 1984. – 240 с.
7. 7.Когаев В.П., Махутов Н.А., Гусенков А.П. Расчеты деталей машин на прочность и долговечность: Справочник – М.: Машиностроение, 1985. – 224 с.
8. 8.Когаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. – М.: Машиностроение, 1977. – 232 с.

КОЛЬЦЕВОЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ С ОПЦИЕЙ ЖЕСТКОГО ТОРЦА И ПРОБЛЕМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТРИЦЫ МАСС ПРОТЯЖЕННЫХ УЧАСТКОВ ОБОЛОЧЕК

Низаметдинов Ф.Р.^{1,2}, Сорокин Ф.Д.¹.

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, frnizametdinov@list.ru

²ИКЦ по роторной динамике турбомашин различного назначения ООО "Альфа-Транзит", г. Химки, Россия

Аннотация. В работе создана математическая модель двухузлового конечного элемента (КЭ) оболочки вращения с абсолютно жесткими торцевыми сечениями для моделирования участков оболочечных конструкций, заключенных между поперечными фланцами. Получение матрицы жесткости осуществлялось при помощи численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) оболочки вращения. Проведено сопоставление различных способов идентификации матрицы масс КЭ оболочки. Также разработан двухузловой КЭ осесимметричной оболочки при несимметричном деформировании с опцией жесткого торца.

Ключевые слова. Конечный элемент, матрица масс, собственная частота, функции формы, идентификация, осесимметричная оболочка, матрица жесткости.

Введение. Осесимметричные оболочечные конструкции, ограниченные жесткими торцами, широко применяются во многих областях промышленности и техники. Наибольшее распространение оболочки получили в авиационной и ракетно-космической технике благодаря высокой прочности при малом весе. В этих областях к конструкциям предъявляются повышенные требования, поэтому необходимо совершенствовать все этапы их создания. Важную роль в этом играет математическое моделирование и прогнозирование эксплуатационных свойств на ранних этапах разработки путем замены трудоемких натурных испытаний численным моделированием поведения в условиях испытаний и эксплуатации [1,2]. При решении задач линейной статике и модального анализа для сложных конструкций, содержащих в себе оболочки, ограниченные жесткими торцами, нередко применяют прием замены протяженного участка конструкции одним обобщенным элементом с некоторыми предварительно рассчитанными массово-инерционными и жесткостными характеристиками.

В данной работе представлены различные способы идентификации матрицы масс конечного элемента (КЭ) оболочки, ограниченной жесткими торцами, применяемого для моделирования протяженных тонкостенных осесимметричных элементов роторных машин, заключенных между поперечными фланцами (рис. 1), проведено их сопоставление. Также разработан двухузловой КЭ осесимметричной оболочки при несимметричном деформировании с опцией жесткого торца (рис. 3), который позволяет моделировать такие же участки, не прибегая к использованию специальных средств для моделирования жестких сечений. Исследование проводилось для ИКЦ по роторной динамике «Альфа-Транзит», который является одним из ведущих в области создания ПО для исследования вибрационных свойств роторных систем различного назначения. На сегодняшний день последней версией ПО компании является продукт Dynamics – R4 [3]. Разработанный КЭ с опцией жесткого торца, представленный в данной работе, будет введен в следующую версию продукта Dynamics – R4.

Рассматриваемый элемент имеет 12 степеней свободы (рис. 1). Для наглядности на рисунке 1 изображена коническая оболочка постоянной толщины, однако рассматриваемый КЭ может иметь произвольную форму образующей и переменную толщину вдоль образующей. Если в случае жесткостных характеристик все очевидно, так как с использованием численного интегрирования СОДУ оболочки вращения

элементы матрицы жесткости находятся достаточно точно (максимальная относительная погрешность по жесткостям, полученным с использованием КЭ комплекса Ansys, не превышала 0.5%), то получение массово-инерционных характеристик требует отдельного рассмотрения.

Рис. 1. Геометрия элемента. l —длина элемента (вдоль оси Z), r_1 , r_2 —радиусы срединной поверхности в сечениях 1 и 2 соответственно, h —толщина оболочки

Согласованная матрица масс. Матрица функций формы $[H]$ для рассматриваемого конечного элемента имеет размерность 3×12 [4] и содержит функции перемещений, соответствующие нулевой и первой гармонике разложения в ряд Фурье:

$$\{\xi(s, \varphi), \eta(s, \varphi), v(s, \varphi)\}^T = [H(s, \varphi)] \{a^{(e)}\}$$

$\begin{matrix} 3 \times 12 & & 12 \times 1 \end{matrix}$

где $\xi(s, \varphi)$, $\eta(s, \varphi)$, $v(s, \varphi)$ — радиальное, осевое и окружное перемещения соответственно; $a^{(e)}$ — вектор узловых перемещений. Элементы матрицы $[H(s, \varphi)]$ в отличие от [4] находились численным интегрированием системы дифференциальных уравнений оболочки вращения, поэтому для задач статики их можно рассматривать как точные. Согласованная матрица масс может быть построена следующим образом [5,6]:

$$[M] = \int_V [H]^T \rho [H] dV = \int_0^{2\pi} \int_s [H]^T \rho [H] h r d\varphi ds,$$

где h —толщина оболочки, $[H]^T$ — транспонированная матрица функций формы, ρ —плотность материала оболочки, r —радиус срединной поверхности, отсчитываемый от оси Z .

В качестве тестовой решалась задача определения собственных частот (СЧ) конической оболочки, изображенной на рисунке 2а, со следующими параметрами: модуль упругости $E=2.1 \cdot 10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона $\mu=0.3$; радиус $r_1=0.2$ м, $r_2=0.4$ м; толщина стенки $h=r_2/50$; высота $l=2 r_2$; плотность $\rho=7850$ кг/м³. Результаты решения были сопоставлены с решением в КЭ комплексе (табл. 1). Из таблицы 1 видно, что использование согласованной матрицы масс дает завышенные значения СЧ.

Рис. 2. а) — геометрия оболочки для тестовой задачи, б) — к задаче об продольных колебаниях стержня

Таблица 1. Сравнение частот при использовании согласованной матрицы масс

$f_i, \text{Гц}$	C++ (согласованная)	C++ (несогласованная)	Ansys	$\delta_{\text{согл.}} \%$	$\delta_{\text{несогл.}} \%$
f_1	333.9	360.6	326.3	2.33	10.51
f_2	333.9	360.6	326.3	2.33	10.51
f_3	632.8	640.8	612	3.40	4.71
f_4	1370	1443.1	1270	7.87	13.63

Несогласованная матрица масс. Поскольку матрица функций формы КЭ содержит перемещения, соответствующие нулевой и первой гармонике разложения в ряд Фурье, то была предпринята попытка построения несогласованной матрицы масс с использованием функций формы балки, аналогичной геометрии. С использованием несогласованной матрицы масс также была решена задача, изображенная на рисунке 2а. Результаты представлены в таблице 1.

Оба варианта построения матрицы масс оказались неприемлемыми. В ходе тестов было обнаружено, что погрешность может достигать 20%. Неприменимость описанных подходов связана с попыткой описать довольно протяженную коническую оболочку всего одним КЭ. В задачах статики такой подход оказывается вполне удачным, так как функции формы определяются точно из решений дифференциальных уравнений. Однако в задачах динамики требование единственности элемента приводит к ситуации, при которой функции формы, полученные из задачи статики, не могут быть использованы для корректного описания распределения ускорений по КЭ. Это можно наглядно продемонстрировать на примере продольных колебаний стержня постоянного сечения, заделанного одним концом (рис. 2б). Известно, что для такой задачи первая форма осевых колебаний и функция формы при статическом растяжении стержня имеют вид соответственно:

$$u_1(z) = \sin\left(\frac{\pi z}{2l}\right); \quad u(z) = \frac{z}{l}$$

Сравнивая их, видим, что при использовании функций формы из статики, мы заставляем стержень колебаться по несвойственной задаче динамики линейной форме, это аналогично наложению дополнительных связей на систему, что и приводит к завышенным значениям частот.

Алгоритм частотной идентификации матрицы масс. Поскольку статические функции формы оказались неприменимы для корректного описания динамического поведения в случае моделирования протяженного участка одним элементом, то был разработан и реализован еще один алгоритм получения матрицы масс путем вычисления точных значений низших СЧ элемента из дифференциальных уравнений гармонических колебаний оболочки вращения.

Идентификация матрицы масс осуществляется в два этапа: идентификация диагональных элементов, идентификация недиагональных элементов.

Для идентификации i -ого диагонального элемента матрицы масс находится СЧ оболочки, закрепленной по всем степеням свободы кроме i -ой. По i -ой степени свободы задается единичное обобщенное перемещение.

После идентификации диагональных элементов матрицы масс необходимо идентифицировать 8 недиагональных элементов. Матрицу масс 12×12 можно разделить на блоки по направлениям вибраций жестких торцов:

- продольное направление: блок 2×2 ;
- вращение вокруг продольной оси: блок 2×2 ;
- изгиб в плоскости XZ: блок 4×4 ;
- изгиб в плоскости YZ: блок 4×4 .

Недиагональный элемент блока продольного направления (при известных диагональных) идентифицируется по жесткому продольному движению из кинетической энергии продольного движения КЭ следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} (m_{33} + 2m_{39} + m_{99})v^2 \text{ и } T = \frac{1}{2} Mv^2 \Rightarrow m_{39} = m_{93} = \frac{(M - m_{33} - m_{99})}{2}$$

где v – скорость продольного движения элемента, M – масса системы.

Аналогично определяется недиагональный элемент в случае вращения вокруг продольной оси:

$$m_{6,12} = m_{12,6} = \frac{(J_z - m_{66} - m_{12,12})}{2},$$

где J_z – момент инерции оболочки относительно оси Z .

В случае изгиба в плоскости XZ имеется 6 недиагональных элементов, которые должны быть идентифицированы. Один из них можно найти по жесткому движению (перемещение как жесткого целого вдоль оси X). Идентификация оставшихся 5 недиагональных элементов производится аналогично идентификации диагональных элементов, но обобщенное перемещение задается по двум степеням свободы при прочих закрепленных. Для идентификации элемента m_{ij} находится СЧ оболочки, закрепленной по всем степеням свободы кроме i -ой и j -ой, по которым задаются единичные обобщенные перемещения. Вычислив амплитудные значения потенциальной энергии деформаций и кинетической энергии, а также используя закон сохранения энергии:

$$U_0 = T_0 \Rightarrow m_{ij} = \frac{\frac{1}{2}k_{ii} + k_{ij} + \frac{1}{2}k_{jj}}{\omega^2} - \frac{1}{2}m_{ii} - \frac{1}{2}m_{jj}$$

Таким образом, идентифицируются все недостающие недиагональные элементы: m_{51} ; $m_{11,1}$; m_{75} ; $m_{11,5}$; $m_{11,7}$. Недиагональные элементы при изгибе в плоскости YZ восстанавливаются по известным недиагональным элементам при изгибе в плоскости XZ . Описанный алгоритм идентификации был реализован в пакете Wolfram Mathematica (WM), была решена тестовая задача, изображенная на рисунке 2а (табл. 2).

Таблица 2. Сравнение частот при использовании идентифицированной матрицы масс

$f_i, \text{Гц}$	WM	Ansys	$\delta, \%$
f_1	327.3	326.4	0.34
f_2	327.3	326.4	0.34
f_3	610.8	610.9	0.18
f_4	1266.0	1265.9	0.07

Из таблицы 2 видно, что матрица масс, идентифицированная с помощью набора тестовых форм, дает очень хорошие результаты при определении низших СЧ для задачи, изображенной на рисунке 2а. Однако нельзя утверждать, что идентифицированная матрица масс будет успешно работать во всех случаях закрепления элемента, т.к. идентификация проводилась на основе определенного набора тестовых форм. Можно рассмотреть различные сочетания закреплений конечного элемента отдельно для случая $k=0$ и $k=1$. Поскольку продольное движение и вращение вокруг продольной оси не зависимы, то возможные сочетания закреплений конечного элемента для $k=0$, исключающих смещения как жесткого целого, ограничиваются закреплениями для идентификационных задач. При $k=1$ можно независимо рассмотреть колебания в плоскости XZ и YZ . Тогда возможные сочетания закреплений, исключающих смещения

как жесткого целого, ограничиваются набором из 9 вариантов закреплений (при колебаниях в одной плоскости) (см. рис. 1):

$$q_{y_1}, \xi_1, \xi_2, q_{2y}, q_{2y}, \xi_1, \xi_2, q_{1y}, \xi_1, \xi_2, \xi_1, \xi_2, q_{2y}, \xi_1, \xi_1, q_{1y}, q_{2y}, \xi_2, q_{1y}, q_{2y} \quad (1)$$

Все варианты (1) соответствуют закреплениям для идентификационных задач. Далее была рассмотрена тестовая задача для незакрепленной оболочки, которая имеет возможность перемещаться как жесткое целое (геометрия оболочки соответствует задаче на рисунке 2а). Результаты были сопоставлены с расчетами МКЭ и сведены в таблицу 3.

Таблица 3. Сравнение частот для незакрепленной оболочки

$f_i, \Gamma\text{ц}$	WM	Ansys
f_1	1995.53	1886.46
f_2	1195.53	1886.46
f_3	1682.70	2108.90
f_4	2349.42	2167

На основании вышеизложенных рассуждений, а также таблиц 2 и 3 можно сделать вывод о том, что идентифицированная таким образом матрица масс работает корректно лишь в тех случаях, когда конструкция не имеет возможности смещаться как жесткое целое.

Идентификация по собственным формам свободного КЭ. В данной работе был разработан и реализован еще один алгоритм идентификации матрицы масс на основе собственных форм свободного элемента. Алгоритм рассмотрен на примере поперечных колебаний в одной из координатных плоскостей. При поперечных колебаниях свободного конечного элемента в одной из координатных плоскостей есть две нулевые частоты ($p_1=p_2=0$) и две ненулевые p_3, p_4 . Этим частотам соответствуют четыре формы колебаний (первые две – жесткие движения). По этим формам колебаний можно разложить как матрицу жесткости, так и матрицу масс. Дальнейшее описание алгоритма будет вестись на примере свободной цилиндрической оболочки при следующих параметрах: модуль упругости $E=2.1 \cdot 10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона $\mu=0.3$; радиус срединной поверхности $R=0.4$ м; толщина стенки $h= R/50$; высота $l=2R$. Для этой оболочки были найдены две ненулевые частоты, соответствующие первым двум изгибным формам свободного конечного элемента. Полученные частоты (p_3, p_4) и формы (u_3, u_4) верифицированы с расчетами МКЭ. Затем были определены формы жестких движений. Для жесткого смещения форму можно принять равной единице ($u_i=1$), СЧ при этом равна нулю. Форма, соответствующая вращению как жесткого целого будет иметь вид $u_2=Z-Z_C$, где Z_C –положение центра тяжести. Соответствующая СЧ также будет равна нулю.

Для дальнейшей работы формы u_i из непрерывного представления переводятся в дискретную векторную форму u_i (узловые перемещения). На основе узловых перемещений вычисляются обобщенные жесткости (или иначе компоненты матрицы жесткости в главных координатах) [7,8]:

$$c_i = u_i^T [K] u_i \quad (i = 1 \dots 4),$$

где $[K]$ –матрица жесткости в физических координатах (4×4). Поскольку случаи $i=1,2$ описывают жесткие движения, то соответствующие обобщенные жесткости равны 0.

Чтобы получить матрицу масс $[M]$ в физических координатах необходимо составить матрицу форм $[N]$, используя векторы узловых перемещений u_i . Тогда матрица масс $[M]$ определяется из соотношения [7,8]:

$$[H] = [u_1, u_2, u_3, u_4]; [m] = [H]^T [M] [H]$$

где $[m]$ – матрица обобщенных масс.

В ходе решения тестовых задач было установлено, что рассмотренная идентификация по собственным формам и частотам свободного конечного элемента дает хорошие результаты только для случая свободного КЭ. Различные варианты закреплений приводят к расхождению по частотам до 30%.

КЭ с опцией жесткого сечения. В ходе численных экспериментов при использовании различных способов идентификации матрицы масс КЭ с жесткими торцами, применяемого для моделирования протяженных участков осесимметричных оболочечных конструкций с произвольной формой образующей, было установлено, что ни один из рассмотренных алгоритмов не может обеспечить приемлемую точность для всех вариантов закрепления. Поэтому в качестве альтернативы был разработан двухузловой КЭ осесимметричной оболочки при несимметричном деформировании с опцией жесткого торца. Опция жесткого торца позволяет сделать один из торцов КЭ оболочки (при $Z=0$ или $Z=l$) абсолютно жестким (рис. 3). Поскольку обобщенные перемещения всех точек жесткого сечения одинаковы по соответствующим направлениям (вдоль и вокруг осей), то для удобства узел жесткого торца располагается на оси вращения (см. рис. 3б).

Рис. 3. КЭ с опцией жесткого сечения (3а) – без активированной опции, 3б) – с активированной в сечении $Z=0$. l – длина образующей, θ – угол между нормалью к поверхности и осью вращения, $h(s)$ – толщина (может меняться линейно), r_1 и r_2 – радиусы срединной поверхности. Вектор узловых перемещений элемента без активированной опции жесткого сечения (см. (4))

Разработанный элемент базируется на классическом КЭ конической оболочки при несимметричном деформировании (рис. 2). Протяженные участки оболочек могут быть смоделированы набором таких кольцевых элементов. Большим количеством таких элементов может быть хорошо описана форма поверхности оболочки вращения, в том числе отличная от конической. В каждом узловом сечении имеется 4 степени свободы. Вектор узловых перемещений имеет следующий вид:

$$\{\Delta\} = \{u_{k1}, v_{k1}, w_{k1}, \vartheta_{k1}, u_{k2}, v_{k2}, w_{k2}, \vartheta_{k2}\}^T$$

В [4] подробно описана процедура получения матрицы жесткости ($[K]$) базового элемента, поэтому детально на ней останавливаться не будем. Отметим лишь, что для получения матрицы жесткости базового элемента используется полуаналитический метод, заключающийся в представлении всех составляющих перемещений в виде периодических функций по окружной координате.

Рис. 4. Конечный элемент конической оболочки. l – длина образующей, θ – угол между нормалью к поверхности и осью вращения, h – толщина, r_1 и r_2 – радиусы срединной поверхности

На практике составляющие вектора узловых перемещений удобно выразить через компоненты, направленные вдоль оси вращения (η) и по нормали к ней (ξ) – вектор a . Векторы перемещений $\{\Delta\}$ и $\{a\}$ связаны матрицей $[T]$. Матрица жесткости, соответствующая силам и перемещениям, направленным вдоль оси вращения и по нормали к ней определяется преобразованием поворота матрицы $[K]$:

$$\{a\} = \{\xi_{k1}, \eta_{k1}, v_{k1}, \vartheta_{k1}, \xi_{k2}, \eta_{k2}, v_{k2}, \vartheta_{k2}\}^T; \{a\} = [T]\{\Delta\}; [K] = [T][\underline{K}][T]^T \quad (2)$$

Матрица масс $[M]$ элемента представляет собой классическую согласованную матрицу масс. Проинтегрировав аналитически по окружной координате, можно получить соотношения определяющие матрицу масс в виде:

$$[\underline{M}] = C \int_0^l [H]^T \rho [H] h r ds, C = \begin{cases} \pi, k > 0 \\ 2\pi, k = 0 \end{cases}; [M] = [T][\underline{M}][T]^T \quad (3)$$

Переход от симметричного по окружности решения к кососимметричному и общему виду деформированного состояния КЭ. Распределение перемещений, заданное формулами, представленными в [4], является симметричным относительно нулевого меридиана. В общем случае должна учитываться и кососимметричная часть. С целью одновременного учета симметричного и кососимметричного состояний вектор узловых перемещений КЭ был расширен до размерности 16×1 :

$$\{a_{\text{exp}}^k\} = \{a_{\text{exp},1}^k\}, \{a_{\text{exp},2}^k\} = \{ \{\xi_{k1}^c, \eta_{k1}^c, v_{k1}^c, \vartheta_{k1}^c, \xi_{k1}^s, \eta_{k1}^s, v_{k1}^s, \vartheta_{k1}^s\}, \{\xi_{k2}^c, \eta_{k2}^c, v_{k2}^c, \vartheta_{k2}^c, \xi_{k2}^s, \eta_{k2}^s, v_{k2}^s, \vartheta_{k2}^s\} \}^T \quad (4)$$

где узловые перемещения с индексом «с» принадлежат решению симметричному относительно нулевого меридиана, с индексом «s» – кососимметричному. Известно [8], что переход от «с» к «s» во всех формулах, описывающих оболочку вращения, приводит к тем же соотношениям для коэффициентов с верхним индексом «s», что и для коэффициентов с верхним индексом «с». Поэтому распространение полученных выше соотношений на общий случай, т.е. учет кососимметричной части решения, сводится всего лишь к дублированию тех же матриц, которые уже были найдены ранее соотношениями (2) и (3). Если матрицы, полученные в (2) и (3), разбить на блоки размером 4×4 , то расширенные матрицы масс и жесткостей, соответствующие расширенному вектору узловых перемещений (4) будут иметь вид:

$$[K_{\text{exp}}] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [0] & [K_{12}] & [0] \\ [0] & [K_{11}] & [0] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [0] & [K_{22}] & [0] \\ [0] & [K_{21}] & [0] & [K_{22}] \end{bmatrix}; [M_{\text{exp}}] = \begin{bmatrix} [M_{11}] & [0] & [M_{12}] & [0] \\ [0] & [M_{11}] & [0] & [M_{12}] \\ [M_{21}] & [0] & [M_{22}] & [0] \\ [0] & [M_{21}] & [0] & [M_{22}] \end{bmatrix}$$

Выполненное расширение позволяет одновременно учитывать симметричную и кососимметричную составляющие решения, т.е. рассматривать деформированное состояние общего вида.

Формирование опции жесткого торца с использованием матриц перехода.

Вектор узловых перемещений (4), содержащий 16 компонентов, задает по 8 степеней свободы на каждом из торцов КЭ. Но жесткий торец, как любое абсолютно жесткое тело имеет всего 6 степеней свободы. Для переноса 8 степеней свободы оболочки (без абсолютно жесткого торца) в 6 степеней абсолютно жесткого торца используется матрица перехода для $[L_k]$ (k – номер гармоники). Предполагается, что жесткий торец расположен только у первого торца КЭ, поэтому у второго торца степени свободы не преобразуются. Например, матрица перехода $[L_l]$, а также формула преобразования, предназначенные для формирования опции абсолютно жесткого торца и соответствующие гармонике $k=1$, имеют вид (5). При получении матрицы $[L_l]$ были использованы соотношения (6), аналогичные соотношения для матрицы перехода $[L_0]$, соответствующей гармонике $k=0$, имеют вид (7). При $k>1$ матрицы перехода $[L_k]$ содержат лишь один ненулевой блок, например, для создания абсолютно жесткого торца в первом локальном узле матрица перехода имеет вид (8).

$$\{a_{\text{exp}}^1\} = [L_l] \left\{ \begin{matrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ \vartheta_{1x} \\ \vartheta_{1y} \\ \vartheta_{1z} \\ \{a_{\text{exp},2}^1\} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} [\text{Eq}] & [0] \\ 8 \times 6 & 8 \times 8 \\ [0] & [E] \\ 8 \times 6 & 8 \times 8 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ \vartheta_{1x} \\ \vartheta_{1y} \\ \vartheta_{1z} \\ \{a_{\text{exp},2}^1\} \end{matrix} \right\}; [\text{Eq}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r_l & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_l & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\{a_{\text{exp},1}^1\}^T = \{u_{x1}, -r_l \vartheta_{y1}, -u_{z1}, -\vartheta_{y1}, -u_{y1}, -r_l \vartheta_{x1}, u_{y1}, -\vartheta_{x1}\}^T \quad (6)$$

$$\{n_{01}^c, v_{01}^s\}^T = \{u_{z1}, -r \vartheta_{z1}\}^T \quad (7)$$

$$[L_k] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ 8 \times 6 & 8 \times 8 \\ [0] & [E] \\ 8 \times 6 & 8 \times 8 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Расширенные матрицы жесткости и масс преобразуются в матрицы жесткости и масс элемента с абсолютно жестким торцом по следующему правилу:

$$[\tilde{K}_{\text{exp}}] = [L_k]^T [K_{\text{exp}}] [L_k]; [\tilde{M}_{\text{exp}}] = [L_k]^T [M_{\text{exp}}] [L_k]$$

Тестирование КЭ. Для тестирования КЭ с опцией абсолютно жесткого торца был реализован в пакете WM и была решена задача, изображенная на рисунке 5а, при следующих исходных данных: модуль упругости $E=2.1 \cdot 10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона $\mu=0.3$; радиусы $r_1=0.2$ м, $r_2=0.4$ м; толщина стенки $h=r_2/50$; высота $l=2 r_2$; $F_x=1000$ Н, $F_z=1000$ Н, $M_x=100$ Нм, $M_z=100$ Нм. Оболочка была разбита набором кольцевых элементов (20 элементов), при этом два кольцевых элемента по краям имеют абсолютно жесткие торцы в сечениях 1 и 2. Задача была решена также в КЭ комплексе Ansys. Перемещения сечения 1, полученные обоими способами представлены в таблице 4.

Рис. 5. а) – Тестовая задача №1 (статика), б) – поле перемещений (МКЭ)

Таблица 4. Сравнение перемещений для задачи рис. 5а

Компонента перемещения	WM	Ansys	$\delta, \%$
$u_{x,l}$	$1.6554 \cdot 10^{-6}$ м	$1.6559 \cdot 10^{-6}$ м	0.030
$u_{y,l}$	$1.1252 \cdot 10^{-7}$ м	$1.1259 \cdot 10^{-7}$ м	0.062
$u_{z,l}$	$2.8578 \cdot 10^{-7}$ м	$2.8519 \cdot 10^{-7}$ м	0.207
$\vartheta_{x,l}$	$8.8558 \cdot 10^{-7}$	$8.8620 \cdot 10^{-7}$	0.070
$\vartheta_{y,l}$	$-1.1252 \cdot 10^{-6}$	$-1.1259 \cdot 10^{-6}$	0.062
$\vartheta_{z,l}$	$9.5235 \cdot 10^{-7}$	$9.5208 \cdot 10^{-7}$	0.028

Далее была решена тестовая задача по определению СЧ оболочки (рис. 6а) с теми же параметрами, что и у оболочки на рис. 5а, но с линейно изменяющейся толщиной от $b_1=0.008$ м до $b_2=0.012$ м (толщина при $Z=0$ и $Z=l$ соответственно). Оболочка была разбита набором кольцевых элементов (20 элементов). Полученные частоты были сопоставлены с СЧ, полученными в МКЭ комплексе Ansys для оболочки, изображенной на рисунке 5а (таблица 5).

Рис. 6. а) – Тестовая задача №2, б) – оболочка вращения с криволинейной образующей

Таблица 5. Сравнение частот для задачи рис. 6а

$f_i, \text{Гц}$	WM	Ansys	$\Delta(\text{погрешность}), \%$
1-ая изгибная	291.78	291.20	0.199
1-ая крутильная	550.74	550.80	0.011
1-ая осевая	1167.89	1168.95	0.091
2-ая изгибная	1271.27	1269.20	0.163
3-ая изгибная	2059.49	2056.39	0.151
2-ая крутильная	2296.36	2284.18	0.533
2-ая осевая	2317.78	2302.40	0.668

Как уже было отмечено, с помощью этого КЭ можно моделировать оболочку с геометрией, отличной от конической. Была решена задача по определению СЧ оболочки с криволинейной образующей (табл. 6), защемленной по краям (рис. 6б).

Таблица 6. Сравнение частот для задачи рис. 6б

$f_n, \text{Гц}$	WM	Ansys	$\Delta(\text{погрешность}), \%$
1-ая изгибная	93.45	91.52	2.11
2-ая изгибная	294.20	293.86	0.12
3-ая изгибная	448.70	446.11	0.58
1-ая крутильная	486.33	482.40	0.81
1-ая осевая	777.60	769.30	1.08
4-ая изгибная	815.66	816.37	0.09
2-ая крутильная	866.74	890.06	2.62
5-ая изгибная	1029.85	1019.75	0.99
2-ая осевая	1159.90	1188.00	2.36

Заключение. В работе были рассмотрены различные алгоритмы построения матрицы масс КЭ оболочки, ограниченной жесткими торцами, применяемого при моделировании протяженных участков осесимметричных оболочечных конструкций с произвольной формой образующей, заключенных между поперечными фланцами. При выполнении численных экспериментов было установлено, что классический подход с применением функций форм, полученных из статики, не годится для построения матрицы масс обобщенного элемента, моделирующего протяженный участок. Поэтому были предложены другие алгоритмы получения массово-инерционных характеристик. Но они также имеют ряд ограничений. Таким образом, при замене протяженного участка одним обобщенным элементом в задачах динамики необходимо четко представлять, какие требования предъявляются к обобщенному элементу и, отталкиваясь от этого, выбирать тот или иной алгоритм получения массово-инерционных характеристик, т.к. результат существенно зависит от выбранного способа идентификации. Поэтому в данной работе также разработан и апробирован алгоритм получения матриц жесткости и масс двухузлового конечного элемента осесимметричной оболочки при несимметричном деформировании с опцией жесткого торца.

Решение тестовых задач показало, что реализованный элемент с опцией жесткого сечения работает корректно (см. табл. 4-6) и может успешно применяться для моделирования оболочечных конструкций, заключенных между поперечными фланцами. В отличие от аналогов, возможность создания жесткого торца реализована как опция элемента путем редуцирования матриц жесткости и масс элемента без жесткого торца. Это позволяет избежать использования множителей Лагранжа, которые всегда увеличивают размерность системы уравнений и ухудшают ее свойства.

Литература

1. Якупов С. Н., Киямов И. Х. Анализ НДС сферических оболочек трехмерными элементами //Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – №. 2. – с.76-80.
2. Горохова М. В. Исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольной мембраны, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки //Научный альманах. –2015. – №. 10. – с.80-85.
3. Дегтярев С.А., Иванов А.В., Леонтьев М.К., Дегтярев А.А. Программная система расчета динамики роторов DynamicsR4. Свидетельство об отраслевой разработке №6691. Отраслевой фонд алгоритмов и программ. Государственный информационный центр информационных технологий. Министерство образования Российской Федерации. 2006 г.
4. Усюкин В.И. Строительная механика конструкций космической техники. М.: изд. Машиностроение, 1988.
5. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов / Пер. с англ. А.С. Алексеева; Под ред. А.Ф. Смирнова.–М.:Стройиздат,1982.

6. Hamrit F., Necib B., Driss Z. Analysis of Mechanical Structures Using Beam Finite Element Method //International Journal of Mechanics and Applications. – 2015. – Т. 5. – №. 1. – С. 23-30.
7. Gavin H. P. Classical damping, non-classical damping, and complex modes //class notes for CEE. – 2016. – Т. 51.
8. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний: Учебник для вузов.–М: Высшая школа, 1980.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ БАЛОК С ЗАЗОРОМ С УЧЕТОМ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ БАЛОК

Папкова И.В.¹, Салтыкова О.А.², Крысько А.В.³

¹ Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, Россия, Ikrazvova@mail.ru

² Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, Россия, olga_a_saltykova@mail.ru;

Томский политехнический университет, г. Томск, Россия, olga_a_saltykova@mail.ru

³ Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, Россия, anton.krysko@gmail.com;

Томский политехнический университет, г. Томск, Россия, anton.krysko@gmail.com

Аннотация. В работе построены математические модели контактного взаимодействия двух жестко заземленных балок с зазором, описываемых кинематическими гипотезами второго (модель С.П. Тимошенко) и третьего (модель Пелеха-Шереметьева-Левинсона-Редди) приближений в различных сочетаниях (обе балки модели С.П. Тимошенко, обе балки модели Пелеха-Шереметьева-Левинсона-Редди, одна балка модели Пелеха-Шереметьева-Левинсона-Редди, вторая модели Тимошенко). На одну из балок действует поперечная распределенная знакопеременная нагрузка. Геометрическая нелинейность учитывается по модели Кармана. Материал оболочек изотропный и однородный. Учитывается контактное взаимодействие между ними. Функция контактного давления выведена из числа неизвестных. Математическая модель колебаний построена для гибких балок с постоянной жесткостью и плотностью. Для всего двухслойного пакета используется гипотеза типа Болотина–Новичкова. Уравнения движения элемента оболочки следуют из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского. Построен алгоритм решения полученных уравнений, используя сочетание методов конечных разностей и метод типа Рунге-Кутты. Исследуется сходимость численных методов и обеспечивается достоверность результатов.

Ключевые слова. Контактное взаимодействие, балка модели С.П. Тимошенко, балка модели Пелеха-Шереметьева, нелинейная динамика, метод конечных разностей, методы типа Рунге-Кутты.

В мировой литературе известны несколько гипотез для балочных распределенных механических структур – это модели Бернулли-Эйлера, Релея и С.П. Тимошенко, которые широко используются для решения многих задач в механике. Теорией первого порядка сведения трехмерного тела в виде балки к задачам меньшей размерности можно рассматривать модель Бернулли – Эйлера [1]. Уточненной моделью – теорией второго порядка, считается теория С.П. Тимошенко [2]. В 1964 году двое украинских ученых М.П. Шереметьев и Б.Л. Пелех [3] предложили теорию третьего порядка. Эти теории были применены для расчета балок пластин и оболочек [4-10]. Спустя 27 лет в работах Левинсона [11] и Редди [12] эта модель была открыта заново. Таким образом, сложилась следующая ситуация. В российской научной печати и в публикациях ученых ряда стран восточной Европы [4] аппроксимация функции прогиба многочленом третьей степени связана с именами М.П. Шереметьева и Б.Л. Пелеха, а в работах других авторов, например [13], эта теория носит название теории Редди-Левинсона. При построении

модели авторы статьи будут придерживаться названия – модель Шереметьева–Пелеха-Редди-Левинсона.

Целью исследования является изучение хаотической динамики и контактного взаимодействия двух балок с зазором между ними, подчиняющихся разным теориям (второго и третьего приближений), находящихся под действием внешней поперечной знакопеременной распределенной нагрузки.

Рассматривается пакет, состоящий из двух с прямоугольным поперечным сечением длиной a , высотой $2h$. Между балками имеется зазор h_k . Как двумерная область Ω определяется следующим образом:

$$\Omega = \{x \in [0, a] - h \leq z \leq h_k + 3h\}, \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

Математическая модель балки основывается на следующих гипотезах:

- учитывается инерция вращения элементов балки, однако учитываются силы инерции, отвечающие за перемещения вдоль нормали к срединной линии;
- внешние силы не меняют своего направления при деформации балки;
- продольный размер балки значительно превышает ее поперечные размеры;
- геометрическая нелинейность учитывается в форме Т. Кармана.

Уравнения для контактного взаимодействия балок с учетом гипотезы Шереметьева–Пелеха-Редди-Левинсона [3, 11, 12] для обеих балок:

- поперечные сечения не остаются плоскими, и не перпендикулярны деформированной оси балки;
 - учитываются инерционные составляющие, связанные с поворотом сечений.
- Перемещения произвольной точки балки

$$u^i = u + z\gamma_x + z^2 u^T + z^3 \gamma^T; \quad w^i = w \quad (1)$$

где γ_x - угол поворота нормали к срединной поверхности, u^T, γ^T - пока неизвестные функции, w - прогиб. Для вывода уравнений равновесия используем принцип Остроградского-Гамильтона. Уравнения движения элемента балки имеют вид:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\lambda^2 63} \left[\frac{4}{5} \frac{\partial^3 \gamma_x^i}{\partial x^3} - \frac{1}{4} \frac{\partial^4 w^i}{\partial x^4} \right] + k^2 \frac{G_{13}^i}{E_1^i} \left[\frac{\partial \gamma_x^i}{\partial x} + \frac{\partial^2 w^i}{\partial x^2} \right] + \\ & \frac{1}{\lambda^2} \left[L_3(w^i, u^i) + L_1(w^i, u^i) + \frac{3}{2} L_2(w^i, w^i) \right] + \frac{1}{\lambda^2} q^i + \\ & + (-1)^i K(w_1 - w_2 - h_k) \Psi - \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2} - \varepsilon_2 \frac{\partial w^i}{\partial t} = 0; \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} + L_4(w^i, w^i) - \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} - \varepsilon_1 \frac{\partial u^i}{\partial t} = 0;$$

$$\frac{204}{315} \frac{\partial^2 \gamma_x^i}{\partial x^2} - \frac{48}{315} \frac{\partial^3 w^i}{\partial x^3} - 12 \lambda^2 k^2 \frac{G_{13}^i}{E_1^i} \left[\gamma_x^i + \frac{\partial w^i}{\partial x} \right] - \frac{\partial^2 \gamma_x^i}{\partial t^2} - \varepsilon_3 \frac{\partial \gamma_x^i}{\partial t} = 0.$$

$$L_1(w^i, u^i) = \frac{\partial^2 w^i}{\partial x^2} \frac{\partial u^i}{\partial x}, \quad L_2(w^i, w^i) = \frac{\partial^2 w^i}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w^i}{\partial x} \right)^2, \quad L_3(w^i, u^i) = \frac{\partial w^i}{\partial x} \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2}, \quad L_4(w^i, w^i) = \frac{\partial w^i}{\partial x} \frac{\partial^2 w^i}{\partial x^2}$$

где $i = 1; 2$ – номер балки.

Уравнения (2) приведены к безразмерному виду следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{w}^i &= \frac{w^i}{2h}, \quad \bar{u}^i = \frac{u^i a}{(2h)^2}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \lambda = \frac{a}{(2h)}, \quad \bar{q} = q \frac{a^4(1-\nu_i^2)}{(2h)^4 E}, \\ \bar{t} &= \frac{t}{\tau}, \quad \tau = \frac{a}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{E^i g^i}{(1-\nu_i^2)\rho^i}}, \quad \bar{\varepsilon}_{1,2,3}^i = \varepsilon_{1,2,3}^i \frac{a}{c}, \quad \bar{\gamma}_x^i = \frac{\gamma_x^i a}{(2h)},\end{aligned}\quad (3)$$

К системе дифференциальных уравнений (2), следует присоединить граничные условия. Для частного случая жесткой заделки запишутся:

$$\begin{aligned}w^i(0,t) &= w^i(1,t) = 0; \quad u^i(0,t) = u^i(1,t) = 0; \quad \gamma_x^i(0,t) = \gamma_x^i(1,t) = 0; \\ \frac{\partial w^i(0,t)}{\partial x} &= \frac{\partial w^i(1,t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u^i(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u^i(1,t)}{\partial x} = 0; \\ \frac{16}{5} \frac{\partial^2 \gamma_x^i(0,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 w^i(0,t)}{\partial x^3} &= 0; \quad \frac{16}{5} \frac{\partial^2 \gamma_x^i(1,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 w^i(1,t)}{\partial x^3} = 0; \\ \frac{136}{315} \frac{\partial \gamma_x^i(0,t)}{\partial x} - 0.038 \frac{\partial^2 w^i(0,t)}{\partial x^2} &= 0; \quad \frac{136}{315} \frac{\partial \gamma_x^i(1,t)}{\partial x} - 0.038 \frac{\partial^2 w^i(1,t)}{\partial x^2} = 0.\end{aligned}\quad (4)$$

начальные условия

$$\begin{aligned}w^i(x,t)|_{t=0} &= u^i(x,t)|_{t=0} = \gamma_x^i(x,t)|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial w^i(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial u^i(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \gamma_x^i(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.\end{aligned}\quad (5)$$

Приведенное уравнение содержит производную четвертого порядка по координате, что крайне важно при доказательстве существования решения уравнения и сходимости различных методов их решения.

Уравнения для контактного взаимодействия балок с учетом гипотезы С.П. Тимошенко[2] для обеих балок

Полагаем, что тангенциальные перемещения u^z, w^z распределены по толщине балки согласно линейному закону, т.е. в выражении (1) останутся только линейные члены

$$u^z = u + z\gamma_x, \quad w^z = w \quad (6)$$

тогда система (2)–(5) вырождается в систему (7) – (8), (5)

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 w^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma_x^i}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{\lambda^2} \left(L_1(w^i, u^i) + \frac{1}{2} L_2(w^i, w^i) + L_3(w^i, u^i) + L_2(w^i, w^i) \right) + \frac{1}{\lambda^2} q^i - \\ & - \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2} - \varepsilon_1 \frac{\partial w^i}{\partial t} + (-1)^i K(w_1 - w_2 - h_k) \Psi = 0, \\ & \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} + L_4(w^i, w^i) - \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} - \varepsilon_2 \frac{\partial u^i}{\partial t} = 0, \\ & \frac{\partial^2 \gamma_x^i}{\partial x^2} - 8\lambda^2 \left(\frac{\partial w^i}{\partial x} + \gamma_x^i \right) - \frac{\partial^2 \gamma_x^i}{\partial t^2} - \varepsilon_3 \frac{\partial \gamma_x^i}{\partial t} = 0; \end{aligned} \right. \quad (7)$$

где $i = 1; 2$ – номер балки.

Граничные условия для жесткой заделки и начальные условия (5).

$$\begin{aligned} w^i(0, t) = w^i(1, t) = 0; \quad u^i(0, t) = u^i(1, t) = 0; \\ \gamma_x^i(0, t) = \gamma_x^i(1, t) = 0; \quad \frac{\partial w^i(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial w^i(1, t)}{\partial x} = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

Дифференциальные уравнения, выведенные с учетом гипотезы С.П. Тимошенко, имеют старшую вторую производную по координате, что иногда затрудняет доказательство сходимости некоторых методов.

Уравнения для контактного взаимодействия балок с учетом гипотез С.П. Тимошенко и Пелеха-Шереметьева-Редди-Левинсона

Для вывода уравнения движения элемента первой балки используем гипотезу С.П. Тимошенко, а для вывода уравнения для второй балки – Пелеха-Шереметьева-Редди-Левинсона.

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 w^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma_x^i}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{\lambda^2} \left(L_1(w^i, u^i) + \frac{1}{2} L_2(w^i, w^i) + L_3(w^i, u^i) + L_2(w^i, w^i) \right) + \frac{1}{\lambda^2} q^i - \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2} - \varepsilon_1 \frac{\partial w^i}{\partial t} + (-1)^i K(w_1 - w_2 - h_k) \Psi = 0, \right. \\ & \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} + L_4(w^i, w^i) - \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} - \varepsilon_2 \frac{\partial u^i}{\partial t} = 0, \\ & \frac{\partial^2 \gamma_x^i}{\partial x^2} - 8\lambda^2 \left(\frac{\partial w^i}{\partial x} + \gamma_x^i \right) - \frac{\partial^2 \gamma_x^i}{\partial t^2} - \varepsilon_3 \frac{\partial \gamma_x^i}{\partial t} = 0 \\ & \left\{ \frac{1}{\lambda^2 63} \left[\frac{4}{5} \frac{\partial^3 \gamma_x^i}{\partial x^3} - \frac{1}{4} \frac{\partial^4 w^i}{\partial x^4} \right] + k^2 \frac{G_{13}^i}{E_1^i} \left[\frac{\partial \gamma_x^i}{\partial x} + \frac{\partial^2 w^i}{\partial x^2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\lambda^2} \left[L_3(w^i, u^i) + L_1(w^i, u^i) + \frac{3}{2} L_2(w^i, w^i) \right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{\lambda^2} q^i + (-1)^i K(w_1 - w_2 - h_k) \Psi - \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2} - \varepsilon_2 \frac{\partial w^i}{\partial t} = 0; \right. \\ & \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} + L_4(w^i, w^i) - \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} - \varepsilon_1 \frac{\partial u^i}{\partial t} = 0; \\ & \left. \frac{204}{315} \frac{\partial^2 \gamma_x^i}{\partial x^2} - \frac{48}{315} \frac{\partial^3 w^i}{\partial x^3} - 12\lambda^2 k^2 \frac{G_{13}^i}{E_1^i} \left[\gamma_x^i + \frac{\partial w^i}{\partial x} \right] - \frac{\partial^2 \gamma_x^i}{\partial t^2} - \varepsilon_3 \frac{\partial \gamma_x^i}{\partial t} = 0. \right. \end{aligned} \quad (9)$$

где $i = 1; 2$ – номер балки.

В системах уравнений (1), (7) и (9) функция Ψ определена формулой

$\Psi = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(w_1 - h_k - w_2)]$, то есть $\Psi = 1$, если есть контакт между балками - $w_1 > w_2 + h_k$, иначе контакта нет [14].

Граничные условия для жесткой заделки (4), (8) и начальные условия (5).

На первую балку действует поперечная распределенная по поверхности знакопеременная нагрузка вида:

$$q = q_0 \sin(\omega_p t) \quad (10)$$

где q_0 - амплитуда, ω_p - частота вынуждающих колебаний.

В работе также рассмотрен случай, когда для вывода уравнения движения элемента первой балки используем гипотезу Пелеха-Шереметьева-Редди-Левинсона, а для второй балки – С.П. Тимошенко.

Описанные выше бесконечномерные задачи с помощью метода конечных разностей, с аппроксимацией $O(h^2)$ сводится к конечномерной – задаче Коши. Задача Коши решается различными методами типа Рунге – Кутты от второго до восьмого порядка точности.

Предварительно исследовался вопрос о сходимости метода конечных разностей в зависимости от количества участков деления отрезка. В таблице 1 приведены сигналы на интервале $t \in [500, 506]$, для $n = 40; 80; 120; 240; 360; 400$ при действии нагрузки с амплитудой $q_0 = 5000$, и частотой $\omega_p = 5.1$ - частота собственных колебаний балки Тимошенко. Обе балки имеют одинаковые геометрические размеры $\lambda = a/2h = 50$, зазор $h_k = 0.1$, коэффициент диссипации $\varepsilon = 1$. Задача Коши также решается численными методами, поскольку решение существенно зависит от метода и шага решения по времени. Поэтому предлагается решать задачу Коши несколькими методами: метод Рунге-Кутты 4-го, 2-го порядков, метод Рунге-Кутты-Фелберга 4-го порядка, метод Кеш-Карпа 4-го порядка, Рунге-Кутта принца Дорманда восьмого порядка, неявный метод Рунге-Кутта 2-го порядка и 4-го порядка.

Таблица 1. Сходимость решения в зависимости от n и от выбора метода типа Рунге-Кутты.

Очевидно, что сходимость по числу разбиений по пространственной координате оптимально при $n=400$, как для первой, так и для второй балки. Сходимость по методам типа Рунге-Кутты абсолютная. Далее приводятся результаты решения задачи Коши, полученные методом Рунге-Кутты 8-го порядка Принса - Дорманда.

В таблице 2 представлено сопоставление сигналов, полученных при решении дифференциальных уравнений с учетом гипотез второго и третьего приближения. Сигналы совпадают по форме колебаний, но отличаются по значениям, как для первой, так и для второй балок.

Сигналы, посчитанные для уравнений, при выводе которых были использованы обе гипотезы: 1. Для первой балки - С.П. Тимошенко, для второй балки – Пелеха-Шереметьева-Редди-Левинсона; 2. Для первой балки - Пелеха-Шереметьева-Редди-Левинсона, для второй балки – С.П. Тимошенко не совпадают и находятся между сигналами, посчитанными уравнениями с учетом только гипотезы С.П. Тимошенко или только гипотезы Пелеха-Шереметьева-Редди-Левинсона.

Таблица 2. Сопоставление сигналов, полученных с учетом разных моделей

В таблице 3 приведем графики спектров мощности для каждой из четырех рассматриваемых моделей, для каждой балки. Амплитуда нагрузки и частота вынуждающих колебаний прежние.

Таблица 3. Спектры мощности для различных сочетаний моделей

Нагрузка действует на балку, описываемой гипотезой Пелеха-Шереметьева-Редди-Левинсона, вторая балка С.П. Тимошенко

В случае, когда обе балки подчиняются гипотезе С.П. Тимошенко, при учете гипотез для первой (второй) балки – Тимошенко, а для второй (первой) балки – Пелеха-Шереметьева-Редди-Левинсона на спектрах мощности, помимо частоты вынуждающих колебаний, присутствует еще три частоты ω_1 , ω_2 , значения которых линейно зависят от частоты возбуждения ω_p . Спектр мощности второй балки сильнее зашумлен для всех рассмотренных моделей.

При учете гипотезы Пелеха-Шереметьева-Редди-Левинсона, основные частоты для обеих балок совпадают, но для второй балки характерна шумовая составляющая в спектре. Отметим, что частоты, на спектрах мощности во втором случае, присутствуют и на спектрах для балок модели С.П. Тимошенко.

Выводы

1. В работе исследована сходимость метода конечных разностей для сведения бесконечномерной задачи к конечномерной – задаче Коши.
2. Проведено сопоставление результатов, полученных различными методами типа Рунге-Кутты.
3. Сделано сопоставление результатов, полученных при решении систем уравнений с учетом различных гипотез, описывающих колебание балок.
4. В результате проведенных исследований было выявлено, что в сигнале присутствуют одни и те же частоты, линейно зависящие от частоты возбуждения, независимо от используемых гипотез при выводе уравнений движения элемента балки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФН № 16-19-10290.

Литература

1. Euler L. Sur la force des colonnes // *Memories de L'Academie de Berlin*. 1757. Vol. 13. p. 252 – 282.
2. Timoshenko S.P. On the correction for shear of differential equation for transverse vibration of prismatic bar / *Philosophical Magazine*. 41. 3 6 (1921). P. 744-746
3. Шереметьев М.П., Пелех Б.Л. К построению уточненной теории пластин / *Инженерный журнал*. 1964. Т.4. Вып. 3. С. 34-41.
4. Hanuška A. Contribution to the Reissnerian algorithm in the theory of bending of elastic plates. *Aplikace matematiky*. Vol. 12 (1967), No. 6, 449—467
5. Крылова Е.Ю., Яковлева Т.В., Баженов В.Г. Хаотическая динамика гибких прямоугольных в плане панелей в поле белого шума // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2016. № 1. С. 82-92

6. Papkova I. V., Krylova E. Yu., Erofeev N. P., Zakharov V. M., Krys'ko V. A. Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Volume 57, Issue 4, pp 714–719, 2016
7. Awrejcewicz J., Krysko-Jr. V.A., Yakovleva T.V., Krysko V.A. / Noisy contact interactions of multi-layer mechanical structures coupled by boundary conditions. // *Journal of Sound and Vibration*. No. 369. 2016. p. 77–86.
8. J. Awrejcewicz, V.A. Krysko-jr, T.V. Yakovleva and V.A. Krysko, Alternating chaos versus synchronized vibrations of interacting plate with beams, *International Journal of Non-Linear Mechanics* Vol. 88, 2017, Pages 21–30
9. Saltykova O.A., Krysko V.A. Chaotic Dynamics of Two Timoshenko Beams with a Gap, *International Journal of Applied Engineering Research* Volume 11, Number 21 (2016) pp. 10392-10397 (2 балки Тимошенко)
10. Салтыкова О.А., Крысько В.А. Контактное взаимодействие двух балок Тимошенко // *Нелинейная динамика*, №1, 2017.
11. Levinson M (1981) A new rectangular beam theory. *J Sound Vib* 74:81–8787
12. Reddy J.N. (1984) A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech* 51:745–752
13. Ma HM, Gao XL, Reddy JN (2010) A nonclassical Reddy–Levinson beam model based on a modified couple stress theory. *Int J Multiscale Comput Eng* 8:167–180
14. Кантор Б.Я., Богатыренко Т.Л., Метод решения контактных задач нелинейной теории оболочек // *Докл. АН УССР. сер. А*. 1986. №1. С.18-21.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И МИКРОВАРАЩЕНИЙ В ДЛИННОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Радаев Ю.Н.¹, Ярымов О.А.²

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия,
y.radayev@gmail.com

²МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, yarymvsarge@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается задача о распространении связанной гармонической волны перемещений и микровращений вдоль оси длинного цилиндрического волновода. Моделирование микровращений осуществляется в рамках линейной теории микрополярной упругости. Приводится связанная система векторных дифференциальных уравнений микрополярной упругости, уравнения для определения контактных напряжений и контактных моментных напряжений. Перемещения и микровращения в связанной волне раскладываются на потенциальные и вихревые составляющие. Для определения скалярных и векторных потенциалов получены сначала связанные дифференциальные уравнения, которые затем удастся свести к несвязанным. Для высокочастотных волн в цилиндрической области найдены решения волновых уравнений для потенциалов волн перемещений и микровращений.

Ключевые слова. Микрополярность, перемещения, микровращения, волновое поле, напряжения, моментные напряжения, условия калибровки, волновод.

Рассмотрим связанную систему векторных дифференциальных, определяющих связанное волновое поле в микрополярной упругой среде [1]:

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - (\mu + \eta)\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2\eta\nabla \times \dot{\boldsymbol{\phi}} = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \\ (\beta + 2\gamma)\nabla\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}} - (\gamma + \varepsilon)\nabla \times (\nabla \times \dot{\boldsymbol{\phi}}) + 2\eta\nabla \times \mathbf{u} - 4\eta\dot{\boldsymbol{\phi}} = \mathfrak{I}\ddot{\dot{\boldsymbol{\phi}}}. \end{cases} \quad (1)$$

В приведенных выше уравнениях: $\lambda, \mu, \gamma, \beta, \varepsilon, \eta$ – определяющие постоянные микрополярной упругой среды; ∇ – трехмерный оператор Гамильтона (набла Гамильтона); $\mathbf{u}$ – вектор перемещений; $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ – вектор микровращений среды; ρ – плотность среды; $\mathfrak{I}$ – мера инерции микроэлемента при вращении; точкой сверху обозначается частное дифференцирование по времени.

В данной статье будут использоваться обозначения, которые совпадают с [1], если выполнить замену определяющей материальной постоянной $\eta \rightarrow \alpha$.

Для вычисления контактных напряжений и контактных моментных напряжений необходимо сначала получить выражения для тензора напряжений и тензора моментных напряжений

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= (\mu + \eta)\boldsymbol{\gamma} + (\mu - \eta)\boldsymbol{\gamma}^T + \lambda\hat{\mathbf{1}}\text{tr}\boldsymbol{\gamma}, \\ \boldsymbol{\mu} &= (\gamma + \varepsilon)\boldsymbol{\kappa} + (\gamma - \varepsilon)\boldsymbol{\kappa}^T + \beta\hat{\mathbf{1}}\text{tr}\boldsymbol{\kappa}, \end{aligned} \quad (2)$$

а также для тензора деформаций и тензора изгиба–кручения

$$\boldsymbol{\kappa} = \nabla \otimes \dot{\boldsymbol{\phi}}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \nabla \otimes \mathbf{u} - \dot{\boldsymbol{\phi}} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3)$$

где σ – тензор напряжений, μ – тензор моментных напряжений, $\hat{1}$ – единичный тензор, ε – кососимметричный тензор.

После ряда преобразований с помощью уравнений (2) и (3) можно получить следующие уравнения (ср. [1]):

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{n} + 2\mu(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mu - \eta)(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{u} + 2\eta\mathbf{n} \times \phi, \\ \mathbf{m} &= \beta(\nabla \cdot \phi)\mathbf{n} + 2\gamma(\mathbf{n} \cdot \nabla)\phi + (\gamma - \varepsilon)(\mathbf{n} \times \nabla) \times \phi. \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathbf{n}$ – вектор единичной нормали к поверхности, ограничивающей микрополярное тело, $\mathbf{t}$ – вектор контактных напряжений, $\mathbf{m}$ – вектор контактных моментных напряжений.

На боковой поверхности волновода должны удовлетворяться следующие граничные условия:

$$\mathbf{t} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Система (1) является связанной, поэтому для ее решения необходимо выполнить преобразования, которые позволили бы привести ее к несвязанным уравнениям. С этой целью введем динамические потенциалы перемещений и микровращений, основываясь на разложении Стокса–Гельмгольца для векторов $\mathbf{u}$ и ϕ :

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi, \quad \phi = \nabla\Sigma + \nabla \times \mathbf{H}, \quad (6)$$

где Φ и Σ – скалярные потенциалы, а Ψ и $\mathbf{H}$ – векторные потенциалы перемещений и микровращений соответственно.

При подстановке разложений (6) в (1) можно заключить, что система (1) будет удовлетворяться, если скалярные и векторные потенциалы, подчиняющиеся условиям калибровки

$$\nabla \cdot \Psi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (7)$$

являются решениями несвязанных уравнений:

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c_{\parallel}^2}\ddot{\Phi} = 0, \quad \Delta\Sigma - \frac{1}{\mu c_{\parallel}^2}\ddot{\Sigma} - \frac{\Omega^2}{\mu c_{\parallel}^2}\Sigma = 0, \quad (8)$$

и следующей связанной системы уравнений:

$$\begin{cases} \Delta\Psi - \frac{1}{\rho c_{\perp}^2}\ddot{\Psi} + 2d_{\perp}^2\nabla \times \mathbf{H} = 0, \\ \Delta\mathbf{H} - \frac{1}{\mu c_{\perp}^2}\ddot{\mathbf{H}} - \frac{\Omega^2}{\mu c_{\perp}^2}\mathbf{H} + \frac{\Omega^2}{2\mu c_{\perp}^2}\nabla \times \Psi = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= 4\eta\mathfrak{S}^{-1}, \quad \rho c_{\parallel}^2 = \lambda + 2\mu, \quad \mathfrak{S} \mu c_{\parallel}^2 = \beta + 2\gamma, \quad \mathfrak{S} \mu c_{\perp}^2 = \mu + \eta, \\ \rho c_{\perp}^2 &= \mu + \eta, \quad \rho c_{\perp}^2 = \eta, \quad \mathfrak{S} c_{\perp}^2 d_{\perp}^2 = \mathfrak{S} c_{\perp}^2. \end{aligned} \quad (10)$$

В дальнейшем мы ограничимся исследованием связанных монохроматических

высокочастотных волн перемещений и микровращений ($\omega > \Omega$). Поэтому далее под потенциалами понимаются их комплексные амплитуды. В высокочастотном случае приходим к следующим дифференциальным уравнениям для потенциалов:

$$(\Delta + \alpha_{\parallel}^2)\Phi = 0, \quad (\Delta + \beta_{\parallel}^2)\Sigma = 0, \quad \begin{cases} (\Delta + \alpha_{\perp}^2)\Psi + 2d_{\perp}^2 \nabla \times \mathbf{H} = 0, \\ (\Delta + \beta_{\perp}^2)\mathbf{H} + \frac{\Omega^2}{2\mu c_{\perp}^2} \nabla \times \Psi = 0. \end{cases} \quad (11)$$

В данных выше уравнениях вводятся обозначения:

$$\alpha_{\parallel}^2 = \omega^2 / c_{\parallel}^2, \quad \beta_{\parallel}^2 = (\omega^2 - \Omega^2) / \mu c_{\parallel}^2, \quad \alpha_{\perp}^2 = \omega^2 / c_{\perp}^2, \quad \beta_{\perp}^2 = (\omega^2 - \Omega^2) / \mu c_{\perp}^2. \quad (12)$$

Уравнения (9) для вихревых потенциалов Ψ и $\mathbf{H}$ по-прежнему остаются связанными. Несвязанные уравнения для векторных потенциалов могут быть получены путем повышения порядка дифференцирований в (9). В результате для потенциалов Ψ и $\mathbf{H}$ могут быть найдены отдельные уравнения:

$$(\Delta + K_1^2)(\Delta + K_2^2)\Psi = 0, \quad (\Delta + K_1^2)(\Delta + K_2^2)\mathbf{H} = 0, \quad (13)$$

где

$$K_{1,2}^2 = -\Delta_{1,2}, \quad 2\Delta_{1,2} = -(\alpha_{\perp}^2 + \beta_{\perp}^2 + \sigma_{\perp}^2) \pm \sqrt{(\alpha_{\perp}^2 - \beta_{\perp}^2 + \sigma_{\perp}^2)^2 + 4\beta_{\perp}^2 \sigma_{\perp}^2}, \\ \sigma_{\perp}^2 = d_{\perp}^2 \Omega^2 / \mu c_{\perp}^2. \quad (14)$$

Поиск связанного волнового поля будет проводиться в цилиндрической области в цилиндрических координатах r, φ, z методом разделения переменных, следуя [2]. Решения уравнений со скалярными потенциалами получаются в форме:

$$\Phi = C_1 I_n(p_1 r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \quad \Sigma = -C_2 I_n(p_2 r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \quad (15)$$

где k – волновое число; C_1 и C_2 – произвольные постоянные; $I_n(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода мнимого аргумента; $p_1^2 = k^2 - \alpha_{\parallel}^2$, $p_2^2 = k^2 - \beta_{\parallel}^2$.

Вихревые потенциалы перемещений и микровращений определяются физическими компонентами в цилиндрической системе координат по формулам:

$$\begin{cases} \Psi_r = [C_3' I_{n-1}(q_1 r) + C_4' I_{n+1}(q_1 r) + C_3'' I_{n-1}(q_2 r) + C_4'' I_{n+1}(q_2 r)] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ \Psi_{\varphi} = [C_3' I_{n-1}(q_1 r) - C_4' I_{n+1}(q_1 r) + C_3'' I_{n-1}(q_2 r) - C_4'' I_{n+1}(q_2 r)] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ \Psi_z = [C_5' I_n(q_1 r) + C_5'' I_n(q_2 r)] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} H_r = [L'_3 I_{n-1}(q_1 r) + L'_4 I_{n+1}(q_1 r) + L''_3 I_{n-1}(q_2 r) + L''_4 I_{n+1}(q_2 r)] \begin{Bmatrix} -\cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ H_\varphi = [L'_3 I_{n-1}(q_1 r) - L'_4 I_{n+1}(q_1 r) + L''_3 I_{n-1}(q_2 r) - L''_4 I_{n+1}(q_2 r)] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ H_z = [L'_5 I_n(q_1 r) + L''_5 I_n(q_2 r)] \begin{Bmatrix} -\cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \end{cases} \quad (17)$$

где $C'_3 - C'_5$, $C''_3 - C''_5$, $L'_3 - L'_5$ и $L''_3 - L''_5$ – произвольные постоянные, и, кроме того, вводятся постоянные $q_1^2 = k^2 - K_1^2$, $q_2^2 = k^2 - K_2^2$.

На основании формул (15), (16) и (17) можно определить физические компоненты перемещений и микровращений (см. также (6)):

$$u_r = \left[C_1 \left(p_1 I_{n+1}(p_1 r) + \frac{n}{r} I_n(p_1 r) \right) + \frac{n}{r} (C'_5 I_n(q_1 r) + C''_5 I_n(q_2 r)) + \right. \\ \left. + (\mp ik) (C'_3 I_{n-1}(q_1 r) - C'_4 I_{n+1}(q_1 r) + C''_3 I_{n-1}(q_2 r) - C''_4 I_{n+1}(q_2 r)) \right] \times \\ \times \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \quad (18)$$

$$u_\varphi = \left[-\frac{n}{r} C_1 I_n(p_1 r) - C'_5 \left(q_1 I_{n+1}(q_1 r) + \frac{n}{r} I_n(q_1 r) \right) + \right. \\ \left. + (\pm ik) (C'_3 I_{n-1}(q_1 r) + C'_4 I_{n+1}(q_1 r) + C''_3 I_{n-1}(q_2 r) + C''_4 I_{n+1}(q_2 r)) - \right. \\ \left. - C''_5 \left(q_2 I_{n+1}(q_2 r) + \frac{n}{r} I_n(q_2 r) \right) \right] \times \\ \times \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \quad (19)$$

$$u_z = (C_1 (\pm ik) I_n(p_1 r) + (C'_3 - C'_4) q_1 I_n(q_1 r) + (C''_3 - C''_4) q_2 I_n(q_2 r)) \times \\ \times \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}; \quad (20)$$

$$\phi_r = \left[-C_2 \left(p_2 I_{n+1}(p_2 r) + \frac{n}{r} I_n(p_2 r) \right) + \frac{n}{r} (L'_5 I_n(q_1 r) + L''_5 I_n(q_2 r)) + \right. \\ \left. + (\mp ik) (L'_3 I_{n-1}(q_1 r) - L'_4 I_{n+1}(q_1 r) + L''_3 I_{n-1}(q_2 r) - L''_4 I_{n+1}(q_2 r)) \right] \times \\ \times \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \quad (21)$$

$$\phi_\varphi = \left[\begin{aligned} & -\frac{n}{r} C_2 I_n(p_2 r) - L'_5 \left(q_1 I_{n+1}(q_1 r) + \frac{n}{r} I_n(q_1 r) \right) + \\ & + (\pm i k) (L'_3 I_{n-1}(q_1 r) + L'_4 I_{n+1}(q_1 r) + L''_3 I_{n-1}(q_2 r) + L''_4 I_{n+1}(q_2 r)) - \\ & - L''_5 \left(q_2 I_{n+1}(q_2 r) + \frac{n}{r} I_n(q_2 r) \right) \end{aligned} \right] \times \left\{ \begin{aligned} & -\cos n\varphi \\ & \sin n\varphi \end{aligned} \right\} e^{\pm i k z}, \quad (22)$$

$$\phi_z = (-C_2 (\pm i k) I_n(p_2 r) + (L'_3 - L'_4) q_1 I_n(q_1 r) + (L''_3 - L''_4) q_2 I_n(q_2 r)) \times \left\{ \begin{aligned} & \sin n\varphi \\ & \cos n\varphi \end{aligned} \right\} e^{\pm i k z}. \quad (23)$$

Контактные напряжения и контактные моментные напряжения вычисляются на основании уравнений (4):

$$t_r = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\mu - \eta) \left(-\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad (24)$$

$$t_\varphi = 2\mu \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + (\mu - \eta) \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - 2\eta \phi_z, \quad t_z = 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial r} + (\mu - \eta) \frac{\partial u_r}{\partial z} + 2\eta \phi_z, \quad (25)$$

$$m_r = \beta (\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}) + 2\gamma \frac{\partial \phi_r}{\partial r} + (\gamma - \varepsilon) \left(-\frac{\partial \phi_z}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad (26)$$

$$m_\varphi = 2\gamma \frac{\partial \phi_r}{\partial r} + (\gamma - \varepsilon) \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_r}{\partial \varphi}, \quad m_z = 2\gamma \frac{\partial \phi_z}{\partial r} + (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial \phi_r}{\partial z}. \quad (27)$$

Таким образом, волновое поле внутри длинного цилиндрического волновода представляется формулами (18) – (23), которые содержат 14 произвольных постоянных. Часть из них (шесть произвольных постоянных) определяются краевыми условиями на боковой поверхности волновода. Остальные – различными дополнительными условиями (например, калибровочными условиями (7)). Упомянутые условия позволяют найти четыре следующих уравнения:

$$\begin{aligned} (C'_3 + C'_4) q_1 + (\pm i k) C'_5 &= 0, \\ (C''_3 + C''_4) q_2 + (\pm i k) C''_5 &= 0; \\ (L'_3 + L'_4) q_1 + (\pm i k) L'_5 &= 0, \\ (L''_3 + L''_4) q_2 + (\pm i k) L''_5 &= 0. \end{aligned}$$

Литература

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Изд-во Мир, 1975. 872 с.
2. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.

О ИСТИННОСТИ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ГИБКИХ БАЛОК, ОПИСЫВАЕМЫХ МОДЕЛЯМИ ЭЙЛЕРА-БЕРНУЛЛИ, ТИМОШЕНКО И ИХ КОМБИНАЦИЯМИ

Салтыкова О.А.¹, Папкова И.В.², Крысько В.А.³

¹ Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г.

Саратов, Россия, olga_a_saltykova@mail.ru;

Томский политехнический университет, г. Томск, Россия, olga_a_saltykova@mail.ru

² Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г.

Саратов, Россия, Ikrazzova@mail.ru

³ Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г.

Саратов, Россия, tak@san.ru

Аннотация. В работе проведено исследование нелинейной динамики и контактного взаимодействия двух балок сзором, описываемых кинематическими гипотезами первого (модель Эйлера-Бернулли) и второго (модель Тимошенко С.П.) приближений в различных сочетаниях (обе балки модели Эйлера-Бернулли, обе балки модели Тимошенко, одна балка модели Эйлера-Бернулли, вторая модели Тимошенко). На одну из балок действует поперечная распределенная знакопеременная нагрузка. Граничные условия балок – жесткая заделка. Контактное взаимодействие балок учтено по модели Кантора Б.Я. Поставленная задача обладает большой нелинейностью, за счет учета геометрической нелинейности балок по Т. фон Карману и конструктивной нелинейности структуры. Бесконечномерная система дифференциальных уравнений сводится к системе ОДУ методом конечных разностей второго порядка. Полученная система решается методами типа Рунге-Кутты различных порядков. Проведено исследование сходимости результатов в зависимости от количества точек разбиения по пространственной координате и по времени. Анализ полученных результатов осуществляется методами нелинейной динамики и качественной теории дифференциальных уравнений.

Ключевые слова. Контактное взаимодействие, балка модели Эйлера-Бернулли, балка модели Тимошенко С.П., нелинейная динамика, метод конечных разностей, методы типа Рунге-Кутты.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 16-11-10138.

Балки и балочные структуры широко применяются в современной промышленности, машиностроении, ракетостроении и т.д. Часто такие структуры подвергаются различным внешним динамическим воздействиям. Исследование нелинейной динамики и контактного взаимодействия балочных структур является очень важным вопросом на современном этапе развития науки.

Хорошо известны такие теории изгиба балок, как теория Эйлера-Бернулли [1], Рэлея (первого приближения), Тимошенко С.П. [2] (второго приближения), Пелеха-Шереметьева-Левинсона-Рэдди [3] (третьего приближения). Мы остановимся на теориях Эйлера-Бернулли и Тимошенко С.П. Целью работы является исследование влияния учитываемой теории на нелинейную динамику и контактное взаимодействие двух балок. Необходимо определить, что нового в нелинейную динамику балочных структур вносит учет деформаций, связанных с поперечными силами, и учет инерции вращения.

В российской и зарубежной научной литературе можно найти большое количество работ, посвященных исследованию балок, пластин и оболочек, подчиняющихся модели Эйлера-Бернулли, Тимошенко, Пелеха-Шереметьева [4-6]. Но что касается исследования контактного взаимодействия балок, подчиняющихся разным моделям, то таких работ нами не найдено.

Целью исследования является изучение хаотической динамики и контактного взаимодействия двух балок с зазором между ними, подчиняющихся разным теориям (первого и второго приближений), находящихся под действием внешней поперечной знакопеременной распределенной нагрузки.

Рассматриваемая структура из двух балок представляет собой двумерную область пространства R^2 с декартовой системой координат, введенной следующим образом: в теле балки 2 фиксируется линия приведения, называемая срединной линией $z = 0$, ось OX направлена слева направо вдоль срединной линии, ось OZ – вниз, перпендикулярно OX . В указанной системе координат структура из двух балок, как двумерная область Ω определяется следующим образом (Рисунок 1):

$$\Omega = \{x \in [0, a] - h \leq z \leq h_k + 3h\}, \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

Уравнение движения балок, а также граничные и начальные условия получены из энергетического принципа Гамильтона – Остроградского

Рисунок 1

Для построения математической модели контактного взаимодействия двух балок, выпишем основные гипотезы, предположения и допущения:

1. балки однослойные;
2. балки изотропные, упругие и подчиняются закону Гука;
3. продольный размер балок значительно превышает их поперечные размеры;

4. ось балок является прямой линией;
5. нагрузка действует в направлении оси OZ ;
6. контактное давление учитывается по модели Кантора Б.Я. [7];
7. $u = u(x, t)$, $w = w(x, t)$ - компоненты вектора перемещений точек линии приведения ($z = 0$); $u^z = u(x, z, t)$, $w^z = w(x, z, t)$ - перемещения произвольной точки балки;
8. нормальные напряжения на площадках, параллельных оси, пренебрежимо малы.

В рамках гипотезы для модели Эйлера-Бернулли считаем, что поперечные сечения, перпендикулярные оси балки до изгиба, остаются плоскими и перпендикулярными изогнутой оси и не деформируются в своей плоскости.

Уравнения движения структуры из двух балок Эйлера-Бернулли в перемещениях с учетом диссипации энергии запишутся в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\lambda^2} \left\{ L_2(w_i, w_i) + L_1(u_i, w_i) - \frac{1}{12} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \right\} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - \epsilon_1 \frac{\partial w_i}{\partial t} - \\ \quad - (-1)^i K(w_1 - w_2 - h_k) \Psi + q_i(t) = 0, \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + L_3(w_i, w_i) - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

$i = 1, 2.$

здесь $L_1(u_i, w_i) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \frac{\partial w_i}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}$, $L_2(w_i, w_i) = \frac{3}{2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} \right)^2$, $L_3(w_i, w_i) = \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial w_i}{\partial x}$ - нелинейные операторы, w_i , u_i - функции прогибов и перемещений верхней и нижней балок соответственно, K - коэффициент жесткости трансверсального обжатия структуры в зоне контакта, h_k - зазор между балками.

К уравнениям (1) следует присоединить краевые и начальные условия. Оба конца балок жестко защемлены:

$$w_i(0, t) = w_i(a, t) = u_i(0, t) = u_i(a, t) = \frac{\partial w_i(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial w_i(a, t)}{\partial x} = 0, i = 1, 2 \quad (2)$$

Начальные условия:

$$w_i(x)|_{t=0} = 0, u_i(x)|_{t=0} = 0, \frac{\partial w_i(x)}{\partial t}|_{t=0} = 0, \frac{\partial u_i(x)}{\partial t}|_{t=0} = 0, i = 1, 2. \quad (3)$$

В рамках гипотезы второго приближения считаем, что поперечные сечения остаются плоскими, но не перпендикулярными деформированной оси балки, учитываются инерционные составляющие, связанные с поворотом сечений.

Тангенциальные перемещения u^z , w^z распределены по толщине $\{-h \leq z \leq h\}$ по линейному закону $u_z = u + z\gamma_x$; $w_z = w$, где $\gamma_x = \gamma_x(x, t)$ - угол поворота нормали к линии $z = 0$.

Исходные уравнения движения для пакета из двух балок Тимошенко С.П. полученные из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского в безразмерном виде записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{\partial \gamma_{xi}}{\partial x} \right) + \frac{1}{\lambda^2} \left(L_1(w_i, u_i) + \frac{3}{2} L_2(w_i, w_i) + L_3(w_i, u_i) \right) + \\ + \frac{1}{\lambda^2} q_i + (-1)^i K(w_1 - w_2 - h_k) \Psi - \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - \varepsilon_1 \frac{\partial w_i}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + L_4(w_i, w_i) - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xi}}{\partial x^2} - 8\lambda^2 \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} + \gamma_{xi} \right) - \frac{\partial^2 \gamma_{xi}}{\partial t^2} = 0, i = 1, 2. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $L_1(w, u) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x}$, $L_2(w, w) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$, $L_3(w, u) = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $L_4(w, w) = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, γ_{xi} - функция поперечного сдвига. Отметим, что если заменить γ_{xi} на угол поворота $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ мы приходим к гипотезам Эйлера-Бернулли. К системе уравнений (4) следует присоединит граничные и начальные условия.

Граничные условия для заделки обоих концов балок:

$$w_i(0, t) = w_i(a, t) = 0; u_i(0, t) = u_i(a, t) = 0; \gamma_{xi}(0, t) = \gamma_{xi}(a, t) = 0; i = 1, 2. \quad (5)$$

Начальные условия:

$$w_i(x, t)|_{t=0} = u_i(x, t)|_{t=0} = \gamma_{xi}(x, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w_i(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \gamma_{xi}(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (6)$$

$i = 1, 2.$

Системы уравнений (1) и (4) приведены к безразмерному виду с помощью переменных (7).

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{w}{2h}, \quad \bar{u} = \frac{ua}{(2h)^2}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \lambda = \frac{a}{(2h)}, \quad \bar{q} = q \frac{a^4(1-\nu^2)}{(2h)^4 E}, \\ \bar{t} &= \frac{t}{\tau}, \quad \tau = \frac{a}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{Eg}{(1-\nu^2)\rho}}, \quad \bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 \frac{a}{c}, \quad \bar{\gamma}_x = \frac{\gamma_x a}{(2h)}. \end{aligned} \quad (7)$$

В системах уравнений (1) и (4) функция Ψ определена формулой $\Psi = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(w_1 - h_k - w_2)]$, то есть $\Psi = 1$, если есть контакт между балками - $w_1 > w_2 + h_k$, иначе контакта нет [7].

Теория Тимошенко позволяет точнее описать динамику балок, за счет учета инерционной составляющей.

В работе также рассматриваются случаи, когда структура состоит из одной балки, подчиняющейся гипотезе Эйлера-Бернулли, а вторая гипотезе Тимошенко С.П. Тогда разрешающая система уравнений содержит одно уравнение из системы (1), другое из системы (4).

На первую балку действует поперечная распределенная по поверхности знакопеременная нагрузка вида:

$$q = q_0 \sin(\omega_p t) \quad (8)$$

где q_0 - амплитуда, ω_p - частота вынуждающих колебаний.

Полученные системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (1), (4) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом конечных разностей с аппроксимацией $O(c^2)$, где c – шаг по пространственной координате. Полученная задача Коши по времени решается методами типа Рунге – Кутты. На основании описанного алгоритма создан программный комплекс, позволяющий решать поставленную задачу в зависимости от управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$. Большое внимание в работе уделялось вопросу о непроникновении элементов структуры друг в друга. Как уже отмечалось выше, изучаемые задачи являются сильно нелинейными, поэтому встает вопрос о достоверности получаемых результатов.

Остановимся на определении хаоса, как основного предмета исследования. Известно, что основополагающей чертой хаоса является существенная зависимость от начальных условий. Определение хаоса, которое было первоначально сформулировано в 1989 году Девани [8] имеет три составные части. В дополнение к условию существования зависимости от начальных условий, в него входит условие

перемешивания, именуемое транзитивностью и условие регулярности, именуемое плотностью периодических точек или периодичность. Дж. Бэнкс с соавторами [9] в 1992 г доказали условие существования зависимости от начальных условий является избыточным, т.е. из условий транзитивности и периодичности следует условие существования зависимости.

Существует определение хаоса, данное Кнудсенем, согласно которому функция, заданная на ограниченном метрическом пространстве, может быть определена как хаотическая, если она имеет плотную орбиту и обладает существенной зависимостью от начальных условий [10].

По определению хаоса данному Гуликом [11] хаос существует тогда, когда либо имеется существенная зависимость от начальных условий, либо функция имеет положительный показатель Ляпунова в каждой точке области ее определения и поэтому не является в конечном итоге периодической. В своих исследованиях приведенных ниже мы будем следовать определению хаоса согласно работе Гулика [11]. Для выявления истинности хаотических колебаний при численном решении задачи о нелинейных колебаниях балок под действием поперечной знакопеременной нагрузки предлагается комплексное исследование:

1. Поскольку уравнения в частных производных сводятся к задаче Коши методом конечных разностей 2-го порядка точности, то решение существенно зависит от количества интервалов разбиения балки и следует найти то количество разбиений, при котором решение $n+1$ совпадает с решением при n , где n - число интервалов разбиения балки, т.е. исследовать сходимость метода конечных разностей в зависимости от n .

2. Задача Коши также решается численными методами, решение существенно зависит от метода и шага решения по времени. Поэтому предлагается решать задачу Коши несколькими методами. Метод Рунге-Кутты 4-го (RK4), 2-го (RK2) порядков, метод Рунге-Кутта-Фелберга 4-го порядка (rkf45), метод Кеш-Карпа 4-го порядка (RKCK), Рунге-Кутта Принса - Дорманда восьмого порядка (rk8pd), неявный метод Рунге-Кутта 2-го (rk2imp) порядка и 4-го (rk4imp) порядка. Явный метод характерен тем, что матрица коэффициентов имеет нижний треугольный вид (включая и нулевую главную диагональ) — в отличие от неявного метода, где матрица имеет произвольный вид. Методы RKf45, RKCK, RK8pd предусматривают автоматическое изменение шага, а также возможность контроля погрешности интегрирования. Исследования показали, что для решения поставленной задачи оптимальным является метод Рунге-Кутты 8-го порядка.

3. Для каждого из n и метода решения задачи Коши строятся сигналы, фазовые портреты, спектры мощности Фурье, вейвлеты Морле, эпюры прогибов. Для выбранного сигнала строился двумерный вейвлет-спектр. В качестве анализирующих вейвлетов выбирались: вейвлет Хаара, Шеннона – Котельникова, Мейера, вейвлеты Добеши от db2 до db16, кауфлеты, симлеты, а также вейвлет Морле, комплексный Морле и вейвлеты на основе производной функции Гаусса старше 8 порядка. вейвлетов. Для анализа сложных колебаний динамических распределенных систем в виде балок с равным успехом можно применять комплексные и действительные вейвлеты Морле и вейвлеты на основе производных функции Гаусса старше 16 порядка, как комплексные, так и действительные [12].

4. Так как в настоящей работе мы будем следовать определению хаоса согласно работе Гулика [11], т.е. следует вычислить и определить знак спектра ляпуновских показателей. В настоящей работе спектры ляпуновских показателей для каждого разбиения интервала определялись с помощью трех методов: Вольфа [13], Канца [14], Розенштейна [15], и исследовалась их сходимость.

Окончательное решение о типе хаотических колебаний структуры принималось в том случае, когда удовлетворялись с первого по четвертый пункты.

В таблице 1 приведем эпюры прогиба балок Эйлера-Бернулли для $n=40; 120; 320; 400$ при действии нагрузки с амплитудой $q_0 = 5000$, и частотой $\omega_p = 5.1$. Геометрические размеры балок $\lambda = a/2h = 50$, зазор $h_k = 0.1$, коэффициент диссипации $\varepsilon = 1$. Для случая, неоднородной структуры, приведем сходимость по методам решения задачи Коши методами типа Рунге-Кутты.

Таблица 1. Сходимость решения в зависимости от n от типа метода Ренге-Кутты

Эпюры прогиба балок при разных n		Сигналы для иллюстрации сходимости по методам типа Рунге-Кутты	
Балка 1 – модель Эйлера-Бернулли	Балка 2 – модель Эйлера-Бернулли	Балка 1 – модель Эйлера-Бернулли	Балка 2 – модель Тимошенко

Очевидно, что сходимость по числу разбиений по пространственной координате оптимально при $n=400$, как для первой, так и для второй балки. Сходимость по методам полная. Далее приводятся результаты решения задачи Коши, полученные методом Рунге-Кутты 8-го порядка Принса - Дорманда.

В таблице 2 приведем графики спектров мощностей для каждой из четырех рассматриваемых моделей, для каждой балки. Амплитуда нагрузки и частота вынуждающих колебаний прежние.

Таблица 2. Спектры мощности для различных сочетаний моделей
Обе балки подчиняются гипотезе первого приближения

	Балка 1	Балка 2
1
Обе балки подчиняются гипотезе второго приближения		
2

В случае, когда обе балки подчиняются гипотезе первого приближения, на спектрах мощности, помимо частоты вынуждающих колебаний, присутствует еще две частоты, значения которых линейно зависят от ω_p . Спектры мощности для обеих балок одинаковы.

При учете гипотезы второго приближения, основные частоты для обеих балок совпадают, но для второй балки характерна шумовая составляющая в спектре. В данном случае при построении математической модели контактного взаимодействия балок учитываются инерционные составляющие, связанные с поворотом сечений, учет которых приводит к возникновению большего количества частот.

Далее рассматриваются модели, где балки подчиняются разным гипотезам. Наибольшее количество частот присутствует в третьем случае. Не возбуждаемая непосредственно приложенной нагрузкой балка подчиняется гипотезе Тимошенко. На ее спектре мощности присутствуют частоты, значение каждой из которых линейно зависит от ω_p . На спектре мощности возбуждаемой балки также

В случае 4 и 2 спектры мощности первой балки близки. В обоих случаях это балка Тимошенко. Спектры мощности балок в случае 4 близки.

Вычисление и анализ Ляпуновских показателей с помощью алгоритмов Вольфа, Кантца, Розенштейна также позволяет говорить о хорошей сходимости результатов.

При изучении нелинейной динамики и контактного взаимодействия балочных структур, описываемых гипотезами первого и второго приближений, важным является вопрос достоверности получаемых результатов. В работе дается обоснование получения истинных результатов путем установления оптимального количества разбиения по пространственной координате, по методам решения задачи Коши. Экспериментально установлено оптимальное n .

Проведено сравнение результатов численного эксперимента в зависимости от учитываемых моделей при моделировании колебаний пакета из двух балок с зазором. Показано, что учет деформаций, связанных с поперечными силами, и учет инерции вращения приводит к увеличению количества частот, на основе анализа спектров мощности балок.

Литература

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 492с.

2. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С.П.Тимошенко // Избранные работы / под ред. Э.И.Григолюка. – М.: Физматгиз, 1971. – 808 с.
3. Шереметьев М.П., Пелех Б.Л. К построению уточненной теории пластин // Инж.журн. 1964. Т. 4, вып. 3. С. 34–41.
4. A.V. Krysko, J. Awrejcewicz, I.V. Papkova, O. Szymanowska, V. A. Krysko Principal component analysis in the non-linear dynamics of beams: purification of the signal from noise induced by the non-linearity of beam vibrations // Journal Advances in Mathematical Physics, Vol. 2017, 2017.
5. Awrejcewicz Jan, Kutevov I., Pavlov S.P. , Papkova I.V., Krysko A.V. Non-linear dynamics of flexible curvilinear Bernoulli-Euler nano-beams in a stationary temperature field, Journal of Engineering and Applied Sciences, 2016.
6. Синичкина А.О., Крылова Е.Ю., Мицкевич С.А., Крысько В.А. Динамика гибких балок при действии ударных нагрузок с учетом белого шума / Проблемы прочности и пластичности, № 3, 2016, с.280-288.
7. Кантор Б.Я., Богатыренко Т.Л., Метод решения контактных задач нелинейной теории оболочек // Докл. АН УССР. сер. А. 1986. №1. С.18-21.
8. Robert L. Devaney, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Sec. Ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1989.
9. J.Banks, J.Brooks, G.Davis, P.Stacey On Devaney's Definition of Chaos, American Mathematical Monthly, Vol. 99, № 4, 1992, pp. 332-334.
10. C.Knudsen, Chaos Without Periodicity, American Mathematical Monthly. Vol. 101, 1994, pp. 563-565.
11. Denny Gulick, Encounters with Chaos, McGraw-Hill, New York, 1992.
12. В.А.Крысько, М.В.Жигалов, В.В.Солдатов, М.Н.Подтуркин О выборе типа вейвлета при изучении нелинейных колебаний балок с учетом поперечных сдвигов // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2009. - № 3 (40). – Вып. 1. С. 14-22.
13. Kantz H. A robust method to estimate the maximum Lyapunov exponent of a time series // Phys. Lett. A, 185, 1994. P. 77-87.
14. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov Exponents from a time series // Physica 16 D. - 1985. - P. 285-317.
15. Rosenstein M.T., Collins J.J., Carlo J. De Luca A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets / Neuro Muscular Research Center and Department of Biomedical Engineering, Boston University, November 20, 1992.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ВРАЩЕНИЯ ИЗОГНУТОЙ В ДУГУ ВИНТОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРУЖИНЫ

Сорокин Ф.Д.¹, Су Чжоу¹

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, sorokin_fd@mail.ru, szleon602@gmail.com

Аннотация. В данной работе представлено сравнение результатов расчета и экспериментального исследования динамического поведения винтовой пружины, изогнутой в дугу, закрепленной захватами в шарнирах и возбуждаемой вращением одного из захватов. В численной модели пружина была заменена дискретным набором конечных элементов, состоящих из одного витка. Для учета больших перемещений и поворотов применялся метод «теневых элемента», в котором малые перемещения отсчитываются от большого жесткого движения. Определены резонансные режимы вращения изогнутой пружины. Сравнение резонансных частот вращения и соответствующих им конфигураций пружины в расчете и эксперименте показало их хорошее совпадение.

Ключевые слова. винтовая цилиндрическая пружина, конечный элемент, виток, большие повороты, метод теневых элемента, динамика вращения, резонанс.

Винтовые цилиндрические пружины могут использоваться не только как упругие элементы, но также как инструменты пружинных мельниц, вибропросеивателей, шнеков и других механизмов, предназначенных для обработки или перемещения материала [1]. Для оптимизации конструкций, увеличения рабочей эффективности и надежности указанных устройств необходимо предсказывать динамическое поведение пружины при различных режимах ее вращения еще на этапе проектирования. Целью данного исследования является разработка методов численного моделирования динамики вращающейся изогнутой пружины с целью описания явлений, возникающих в различных пружинных механизмах.

В данной работе расчетно – экспериментальное исследование динамики пружины проводилось на стенде [1], показанном на рис. 1а, расчетная схема которого представлена на рис. 1б.

Рис.1. Экспериментальный стенд - (а), расчетная схема - (б)

Рассматривалась пружина со следующими исходными параметрами:

- модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па;
- коэффициент Пуассона материала $\mu = 0,3$;
- плотность материала $\rho = 8000$ кг/м³;
- радиус цилиндра $R = 13,25 \cdot 10^{-3}$ м;
- диаметр проволоки $d = 2,6 \cdot 10^{-3}$ м;

- угол подъема винтовой линии $\gamma = 3,35^\circ$;
- количество витков $N = 38$.

Оба конца пружины закреплены в специальных захватах с винтовыми выемками, а сами захваты размещены в цилиндрических шарнирах. Вращение от электродвигателя передавалось на один из захватов, второй являлся пассивным (рис. 1). Стенд позволяет задавать произвольное положение захватов пружины в плоскости основания и создавать весьма разнообразные начальные конфигурации пружины.

В предыдущем исследовании [2] авторы показали, что для расчета частот и форм колебаний прямой пружины при малых перемещениях вполне пригоден конечный элемент, состоящий из одного витка (КЭВ). При этом выяснилось, что КЭВ существенно снижает вычислительные затраты (примерно в 20 раз) и улучшает обусловленность системы разрешающих уравнений в сравнении с обычными стержневыми элементами. В [2] вычислены матрицы жесткости $[K_0]$ и масс $[M_0]$ КЭВ, а также частоты и формы колебаний пружины в случае малых перемещений.

Для перехода от малых перемещений и поворотов к большим в данной работе был использован метод теневого элемента [3-5], основанный на том, что деформации в материале пружины являются малыми и поэтому относительные перемещения, отличающие актуальное положение витка пружины от его жесткого смещения, также можно рассматривать как малые.

Как показано на рис. 2, из полного перемещения КЭВ можно выделить жесткое перемещение до «теневого» положения, тогда малые перемещения, связанные с деформированием витка, могут отсчитываться от этого теневого положения [3].

По найденным из формул, соответствующим рис. 2, малым относительным перемещениям и поворотам $\Delta u_a, \Delta \vartheta_a, \Delta u_b, \Delta \vartheta_b$ и, полученной в [2] матрице жесткости витка $[K_0]$, определялась потенциальная энергия деформаций КЭВ U . Компоненты тангентной (касательной, tangent) матрицы жесткости КЭВ K_{ij} и вектора неуравновешенных узловых нагрузок P_i вычислялись с помощью дифференцирования энергии деформаций U по полным узловым перемещениям [3]:

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_j}, \quad P_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i} \quad (1)$$

где y_i, y_j - обобщенные узловые перемещения КЭВ; $i=1 \dots 12, j=1 \dots 12$.

Рис. 2. КЭВ в исходном (I), «теневом» (II) и деформированном (III) состояниях (u_a, u_b – векторы полных перемещений узлов; θ_a, θ_b – векторы Эйлера больших поворотов узлов; $\Delta u_a, \Delta \theta_a, \Delta u_b, \Delta \theta_b$ – векторы малых относительных перемещений и малых относительных поворотов узлов).

Аналогичным образом через линейные и угловые скорости узлов КЭВ и матрицу масс $[M_0]$, полученную в [2] для случая малых перемещений, определялась кинетическая энергия витка T . Компоненты «тангентной» (текущей) матрицы масс КЭВ вычислялась с помощью дифференцирования кинетической энергии T по обобщенным скоростям:

$$M_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_j} \quad (2)$$

где $\dot{y}_i, \dot{y}_j$ – обобщенные угловые скорости КЭВ; $i = 1 \dots 12, j = 1 \dots 12$.

Кроме того, с помощью методики работ [4–6] из выражения для кинетической энергии T были найдены матрица гироскопических коэффициентов $[G]$ и вектор гироскопических нагрузок F .

По найденным матрицам $[K]$, $[M]$, $[G]$ и векторам P , F отдельного КЭВ с помощью стандартной процедуры формирования ансамбля конечных элементов (аналогично [2]) были построены результирующие матрицы $[K_\Sigma]$, $[M_\Sigma]$, $[G_\Sigma]$ и векторы P_Σ , F_Σ полной модели цилиндрической пружины. Для учета граничных условий результирующие матрицы и векторы редуцировались, т.е. отбрасывались строки и столбцы, соответствующие запрещенным обобщенным перемещениям (аналогично [2]). Далее по найденным векторам и матрицам строилась система линеаризованных уравнений движения:

$$[M_\Sigma] \Delta \ddot{Y} + ([C_\Sigma] + [G_\Sigma]) \Delta \dot{Y} + [K_\Sigma] \Delta Y = P_\Sigma + F_\Sigma \quad (3)$$

где ΔY – полный вектор приращений узловых перемещений пружины; $[C_\Sigma]$ – матрица демпфирования.

Матрица демпфирования задавалась линейной комбинацией матрицы жесткости и матрицы масс (пропорциональное демпфирование по Релею):

$$C_\Sigma = \alpha [M_\Sigma] + \beta [K_\Sigma] \quad (4)$$

где были приняты значения коэффициентов: $\alpha = 0.78 \text{ рад/с}$, $\beta = 0.000925 \text{ с/рад}$.

Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений движения (3) выполнялось неявным методом Ньюмарка [6], при этом матрицы и векторы, входящие в (3), пересчитывались после каждой итерации метода. Так как задача нелинейная, то как в расчете, так и в эксперименте определялись не собственные частоты, а резонансные частоты вращения пружины, то есть такие частоты вращения, при которых амплитуда колебаний пружины достигала экстремальных значений. На рис. 3 показаны экспериментальная и расчетная конфигурации пружины при определении второго по счету резонансного режима вращения пружины.

Рис. 3. Экспериментальная и расчетная конфигурации изогнутой пружины при резонансе

Сопоставление результатов расчета и эксперимента для первых пяти резонансных частот вращения представлено в таблице 1.

Таблица 1

Номер частоты	Расчет, Гц	Эксперимент [1], Гц	Погрешность, %
1	14.23	14.16	0.49
2	24.95	24.50	1.84
3	28.12	28.83	2.46
4	38.88	38.33	1.43
5	48.03	50.00	3.94

Из таблицы видно, что результаты расчета резонансных частот вращения вполне удовлетворительно подтверждаются экспериментом.

Резонансная частота при наличии нелинейных эффектов определяется не очень четко, так как пружина как бы «вьется мелким бесом» и нахождение максимума амплитуды затруднено. В связи с этим для более надежного выделения резонансной частоты выполнялся спектральный анализ зависимости от времени перемещения u_2 (вдоль оси x_2) центрального узла пружины. При этом частота вращения ведущего захвата задавалась равной 1-й резонансной частоте $f_1 = 14.23$ Гц, найденной из условия максимума амплитуды.

На рис. 4 показана расчетная зависимость перемещения u_2 от времени и его спектр (преобразование Фурье), найденный с помощью стандартной процедуры компьютерного пакета Matlab. Максимум амплитуды на рис. 4б соответствует частоте $f_1^* = 13.43$ Гц, которая несколько меньше f_1 . Расхождение f_1 и f_1^* можно объяснить нелинейными эффектами и влиянием демпфирования. Однако отмеченное расхождение небольшое и ожидаемое, поэтому можно утверждать, что спектральный анализ также подтверждает надежность разработанной методики.

Рис. 4. Зависимость u_2 от времени и его спектр

Выводы

1. Метод теневого элемента удалось распространить на конечный элемент в виде витка цилиндрической пружины, что позволило построить численную модель динамического поведения вращающейся изогнутой в дугу пружины полностью соответствующую натурным экспериментам.
2. Разработанная численная модель позволяет рассматривать произвольно большие перемещения и повороты при выполнении условия малости деформаций в материале пружины, т.е. исследовать расчетным способом большинство эффектов, возникающих в пружинных механизмах.
3. Получено хорошее совпадение как резонансных частот, так и конфигураций вибрирующей вращающейся пружины в расчете и в эксперименте.

Литература

1. Бадиков Р.Н. Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния и резонансных режимов вращения винтовых пружин в пружинных механизмах. Дисс. ...канд. техн. наук. М., 2009. –166с.
2. Сорокин Ф.Д., Су Чжоу. Разработка конечного элемента в виде витка цилиндрической пружины // Международная Школа-конференция Нелинейная динамика машин / ИМАШ РАН. – М., 2016. – С. 261–265. URL: <http://elibrary.ru/item.asp?id=26037479>.
3. Сорокин Ф.Д. Векторно-матричное описание больших поворотов при разработке конечных элементов механических систем // Лекции I Международной научной школы для молодежи «Компьютерные технологии анализа инженерных задач» / ИМАШ РАН. – М., 2009. – С. 106–113.
4. Felippa C.A. A Systematic Approach to the Element-Independent Corotational Dynamics of Finite Elements. – Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures. – USA: University of Colorado, 2000. – 42p.
5. Felippa C.A., Haugen B. Unified Formulation of Small-Strain Corotational Finite Elements: I. Theory. – Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures. – USA: University of Colorado, 2005. – 46p.
6. Géradin M., Cardona A. Flexible multibody dynamics - A finite element approach. – New York: Wiley, 2001. – 327p.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАВНОВЕСНОГО ПОЛОЖЕНИЯ РОЛИКА МЕЖДУ КОЛЬЦАМИ ПОДШИПНИКА

Сорокин Ф.Д.¹, Чжан Хао¹

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, zhang274234111@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается проблема определения равновесного положения роликов между кольцами при построении модели подшипника как нелинейного упругого элемента. Уравнения равновесия ролика, построенные с использованием энергетического метода, в общем случае не удается решить методом Ньютона из-за резких скачков положения ролика при малых изменениях положения колец. Чтобы избежать расходимости итерационного процесса вместо уравнений равновесия решаются уравнения затухающего движения ролика между кольцами подшипника, то есть применяется метод установления. Присутствие в уравнениях фиктивной вязкости обеспечивает стремление решений уравнения динамики к решениям уравнений статики. Представлен пример расчета равновесного положения ролика и вычисление матрицы жесткости подшипника, рассматриваемого как единый упругий элемент.

Ключевые слова. Роликовый подшипник, упругий элемент, перескок, затухающее движение, матрица жесткости.

Введение. Подшипниковые узлы являются важнейшими структурными элементами машин и приборов. При решении задач роторной динамики вращающихся машин большое значение имеет расчёт упругих характеристик подшипниковых узлов. Специфика моделирования жесткостных свойств роликовых подшипников в первую очередь связана с контактными явлениями между роликами и кольцами. Во многих приложениях подшипник можно рассматривать как нелинейный упругий элемент с 12-ю степенями свободы (по 6 степеней свободы у каждого из колец). Каждый из роликов при этом также может рассматриваться как внутренний упругий элемент модели подшипника. Усилия, действующие между кольцами, могут быть определены только при известных положениях роликов относительно колец. Изменение положений колец приводит к изменению положений роликов, которое вследствие наличия зазоров может происходить скачкообразно. Выход из контакта и вход в контакт также являются своеобразными скачками (контактная жесткость меняется скачком от нуля до конечного значения при касании ролика и дорожки качения, даже если сил между ними нет). Наличие скачков приводит к большим трудностям при решении нелинейных уравнений равновесия ролика между кольцами подшипника итерационным методом Ньютона. Фактически метод Ньютона удастся применить только для сильно зажатого ролика [1], то есть для одного из частных случаев, что при построении универсальных алгоритмов крайне неудобно. Целью данной статьи является разработка такого способа определения равновесного положения ролика, который должен приводить к правильным результатам при любых положениях колец и правильно учитывать скачкообразные перемещения роликов. Для этого предлагается в случае неудачи метода Ньютона переключаться на альтернативный метод поиска равновесия, то есть рассматривать затухающее движение ролика между кольцами подшипника (метод установления). Идея метода установления состоит в том, что для вычисления решений многих стационарных задач математической физики, описывающих равновесные состояния, рассматривают последние как результат установления развивающегося во времени процесса, расчет которого часто оказывается проще, чем прямой расчет равновесного состояния [2].

1. Модель роликового подшипника.

Роликовый подшипник состоит из наружного и внутреннего колец, роликов и

сепаратора. Каждое из колец считается твёрдым телом с 6-ю степенями свободы. Ролики приняты упругими телами [1]. Движение роликов считается плоским (3 степени свободы). Т.е. ролик может совершать 2 малых перемещения и 1 малый поворот в своей рабочей плоскости. Точнее, другие движения ролика (например, вращение вокруг собственной оси) не меняют упругую энергию ролика и поэтому из рассмотрения исключены. Поворот вокруг радиуса не допускается сепаратором. Относительные смещения колец и роликов малы из-за малости упругих деформаций, тем не менее наличие зазоров и контактные явления делают задачу нелинейной.

Силы, действующие на ролик со стороны колец и бортиков (флангов), а также матрица жесткости ролика вычисляются дифференцированием (численным, либо аналитическим) энергии ролика по его перемещениям.

Энергия деформаций подшипника является суммой энергий деформаций всех роликов. Поэтому дифференцирование суммарной энергии всех роликов по перемещениям колец в принципе позволяет найти обобщенные силы и обобщенные жесткости для всего подшипника.

1.1. Моделирование ролика набором тонких дисков.

Для моделирования ролика из [1] заимствована техника разбиения тела вращения на отдельные тонкие диски (slicing). Ролик может быть представлен как набор тонких шайб (рис. 1).

Рис. 1 Разбиение ролика на шайбы (диски)

Таким образом, геометрия ролика задается массивом чисел

$$\{\{s_1, b_1, \Delta s_1\}, \{s_2, b_2, \Delta s_2\}, \dots, \{s_n, b_n, \Delta s_n\}\}$$

где расстояние до текущей шайбы (диска) s_k отсчитывается от узла ролика (рис. 1).

При моделировании контактного взаимодействия предполагается, что упругие свойства каждой шайбы с номером k могут быть описаны следующим степенным законом [3]

$$q_k = C \cdot |\delta_k|^n, \quad (\delta_k < 0) \quad (1.1)$$

где q_k – распределённая нагрузка на единицу контактной длины шайбы, δ_k – расстояние до контактной поверхности (отрицательное расстояние означает контакт), C – приведённая контактная жёсткость $[H/M^{n+1}]$, n – показатель степени в законе упругости контактной задачи $n=10/9$.

В случае контакта ролика с флангами для контактной силы P_{flang} справедливо соотношение, аналогичное (1.1), но с показателем степени $n=3/2$. Из (1.1) следует (интегрирование по перемещению), что энергия упругих деформаций шайбы составляет

$$U_k = \frac{C}{n+1} \cdot |\delta_k|^{n+1} \Delta s_k, \quad (\delta_k < 0) \quad (1.2)$$

1.2. Вычисление зазоров между роликом, дорожками качения и бортиками.

Рис. 2. Геометрия элементов контактирующих тел.

Взаимодействие шайбы (slice) ролика с дорожкой качения и фланговый (flang) контакт ролика с ограничивающей торцевой поверхностью при использовании относительных перемещений могут рассматриваться по единому алгоритму, в котором всего 4 параметра (рис. 2):

z, r – координаты контактирующей точки (осевая координата и радиус в контактной плоскости);

β – угол, указывающий нормальное направление к контактной поверхности;

δ_0 – начальный зазор;

Существенно отметить следующие особенности разрабатываемого описания:

1) Контактующие тела движутся в контактной плоскости как твёрдые тела (поступательное движение, заданное узлом, и поворот вокруг узла). Индекс «e» соответствует локальным координатам внешнего кольца (внутреннее кольцо считается неподвижным), а индекс «r» соответствует локальным координатам ролика. Локальные координаты отсчитываются от начальных положений узлов кольца или ролика.

2) локальные координаты не используются (они показаны для наглядности), всё описание сразу производится в глобальных координатах r, z ;

3) узлы кольца и ролика для максимального упрощения результирующих формул в исходном состоянии расположены в одной точке – начале координат, которое находится на оси подшипника;

4) контакт с внешним и внутренним кольцами описывается одинаково, так как рассматриваются относительные перемещения;

5) если нормаль к поверхности ролика и контактирующей поверхности не совпадают, то предпочтение отдаётся нормали к поверхности ролика.

Вычисление боковых зазоров (расстояний от краев шайб до дорожек качения) продемонстрировано на рис. 2. При рассмотрении флангового контакта на рис. 2 вместо края шайбы следует подразумевать фланговую контактную точку на торцевой поверхности ролика. С точкой зрения относительного движения для каждой шайбы зазор между кольцом и роликом можно определить, как разность исходного зазора и относительного перемещения ролика относительно кольца в направлении контактной

поверхности

$$\delta_k = \delta_{0k} - \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{n}_k \quad (1.3)$$

где $\mathbf{a}_k$ – перемещение ролика в локальной системе координаты r_e, z_e ; $\mathbf{n}_k = (\cos \beta_k, \sin \beta_k)^T$ – нормаль к поверхности ролика.

В локальной системе координат кольцо принимается неподвижным. Координаты контактной точки в новом положении ролика равны

$$\begin{pmatrix} r^+ \\ z^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_{re} & -\sin \vartheta_{re} \\ \sin \vartheta_{re} & \cos \vartheta_{re} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{re} \\ v_{re} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

С помощью рисунка 2 нетрудно определить выражения относительных перемещений и поворота:

$$\begin{cases} u_{re} = (u_r - u_e) \cos \vartheta_e + (v_r - v_e) \sin \vartheta_e \\ v_{re} = -(u_r - u_e) \sin \vartheta_e + (v_r - v_e) \cos \vartheta_e \\ \vartheta_{re} = \vartheta_r - \vartheta_e \end{cases} \quad (1.5)$$

Вектор относительных перемещений определяется как разность координат нового и предыдущего положения

$$\mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} z^+ - z \\ r^+ - r \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

1.3. Энергия деформаций ролика.

Ролик контактирует боковыми и фланговыми поверхностями. Энергия контактов ролика по боковым поверхностям с кольцами получается суммированием (1.2) по всем шайбам

$$\begin{aligned} U_{int} &= \frac{9}{19} \sum_k C_{int} \left| \delta_k^{int} \right|^{19/9} \Delta s_k, \quad \left(\delta_k^{int} < 0 \right) \\ U_{ext} &= \frac{9}{19} \sum_k C_{ext} \left| \delta_k^{ext} \right|^{19/9} \Delta s_k, \quad \left(\delta_k^{ext} < 0 \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Контакт на флангах принят точечным аналогично [1]. На рис. 2 показан один из возможных случаев контакта – передняя поверхность ролика контактирует с внешним кольцом. Всего таких случаев может быть четыре: задняя и передняя поверхность ролика может контактировать с бортиками (флангами) внутреннего или внешнего кольца.

$$U_{flang} = \frac{2}{5} \sum_{i=1}^4 C_i^{flang} \left| \delta_i^{flang} \right|^{5/2}, \quad \left(\delta_i^{flang} < 0 \right) \quad (1.8)$$

где C^{flang} – контактная жёсткость в законе Герца (принимается нулевой, если соответствующего бортика не существует).

1.4. Вектор сил и матрица жёсткости ролика.

Матрица жёсткости и вектор сил ролика находятся дифференцированием суммарной энергии деформаций (1.7) и (1.8) по формулам (1.9)

$$\begin{aligned} P_i &= - \frac{\partial U}{\partial y_i} \\ K_{ij} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_j} \\ \mathbf{y} &= \left(u, v, \vartheta \right)^T \end{aligned} \quad (1.9)$$

Дифференцирование в (1.9) может выполняться как численно, так и аналитически. В сложных случаях для аналитического дифференцирования могут применяться компьютерные математические пакеты (Wolfram Mathematica, Maple и т.п.). Численное дифференцирование программируется сравнительно просто, но приводит к медленно работающему коду. В то же время аналитическое компьютерное дифференцирование иногда приводит к необозримым выражениям. Именно поэтому для сокращения количества неизвестных в данной работе используются относительные перемещения.

2. Поиск положения равновесия ролика методом установления.

Приведенные выше соотношения позволяют по заданным положениям колец и перемещениям ролика $\mathbf{y}_r = (u_r, v_r, g_r)^T$ определить силы и моменты, действующие на ролик, то есть найти вектор $\mathbf{P}(\mathbf{y}_r)$ (две силы и момент). Перемещения колец при этом считаются известными.

Очевидно, что ролик должен находиться в равновесии, поэтому силы, действующие на ролик, должны быть равны нулю $\mathbf{P}(\mathbf{y}_r) = \mathbf{0}$. Вычисленные по (1.9) обобщенные силы и жесткости позволяет выполнить уточнение положения ролика по стандартной схеме Ньютона. Однако, как было указано во введении, метод Ньютона для рассматриваемой задачи сходится далеко не всегда. В случае отсутствия сходимости, что идентифицируется по существенному росту невязки, либо по превышению допустимого числа итераций, метод Ньютона останавливается, положение ролика возвращается к началу итерационного процесса и запускается альтернативный метод – метод установления. Вместо решения уравнения статики $\mathbf{P}(\mathbf{y}_r) = \mathbf{0}$ рассматривается задача динамики затухающего движения, описываемого следующим векторно-матричным уравнением

$$[\mathbf{M}] \frac{d^2 \mathbf{y}_r}{dt^2} + [\mathbf{C}] \frac{d \mathbf{y}_r}{dt} = \mathbf{P}(\mathbf{y}_r) \quad (2.1)$$

где $[\mathbf{M}]$ – матрица масс, а $[\mathbf{C}]$ – матрица демпфирования. Здесь матрица масс $[\mathbf{M}]$ и матрица демпфирования $[\mathbf{C}]$ играют вспомогательную роль и назначаются из разумных соображений.

В методе установления начальные условия также играют вспомогательную роль, поэтому ролик в начальный момент времени считается неподвижным, а его положение принимается таким же, каким оно было в предыдущем состоянии всего подшипника (напомним, что модель подшипника рассматривается как часть более крупной модели роторной машины). Если предыдущее положение ролика не известно, то принимаются нулевые начальные условия (2.2)

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_r(0) &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{y}}_r(0) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Система дифференциальных уравнений (2.1) с начальными условиями (2.2) интегрируется численно методом Рунге-Кутты 4-го порядка [4] с автоматическим выбором шага. В следствии наличия демпфирования ролик должен стремиться к положению равновесия, поэтому при $t \rightarrow \infty$ вектор перемещений $\mathbf{y}_r$ даст решение уравнения равновесия $\mathbf{P}(\mathbf{y}_r) = \mathbf{0}$. Далее с помощью формул (1.9), реализованных в математическом пакете [5], и найденных равновесных координат ролика можно получить матрицу жесткости ролика $[\mathbf{K}_r]$.

3. Пример расчета равновесного положения ролика.

Рассматривается роликовый подшипник (рис. 3) со следующими исходными данными:

Обозначение	Наименование	
r_{roll}	Радиус узла ролика, м	$50 \cdot 10^{-3}$
l	Длина ролика, м	$26 \cdot 10^{-3}$
α_{roll}	Угол наклона ролика	35°
b	Радиус цилиндрического ролика, м	$7 \cdot 10^{-3}$
n	Количество слайсов	10
C_{ext}	Контактная жёсткость ролика для внешнего кольца, $(Н/м)/м^{(10/9)}$	30000
δ_{ext}	Зазор между роликом и внешним кольцом, м	$0.3 \cdot 10^{-3}$
C_{int}	Контактная жёсткость ролика для внутреннего кольца, $(Н/м)/м^{(10/9)}$	40000
δ_{int}	Зазор между роликом и внутренним кольцом, м	$0.3 \cdot 10^{-3}$
Фланги		
α_{flang}	Угол наклона фланговой нормали относительно оси ролика	40°
b_{flang}	Радиус фланговых точек контакта, м	$6 \cdot 10^{-3}$
S_{forw}	Осевая координата передних фланговых точек контакта, м	$+14 \cdot 10^{-3}$
S_{back}	Осевая координата задних фланговых точек контакта, м	$-14 \cdot 10^{-3}$
δ_{flang}	Фланговая зазор, м	$0.2 \cdot 10^{-3}$
C_{flang}	Фланговая контактная жёсткость, $Н/м^{(3/2)}$	1700

Рис. 3. Схема роликового подшипника.

Рассматриваемый ролик цилиндрический, расположен под углом к оси подшипника и имеет возможность контактировать с бортиками.

В качестве примера принимаем внутреннее кольцо неподвижным, а для внешнего кольца задаём фиксированные перемещения $\{u_e=0.005, v_e=-0.004, \vartheta_e=0.01\}$ (перемещения в метрах, поворот в радианах).

Результаты численного интегрирования системы (2.1) с условиями (2.2) для заданных параметров подшипника показаны в виде графиков (рис. 4-6).

Рис. 4. Осовое перемещение ролика.

Рис. 5. Радиальное перемещение ролика.

Рис. 6. Угол поворота ролика.

В следующей таблице представлены численные значения обобщенных перемещений, сил и жесткостей (в системе СИ) для найденного равновесного положения ролика.

y_e	0.005	-0.004	0.01
y_r	0.0035	-0.0017	0.0265
P_e	-0.8475	1.0811	0.0411
K_e	135.9296	-119.4218	-6.2056
	-119.4218	212.3042	6.0906
	-6.2056	6.0906	0.3277

Литература

1. De Mul J.M. Equilibrium and Associated Load Distribution in Ball and Roller Bearings Loaded in Five Degrees of Freedom While Neglecting Friction – Part II: Application to Roller Bearings and Experimental Verification // ASME Journal of Tribology. 1989. Vol. 111. P. 149-154.
2. Годунов С.К., Рябенкий В.С. Разностные схемы Введение в теорию. - М.: Наука. 1977. С. 296-303.
3. De Mul J.M., Van Engelenburg H. The Line Contact between Two Cylinders – Some Experiments and Theoretical Predictions // ASME Journal of Tribology. 1988. Vol. 110. P. 285-291.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Лаборатория базовых знаний. 2001. С. 363—375.
5. Дьяконов В. П. Компьютерная математика. Теория и практика. - СПб.: Питер. 2001. С. 677-679.

CHAOTIC AND QUASIPERIODIC OSCILLATIONS IN RADIOPHYSICAL GENERATORS

Stankevich N.V.^{1,2}, Kuznetsov A.P.^{3,4}, Seleznev E.P.^{3,4}

¹Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation,
stankevichnv@mail.ru

²University of Jyväskylä, Jyväskylä, Finland

³Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov, Russian
Federation

⁴Chernyshevsky Saratov State University, Saratov, Russian Federation

Annotation. In the present paper in numerical and radiophysical experiments formation of multi-modes chaotic attractor, based on the multi-dimensional quasiperiodic torus is observed.

Keywords. Dynamical systems, quasiperiodic oscillations, chaos, Lyapunov exponents.

One of the promising direction of practical application of radiophysical generators of chaotic signals is to use them for secure communication systems [1-3]. This direction has been developing for quite a long time, however, there are a number of problems, not allowing to use these generators in applications. Such kind problems include: the dependence of generation mode of chaotic signal from the parameters and initial conditions, sensitivity to noise, the problem of confidentiality of transmitted information, e.t.c. In general all this problems connected with different properties of chaotic attractors.

Investigation of multi-frequency quasi-periodic oscillations and transition from quasiperiodicity to chaos are actual and important problem in different areas of science [4-5], including systems of secure communication. Recently in [6] was suggested the model of five globally coupled oscillators of van der Pol type, in which Landau-Hopf scenario was observed: the sequence of birth of torus of high dimension. In [7] was suggested a new methodic of construction of multi-fold Poincare section for observation of multi-dimensional tori. In the present paper the dynamic of multi-contour self-generators, consisting of five independent oscillating systems with common controlling circuit of excitation of each oscillating mode. In the present paper we would like to present numerical and experimental investigation of the systems, which are represented system of coupled self-generators and system of multi-contours self-generator with common controlling circuit.

The starting point of our investigation was the dynamics of five coupled van der Pol oscillators (Fig.1). Each oscillator is characterized by two phase variables and one frequency of own oscillations. Therefore, we deal with ten-dimensional system and with five incommensurable frequencies. In Fig. 1 one can see the scheme of electronic circuit of five generator of van der Pol type. Each generator consists of an oscillatory circuit formed by inductors L_{1-5} and capacitors C_{1-5} , and of nonlinear elements represented by back-to-parallel linked semiconductor diodes (D_1 - D_5). Oscillators are differ only by frequencies. All another parameters is identical for each oscillator. Frequency mismatch between frequencies of oscillators was realized by different capacity of capacitors C_{1-5} . Excitation of the self-oscillations occurs due to the negative resistance blocks (R_{1-5}) assembled on the operational amplifiers (OA_{1-5}). R_2 and R_3 represent negative feedback circuit of operational amplifier OA_1 . Varying resistance of the resistor R_2 we can change coefficient of amplifier. The dynamical variables are voltage outputs from operational amplifiers (OA_{1-5}), and its derivative, formed by derivative amplifiers (OA_{6-10}). The coupling between the generators is provided by variable resistor R_{i-i+1} , $i = (1 \div 5)$, connecting identical points of the two circuits, and we consider the system with ring coupling, $R_{5-6}=R_{5-1}$ (Fig. 1). The strength of coupling is inversely proportional to the resistor. Dynamical variables X, X', Y, Z, W, V input to IO device and variables Y', Z', W', V' input to gate circuit. At small coupling the system demonstrates five-frequency quasi-

periodic oscillations. With increasing of coupling the one of the frequencies will be locked and we can observe transition from five-frequency torus to the four-frequency torus and the three-frequency torus. In order to distinguish quasi periodic oscillations with different number of frequency components we apply technique of visualization of fold Poincare section. For visualization of invariant curve of five-frequency quasi-periodic oscillation we should realize four-fold Poincare section. In order to escape situation which occurred in the case of two coupled generators of quasi-periodic oscillations we will analyze dynamical variables of the one of oscillators (X, X') and one of variables of another oscillators (Y, Z, W, V), and realize Poincare sections by derivatives of another variables (Y', Z', W', V') using gate circuit [7].

In Fig. 2, transformation of phase portraits corresponding to this bifurcation is shown. In Fig. 2, phase portraits are indicated by red color (colored on-line) and invariant curves in double Poincare section are indicated by blue color. Figure 2a corresponds to the situation before bifurcation and Fig. 2c corresponds to the situation after bifurcation. As one can see, invariant curve very-well demonstrates such kind of transformation. In Fig.2b phase portrait before doubling is depicted.

Fig.1. Scheme of five coupled van der Pol generators.

Fig.2. Doubling of three-frequency tori in the system of five coupled generators of van der Pol type. Gray color corresponds to phase portraits in projection (X, X') , black color corresponds to phase portraits in double Poincaré section by hyper-surface $Y' = 0, V' = 0$.

Then let us turn to study the dynamic of multi-contour self-generators, consisting of five independent oscillating systems with common controlling circuit of excitation of each oscillating mode. On Fig.3 the scheme of multi-contour circuit is shown. The base of multi-contour self-generator are five oscillatory $L_1C_1-L_5C_5$ circuits. These circuits determine frequencies of the five base oscillatory modes. In experiments all frequencies were distributed in the next way: $f_1 = 6.65$ kHz, $f_2 = 11.53$ kHz, $f_3 = 21.38$ kHz, $f_4 = 41.88$ kHz, $f_5 = 82.24$ kHz. As active element we use operational amplifiers OA_1-OA_5 with controllable coefficients of amplification of voltage, which work in linear mode and were used as junction of oscillatory contours between itself and controlling of excitation of each mode of self-generator. In experiment we can change amplification of each mode, and its were marked by letters: k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 . Amplifier OA_{11} is a summing, inverting the nonlinear amplifier, providing nonlinear limitation of amplitude of oscillations. Amplifier OA_{12} is a inverter amplifier working in linear mode, providing additional amplification of summing signal. Amplifiers OA_6-OA_{10} are differential amplifiers, which are used for getting of derivative of voltage from outputs OA_1-OA_5 . Controlling parameters of studying system were coefficients of amplification $k_1 - k_5$ of operational amplifiers $OA_1 - OA_5$.

In the case when all coefficients of amplifications equals zero ($k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0, k_4 = 0, k_5 = 0$) there is no excitation of oscillations. If we increase one of the coefficients, self-oscillations on the mode of the first oscillatory contours occur. In Fig.4 a one can see limit cycle which occur at $k_1 = 3$ ($k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 0$). In Fig.4 two-dimensional projections of phase portraits on the plane (x, Σ) are depicted, where $\Sigma = x + y + z + u + v$. Then we added another mode and at $k_1 = 3, k_2 = 7, k_3 = k_4 = k_5 = 0$ we observed excitation of the second oscillatory mode, and in Fig.4b one can see phase portrait in the form of two-dimensional torus. Then we added the third mode, and at $k_1 = 3, k_2 = 7, k_3 = 7, k_4 = k_5 = 0$ we observe three-frequency torus. In Fig.3c, d two-dimensional projection of phase portrait and Poincaré section by hypersurface $Y' = 0$ are depicted. For the three-frequency torus in experiment was observed resonance two-frequency torus. In Fig.4e, f two-dimensional projection of phase portrait and Poincaré section by hypersurface $Y' = 0$ for resonance at $k_1 = 10, k_2 = 10, k_3 = 10, k_4 = k_5 = 0$ are shown.

Thus, in the physical experiment the system of multi-contours self-generators with common controlling circuit was studied. For this system we observed gradual occurrence of two-, three-, four-, and five-frequency oscillations and transition to chaos on the base of multi-dimensional torus.

This work was supported by grant of the President of the Russian Federation for young candidate of science MK-661.2017.8.

Fig. 3. Scheme of electronic circuit of five-contours self generator with common controlling circuit.

Fig. 4. Illustration of gradually occurrence of multi-frequency quasi-periodic oscillations: a) limit cycle; b) two-dimensional torus; c), d) three-frequency torus, phase portrait and Poincaré section; e), f) two-frequency resonance torus, phase portrait and Poincaré section.

Reference

1. A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. E. Hramov, "On the use of chaotic synchronization for secure communication", Phys. Usp., Vol. 52, 1213-1238, 2009.
2. R. Suyama, Chaotic signals in digital communications, CRC Press, 2013.
3. A. S. Karavaev, D. D. Kulminskii, V. I. Ponomarenko and M. D. Prokhorov, "An

- experimental system for hidden data transmission based on a delayed-feedback generator with switching of chaotic modes”, Technical Physics Letters, Vol. 41, No. 1, 1-4, 2015.
4. J. A. Glazier, A. Libchaber, ”Quasi-Periodicity and Dynamical Systems: An Experimentalists view”, IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. 35, No. 7, 790, 1988.
 5. B.P. Bezruchko, S. P. Kuznetsov, E. P. Seleznev, ”Experimental observation of dynamics near the torusdoubling terminal critical point”, Phys. Rev. E., Vol. 62, No. 6, 78287830, 2000.
 6. A. P. Kuznetsov, S. P. Kuznetsov, I. R. Sataev, L. V. Turukina, ”About LandauHopf scenario in a system of coupled self-oscillators”, Physics Letters A, Vol. 377, 32913295, 2013.
 7. N. V. Stankevich, A. P. Kuznetsov, E. S. Popova, E. P. Seleznev, ”Experimental diagnostics of multi-frequency quasiperiodic oscillations”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 43, 200-210, 2017.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДШИПНИКА С УПРУГИМ КОРПУСОМ

Суровцев С.В.¹, Хозенюк Н.А.²

¹ ФГАОУ ВО ЮУрГУ (НИУ), Челябинск, Россия, ssw-92@ya.ru

² ФГАОУ ВО ЮУрГУ (НИУ), Челябинск, Россия, khozeniukna@susu.ru

Аннотация. В статье представлен краткий обзор методов решения упругогидродинамической (УГД) задачи смазки подшипников жидкостного трения. Формулируется УГД задача смазки нестационарно нагруженных подшипников скольжения с использованием алгоритма Мерти. Приведены итерационный и неитерационный методы для решения связанных упругой и гидродинамической подзадач.

Ключевые слова. Упругогидродинамическая задача смазки, подшипник скольжения, упругие деформации, нестационарное нагружение, уравнение Рейнольдса.

Современные тенденции проектирования новых машин и механизмов характеризуются снижением их материалоемкости при одновременном увеличении действующих нагрузок и рабочих скоростей. Это приводит к необходимости учета упругих свойств элементов конструкций, в том числе и при моделировании их соединений. Подшипники гидродинамического трения – одни из наиболее часто используемых узлов, предназначенных для соединения и передачи относительного движения двух элементов конструкций при минимальных потерях на трение. Однако, их использование переводит задачу моделирования упругих конструкций в класс нелинейных задач динамики

$$m\ddot{\vec{u}} = \vec{F}(t) - \vec{R}(\vec{u}, \dot{\vec{u}}); \quad (1)$$

где $\vec{u}, \dot{\vec{u}}, \ddot{\vec{u}}$ – векторы перемещений, скоростей и ускорений центра шипа в инерциальном пространстве; m – масса шипа; $\vec{F}(t)$ – активные силы, действующие на шип (пример диаграммы нагрузок $\vec{F}(t)$ для шатунного подшипника двигателя внутреннего сгорания (ДВС) представлена на рис.1 а.); $\vec{R}(\vec{u}, \dot{\vec{u}})$ – сила, действующая на шип со стороны смазочного слоя; t – время.

Действительно, поддерживающие силы $\vec{R}(\vec{u}, \dot{\vec{u}})$, возникающие в смазочном слое, зависят от координат и скоростей центра шипа, причем эта зависимость имеет существенно нелинейный характер, особенно в диапазоне высоких значений эксцентриситета шипа при его движении относительно подшипника. Примером таких сопряжений могут служить подшипники скольжения коленчатого вала ДВС.

Величина поддерживающих сил $\vec{R}(\vec{u}, \dot{\vec{u}})$, да и сама возможность существования смазочного слоя достаточной толщины при силовом взаимодействии упругих элементов конструкций обеспечивается соответствующим выбором формы поверхностей трения, их жесткости (упругих свойств вкладыша и корпуса подшипника), положения и конфигурации источников для маслообеспечения, вязкостно-температурных и неньютоновских свойств современных смазочных материалов, обусловленных их структурной неоднородностью из-за наличия противозносных и энергосберегающих присадок и другими факторами.

Рассмотрение процессов в смазочном слое, разделяющем упругодеформируемые (идеально гладкие, без учета микропрофиля) поверхности трения является целью упругогидродинамической задачи смазки.

Рис.1. а) Пример годографа нагрузок, действующих на шип;
б) Сечение радиального подшипника скольжения

Таким образом, нелинейную задачу динамики упругих конструкций с гидродинамическими сопряжениями необходимо рассматривать одновременно с упругогидродинамической, с учетом реологии современных смазочных материалов, и тепловой задачей смазки для сопряжений жидкостного трения.

Предметом исследования в представленной работе являются процессы упругогидродинамической (УГД) смазки, происходящие в системе «жесткий шип – смазочный слой – упругий подшипник» нестационарно нагруженных гидродинамических подшипников скольжения.

Работы, опубликованные в этой области, можно классифицировать в несколько групп.

Во-первых, большое количество работ связано с решением контактных УГД задач, свойственным в большей степени для подшипников качения. В контактных УГД задачах области деформирования и действия гидродинамических давлений локализованы. Методы решения контактных УГД задач применяются также и для подшипников скольжения, если учитывается только податливость вкладыша.

Однако для современных подшипников скольжения, например, применяемых в двигателях внутреннего сгорания, характерны сравнительно большие изгибные деформации корпуса подшипника. При этом наличие непрерывного градиента поля деформаций не зависит от места приложения нагрузки, а поверхности трения могут быть

разделены смазочным слоем значительной толщины. В то же время величины изгибных деформаций соизмеримы с зазором. Большие прогибы поверхностей трения, а также условия нестационарности нагружения препятствуют прямому использованию для их решения методов анализа контактных УГД задач.

Ко второй группе можно отнести работы в стационарной постановке УГД задачи смазки. Чаще всего такая постановка сопровождается контактными УГД задачами. В работе Пановко М.Я. представлена методика оценки жёсткости смазанного точечного контакта по результатам численного решения упругогидродинамической (УГД) задачи [7]. Решение базируется на применении метода конечных разностей и метода конечных элементов для решения гидродинамической и упругой подзадач соответственно. В свою очередь связанная задача решается с помощью метода Ньютона.

В ряде совместных работ Еркаева Н.В. и Иванова В.А. рассматривается УГД задача для подшипников качения [8,9], а также для цилиндрического подшипника скольжения [10,11]. Обобщенный подход для решения данного типа задач основан на использовании вычислительного комплекса ANSYS (применение метода конечных элементов для гидродинамической подзадачи); получены распределения давления в области контакта и прогиба поверхности. Упругая подзадача решается на основе интегрального уравнения связи давлений и деформаций и построение функции податливости рабочей поверхности при использовании разложения Фурье [8,9]. Также в работах представлена простая аналитическая аппроксимация для матрицы податливости, которая может применяться для расчета тяжело нагруженных подшипников скольжения. Найденная матрица податливости используется в итеративной процедуре для решения стационарной связанной задачи, при расчете самосогласованного распределения давления и прогиба поверхности в зоне контакта [10].

Нестационарные задачи УГД смазки рассмотрены в значительно меньшей степени [1-6], а в отечественной литературе - практически не представлены.

В работе Oh [3], а также в совместных работах Oh и Goenka [4-6] представлен разработанный численный метод решения УГД задачи динамически нагруженного шатунного подшипника. Этот метод основан на двух допущениях: о разделяемости переменных для давления и о параболическом распределении давления в осевом направлении. Полученная связанная задача решается с помощью алгоритма Ньютона-Рафсона для нелинейных систем в сочетании с алгоритмом Мерти, который используется для определения области кавитации смазочного слоя. Для построения приближенных решений упругой и гидродинамической подзадач, используется метод конечных элементов. Впоследствии авторами предложен упрощенный метод, примененный для решения задач оптимизации при УГД смазке нестационарно нагруженных подшипников скольжения.

Также известны решения УГД задачи смазки для нестационарно нагруженных подшипников, выполненные D. Bonneau и соавторами. Задача сформулирована в функциональном пространстве, и для ее решения использован метод конечных элементов в сочетании с алгоритмом Мерти и методом Ньютона-Рафсона.

Среди отечественных авторов известны работы в этой области, выполненные Прокопьевым В.Н. и его учениками. Так в работе [17] представлено решение УГД задачи смазки нестационарно нагруженного шатунного подшипника скольжения, основанное на итерационном подходе. При решении гидродинамической подзадачи применен метод конечных разностей с использованием граничных условий Якобсона-Флоберга-Ольсона, обеспечивающих выполнение закона сохранения массы, а для упругой - метод конечного элемента.

Темис Ю.М. в работе [13] решает аналогичную задачу для газовых опор, используя уравнение Рейнольдса для газовой среды, не требующее анализа областей нарушения сплошности течения.

Отдельную группу работ в области решения УГД задач для подшипников с

упругим корпусом составляют работы, в которых учитывается влияние не-newтоновских свойств современных смазочных материалов, шероховатости поверхностей трения.

Проблематика представления полного решения за приемлемое время для нестационарно нагруженных подшипников представлена в работах D. Bonneau и соавторов. Описание возможности моделирования смешанных условий смазки через уравнение Рейнольдса, его изменением путем введения коэффициентов расхода, которые учитывают влияние шероховатости [1-2]. В ходе описания проблематики автор представляет результаты Патира и Ченга, которые предложили наиболее известную модель учета шероховатости, основанную на статистических параметрах шероховатости поверхности. Решение УГД задачи базируется на методе конечных элементов. Связная задача решается из детерминированного расчета образца исследуемой поверхности или с помощью метода гомогенизации на том же образце поверхности.

В статье Bharati M Shettar [12] для решения связанной задачи используется оригинальный метод JFNMG, основанный на методе Ньютона, для устойчивого состояния и нежесткой упругогидродинамической смазки задачи линейного контакта. Смазка жидкая и ее реология описывается составным уравнением Гершеля-Балкли. Гидродинамическая и упругая подзадачи решаются с помощью метода конечных элементов. Предлагаемая схема не только преодолевает ограничения традиционных схем, но также помогает стабильной и быстрой конвергенции для исследования УГД задачи. Метод JFNMG аппроксимирует Якобиан, не требуя дополнительной памяти на запоминание решения при каждой новой итерации, и использует преимущества сходимости метода Ньютона, а также стратегии конвергенции (до ошибки дискретизации) из теории многосеточных алгоритмов.

Таким образом, при решении УГД задачи смазки подшипников скольжения авторы в основном используют два типа методов решения гидродинамической подзадачи: метода конечных элементов [1-11,13] и метод конечных разностей [12]. Недостатком первого подхода является необходимость разбиения пристеночных слоев на мелкие элементы, не сравнимые по размеру с остальными элементами системы [1-7, 8-11]. Связная задача решается с применением методов, основанных на методе Ньютона-Рафсона, и его вариациях [1-7,12]. Основным недостатком подходов, основанных на итерационных схемах, является накопление ошибок с увеличением числа итераций; большой объем вычислительных ресурсов на каждой итерации, а также ограниченная область сходимости, что не позволяет использовать их в широких диапазонах варьирования расчетных параметров. Предполагается использование прямых методов (аналогичным представленным, например, в работе [14]), лишенных указанных недостатков.

Математическая формулировка задачи

Нестационарная УГД задача смазки сводится к совместному решению нескольких взаимосвязанных подзадач. Динамическая подзадача состоит в решении уравнения движения центра шипа на смазочном слое (1).

Для определения силы, действующей на подшипник со стороны смазочного слоя $R = r \iint_{\Omega} p d\varphi dz$, используется обобщенное уравнение Рейнольдса

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + r^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6r^2 \left(A_x \frac{\partial h}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right), \quad (2)$$

где $p(\varphi, z, t)$ – гидродинамическое избыточное давление; $\mu(\varphi, z, T)$ – коэффициент динамической вязкости смазки, соответствующий температуре $T(\varphi, z, t)$; $A_x = \omega_x = \omega_2 - \omega_1$; B, r – ширина подшипника и радиус шипа (или подшипника, т.к.

разница между ними – номинальный установочный зазор – на несколько порядков меньше, чем радиус): φ, z – угловая и осевая координаты подшипника.

Толщина смазочного слоя с учетом упругих перемещений подшипника определяется выражением:

$$h(\varphi, t) = h^{\text{жестк.}}(\varphi, t) + L_p, \quad \text{где } h^{\text{жестк.}}(\varphi, t) = h^*(\varphi, t) - e(t) \cos(\varphi - \delta(t)) + L_p \quad (3)$$

где $h^*(\varphi, t)$ – толщина смазочного слоя при центральном положении шипа; $e(t)$ – эксцентриситет (смещение) центра шипа относительно центра подшипника; $\delta(t)$ – угол отклонения линии центров от вертикали (см. рис. 1 б); $e(t), \delta(t)$ – заданы решением динамической подзадачи; L_p – оператор упругих перемещений поверхности трения подшипника, определяемых решением упругой подзадачи.

Решение уравнения (2) рассматривается на прямоугольной области размером $[0; 2\pi] \times [-B/2; B/2]$, на границе которой заданы условия:

$$p(\varphi, z = \pm B/2) = 0; \quad p(\varphi, z) = p(\varphi + 2\pi, z). \quad (4)$$

Так как смазка не выдерживает значительных растягивающих напряжений, то при резком изменении формы зазора (его расширении) смазочный слой может разрываться и образовываться так называемые области кавитации. При этом уравнение Рейнольдса (2) выполняется только в областях непрерывного течения смазочного материала. Положение границ областей кавитации и несущих областей требуют определения. Таким образом, граничные условия (4) необходимо дополнить условиями [3]:

$$\begin{cases} M_p = 0, & \text{при } p > 0, \\ p = 0, & \text{при } M_p \leq 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{где } M_p = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + r^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) - 6r^2 \left(A_x \frac{\partial h}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right).$$

Разностная аппроксимация дифференциальной задачи

Введем сеточную область:

$$\Omega_{i,j} = \begin{cases} \varphi_i = \Delta_\varphi \cdot i; i = 0, \dots, n-1; \Delta_\varphi = 2\pi/(n-1), \\ z_j = \Delta_z \cdot j; j = 0, \dots, m-1; \Delta_z = B/(m-1), \end{cases}$$

где n, m – число узлов дискретизации области Ω по координатным направлениям φ и z ; Δ_φ и Δ_z – шаги сетки по координатам φ и z .

Определим вид сеточной функции, $p_{i,j} = p(\varphi_i, z_j, t)$ которая будет являться решением системы (1)-(3) с граничными условиями (4)-(5). Шаг по времени определяется методом решения уравнения движения.

Используя пятиточечный шаблон типа крест, получим неявную консервативную разностную схему исходной дифференциальной задачи, аналогичную представленной в работе [15] для жесткого подшипника (для условия $T = \text{const}$ и ньютоновской смазки μ не зависит от φ и z), индекс по времени опущен, символом $\sim$ обозначены величины для расчетного момента времени (искомые значения):

$$\left(\Phi_{i+\frac{1}{2},j}^{(1)} - \Phi_{i-\frac{1}{2},j}^{(1)} \right) \frac{1}{\Delta_\varphi} + \left(\Phi_{i,j+\frac{1}{2}}^{(2)} - \Phi_{i,j-\frac{1}{2}}^{(2)} \right) \frac{1}{\Delta_z} = \frac{\tilde{h}_{i,j} - h_{i,j}}{\Delta_t} \quad (7)$$

где $\Phi^{(1)} = \frac{h^3}{6\mu r^2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - A_x h$, $\Phi^{(2)} = \frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial z}$

Уравнение (2) можно записать в виде явной схемы:

$$\tilde{h}_{i,j} = h_{i,j} + a_{i,j} p_{i,j} + a_{i-1,j} p_{i-1,j} + a_{i+1,j} p_{i+1,j} + a_{i,j-1} p_{i,j-1} + a_{i,j+1} p_{i,j+1} + b_{i,j}, \quad (8)$$

$$a_{i,j} = -(a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j-1} + a_{i,j+1}); \quad b_{i,j} = \frac{\Delta_t}{\Delta_\varphi} A_x \left(h_{i+\frac{1}{2},j} - h_{i-\frac{1}{2},j} \right),$$

$$a_{i-1,j} = \frac{\Delta_t}{6\mu r^2 \Delta_\varphi^2} h_{i-\frac{1}{2},j}^3; \quad a_{i+1,j} = \frac{\Delta_t}{6\mu r^2 \Delta_\varphi^2} h_{i+\frac{1}{2},j}^3; \quad a_{i,j-1} = \frac{\Delta_t}{6\mu \Delta_z^2} h_{i,j-\frac{1}{2}}^3; \quad (9)$$

$$a_{i,j+1} = \frac{\Delta_t}{6\mu \Delta_z^2} h_{i,j+\frac{1}{2}}^3,$$

или неявной схемы:

$$\tilde{a}_{i,j} \tilde{p}_{i,j} + \tilde{a}_{i-1,j} \tilde{p}_{i-1,j} + \tilde{a}_{i+1,j} \tilde{p}_{i+1,j} + \tilde{a}_{i,j-1} \tilde{p}_{i,j-1} + \tilde{a}_{i,j+1} \tilde{p}_{i,j+1} - \tilde{h}_{i,j} = b_{i,j} - h_{i,j}, \quad (10)$$

с коэффициентами вида (9).

Тогда условие (5) примет вид:

$$\begin{cases} M_p = 0, & \text{при } p_{i,j} > 0, \\ p_{i,j} = 0, & \text{при } M_p \leq 0, \end{cases} \quad (11)$$

где $M_p = h_{i,j} - \tilde{h}_{i,j} + a_{i,j} p_{i,j} + a_{i-1,j} p_{i-1,j} + a_{i+1,j} p_{i+1,j} + a_{i,j-1} p_{i,j-1} + a_{i,j+1} p_{i,j+1} + b_{i,j}$ – сеточный оператор.

Упругие перемещения поверхности вкладыша от действующих нагрузок, фигурирующие в формуле (3), представимы в следующем виде:

$$L_p = [s] \{ \tilde{p} \} = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} s_{l,j,n+i} \cdot p_{i,j} \right\}_{N \times 1}, \quad l = \overline{0, N-1}, \quad N = n \times m, \quad (12)$$

где $[s]$ – матрица податливости конструкции, $\{ \tilde{p} \}$ – вектор узловых нагрузок.

Коэффициенты для явной (8) или неявной схемы (10) представляются в виде:

$$h_{i,j} = h_{i,j}^{\text{жестк.}} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} s_{l,j,n+i} \cdot p_{i,j}, \quad (13)$$

$$h_i^3 = h_{j-n+i}^3 = \left(h_i^{\text{жестк.}} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} s_{i,j-n+i} \cdot p_{i,j} \right)^3 =$$

$$= \sum_{k_1+k_2+\dots+k_{N+1}=3} \frac{3!}{k_1!k_2!\dots k_{N+1}!} (h_i^{\text{жестк.}})^{k_1} \cdot (s_{0,0} \cdot p_{0,0})^{k_2} \cdot \dots \cdot (s_{N-1,N-1} \cdot p_{N-1,N-1})^{k_{N+1}}, k_o \in \mathbb{Z}.$$

В случае использования явной схемы (8) получена СЛАУ, где $\tilde{h}_{i,j}$ – зависит от неизвестных сеточных давлений; характер и ширина ленты матрицы системы определяется аналогичными параметрами матрицы податливости конструкции $[s]$. В случае применения неявной схемы (10) получена нелинейная система четвертого порядка относительно неизвестных давлений.

Алгоритм решения УГД задачи

При решении задачи нелинейной динамики для гидродинамических подшипников с упругим корпусом для решения уравнения движения (1) применяются методы, апробированные при решении задач без учета деформирования подшипника и описанные в [16-17]. Для этого необходимы начальные условия для координат и скоростей центра шипа, а также поле давлений. В качестве начального приближения вектора давлений может использоваться решения задачи (1)-(3) без учета податливости корпуса ($L_p = 0$).

На каждом временном шаге решается конечно-разностная задача (8) или (10). Если используется явная схема, тогда СЛАУ, описывающее уравнение (8), решается с помощью методов для разреженных систем. При этом для каждого найденного значения проверяется выполнение условия для определения области кавитации: для каждой внутренней точки исследуемой области Ω можно установить, какое именно условие системы (5) выполнено, что приведет к разбиению этой области на две подобласти, в одной из которых $p_{i,j} > 0$ (выполняется уравнение Рейнольдса (2)), а в другой $p_{i,j} = 0$ (выполняется условие кавитации). В результате определяется положение границы этих областей.

Если же используется неявная схема, то для решения системы (10) может быть использован метод, представленный в работе [14], и алгоритм Мерти, описанный выше. В результате решения уравнения (8) или (10) получаем распределение давлений в гидродинамических подшипниках с упругим корпусом для текущего момента времени. Затем вся процедура повторяется для каждого момента времени, задаваемого алгоритмом решения уравнения движения.

Заключение

В ходе работы сформулирован алгоритм решения задачи нелинейной динамики для гидродинамических подшипников с упругим корпусом. Представлены явная и неявная конечно-разностные схемы решения УГД задачи смазки. Применение явной схемы значительно проще, однако требуется анализ накопления ошибок и сходимости для оценки применимости численной схемы к данному типу задач. В случае применения неявной схемы дискретизации уравнения Рейнольдса предложена методика решения данной задачи с помощью прямых нелинейных многосеточных методов, и алгоритма Мерти, что позволяет избежать использования итерационных методов при решении УГД задачи смазки гидродинамических подшипников с упругим корпусом.

Статья выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление №211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.

South Ural State University is grateful for financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (grant No 2017218/BP)

Литература

1. Bonneau D. Computing hydrodynamic pressure in mixed lubrication by modified Reynolds equation // ARCHIVE Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part J Journal of Engineering Tribology 1994-1996 (vols 208-210) 226(12):1074-1094. December 2012
2. Bonneau D. Conformal elastohydrodynamic lubrication analysis for engine bearing design: A brief review. // ARCHIVE Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C Journal of Mechanical Engineering Science 1989-1996 (vols 203-210) 1(12):1-6. December 2010.
3. Oh K.P. The numerical solution of dynamically loaded elastohydrodynamic contact as a nonlinear complementarity problem // ASME Journal of Tribology. 1984. V. 106. № 1. P. 88- 95.
4. Oh, K. P., Goenka, P. K. The elastohydrodynamic solution of journal bearings under dynamic loading, ASME Journal of Tribology, 1985, 107(3), pp. 389-395.
5. Goenka, P. K. and Oh, K. P. An optimum short bearing theory for the elastohydrodynamic solution of journal bearings. Trans. ASME, J. Tribol., 1986, 108(2), pp. 294-299.
6. Goenka, P. K. and Oh, K. P. An optimum connecting rod design study – a lubrication viewpoint. Trans. ASME, J. Tribol., 1986, 108(3), pp. 487-493.
7. Пановко М.Я. О жёсткости точечного упругогидродинамического контакта // Вестник научно-технического развития. 2013. №7(71), с 26-33.
8. Иванов В.А., Еркаев Н.В. Численное моделирование упругогидродинамического контакта с пластиной // Решетневские чтения: материалы XVII Междунар. науч. конф., посвящ. памяти генер. конструктора ракет.-космич. систем акад. М. Ф. Решетнева (12–14 нояб. 2013 г., Красноярск): в 2 ч. / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова ; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. – Красноярск, 2013. – Ч. 2. – с. 101-103.
9. Иванов В.А., Еркаев Н.В. Итерационный расчет трибоконтакта ролика с пластиной // Вестник СибГАУ. 2014. №4(56), с 48-54.
10. Иванов В.А., Еркаев Н.В. Анализ упругих деформаций в подшипнике скольжения // Фундаментальные исследования. 2015. №6, с 241-245.
11. Ivanov V.A., Erkaev N.V. Fluid Dynamic Bearings: Modelling of Elastic Deformations // Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies 2015, №3 p. 270-282.
12. Bharati M Shettar, P S Hiremath, N M Bujurke Jacobian-free Newton Multigrid method for Elastohydrodynamic line contact with grease as lubricant // International Journal of Computational Engineering Research (IJCER). 2016. vol. 6. issue 08.
13. Темис Ю.М., Темис М.Ю., Егоров А.М., Гаврилов В.В., Огородов В.Н. Расчетно-экспериментальное исследование динамики ротора на газовых опорах
1. // Вестник СГАУ, №3(27), 2011. С. 174-183.
14. Максимов Д.Ю., Филатов М.А. Исследование нелинейных многосеточных методов решения задач однофазной фильтрации // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 43. 26 с.
15. Прокопьев В.Н., Бояршинова А.К., Задорожная Е.А. Адаптивный многосеточный алгоритм интегрирования уравнения Рейнольдса для гидродинамических давлений в смазочном слое сложнагруженных опор скольжения / Вестник ЮУрГУ, №6 (06), 2001. С. 61-67.
16. Прокопьев В.Н., Рождественский Ю.В., Караваев В.Г., Задорожная Е.А., Бояршинова А.К., Хозенюк Н.А. Динамика и смазка трибосопрежений поршневых и роторных машин: монография. / Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2010. – Ч. 1. – 136 с.
17. Прокопьев В.Н., Рождественский Ю.В., Караваев В.Г., Задорожная Е.А., Бояршинова А.К., Хозенюк Н.А. Динамика и смазка трибосопрежений поршневых и роторных машин: монография / Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – Ч. 2. – 221 с.

ДИНАМИКА РОТОРА С ЛЕПЕСТКОВЫМИ ПОДШИПНИКАМИ ПРИ СМАЗКЕ МАЛОВЯЗКИМИ ЖИДКОСТЯМИ

Сытин А.В.¹, Тюрин В.О.¹, Шевелев А.В.¹

¹Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, Орел, Россия,
v7a7l@mail.ru

Аннотация. В статье описаны перспективы применения лепестковых подшипников в роторно-опорных узлах современных высокоскоростных турбомашин для повышения производительности всей машины. Представлен подход к построению динамических моделей лепестковых подшипников. Показана расчетная схема и рассмотрена математическая модель расчета реакций лепестковых подшипников при смазке маловязкими жидкостями.

Ключевые слова: лепестковые подшипники, маловязкие жидкости, динамическая модель, высокоскоростные роторные машины, динамика роторов.

Работа машин с быстровращающимися роторами сопровождается вибрацией, повышение которой может привести к поломке валов, опор, агрегатов двигателя. Прогнозирование и понижение вибрационного состояния двигателя, исключение опасных вибраций основано на использовании математических моделей различной сложности, а также на введении в устройство опор скольжения, обладающих высокими демпфирующими свойствами. Перспективными в данном классе являются лепестковые подшипники (рис. 1). Их упругие элементы создают максимальную площадь несущей поверхности, а также служат для подавления неустойчивости. Особенностью лепестковых подшипников является способность к изменению профиля рабочего зазора в соответствии с режимом работы. Податливость и малая масса лепестков позволяют им легко отслеживать колебания ротора, вызываемые дисбалансом или внешними возмущениями, и надежно работать в условиях тепловых деформаций корпусов, при попадании в рабочие зазоры грязи, при малых толщинах смазочного слоя и малых расходах смазки.

1, 2 – лепесток; 3 – корпус; 4 – ротор

Рис. 1. Лепестковый подшипник

Минимальные потери на трение (рис. 2), незначительное выделение температуры, являющееся следствием малой вязкости смазочного материала, позволяет

достигать очень больших частот вращения, а также ввиду отсутствия скачков сил трения при относительном перемещении узлов, разделенных смазочным слоем, становится возможным осуществлять также перемещения с минимальной скоростью скольжения.

Рис. 2. Зависимость потерь на трение от скорости вращения

Критериями выбора смазочных материалов подшипников жидкостного трения могут быть различные факторы в зависимости от назначения машин и агрегатов. В ряде случаев в опорных узлах в качестве смазочных материалов используются рабочие тела машин – жидкие металлы, химически активные вещества, перекачиваемые компоненты топлива. Наблюдается определенная тенденция применения низкотемпературных и криогенных жидкостей (жидкий кислород, водород, неон, аммиак и т. д.), являющихся маловязкими, в различных технических системах. Это в свою очередь связано с решением двух глобальных проблем: разработкой надежных экономичных роторных агрегатов длительного ресурса (двигателей, насосов, компрессоров, передач вращательного движения) и созданием промышленных установок для получения дешевых низкотемпературных жидкостей, в частности с использованием высокооборотных турбодетандеров, работающих на подшипниках жидкостного трения при смазке криогенными жидкостями.

Лепестковые подшипники нашли широкое применение в качестве опор высокоскоростных роторов в транспортном и энергетическом машиностроении благодаря своей способности эффективно рассеивать энергию колебаний. Известные на данный момент конструкции являются уникальными и требуют в каждом конкретном случае создания математической модели расчета как статических, так и динамических характеристик. Применение маловязких жидкостей для смазки и охлаждения лепестковых подшипников порождает комплекс задач, связанных с обеспечением устойчивости и работоспособности опор в условиях больших перепадов давлений и температур, значительных скоростей и нагрузок.

Расчет стационарных и динамических характеристик подшипников основывается на определении полей давления $P(x,z)$ в смазочном слое, которые основываются на базовых уравнениях гидродинамической теории смазки: уравнения Рейнольдса и баланса энергий, а также соотношения для расчета гидродинамических и теплофизических параметров среды, которые замыкают систему дифференциальных уравнений. Наибольшая сложность связана с решением обобщенного уравнения Рейнольдса, в основу которого положены два фундаментальных уравнения гидромеханики, отражающие законы сохранения импульса и массы: уравнения Навье-Стокса и неразрывности. Для случая стационарного течения характеристики

лепестковых подшипников определяем при фиксированном положении вала в подшипнике ($e=\text{const}$, $\varphi=0$), а уравнение Рейнольдса имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\mu k_x} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{\mu k_z} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 3\omega D \frac{\partial(\rho h)}{\partial x},$$

где ρ – плотность, кг/м^3 ; h – радиальный зазор, м; μ – коэффициент динамической вязкости, $\text{Па}\cdot\text{с}$; k_x, k_z – коэффициенты турбулентности; P – давление, Па.

Функцию радиального зазора, входящую в уравнение Рейнольдса можно представить в виде следующих составляющих:

$$h = h_0 + e \cos(\theta - \varphi) + w,$$

где h_0 – первоначальный радиальный зазор, м; w – прогиб лепестка (перемещения оболочки в радиальном направлении), м; e – эксцентриситет, м; θ – расчетный угол, φ – угол положения центра цапфы и центра подшипника.

Объектом рассмотрения в данной работе является жесткий симметричный невесомый ротор с сосредоточенной массой, установленный на лепестковых подшипниках (рис. 3). В расчетной модели внешние силы ротора представлены дисбалансом ($q = \Delta \cdot m$) и массой m , приходящимися на одну опору. В общем случае годограф сил представляет собой эллипс, параметры которого зависят от соотношения величины дисбаланса и веса ротора.

Рис. 3. Схема ротора

В неподвижной системе координат, связанной с центром подшипника, уравнения движения жесткого ротора в упругих опорах запишутся:

$$\begin{cases} m\ddot{X} = 2R_x + m\Delta\omega^2 \sin\omega t + F_x(t); \\ m\ddot{Y} = 2R_y + m\Delta\omega^2 \cos\omega t + mg + F_y(t). \end{cases}$$

где m – масса ротора, кг; x, y – перемещения центра шейки ротора, м; F – внешние силы, Н; R – реакции опор, Н; ω – угловая скорость вращения ротора, рад/с; t – время, с.

Значения внешних возмущающих сил находятся:

$$\begin{aligned} F_x &= q\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0); \\ F_y &= mg + q\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0), \end{aligned}$$

где q – дисбаланс ротора, $\text{кг}\cdot\text{м}$.

Путем интегрирования поля давления определяются реакции смазочного слоя лепесткового подшипника:

$$R_j = - \int_0^L \int_0^{2\pi} p \cdot \sin(\theta - \varphi) R d\theta dz; \quad R_i = - \int_0^L \int_0^{2\pi} p \cdot \cos(\theta - \varphi) R d\theta dz.$$

где L – длина подшипник, м; p – поле давлений в смазочном слое, Па.

Динамические характеристики определяют дополнительные силы, возникающие при возмущениях стационарного положения цапфы, и для их нахождения необходимо знать это стационарное положение. Стационарное положение цапфы зависит от направления и величины статических (гравитационных) сил и находится путем варьирования нагрузки, достигаемой изменением частоты вращения при постоянном значении mg при различных значениях температуры и давления. Точное определение динамических коэффициентов возможно лишь для подшипников простой геометрии и/или в условиях постоянных свойств смазочного материала. Приближенные же методы можно разделить на две группы: численно-аналитические, основанные на методе возмущений, и численные, предлагающие получение динамических коэффициентов путем численного дифференцирования реакций. Метод возмущений базируется на линеаризации (в окрестности положения равновесия) давления, являющегося функцией скоростей и перемещений цапфы. Подстановка возмущенной толщины смазочного слоя и вызванного ею дополнительного линеаризованного давления в уравнение Рейнольдса позволяет получить систему дифференциальных уравнений, в каждое из которых входит лишь одна возмущенная величина (скорость или перемещение) по соответствующему направлению. Такой подход не позволяет полностью избежать численного решения, хотя экономит машинное время и снижает вычислительные погрешности.

Литература

1. Сытин А.В. Решение комплексной задачи расчета характеристик радиальных лепестковых газодинамических подшипников: Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Орел, 2008. – 200 с.
2. Гаевик Д.Т. Подшипниковые опоры современных машин. – М.: Машиностроение, 1985. – 248 с.
3. Леонов В.П., Максимович Т.И., Лепестковые газовые подшипники турбомашин. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 60 с.
4. Пешти Ю.В. Газовая смазка. – М.: МГТУ, 1993. – 381 с.
5. Самсонов А.И. Подшипники с газовой смазкой для турбомашин. – Владивосток: Издательство ДВГТУ, 1996. – 112 с.
6. Савин Л.А., Соломин О.В. Моделирование роторных систем с опорами жидкостного трения: монография – М.: Машиностроение-1, 2006. – 444 с.
7. Носов В.Б. Подшипниковые узлы современных машин и приборов: энциклопедический справочник / В.Б. Носов. – Москва: Машиностроение, 1997. – 640 с.
8. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. – М., 1972. – 720 с.
9. Рабинович В.А., Вассерман А.А., Недоступ В.И., Векслер Л.С. Теплофизические свойства неона, аргона, криптона и ксенона. – М., Издательство стандартов, 1976. – 636 с.
10. Савин Л.А., Соломин О.В. Динамика жесткого ротора на подшипниках скольжения, смазываемых криогенной жидкостью // Известия вузов. Машиностроение. № 4. 2004. С. 27-38.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ КОАГУЛЯЦИИ ЧАСТИЦ В ДВУХФАЗНОМ ПОЛИДИСПЕРСНОМ ПОТОКЕ

Тукмаков Д.А.

ИММ КазНЦ РАН, Казань, РФ, e-mail: tukmakovDA@imm.knc.ru

Аннотация. В работе на основе численного решения уравнений движения многофазных сред получена модель динамики газовзвеси и дрейфа дисперсной фазы в нелинейных волновых полях, а также разработана математическая модель динамики взвеси частиц с многокомпонентной дисперсной фазой.

Ключевые слова: многофракционная газовзвесь, акустический резонатор, дрейф частиц, численное моделирование.

Современные промышленные технологии создаются с учетом эффектов, обнаруженных в динамике гетерогенных систем. В связи с этим задача исследования нестационарных волновых процессов в многофазных средах представляет собой одну из наиболее актуальных фундаментальных проблем механики жидкости и газа. При этом изучение нестационарных течений неоднородных сред методами математического моделирования востребовано в связи с тем, что до сих пор многие явления и процессы в волновой динамике гетерогенных систем недоступны для экспериментального изучения. В данной работе численно изучается динамика полидисперсной газовзвеси в волновых полях.

Движение несущей среды описывается системой уравнений Навье-Стокса с учетом межфазного силового взаимодействия и теплообмена [1-4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy}) &= -\sum_{i=1,n} F_{xi} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial(e_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left([e_1 + p - \tau_{xx}]u_1 - \tau_{xy}v_1 + \lambda \frac{\partial T_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left([e_1 + p - \tau_{xy}]v_1 - \tau_{yx}u_1 + \lambda \frac{\partial T_1}{\partial y}\right) &= \\ = -\sum_{i=2}^n Q_i - \sum_{i=2}^n \left(|F_{xi}|(u_1 - u_i) - |F_{yi}|(v_1 - v_i)\right) + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\partial(pu_i)}{\partial x} + \frac{\partial(pv_i)}{\partial y}\right), \\ \tau_{xx} = \mu \left(2 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2}{3} D\right), \tau_{yy} = \mu \left(2 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{2}{3} D\right), \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right), D = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}. \end{aligned}$$

Движение каждой из фракций дисперсной фазы описывается уравнением сохранения средней плотности фракции, уравнениями сохранения продольной и поперечной составляющих импульса, а также уравнением сохранения тепловой энергии [1-4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i u_i v_i) &= F_{xi} - \alpha_i \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i v_i) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i v_i^2) &= F_{yi} - \alpha_i \frac{\partial p}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(e_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_i u_i) + \frac{\partial}{\partial y}(e_i v_i) &= Nu_i \frac{6\alpha_i}{(2r_i)^2} \lambda(T - T_i), \\
\rho_i &= \alpha_i \rho_{i0}, \quad e_i = \rho_i C_{vi} T_i, \\
F_{xi} &= \frac{3}{4} \frac{\alpha}{(2r)} C_d \rho_i \sqrt{(u_i - u_i)^2 + (v_i - v_i)^2} (u_i - u_i) + \alpha_i \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) + \\
&\quad + 0.5 \alpha_i \rho_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} - \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} - v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right), \\
F_{yi} &= \frac{3}{4} \frac{\alpha}{(2r)} C_d \rho_i \sqrt{(u_i - u_i)^2 + (v_i - v_i)^2} (v_i - v_i) + \alpha_i \rho_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) + \\
&\quad + 0.5 \alpha_i \rho_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial v_i}{\partial x} - v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} \right), \\
C_{di} &= \frac{24}{Re_{i0}} + \frac{4}{Re_{i0}^{0.5}} + 0.4, \quad M_{i0} = |\bar{V}_1 - \bar{V}_i| / c, \\
Re_{i0} &= \rho_i |\bar{V}_1 - \bar{V}_i| 2r / \mu, \quad Pr = \gamma C_p \mu / \lambda
\end{aligned}$$

Для описания процесса коагуляции частиц использовалась модель коагуляции [4]:

$$\begin{aligned}
\frac{dm_i}{d\tau} &= \sum_{j=2}^{i-1} k_{ij} n_j m_j, \quad k_{ij} = \frac{\pi}{4} (d_i + d_j)^2 \left[u_i \cos(\alpha) + v_i \sin(\alpha) - \sqrt{u_j^2 + v_j^2} \right], \\
\alpha &= \arctg(v_j / u_j), \\
\frac{dn_i}{d\tau} &= -n_i \sum_{j=i+1}^n k_{ij} n_j, \quad \alpha_i = \frac{4}{3} \pi n_i r_i^3, \quad i = 2 \dots n, \\
\frac{dw_i}{d\tau} &= \frac{1}{m_i} \sum_{j=2}^{i-1} k_{ij} (w_j - w_i) m_j n_j, \quad w_j = \sqrt{u_j^2 + v_j^2}, \quad T = \frac{1}{Cm} \left(\sum_{j=2}^{i-1} k_{ij} n_j C_j m_j T_j + C_i m_i T_i \right).
\end{aligned}$$

В начальный момент времени- $t=0$ двухфазная смесь движется с постоянной продольной скоростью u_0 , дисперсная фаза газозвеси состоит из пяти фракций с радиусами частиц $r_{10}=1\text{мкм}$, $r_{20}=5\text{мкм}$, $r_{30}=10\text{мкм}$, $r_{40}=15\text{мкм}$, $r_{50}=20\text{мкм}$.

Рис. 1 Схема канала с акустическим излучателем.

При $t > 0$ начинается процесс синфазных колебаний поперечной составляющей скорости участков верхней и нижней стенок канала по закону $v(t) = A \sin(\omega t)$ (рис.1), приводящий к генерации колебаний в несущей и дисперсной фазах с первой собственной частотой относительно поперечного сечения канала $\omega = \pi c / d$, где $c = (\gamma RT)^{1/2}$.

Численное моделирование показало, что воздействие на поток полидисперсного состава резонансными волновыми полями позволяет уменьшить концентрацию мелкодисперсных фракций смеси за счет коагуляции частиц. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-11-20022).

Литература

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1 – Москва: Наука, 1987. – 464с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – Москва: Издательство “Дрофа”, 2003. – 784 с.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1 – Москва: Наука, 1983. – 528 с.
4. Кутушев А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. – Санкт-Петербург: Недра, 2003. – 284с.
5. Губайдуллин Д.А., Тукмаков Д.А. Численное моделирование динамики волновых систем на основе явной схемы Мак-Кормака // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2012. № 5-6. С. 3 - 10.
6. Тукмаков А.Л. Численное моделирование акустических течений при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе в окрестности резонансных частот // Известия вузов. Авиационная техника. 2006. № 4. С.30-33.
7. Fletcher C.A., Computation Techniques for Fluid Dynamics. –Springer–Verlang: Berlin et al., 1988. – 502 P.
8. MacCormak R.W., Lomax H. Numerical solution of compressible viscous flows // Ann Rev. Fluid Mech. 1979. № 11. P.289-316.
9. Ковеня В.М., Тарнавский Г.А., Черный С.Г. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. – Новосибирск: Наука, 1990. – 247 с.
10. Музафаров И.Ф., Утюжеников С.В., Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа // Математическое моделирование. 1993. Т.5. №3. С. 74-83.

ИССЛЕДОВАНИЕ КПД ВОЛНОВЫХ ПЕРЕДАЧ С ТЕЛАМИ КАЧЕНИЯ

Фурс И.В.¹

¹МАИ, Москва, Россия, furs.ilya@mail.ru

Аннотация. Волновые передачи с телами качения находят применение в электромеханических приводах ЛА. Достоинства волновой передачи с телами качения по сравнению с зубчатой являются лучшие массо-габаритные показатели и повышенный КПД. В работе исследована зависимость КПД волновых передач с телами качения от передаточного числа, при этом рассмотрены варианты применения сплошных и сборных роликов. По результатам исследования предложены способы повышения КПД волновых передач с телами качения.

Ключевые слова. Волновая передача, тела качения, КПД.

Волновая передача с телами качения отличается от зубчатой волновой передачи тем, что функцию гибкого колеса выполняют тела качения, расположенные в гнездах сепаратора. В качестве тел качения могут быть использованы шарики или ролики. Использование тел качения позволяет уменьшить трение и повысить КПД. Кроме того, применение роликов увеличивает нагрузочную способность передачи.

Волновая передача с телами качения обратимая, т.е. может работать как в режиме редуктора, так и в режиме мультипликатора. В передаче момента как в режиме редуктора, так и в режиме мультипликатора, участвует примерно половина тел качения, поэтому для симметричного нагружения вала передачи применяют, как минимум, два ряда тел качения.

На рис. 1 приведены продольный и поперечный сечения разработанного мультипликатора ветроэнергетической установки на основе волновой передачи с телами качения.

Мультипликатор содержит входное звено – сепаратор 1 с телами качения 2, в качестве которых использовались сплошные или составные ролики, неподвижное жесткое колесо 3 и выходное звено – волнообразователь 4, выполненные из набора секций. Число секций зависит от передаваемого момента и должно быть не менее трех.

Секции жесткого колеса 3 имеют центрирующую поверхность и закрепляются шпильками 5.

Секции сепаратора 1 содержат на обеих боковых поверхностях пазы 6, в которых размещаются втулки 7. Секции сепаратора стягиваются шпильками 8.

Сепаратор 1 центрирован относительно неподвижного жесткого колеса 2 подшипниками 9. На торцевых поверхностях каждой секции сепаратора выполнены соосно радиальные пазы двух размеров. Паз 10 большего размера имеет ширину, равную наружному диаметру тела качения, а ширина паза 11 меньшего размера равна диаметру торцевого шарика 12. Длина пазов соответствует ходу тела качения на величину двойного эксцентриситета.

Секции волнообразователя 4 содержат втулки эксцентриков 13, посаженные на общий вал 14, подшипники качения 15 и диски 16. Эксцентриситет выставляется винтами 17. Втулки эксцентриков 13 закрепляются на валу 14 таким образом, чтобы направления эксцентриков относительно центральной оси исключили неуравновешенность волнообразователя.

В дисках 16 волнообразователя выполнены отверстия 18, диаметр которых превышает диаметр втулок сепаратора на величину двойного эксцентриситета.

Рис. 1 Конструкция мультипликатора для осевой схемы ветроэнергетической установки.

КПД волновой передачи с телами качения зависит как от конструктивных параметров самой передачи, так и от технологии изготовления жесткого колеса, волнообразователя, сепаратора и тел качения.

КПД волновой передачи с телами качения в режиме редуктора (при передаче движения от волнообразователя к жесткому колесу при остановленном сепараторе) определяется зависимостью:

$$\eta_{в-ж}^c = \frac{P_{ж}}{P_{в}} = \frac{M_{ж}\Omega_{ж}}{M_{в}\Omega_{в}} = \frac{1}{q_{в-ж}^c} \frac{M_{ж}}{M_{в}} = \frac{1}{z_{ж}} \frac{F_{ж}\Pi_{ж}}{F_{в}\Pi_{в}},$$

где $P_{ж}, P_{в}$ – мощности на жестком колесе и волнообразователе,
 $\Omega_{ж}, \Omega_{в}$ – угловые скорости жесткого колеса и волнообразователя,
 $M_{ж}, M_{в}$ – крутящие моменты на жестком колесе и волнообразователе,
 $q_{в-ж}^c$ – передаточное отношение от волнообразователя к жесткому колесу при остановленном сепараторе,

$$q_{в-ж}^c = \frac{\Omega_{в}}{\Omega_{ж}} = z_{ж},$$

$z_{ж}$ – число периодов впадин жесткого колеса (при остановленном сепараторе),

$F_{ж}$ – сила, действующая со стороны жесткого колеса на тело качения (шарик или ролик) (см. рис. 2),

$F_{в}$ – сила, действующая со стороны диска волнообразователя на тело качения (см. рис. 3),

$\Pi_{\text{ж}}, \Pi_{\text{в}}$ – плечи сил $F_{\text{ж}}$ и $F_{\text{в}}$ соответственно.

В работе [1] получена зависимость КПД волновой передачи с телами качения от конструктивных параметров и угла поворота волнообразователя в режиме редуктора:

$$\eta_{\text{в-ж}}^{\text{с}} = \frac{1}{z_{\text{ж}}} \frac{\cos(\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{в}} - \lambda(\varphi_{\text{в}}))}{\cos(\rho_{\text{с}} + \rho_{\text{ж}} - \chi(\varphi_{\text{в}}))} \cdot \frac{l(\varphi_{\text{в}}) \sin(\chi(\varphi_{\text{в}}) - \rho_{\text{ж}}) - r_{\text{тк}} \sin \rho_{\text{ж}}}{l(\varphi_{\text{в}}) \sin(\lambda(\varphi_{\text{в}}) + \rho_{\text{в}}) - r_{\text{тк}} \sin \rho_{\text{в}}}, \quad (1)$$

где $\rho_{\text{с}}$ – угол отклонения вектора силы $F_{\text{с}}$ от нормали в направлении движения тела качения в гнезде сепаратора (см. рис. 2, 3),
 $\rho_{\text{в}}$ – угол отклонения вектора силы $F_{\text{в}}$ от линии, перпендикулярной радиусу тела качения в точке его контакта с диском волнообразователя (см. рис. 3),
 $\rho_{\text{ж}}$ – угол отклонения вектора силы $F_{\text{ж}}$ от линии, перпендикулярной радиусу тела качения в точке его контакта с жестким колесом (см. рис. 2),

$$\chi(\varphi_{\text{в}}) = \arctg \left(\frac{e z_{\text{ж}} \sin \varphi_{\text{в}}}{\sqrt{(r_{\text{д}} + r_{\text{тк}})^2 - e^2 \sin^2 \varphi_{\text{в}}}} \right), \quad (2)$$

$$l(\varphi_{\text{в}}) = e \cos \varphi_{\text{в}} + \sqrt{(r_{\text{д}} + r_{\text{тк}})^2 - e^2 \sin^2 \varphi_{\text{в}}}, \quad (3)$$

$$\lambda(\varphi_{\text{в}}) = \arcsin \left(\frac{e \sin \varphi_{\text{в}}}{r_{\text{д}} + r_{\text{тк}}} \right), \quad (4)$$

где $r_{\text{д}}, r_{\text{тк}}$ – радиусы диска волнообразователя и тела качения,
 e – эксцентриситет дисков волнообразователя.

Углы $\rho_{\text{с}}, \rho_{\text{в}}, \rho_{\text{ж}}$ являются углами трения, для которых

$$\operatorname{tg} \rho_{\text{с}} = f_{\text{с}}, \quad \operatorname{tg} \rho_{\text{в}} = f_{\text{в}}, \quad \operatorname{tg} \rho_{\text{ж}} = f_{\text{ж}},$$

где $f_{\text{с}}, f_{\text{в}}, f_{\text{ж}}$ – коэффициенты трения между телом качения и сепаратором, волнообразователем и жестким колесом.

Рис. 2 Взаимодействие жесткого колеса с телом качения.

Рис. 3 Взаимодействие волнообразователя с телом качения.

Расчеты показывают, что наибольшее влияние на КПД передачи оказывает коэффициент трения между телами качения и волнообразователем f_b , и наименьшее – с сепаратором f_c (см. рис. 4).

Рис. 4 Зависимость КПД волновой передачи с телами качения от $f_c, f_b, f_{\text{ж}}$ при $\phi_b = \pi/2$.

Влияние каждого коэффициента трения рассматривалось при значении угла поворота волнообразователя $\phi_b = \pi/2$, когда КПД передачи момента одним телом качения наиболее близко к максимальному (см. (1)). При построении зависимостей принималось, что два других коэффициента равны нулю. Из графиков следует, что чистота обработки соприкасающихся поверхностей, определяющая коэффициенты трения, существенно влияет на КПД. Для волновой передачи с передаточным числом 16 со сплошными роликами зависимость КПД от угла поворота волнообразователя при передаче момента одним телом качения, построенная по формулам (1)-(4) приведена на рис. 5. Т.к. передача момента осуществляется половиной роликов каждого ряда, то в расчете принято, что ϕ_b изменяется в режиме редуктора от 0° до 180° , в режиме мультипликатора – от 180° до 360° . Как следует из графика на рис. 5, конструкция со сплошными роликами и передаточным числом $q = 16$ при коэффициентах трения $f_{\text{ж}} = f_b = 0,001$ и $f_c = 0,1$ имеет значение КПД не менее 0,9.

Рис. 5 Зависимости КПД от угла поворота волнообразователя при использовании сплошных роликов.

Так как ролики одновременно контактируют с тремя поверхностями: диском волнообразователя, жестким колесом и сепаратором, то для дальнейшего повышения КПД можно использовать сборные ролики (рис. 6) [2], состоящие из оси 1, наборов подшипников качения 2, 3 и торцевых шариков 4. Подшипники 2, расположенные по краям ролика, будут контактировать только с жестким колесом, а подшипники 3, расположенные в середине ролика, через промежуточное кольцо 5 – только с волнообразователем, т.е. только с одной поверхностью. Торцевые шарики 4, расположенные в гнездах 6, позволят уменьшить трение между роликом и сепаратором. Исследования КПД со сборными роликами не проводились.

Рис. 6 Конструкция сборного ролика.

График зависимости КПД от угла поворота волнообразователя той же волновой передачи с передаточным числом $q = 16$ для одного ролика, выполненного сборным (рис. 6), с коэффициентами трения $f_{\text{ж}} = f_{\text{в}} = f_{\text{с}} = 0,001$ приведен на рис. 7.

Рис.7 Зависимости КПД от угла поворота волнообразователя при использовании сборных роликов.

Из графиков, приведенных на рис. 6, 7, следует, что КПД на большей части рабочего диапазона имеет значение, мало отличающееся от максимальной величины. Поэтому КПД передачи с полным набором тел качения практически не будет зависеть от угла поворота волнообразователя и будет соответствовать среднему КПД одного ролика. В результате использование сборных роликов позволяет повысить КПД от 0.89 до 0.92

Конструктивные параметры волновой передачи с телами качения зависят от величины момента нагрузки M_n , передаточного отношения q , коэффициента увеличения допустимого момента при использовании роликов k_p и требуемого наружного диаметра передачи $D_{\text{треб}}$.

Рассмотрим, как эти параметры влияют на КПД.

При принятых значениях $M_n = 10^6 \text{ Нм}$, $k_p = 2$, $D_{\text{треб}} = 1000 \text{ мм}$, КПД волновой передачи со сборными роликами в диапазоне передаточных чисел $q = 6..60$ уменьшается, как показано на рис. 8.

Из рис. 9 следует, что КПД при тех же значениях M_n и k_p и выбранных значениях передаточных чисел не зависит от числа рядов тел качения n .

При постоянных значениях k_p и n и выбранных значениях передаточных чисел КПД не зависит от момента нагрузки (рис. 10).

Из анализа приведенных зависимостей следует, что КПД волновой передачи с телами качения не зависит от момента нагрузки и числа рядов тел качения и снижается при увеличении передаточного отношения.

Сравнение КПД волновой передачи с телами качения при использовании сплошных или сборных роликов, приведено на рис. 11.

Из полученных графиков следует, что при $q=6$ КПД передачи со сборными роликами достигает значения 0,962, а при $q>25$ становится менее 0,9. Поэтому для обеспечения высокого КПД при больших передаточных отношениях целесообразно использовать многоступенчатую волновую передачу.

Рис. 8 Зависимость КПД и конструктивных параметров от передаточного отношения при $M_n = 10^6 \text{ Нм}$, $k_p = 2$, $D_{\text{трёб}} = 1000 \text{ мм}$.

Рис. 9 Зависимость КПД от количества рядов тел качения при различных передаточных числах.

Рис. 10 Зависимость КПД от момента нагрузки при различных передаточных числах.

Рис.11 Зависимости КПД от угла поворота волнообразователя при использовании сплошных и сборных роликов.

Таким образом, исследование КПД волновой передачи с телами качения показало, что использование сборных роликов позволяет получить повышенное КПД (порядка 0,94) в одной ступени при передаточных числах до 10-12. Для реализации большого передаточного числа рекомендуется использовать несколько ступеней с указанными передаточными числами.

Литература

1. Степанов В.С. Методика проектирования привода на основе волновой передачи с

телями качения. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. М.: МАИ, 2009.

2. Самсонович С.Л., Степанов В.С., Ковалев К.Л. и др. Мультипликатор высокомошной энергетической установки. Патент РФ на изобретение №2588351. Оpubл. 2016г. Бюл. №18.

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ТРУБОПРОВОДОВ

Худаяров Б.А.¹, Кучаров О.Р.², Шербоев Х.У.³

¹Ташкентский институт ирригации и мелиорации, г.Ташкент, Узбекистан,
bakht-flpo@vandex.ru

²Ташкентский институт ирригации и мелиорации, г.Ташкент, Узбекистан,
k.r.olimjon@mail.ru

³Ташкентский институт ирригации и мелиорации, г.Ташкент, Узбекистан,
hasinto@umail.uz

Аннотация. В работе решаются задачи о колебаниях прямолинейных участков трубопровода на базе теории балок. Разработана математическая модель динамики прямого вязкоупругого трубопровода при протекании через него пульсирующей жидкости. С помощью метода Бубнова – Галеркина математическая модель задачи сводится к решению системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений, где независимой переменной является время. Решение интегро-дифференциальных уравнений определяется численным методом, основанным на исключении особенности в ядре релаксации интегрального оператора. Согласно численного метода относительно неизвестных получены систему алгебраических уравнений. Для решения системы алгебраических уравнений используется метод Гаусса. Разработан вычислительный алгоритм, для решения задач динамики вязкоупругих трубопроводов с протекающей жидкостью. Показано, что учет вязкоупругих свойств материала трубопровода приводит к уменьшению амплитуды и частоты колебаний на 20-40%. Увеличение значения частоты пульсации жидкости и коэффициента возбуждения приводит к колебательному движению с интенсивно нарастающими амплитудами, которое может привести к разрушению конструкции.

Ключевые слова: моделирование, вязкоупругость, интегро-дифференциальные уравнение, численный метод, трубопровод, пульсация жидкости, колебательный процесс.

В настоящее время нефтегазовая промышленность часто сталкивается с проблемами ремонта, реконструкции и восстановления трубопроводов из-за воздействия на них различных внешних факторов. Одним из путей решения данной проблемы является применение современных, ресурсосберегающих, экологически безопасных технологий, к которым можно отнести использование неметаллических, в частности, полимерных композиционных материалов [1-3].

Настоящая работа посвящена решению вышеназванных задач и поэтому ее тематика весьма актуальна.

Целью данной работы является создание математической модели, численного алгоритма и компьютерной программы для решения задачи о колебаниях вязкоупругих трубопроводов на базе теории балок [4, 5].

Постановка задачи и методы решения

Рассмотрим вязкоупругий трубопровод в виде прямой однопролетной шарнирно опертой с обоих концов балки. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось x проходила через центры тяжести сечений трубы в опорах, которым соответствуют

координаты $x=0$ и $x=L$. Перемещения точек оси трубопровода по оси z представляют неизвестную функцию прогибов $w(x,t)$. Скорость течения жидкости вдоль оси трубопровода – V . Продольные колебания трубопровода не рассматриваются.

Уравнение колебаний трубопровода имеет вид

$$EJ(1-R^*)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_1(L-x)\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (m_1V^2 + pF)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2m_1V\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + (m_1 + m_2)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Здесь E – модуль упругости материала трубы; J – момент инерции сечения трубы; EJ и L – жесткость и длина консоли; x – независимая переменная, продольная осевая координата трубы; m_1 – масса жидкости на единицу длины трубы; m_2 – масса трубы на единицу длины; F – площадь поперечного сечения трубы; p – внутреннее рабочее давление; R^* – интегральный оператор вида: $R^*\varphi(t) = \int_0^t R(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$; $R(t-\tau)$ – ядро релаксации.

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^N w_n(t)\phi_n(x), \quad (2)$$

где функции $\phi_n(x)$ подобраны так, чтобы каждый член суммы (2) удовлетворял граничным условиям, а $w_n(t)$ – некоторые функции, подлежащие к определению.

Скорость пульсирующей жидкости $V(t)$ предполагается гармонически колеблющейся, и имеет следующий вид [4]:

$$V(t) = v_0(1 + \mu_1 \cos \varpi t), \quad (3)$$

$$V^2(t) \approx v_0^2(1 + 2\mu_1 \cos \varpi t),$$

здесь v_0 – постоянная скорость жидкости, μ_1 – коэффициент возбуждения, ϖ – частота пульсации жидкости. Эта пульсирующая скорость потока появляется как параметрический член возбуждения в уравнении движения и может привести к неограниченному возрастанию амплитуды параметрических колебаний и наступлению явления параметрического резонанса.

Подставляя (2) в уравнение (1) и применяя к этому уравнению метод Бубнова-Галеркина, получим систему интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) относительно коэффициентов (2). Введя следующий безразмерный параметр w/L и сохраняя прежние обозначения, систему ИДУ сводим к уравнению относительно w_k :

$$\ddot{w}_k + 2\nu\sqrt{\beta_{12}}(1 + \mu \cos \omega \tau) \sum_{n=1}^N \dot{w}_n \gamma_{nk} + (1 - R^*)k^4 \pi^4 w_k + \left[\mu \nu \sqrt{\beta_{12}}(1 - \xi) \omega \sin \omega \tau - \nu^2 (1 + \mu \cos \omega \tau)^2 + T_1 \right] k^2 \pi^2 w_k = 0. \quad (4)$$

$$w_n(0) = w_{0n}; \quad \dot{w}_n(0) = \dot{w}_{0n}.$$

$$\text{Здесь} \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \nu = \nu_0 L \left(\frac{m_1}{EL} \right)^{0.5}, \quad T_1 = pF \frac{L^2}{EJ}, \quad \beta_{12} = \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

$$\tau = \frac{t}{L^2} \left(\frac{EL}{m_1 + m_2} \right)^{0.5}, \quad \omega = \bar{\omega} \cdot L^2 \left(\frac{m_1 + m_2}{EJ} \right)^{0.5} - \text{безразмерные параметры.}$$

Численные результаты

Решение ИДУ (4) находится численным методом, основанным на использовании квадратурных формул [6-9]. На основе этого метода описан алгоритм численного решения системы (4). Интегрируя систему (4) два раза по t , можно записать ее в интегральной форме и с помощью рационального преобразования исключить слабо-сингулярные особенности интегрального оператора R^* . Затем, полагая $t = t_i$, $t_i = i \cdot \Delta t$, $i = 1, 2, \dots$ ($\Delta t = \text{const}$) и заменяя интегралы квадратурными формулами трапеций для вычисления $w_{ik} = w_k(t_i)$, получим рекуррентные формулы для ядра Колтунова-Ржаницына.

Таким образом, согласно численному методу относительно неизвестных получим систему алгебраических уравнений. Для решения системы используется метод Гаусса. На базе разработанного алгоритма создан пакет прикладных компьютерных программ. Результаты вычислений отражаются графиками, приведенными на рис. 1-4.

На рис. 1-4 помещены результаты вычислений, относящиеся к прямолинейному участку трубопровода, в котором протекает жидкость. При этом пренебрегаем кориолисовой силой. Решение рассмотренной задачи позволяет также исследовать колебательное движение, сопровождающиеся прощелкиванием трубы и представляющие собой опасность в отношении развития усталостных трещин.

На рис. 1 изображен закон распределения прогиба трубопровода с учетом вязкоупругих свойств материала и показано его развитие во времени. Для упругих трубопроводов колебания носят практически периодический характер. Как видим, с учетом вязкоупругого свойства материала конструкций амплитуда колебаний резко снижается. Между тем влияние вязкоупругого свойства материала трубопровода на амплитуду колебаний трубопровода в начальном процессе (участок кривой $w(t)$ в диапазоне $0 \leq t \leq 0,2$) проявляется в существенно меньшей степени. Начиная с $t \geq 0,2$ вязкоупругие свойства материала существенно влияют на колебательный процесс трубопровода. Анализ результатов показывает, что увеличение параметра вязкости A приводит к затуханию колебательного процесса.

На рис. 2 показана зависимость прогиба трубы $\frac{w}{L}$ (L – длина консоли) от безразмерного времени τ при различных значениях отношения масс β_{12} . Отношение масс β_{12} изменяется, вообще говоря, от нуля до единицы. При вычислениях принято $A = 0,05$, $T_1 = 1$, $\xi = 0,1$, $\nu = 1,5$, $\omega = 5$. Кривая 1 отвечает случаю $\beta_{12} = 0,1$, кривая 2 – $\beta_{12} = 1$. Судя по графику, с увеличением параметра β_{12} амплитуда и частота колебаний резко меняются.

Это объясняется тем, что с ростом параметра β_{12} уменьшается масса трубы на единицу длину, т.е. уменьшается толщина трубы. Поэтому рост параметра β_{12} приводит к возрастанию амплитуды и частоты колебаний.

Рис. 1. Влияние вязкоупругого свойства материала конструкций на амплитуды прогиба. $A=0(1); 0,05(2); 0,1(3)$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,001$; $\xi=0,5$; $T_1=2$; $\beta_{12}=0,1$; $\nu=1,5$; $\omega=2,5$.

Рис. 2. Зависимость прогиба трубы от безразмерного времени τ при $\beta_{12}=0,1(1)$; $\beta_{12}=1(2)$; $A=0,05$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,001$; $T_1=1$; $\xi=0,1$; $\nu=1,5$; $\omega=5$.

Рис. 3. Зависимость прогиба трубы w от времени τ при ζ : $\zeta=0,1(1)$; $\zeta=0,7(2)$; $A=0,05$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,001$; $T_1=1$; $\nu=2,5$; $\beta_{12}=0,5$; $\mu_1=0,6$; $\omega=1,5$.

Рис. 4. Зависимость $w(\tau)$ при различных значениях ω : $\omega=5(1)$; $\omega=17/2(2)$; $A=0,05$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,001$; $T_1=1$; $\zeta=0,5$; $\beta_{12}=0,5$; $\mu_1=0,4$; $\nu=1,5$.

На рис. 3 представлена зависимость прогиба трубы w от времени τ при $\zeta=0,1$ и $\zeta=0,7$. В начальном процессе колебаний оба рассмотренных случая (влияние параметра ζ) дают практически одинаковые значения амплитуды колебаний трубопровода. Начиная с $\tau \geq 0,4$ амплитуды колебаний обоих кривых резко возрастают. Однако, при

$\xi=0,7$ амплитуды прогиба быстро нарастает, относительно $\xi=0,1$, что может привести к усталостному разрушению конструкцией.

Исследовано влияние частоты пульсации жидкости ω на колебания вязкоупругих трубопроводов. На графике рис.4 представлены кривые $w(\tau)$, полученные для трубопровода при $\omega=5$ (кривая 1); $\omega=17$ (кривая 2). Видно, что увеличение частоты пульсации жидкости приводит к увеличению амплитуды колебаний. Исследования показали, что результаты численного моделирования согласуются с известными результатами работ [4, 5].

Выводы. Разработана математическая модель динамики прямого вязкоупругого трубопровода при протекании через него пульсирующей жидкости. Разработан вычислительный алгоритм для решения задач динамики вязкоупругих трубопроводов с протекающей жидкостью. На основе разработанного вычислительного алгоритма создан пакет прикладных компьютерных программ, позволяющий исследовать колебательные процессы вязкоупругих трубопроводов с протекающей пульсирующей газо-жидкостью. Учет вязкоупругих свойств материала трубопровода приводит к уменьшению амплитуды и частоты колебаний на 20-40%. Увеличение значения частоты пульсации жидкости и коэффициента возбуждения приводит к колебательному движению с интенсивно нарастающими амплитудами, которое может привести к разрушению конструкции. Полученные результаты численного моделирования могут быть использованы в предприятиях нефтегазовой отрасли, а также проектными организациями.

Литература

1. Аношкин А.Н., Зуйко В.Ю., Иванов С.Г. Расчет напряженно-деформированного состояния и прогнозирование прочности полимерных армированных труб газового назначения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2007. – №6(56). – С.419-426.
2. Ягубов Э.З. Использование высокопрочных стеклопластиковых труб в нефтяной промышленности // Нефтяное хозяйство. – 2001. – №6. – С.68-70.
3. Ягубов Э.З., Цхадая Н.Д., Якубов З.Х. Многоканальные трубопроводы для транспортировки нефтегазовых сред и восстановление изношенных нефтегазопроводов // Научные труды. – 2013. – №1. – С. 57-63.
4. Paidoussis M.P., Issid N.T. Dynamic stability of pipes Conveying Fluid // Journal of Sound and Vibration. – 1974. – Vol. 33. – No 3. – P.267-294.
5. Long Liu., Fuzhen Xuan. Flow-Induced Vibration Analysis of Supported Pipes Conveying Pulsating Fluid Using Precise Integration Method // Mathematical Problems in Engineering. – 2010. DOI:10.1155/2010/806475.
6. Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Мехнат, 1987. 269 с.
7. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикладная математика и механика. – 1987. – Т. 51. – №5. – С. 867–871.
8. Худаяров Б.А., Бандурин Н.Г. Нелинейный флаттер вязкоупругих ортотропных цилиндрических панелей // Математическое моделирование. РАН. 2005. Том 17, №10. – С. 79–86.
9. Бадалов Ф.Б., Худаяров Б.А., Абдукаримов А. Исследование влияния ядра наследственности на решение линейных и нелинейных динамических задач наследственно-деформируемых систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. Российская академия наук. – 2007. – №4. – С. 107–110.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ТРУБОПРОВОДОВ С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

Худаяров Б.А.¹, Тураев Ф.Ж.²

¹Ташкентский институт ирригации и мелиорации, г.Ташкент, Узбекистан,
bakht-flpo@vandex.ru

²Ташкентский институт ирригации и мелиорации, г.Ташкент, Узбекистан,
t.fozil86@mail.ru

Аннотация. В работе решается задачи о колебаниях прямолинейных участков трубопровода на базе теории оболочек. Построена математическая модель задачи о параметрических колебаниях вязкоупругих трубопроводов большого диаметра с протекающей пульсирующей жидкостью. Разработан вычислительный алгоритм, основанный на исключении особенностей интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными ядрами, с последующим использованием квадратурных формул, для решения задач динамики вязкоупругих трубопроводов с протекающей пульсирующей жидкостью. Численно исследованы влияние сингулярности в ядрах наследственности и частота возбуждения на колебания конструкций, обладающих вязкоупругими свойствами.

Ключевые слова: моделирование, вязкоупругость, интегро-дифференциальные уравнение, численный метод, трубопровод, пульсация жидкости, колебательный процесс.

Рассмотрим поведение трубопровода типа цилиндрической оболочки, внутри которой протекает пульсирующая жидкость. Скорость жидкости $U(t)$ изменяется по закону [1]

$$U(t) = U_0(1 + \mu_1 \cos \gamma_1 t).$$

Уравнения движения вязкоупругой оболочки в перемещениях запишется в виде:

$$\begin{aligned} (1-R^*) \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\mu}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + L_1(w) \right\} - \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ (1-R^*) \left\{ \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + L_2(w) \right\} - \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ D(1-R^*) \nabla^4 w + L_3^*(u, v, w) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= q, \end{aligned} \quad (1)$$

где D – цилиндрическая жесткость трубы, μ – коэффициент Пуассона материала трубы, E – модуль упругости материала трубы, ρ – его плотность; R – радиус кривизны срединной поверхности; h – толщина стенки трубы; μ_1 – параметр возбуждения, γ_1 – частота возбуждения; R^* – интегральный оператор вида: $R^* \varphi(t) = \int_0^t R(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau$; $R(t-\tau)$ – ядро релаксации; операторы $L_1(w)$, $L_2(w)$, $L_3(u, v, w)$ будут такими:

$$\begin{aligned} L_1(w) &= -\frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\mu}{2R^2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \\ L_2(w) &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1+\mu}{2R} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\mu}{2R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ L_3(u, v, w) &= (1-R^*) \frac{Eh}{1-\mu^2} \left\{ -\frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{R^*} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R^*} - \frac{\mu}{2R} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{R^*} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right\} - \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} (1-R^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\mu w}{R} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\mu}{2R} \frac{\partial w}{\partial \theta} (1-R^*) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} - \\ &\quad - \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} (1-R^*) \left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{\partial w}{\partial x} (1-R^*) \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\}, \end{aligned}$$

q – давление жидкости на стенку трубопровода:

$$q = -\varphi_{am}^* \rho \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + U_0^2 (1 + \mu_1 \cos \gamma_1 t)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

где $-\varphi_{am}^* \rho$ – присоединенная масса жидкости; m – число волн, образующихся по окружности, α – волновой число или постоянной распространения фазы.

Решение систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) в частных производных (1) при различных граничных условиях и при наличии сингулярных ядер наследственности представляет собой значительные математические трудности. Поэтому естественным способом решения этих систем является дискретизация по пространственным переменным и получение системы разрешающих нелинейных ИДУ относительно функций времени.

Будем искать приближенное решение системы (1) в виде:

$$\begin{aligned} u(x, \theta, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \sin m\theta, \\ v(x, \theta, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \cos m\theta, \\ w(x, \theta, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin m\theta, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u_{nm}(t)$, $v_{nm}(t)$, $w_{nm}(t)$ – неизвестные функции времени.

Подставляя (2) в систему (1) и применяя метод Бубнова – Галёркина, получим систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
& u_{kl} + (1 - R^*) \left\{ \left(k^2 \pi^2 \delta^2 \gamma^2 + \frac{1 - \mu}{2} l^2 \delta^2 \right) u_{kl} - \frac{1 - \mu}{2} k l \pi \gamma \delta^2 v_{kl} + \right. \\
& + \mu \delta^2 \gamma^2 k \pi w_{kl} + \sum_{n,j=1m,r=1}^N \sum_{r=1}^M \left(\frac{n i^2 \pi^2}{2} \gamma^3 \delta + \frac{1 - \mu}{2} \frac{n r^2}{2} \gamma \delta \right) \bar{\Delta}_{1klmnr} w_{nm} w_{lr} - \\
& \left. - \frac{1 + \mu}{2} \sum_{n,j=1m,r=1}^N \sum_{r=1}^M \frac{i m r}{2} \gamma \delta \bar{\Delta}_{2klmnr} w_{nm} w_{lr} \right\} = 0, \\
& v_{kl} + (1 - R^*) \left\{ \left[\frac{1 - \mu}{2} k^2 \pi^2 \delta^2 \gamma^2 + l^2 \delta^2 \right] v_{kl} - \frac{1 + \mu}{2} k l \pi \gamma \delta^2 u_{kl} - l \delta^2 w_{kl} - \right. \\
& - \sum_{n,j=1m,r=1}^N \sum_{r=1}^M \frac{m r^2}{2 \pi} \delta \bar{\Delta}_{3klmnr} w_{nm} w_{lr} + \frac{1 + \mu}{2} \sum_{n,j=1m,r=1}^N \sum_{r=1}^M \frac{i n r \pi}{2} \gamma^2 \delta \bar{\Delta}_{4klmnr} w_{nm} w_{lr} - \\
& \left. - \frac{1 - \mu}{2} \sum_{n,j=1m,r=1}^N \sum_{r=1}^M \frac{i^2 m \pi}{2} \gamma^2 \delta \bar{\Delta}_{5klmnr} w_{nm} w_{lr} \right\} = 0, \\
& (1 + \phi_{cl}^*) w_{kl} + (1 - R^*) \left\{ \left(\frac{1}{12} [k^2 \pi^2 \gamma^2 + l^2]^2 + \delta^2 \right) w_{kl} + \pi \mu \gamma \delta^2 k u_{kl} - \right. \\
& - l \delta^2 v_{kl} - \frac{\delta}{4 \pi} \sum_{n,j=1m,r=1}^N \sum_{r=1}^M m r \bar{\Delta}_{5klmnr} w_{nm} w_{lr} - \frac{\pi \mu \gamma^2 \delta}{4} \sum_{n,j=1m,r=1}^N \sum_{r=1}^M n i \bar{\Delta}_{6klmnr} w_{nm} w_{lr} \Big\} + \\
& + \frac{1 - \mu}{4} \gamma \delta \sum_{n,j=1m,r=1}^N \sum_{r=1}^M w_{nm} n (1 - R^*) \left[\gamma \pi i r v_{lr} - r^2 u_{lr} \right] \bar{\Delta}_{6klmnr} + \\
& + \frac{\delta}{2} \sum_{n,j=1m,r=1}^N \sum_{r=1}^M m w_{nm} (1 - R^*) \left[i r \mu \gamma u_{lr} - \frac{r^2}{\pi} v_{lr} + \frac{r}{\pi} w_{lr} \right] \bar{\Delta}_{5klmnr} + \\
& + \frac{1 - \mu}{4} \delta \sum_{n,j=1m,r=1}^N \sum_{r=1}^M m w_{nm} (1 - R^*) \left[i r \gamma u_{lr} - \gamma^2 i^2 \pi v_{lr} \right] \bar{\Delta}_{5klmnr} - \\
& - \frac{\delta}{2} \sum_{n,j=1m,r=1}^N \sum_{r=1}^M n w_{nm} (1 - R^*) \left[i r \mu \gamma^2 \pi v_{lr} - i^2 \gamma^3 \pi^2 u_{lr} - \mu \pi i \gamma^2 w_{lr} \right] \bar{\Delta}_{6klmnr} - \\
& - \frac{1 - \mu}{4} \delta \sum_{n,j=1m,r=1}^N \sum_{r=1}^M n m w_{nm} (1 - R^*) \left[r \gamma u_{lr} - i \gamma^2 \pi v_{lr} \right] \bar{\Delta}_{7klmnr} - \\
& - \sum_{n,j=1m,r=1}^N \sum_{r=1}^M m^2 w_{nm} (1 - R^*) \left[i \mu \gamma u_{lr} - \frac{r}{\pi} v_{lr} + \frac{1}{\pi} w_{lr} \right] \frac{\delta}{2} \bar{\Delta}_{8klmnr} - \\
& - \frac{1 - \mu}{4} \delta \sum_{n,j=1m,r=1}^N \sum_{r=1}^M n m w_{nm} (1 - R^*) \left[r \gamma u_{lr} - i \gamma^2 \pi v_{lr} \right] \bar{\Delta}_{7klmnr} - \\
& - \frac{\delta}{2} \sum_{n,j=1m,r=1}^N \sum_{r=1}^M n^2 w_{nm} (1 - R^*) \left[i \gamma^3 \pi^2 u_{lr} - \mu r \gamma^2 \pi v_{lr} + \mu \gamma^2 \pi w_{lr} \right] \bar{\Delta}_{8klmnr} - \\
& - \delta^2 M^{\varepsilon^2} (1 + \mu_c \cos \gamma_l t) \gamma^2 M_E^2 k^2 \pi^2 w_{kl} = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

$$u_{nm}(0) = u_{0nm}, \quad \dot{u}_{nm}(0) = \dot{u}_{0nm}, \quad v_{nm}(0) = v_{0nm}, \quad \dot{v}_{nm}(0) = \dot{v}_{0nm}, \quad w_{nm}(0) = w_{0nm}, \quad \dot{w}_{nm}(0) = \dot{w}_{0nm}.$$

Здесь $\delta = \frac{R}{h}$, $\gamma = \frac{R}{L}$, $M^* = \frac{U}{V_\infty}$, $M_E = \sqrt{\frac{E}{\rho V_\infty^2}}$, V_∞ - скорость звука, $\bar{\Delta}_{1klmnr}$, $\bar{\Delta}_{2klmnr}$, $\bar{\Delta}_{3klmnr}$, $\bar{\Delta}_{4klmnr}$, $\bar{\Delta}_{5klmnr}$, $\bar{\Delta}_{6klmnr}$, $\bar{\Delta}_{7klmnr}$, $\bar{\Delta}_{8klmnr}$ - безразмерные коэффициенты.

Решение ИДУ (3) находится численным методом, основанным на использовании квадратурных формул [2-5]. Результаты вычислений, отражаются графиками, приведенными на рис. 1, 2.

На рис. 1 сопоставлены кривые изменения во времени перемещений w срединной точки упругой ($A=0$ – кривая а) и вязкоупругой трубопроводов типа цилиндрических оболочек ($A=0,05$; $0,1$ – кривые б, в). Как видно из рисунка, учет вязкоупругих свойств материала трубопровода приводит к затуханию колебательного процесса, при этом, хотя решение упругой и вязкоупругой задач в начальный период времени мало отличаются друг от друга, с течением времени вязкоупругие свойства оказывают существенное влияние на решение. Аналогичная картина наблюдается и при исследовании изменений функций u и v .

Рис. 1. Зависимости прогиба от времени при $A=0$ (а); $A=0,05$ (б); $A=0,1$ (в); $\alpha=0,25$; $\beta=0,005$;

$$\gamma=0,2; \delta=12; N=5; M=2.$$

Влияние параметра γ_1 на колебательный процесс показано на рис.2. Из рисунка видно, что увеличение значения параметра возбуждения приводит к увеличению амплитуды и частоты колебаний.

a)

b)

c)

Рис. 2. Зависимость прогиба от времени при $\gamma_1=75$ Гц (a), $\gamma_1=150$ Гц (b), $\gamma_1=250$ Гц (c); $A=0,01$; $\alpha=0,25$; $\beta=0,005$; $\delta=10$; $N=5$; $M=2$.

Необходимо отметить, что алгоритм предлагаемого метода позволяет детально исследовать влияние геометрических нелинейностей и вязкоупругих свойств материала конструкций на колебательные процессы вязкоупругих трубопроводов, в частности, при исследовании свободных и параметрических колебаний трубопроводов на базе теории идеально-упругих оболочек.

Литература

1. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – М.: Наука. 1979. - 320 с.
2. Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Мехнат, 1987. - 269 с.
3. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикладная математика и механика. – 1987. – Т. 51. – №5. – С. 867–871.
4. Худаяров Б.А., Бандурин Н.Г. Нелинейный флаттер вязкоупругих ортотропных цилиндрических панелей // Математическое моделирование. РАН. 2005. Том 17, №10. - С. 79–86.
5. Бадалов Ф.Б., Худаяров Б.А., Абдукаримов А. Исследование влияния ядра наследственности на решение линейных и нелинейных динамических задач наследственно-деформируемых систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. Российская академия наук. – 2007. – №4. – С. 107–110.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФАКТОРОВ, ВЛИЯЮЩИХ НА УРОВЕНЬ БОКОВЫХ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ХОДОВЫЕ КОЛЕСА МОСТОВЫХ КРАНОВ

Юрин А.Н., Спицына Д.Н.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, tonik0791@mail.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, spycinamgty@mail.ru

Аннотация. Причиной малой долговечности ходовых колес мостовых кранов является износ их реборд, который происходит за счет действия боковых сил. В работе проведена оценка влияния на них различных факторов. Показано, что значения боковых сил практически не зависят от положения грузовой тележки на мосту крана. Наибольшее влияние имеют монтажные углы перекоса осей ходовых колес и их взаимные направления, а также наличие случайных отклонений подкрановых путей.

Ключевые слова: мостовой кран, боковые силы, реборды, динамическая модель, углы перекоса осей ходовых колес, отклонения подкрановых путей.

Малая долговечность ходовых колес мостовых кранов – это проблема, с которой в краностроении сталкиваются уже многие годы. Основной причиной выхода колес из строя является износ их реборд, зависящий от уровня и времени действия боковых сил. Для увеличения долговечности колес использовались различные способы: подбирались износостойкие материалы, предлагались различные варианты термообработки, оптимальный профиль реборд и др. Наряду с этим, исследовались причины возникновения боковых сил, передающихся на ходовые колеса мостовых кранов при движении их с постоянной скоростью центра масс. Под боковыми силами в данном случае подразумеваются силы, вызванные поперечным скольжением колес S_i , и боковые силы, возникающие при наезде реборд ходовых колес на головку рельса N_i (см. рис. 1).

Рис. 1 Боковые силы, действующие на ходовые колеса мостовых кранов

Исследованию боковых сил, возникающих при движении мостовых кранов, посвящено достаточно много работ. Так как точное решение этой задачи представляет значительные трудности, то для их оценки в проводившихся ранее исследованиях краны представлялись в виде различных упрощенных динамических моделей [1-3].

В данной работе приведены результаты исследований боковых сил, полученные с использованием трех динамических моделей, отличных от тех, что описаны в [1-3]. При помощи реализованных моделей решалась нелинейная задача динамики, в ходе которой были выделены ключевые факторы, влияющие на уровень и время действия

боковых сил, действующих на ходовые колеса мостовых кранов, и были предложены рекомендации по снижению их уровня.

Первая из рассмотренных моделей – одномассовая (движение крана с учетом изменяющихся во времени боковых сил описывается 8 нелинейными дифференциальными уравнениями). Согласно данной модели, вся масса крана с грузовой тележкой принимается сосредоточенной в центре масс (см. рис. 2). При помощи данной модели было оценено влияние на уровень боковых сил, как монтажных углов перекоса осей ходовых колес β_i , так и неровностей подкрановых путей.

Рис.2 Одномассовая динамическая модель (внешние силы, действующие на кран вдоль направления движения, не показаны)

Расчеты, проведенные на основе данной динамической модели, продемонстрировали, что боковые силы N_i и S_i зависят как от величин монтажных углов перекоса, так и от их взаимных направлений (см. рис.3). При этом было установлено, что наибольшие нагрузки возникают в случае разворота крана относительно подкрановых путей (вариант I). Наименьшие нагрузки возникают при симметричных перекосах осей ходовых колес относительно направления движения крана (вариант III).

Рис.3 Варианты перекоса осей ходовых колес

В качестве примера на рис. 4 показаны графики изменения во времени боковых сил S_3 и N_3 для наиболее нагруженного 3-его колеса, полученные для крана грузоподъемностью $Q=10$ т и пролетом $L=22,5$ м, движущегося по прямолинейным подкрановым путям, для неблагоприятного I ($\beta_1=\beta_2=0.001$ и $\beta_3=\beta_4=-0.001$) и благоприятного III ($\beta_1=\beta_4=0.001$ и $\beta_2=\beta_3=-0.001$) вариантов перекоса.

Рис. 4 Изменение боковых сил
 а) при $\beta_1=\beta_2=0.001$ и $\beta_3=\beta_4=-0.001$ (вариант перекося I);
 б) при $\beta_1=\beta_4=0.001$ и $\beta_2=\beta_3=-0.001$ (вариант перекося III)

Для оценки влияния неровностей подкрановых путей были проведены расчеты боковых сил, в ходе которых учитывались изменения зазоров между ребрами колес и головками рельсов в процессе движения крана, обусловленные отклонениями левой и правой ветвей рельсового пути от прямой линии (см. рис. 5).

Рис. 5 Изменение зазоров между ребрами и рельсами за счет неровностей подкрановых путей

При расчетах замеренные отклонения путей представлялись в виде совокупности кусочно-гладких функций. За счет отклонений рельсовых путей зазоры между ребрами и рельсами изменялись по законам:

$$d_{jnp}(t) = d_{jnp}(0) + \Delta_j(t); d_{jлев}(t) = d_{jлев}(0) - \Delta_j(t).$$

Проведенные исследования показали, что отсутствие учета отклонений рельсовых путей от прямолинейного закона, приводит к резкому занижению расчетных значений боковых сил. При этом для корректной оценки боковых сил необходимо располагать информацией об отклонениях каждого рельса в отдельности. Сведения об изменении размера колеи рельсового пути не являются достаточными для оптимального выполнения ремонтных работ, вызванных износом рельсов и ходовых колес кранов.

Для наглядной демонстрации влияния случайных отклонений было выполнено несколько расчетов, в которых использовались данные, о неровностях, полученные с Карачаровского механического завода (на участке пути длиной 40 м через каждый метр были замерены отклонения ветвей рельсового пути в плане относительно прямых линий). На рис. 6 для неблагоприятного варианта перекося осей $\beta_1=\beta_2=0.001$ и $\beta_3=\beta_4=-0.001$ приведены графики изменения боковых сил S_3 и N_3 для наиболее нагруженного 3-его колеса, полученные при указанных отклонениях для крана грузоподъемностью $Q=10$ т и пролетом $L=22,5$ м. Максимальное значение N_3 , полученное с учетом неровностей

подкрановых путей, превысило значение N_3 , полученное при отсутствии отклонений, $\approx$ в 2,5 раза.

Рис. 6 Изменение боковых сил при $\beta_1=\beta_2=0.001$ и $\beta_3=\beta_4=-0.001$ с учетом неровностей подкрановых путей

Вторая из рассмотренных моделей – трехмассовая. Масса крана распределяется между тремя приведенными массами. Грузовая тележка располагается посередине пролета (см. рис. 7). Движение крана описывается 12 нелинейными дифференциальными уравнениями. Также как и одномассовая динамическая модель, трехмассовая позволяет учесть монтажные углы перекоса осей ходовых колес и неровности подкрановых путей.

Рис. 7 Трехмассовая динамическая модель (внешние силы, действующие на кран вдоль направления движения, не показаны)

Цель исследования, проводившегося при помощи трехмассовой модели, заключалась в оценке погрешностей в определении значений боковых сил, которые могли быть получены наиболее простой одномассовой динамической модели.

На основе проведенных исследований было установлено (см. таблицу 1):

1. Расчеты, проведенные с помощью двух рассмотренных выше динамических моделей, для идеально прямолинейных подкрановых путей приводят к близким значениям максимальных боковых сил.
2. Расчеты, проведенные с помощью двух указанных выше моделей, при случайных отклонениях подкрановых путей также дают сопоставимые значения боковых сил.

Для анализа боковых сил, действующих на ходовые колеса мостовых кранов, допустимо использование более простой одномассовой динамической модели.

Таблица 1 – Значения боковых сил при монтажных углах перекосов осей ходовых колес $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=0.001$.

Динамические модели	Пути прямолинейны		Пути имеют случайные отклонения	
	$S_{4\max}, \text{H}$	$N_{4\max}, \text{H}$	$S_{4\max}, \text{H}$	$N_{4\max}, \text{H}$
Одномассовая	4916	-4916	12353	-17916
Трехмассовая	4986	-5016	13641	-17035

Последняя из трех рассмотренных моделей – двухмассовая (движение крана описывается 12 нелинейными дифференциальными уравнениями). При расчете боковых сил на основе данной динамической модели (см. рис. 8) также, как и ранее, учитываются монтажные углы перекоса, неровности путей, колебания концевых балок. Дополнительно рассматриваются различные положения грузовой тележки.

Рис. 8 Двухмассовая динамическая модель (внешние силы, действующие на кран вдоль направления движения, не показаны)

Так как в общем случае, каждый рельсовый путь имеет свои случайные отклонения от прямолинейного закона, всего было рассмотрено три варианта расположения тележки (посередине пролета и у каждой концевой балки). В результате проведенного анализа было установлено, что значения боковых сил S_i и N_i при различных положениях грузовой тележки получаются практически одинаковыми. Последнее происходит в следствие того, что различные упругие перемещения ходовых колес, возникающие при наезде реборд на рельсы, получаются существенно меньше перемещений центра масс крана, влияющих на значения боковых сил.

Для оценки корректности результатов расчетов, полученных на основе двухмассовой динамической модели крана, дополнительно было проведено сравнение максимальных значений боковых сил, полученных с ее помощью и с помощью трехмассовой модели. Для проведения сравнения было принято, что углы перекоса равны $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0,001$, пути прямолинейны, а тележка расположена посередине

пролета. Расчеты, выполненные с помощью двух указанных выше динамических моделей, дали сопоставимые результаты:

- для трехмассовой модели $S_{\max}=4916\text{ Н}$, $N_{\max}=4916\text{ Н}$;
- для двухмассовой модели $S_{\max}=4938\text{ Н}$, $N_{\max}=5192\text{ Н}$.

Общие выводы, полученные на основе трех динамических моделей.

1. Значения боковых сил, действующих на ходовые колеса мостовых кранов, практически не зависят от положения грузовой тележки.

2. Наибольшее влияние на величины боковых сил оказывают как значения и направления монтажных углов перекоса осей ходовых колес, так и наличие отклонений подкрановых путей от прямолинейного закона.

Проведенные исследования позволяют предложить следующие рекомендации для увеличения долговечности ходовых колес за счет снижения боковых сил. Для этого необходимо:

1. Провести замеры углов монтажных перекосов осей ходовых колес относительно их проектного положения.

2. Провести через каждый метр замеры отклонений левой и правой ветвей рельсового пути от прямолинейного проектного положения.

3. Рассчитать силы, действующие на ходовые колеса, при существующих углах монтажных перекосов осей, предполагая рельсовые пути прямолинейными.

4. Просчитать, как изменятся значения этих сил при прямолинейных путях, но при других вариантах углов перекоса осей, и выбрать приемлемый для проведения ремонта.

5. Определить боковые силы с учетом выбранных углов перекоса, но при наличии замеренных отклонений рельсовых путей от прямолинейного положения.

6. В тех местах, где при вычислениях появляются большие силы, следует провести рихтовку рельсового пути. Просчитав варианты с новыми отклонениями рельсовых путей, решить вопрос о целесообразности рихтовки. Сопоставив возможности уменьшения боковых сил за счет изменения углов перекоса осей ходовых колес и за счет рихтовки рельсовых путей, можно принять обоснованное решение о необходимости того или иного ремонта.

Литература

1. Лобов Н.А., Нагрузки мостовых кранов при контакте реборд ходовых колес с рельсами, Вестник машиностроения, 1984, №7, с.22-26.
2. Лобов Н.А., Динамика передвижения кранов по рельсовому пути, М., изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003г., 232с.
3. Липатов А.С., Исследование случайных нагрузок на реборды мостовых кранов, Автореферат диссертации канд. техн. Наук, М., 1967г., 16с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИБОРОВ МЭМС С УЧЕТОМ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ

Яковлева Т.В.¹, Крысько В.А.-мл.², Крылова Е.Ю.³

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
г. Саратов, Россия; Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск, Россия, yan-tan1987@mail.ru

²Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, Россия, vadimakrysko@gmail.com

³Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия, kat.krylova@bk.ru

Аннотация. В работе построена математическая модель нелинейной динамики пластинчато-балочной системы без учета связности полей температуры и деформации в условиях внешних поперечных и продольных воздействий. Подобная математическая модель описывает работу составных элементов микромеханических систем. Для исследования подобных конструктивно-нелинейных задач применены методы качественной теории дифференциальных уравнений, вейвлет-анализ. Решение проведено методом Бубнова–Галеркина в высших приближениях по пространственной координате и методом Рунге–Кутты 4-го порядка точности по времени.

Ключевые слова. Контактное взаимодействие, пластинчато-балочные структуры, метод Бубнова–Галеркина, метод типа Рунге–Кутты, качественный анализ нелинейной динамики, вейвлет-анализ, температурное поле.

Микросистемная техника, включающая в себя миниатюрные датчики инерциальной и внешней информации, микродвигатели и преобразователи, является наиболее интенсивно и динамично развивающимся направлением. Элементы современных микромеханических и микроэлектромеханических систем, к которым относятся микромеханические гироскопы (ММГ) и акселерометры (ММА), представляют собой многослойную структуру [1-3], которая в свою очередь состоит из пластинок, подкрепленной по центру балкой, при этом между ними имеется малый зазор, соединены они только через краевые условия. Для пластинок принята кинематическая модель Кирхгофа, а для балки – Эйлера–Бернулли.

Рис.1. Пластино-балочная система

Уравнения, описывающие данную математическую модель, в безразмерных параметрах имеют следующий вид [4]:

$$\begin{cases} -\frac{h^3 E_1}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2\nu \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} \right] - \alpha_1 (1+\nu) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-h/2}^{h/2} \theta_1 z dz + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-h/2}^{h/2} \theta_1 z dz \right] - \\ - \frac{E_1 h^3}{6(1+\nu)} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + q_1 - \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial w_1}{\partial t} + P_{1x} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + P_{1y} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - q_k = 0, \\ -\frac{h^3 E_2}{12} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} - \alpha_2 E_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_{-h/2}^{h/2} \theta_2 z dz \right) + q_2 - \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial w_2}{\partial t} + P_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + q_k = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\nabla^2(\theta_1) = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla^2(\theta_2) = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} = 0, \quad (3)$$

где $q_k = K(w_1 - w_2 - h_k)\Psi$. Контактное взаимодействие учитывается по модели Винклера. Если имеется контакт между пластинкой и балкой, то $\Psi = 1$, в противном случае $\Psi = 0$. Соотношение q_k представляет связь Винклера между обжатием и контактным давлением [5]. Появление зон сцепления маловероятно, поскольку контактное давление между слоями невелико. Условия контакта между слоями могут зависеть от координат и включать все виды несовершенного одностороннего контакта. В системе (1) w_1, w_2 – функции прогибов пластинки и балки соответственно, K – коэффициент жесткости трансверсального обжатия пластинки в зоне контакта, h_k – зазор между элементами, g – ускорение силы тяжести, $q_1(x, y, t)$ – поперечная нагрузка, действующая на пластинку, и $q_2(x, t)$ приложенная к балке, γ – удельный вес материала,

α_T - коэффициент линейного теплового расширения, $\theta_1(x, y, z)$ - приращение температуры для пластинки и $\theta_2(x, z)$ - для балки, $P_{1x}(y, t) = P_{1y}(x, t) = p_0 \sin(\omega_p t)$ - продольная нагрузка, действующая на пластину и P_2 - на балку. К системе (1) следует присоединить краевые условия 1, 2, 3 и 4 рода и начальные условия для уравнений теплопроводности. Здесь приведем уравнения только 1, 2 и 3 рода.

Граничные условия 1 рода. Задается распределение температуры

$$\begin{aligned} \text{по поверхности тела } S : (0 \leq x \leq a), (-h/2 \leq z \leq h/2), \\ \theta = \varphi(x, z, t) : (x, z) \in S \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия 2 рода. Задается распределение плотности теплового потока на поверхности тела как функция координат (x, z) и времени $q_T = \psi(x, z, t) : (x, z) \in S$. Используя закон теплопроводности Фурье,

$$\text{запишем в виде } \lambda_q \frac{\partial \theta}{\partial n} = \psi(x, z, t) : (x, z) \in S. \quad (5)$$

Если в частном случае $\psi(x, z, t) = 0$, то условие (5) переходит в условия теплоизоляции.

Граничные условия 3 рода. На поверхности тела S задается распределение плотности теплового потока, зависящего от температуры на поверхности тела и температуры среды $\lambda_q \frac{\partial \theta}{\partial n} = Z(\theta - \theta_{\varphi})$, здесь Z - коэффициент теплоотдачи. (6)

Возможна постановка граничных условий другого типа: условий сопряжения двух твердых тел, условий сопряжения с подвижной границей и т.д.

В качестве начальных условий примем распределение прогибов, скоростей прогибов и приращение температуры в начальный момент времени $t = 0$:

$$w|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \dot{w}(z, t)|_{t=0} = \varphi_2(x), \quad \theta|_{t=0} = \varphi_3 \quad (7)$$

Также краевые условия для пластинки и балки:

$$\text{шарнирное опирание по контуру } w_{\bar{n}} = M_{\bar{n}} = 0 \quad (8)$$

$$\text{зашемление } w_{\bar{n}} = w'_{\bar{x}} = 0 \quad (9)$$

Уравнения (1)-(9) представляют математическую модель контактного взаимодействия пластинчато-балочной структуры в случае отсутствия связанности полей температуры и деформаций. При этом следует отдельно определять температурное поле в пластине и балке, то есть решать уравнения (2) и (3) с соответствующими краевыми условиями (4)-(6) и после этого решать уравнения (1) с краевыми и начальными условиями (7)-(9), то есть решать в квазистатической постановке. Для решения данной задачи предлагается использовать комбинированный подход, когда уравнения (2), (3) с краевыми условиями (4)-(6) решаются методом конечных разностей второго и четвертого порядка точности. При этом была исследована сходимость в зависимости от количества разбиений по оси OX и OZ (40×11 , 80×11 , 160×11). Установлено, что при 80 и 160 точках разбиения результаты совпадают между собой. Также необходимо учитывать условия согласования в угловых точках, на ребрах и гранях с помощью подхода, разработанного в работе [6]. После того, как определены температурные поля в пластинке – трехмерное и в балке – двумерное, вычисляются с помощью формул Ньютона-Котеса температурные моменты, которые подставляются в уравнения (1), (7)-(9). Далее уравнения в частных производных с помощью метода Бубнова-Галеркина сводятся к задаче Коши. С этой целью аппроксимирующие функции выбираем таким образом, чтобы они были линейно независимы, непрерывны вместе со своими частными производными до четвертого порядка включительно, удовлетворяли граничным условиям – шарнирное опирание или защемление. Далее задача Коши решается одним из методов Рунге-Кутты четвертого или шестого порядка точности. Также исследована сходимость этих методов. Достоверность подтверждена сравнительным анализом результатов, полученных разными численными методами: методом конечных разностей с аппроксимацией $O(h2)$, $O(h4)$ и методом Бубнова-Галеркина в высших приближениях по пространственной координате, методами типа Рунге-Кутты 4-го, 6-го, 8-го порядка точности по временной координате.

Численный эксперимент. В качестве примеров рассмотрим три задачи:

1. Математическая модель контактного взаимодействия пластины и балки, при этом балка находится в температурном поле и на пластинку действует поперечная распределенная знакопеременная нагрузка.
2. Математическая модель контактного взаимодействия пластины и балки при воздействии продольной нагрузки на пластинку.
3. Математическая модель контактного взаимодействия пластины и балки при воздействии продольной нагрузки на балку.

Во всех трех случаях пластинка и балка выполнены из упругого изотропного материала (коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$), между ними имеется малый зазор h_k . Балка расположена по центру пластинки, $\varepsilon = 0.1$. Изучим характер поведения такой двухслойной системы в зависимости от внешнего воздействия.

Задача 1. На пластинку действует внешняя распределенная знакопеременная нагрузка $q_1(x, y, t) = q_0 \sin(\omega_p t)$. Частота внешнего воздействия $\omega_p = 5$ выбрана близкой к частоте собственных колебаний пластинки. Балка помещена в температурное поле интенсивности $T = 50^\circ\text{C}$. Зазор $h_k = 0.1$. Пластинка и балка первоначально

вступают в контактное взаимодействие при интенсивности внешней нагрузки $q_0 = 0.3$. При этом характер их колебаний меняется со временем. На интервале времени $t \in [0; 40]$ происходят хаотические колебания на утроении периода, с увеличением времени колебания балки затухают вследствие учета вязкости внешней среды ($\varepsilon = 0.1$), пластинка совершает гармонические колебания на частоте возбуждения. Дальнейшее увеличение нагрузки, начиная с интенсивности $q_0 = 0.4$, приводит систему в хаотическое состояние в присутствии перемежаемости (табл. 1). В таблице 1 приведены следующие графики: а - совместные колебания пластинки и балки на разных отрезках времени; b1, b2 спектры мощности Фурье пластинки и балки соответственно; c1, c2 - 2D-вейвлет спектры Морле пластинки и балки соответственно. Вейвлет спектры показывают частотные характеристики колебаний в каждый момент времени, в то время как спектры мощности Фурье дают лишь суммарные сведения о частотах на всем интервале времени. Графики вейвлет спектров и сигналов свидетельствуют о том, что пластина и балка контактируют на интервале $t \in [0; 160]$ и их колебания носят хаотический характер, далее по времени в результате отсутствия их взаимодействия, колебания приобретают гармонические колебания.

Таблица 1. Контактное взаимодействие пластинки и балки с учетом температуры

Задача 2. Изучим контактное взаимодействие пластины и балки при воздействии продольной нагрузки на пластинку $P_x(y, t) = p_0 \sin(\omega_p t)$, где $\omega_p = 5$ - близкая к частоте собственных колебаний пластины. Зададим значение прогиба пластины в начальный момент времени $w_1 = 0.001$. Зазор $h_k = 0.1$. При действии продольной нагрузки амплитудой $p_0 = 0.1$, пластина совершает гармонические колебания на частоте $\omega_p = 5$. При этом балка находится в состоянии покоя. Далее при интенсивности

продольной нагрузки, начиная с $p_0 = 0.15$, пластина и балка вступают в контактное взаимодействие (табл. 2 а). При этом характер колебаний пластины и балки становится хаотическим с утроением периода $\omega_p/3 = 1.66$, $2\omega_p/3 = 3.33$, $\omega_p = 5$ (табл. 2б). Фазовый портрет пластины представляет собой странный аттрактор, а фазовый портрет балки – сплошное пятно. На базе вейвлет- преобразования Морле изучена хаотическая фазовая синхронизация колебаний [7]. Обнаружено, что в отдельные моменты времени происходит хаотическая фазовая синхронизация колебаний в окрестности частоты $2\omega_p/3 = 3.33$. На графике разности фаз темным цветом выделены частоты, на которых синхронизируются колебания (табл. 2с). Для пластины доминирующей частотой колебаний является $\omega_p = 5$ (табл. 2б).

Таблица. 2. Параметрические колебания пластины и балки при амплитуде $p_0 = 0.15$

Дальнейшее увеличение амплитуды нагрузки до величины $p_0 = 0.65$ приводит к перестройке системы, сигналы колебаний вкладываются друг в друга. Последующее увеличение амплитуды нагрузки приводит к полной синхронизации системы в диапазоне частот $\omega \in [4.5; 7]$ и на частоте $\omega_p/3 = 1.66$.

Задача 3. На балку действует продольная нагрузка $P_2(t) = 0.7 * \sin(\omega_p * t)$. Зазор $h_k = 0.01$. В таблице 3 приведены совместные колебания пластины и балки в центре (табл. 3а), вейвлет-спектры Морле (табл. 3 б1,б2), спектры мощности Фурье (табл. 3 с1, с2) для пластины и балки. Колебания носят хаотический характер на бифуркации Хопфа и утроении периода. Происходит контактное взаимодействие пластины и балки, фазовые портреты представляют собой странные аттракторы.

Таблица 3. Нелинейные колебания пластины и балки при продольной нагрузке $p_0 = 0.7$ на балку.

Выводы. Получена математическая модель контактного взаимодействия двухслойной структуры, состоящей из пластины, подкрепленной по центру ребром жесткости в виде балки, находящейся в стационарном температурном поле и под действием продольного нагружения. При решении контактной задачи для пластинки и балки выявлено, что в результате контактного взаимодействия их колебания сразу приобретают хаотический характер на утроенном периоде частоты внешнего возбуждения. Установлен диапазон частот, на которых наблюдается явление хаотической фазовой синхронизации колебаний пластинки и балки. При этом с увеличением интенсивности внешней нагрузки на двухслойную структуру увеличиваются зоны фазовой синхронизации хаотических колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №16-31-00092 и гранта Президента Российской Федерации МК-5609.2016.8.

Литература

1. Krysko A.V., Kutepov I.E., Papkova I.V., Saltykova O.A., Pavlov S.P. / The Study of the Size-Dependent Geometrically Nonlinear Bernoulli-Euler Beam in the Temperature Field Impacted by the Transversal Load. // International Journal of Applied Engineering Research. 2016. Volume 11. pp. 10398-10401
2. Мицкевич С.А., Папкова И.В., Захарова А.А., Крысько А.В. / Нелинейная динамика сферических гидроакустических приборов, применяемых в нефтегазовой промышленности. // Известия ТПУ. 2016. Т. 327. № 11. с. 17-23
3. Papkova I. V., Krylova E. Yu., Erofeev N. P., Zakharov V. M., Krysko V. A. / Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise. // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2016. Volume 57. Issue 4. pp 714–719
4. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Papkova I.V., Krysko A.V. / Deterministic chaos in one dimensional continuous systems. Singapore: World Scientific, 2016. 562 p.
5. Кантор Б.Я. / Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения. Киев: Наукова думка. 1990. 100 с.
6. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Krysko A.V. / Thermo-dynamics of plates and shells. Springer: Berlin, London, 2007. 777 p.
7. Awrejcewicz J., Krysko V.A. Jr., Yakovleva T.V., Krysko V.A. / Alternating chaos versus synchronized vibrations of interacting plate with beams // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2017. V. 88. P. 21–30.

АЛГОРИТМ ВЫБОРА ПОХОДКИ ДЛЯ ЭКЗОСКЕЛЕТА НИЖНИХ КОНЕЧНОСТЕЙ В РЕЖИМЕ ДВИЖЕНИЯ ПО ЛЕСТНИЦЕ

Яцун Сергей¹, Савин Сергей¹, Яцун Андрей¹

¹Юго-западный государственный университет, Курск, Россия
savinswsu@mail.ru

Аннотация. В статье предложен алгоритм выбора (генерации) походок для экзоскелета нижних конечностей, в процессе движения по лестнице. Алгоритм основан на использовании так называемой «карты высот», и включает использует две процедуры. Первая это частичное разбиение опорной поверхности на выпуклые области свободные от препятствий. Вторая - оптимизация положения точек контакта робота с опорной поверхностью (шагов робота), записанная как задача квадратичного программирования. Приведены результаты моделирования, демонстрирующие их работу этих методов. Показано, что алгоритм работает для различных лестниц, в том числе для лестниц с препятствиями.

Ключевые слова: экзоскелет нижних конечностей, перемещение по лестнице, квадратичное программирование, численные методы оптимизации, подъем по лестницам.

1. Введение

На протяжении последних десятилетий задача разработки роботов-экзоскелетов становится все более интересной, благодаря широкому диапазону возможных практических применений данной технологии. В частности, экзоскелеты нижних конечностей могут быть использованы для восстановления мобильности пациентов, могут позволить рабочим и солдатам выполнять задачи, связанные с повышенными физическими нагрузками [1, 2]. В настоящее время уже разработаны ряд успешно функционирующих прототипов экзоскелетов нижних конечностей [1, 3-6].

В то же время имеют место ряд задач связанных с функционированием экзоскелетов нижних конечностей, которые остаются не решенными или решенными не полностью. Одна из них это подъем по лестницам [7]. Проблемы, связанные с подъемом по лестницам, включают в себя сохранение вертикального равновесия механизма, повышенные требования к конструкции робота и его приводам (по сравнению с перемещением по горизонтальной поверхности) а также проблему генерации походок робота [8-9]. Здесь рассматриваем последнее. Алгоритм генерации походок должен находить осуществимую последовательность шагов, используя информацию о положении экзоскелета и об окружающей обстановке. Задача обработки данных с датчиков для построения карты окружающей среды и определения положения робота тесно связана с генерацией походок [10]. Эта задача обычно решается до того, как алгоритм генерации походок начинает работать, и её решение часто реализуется методами SLAM (от англ. simultaneous localization and mapping) или методом построения так называемой карты высот [10-11]. В данной работе предполагаем, что роботу доступна карта высот. Рассматриваемый здесь алгоритм будет этой картой для генерации последовательности шагов.

Существует несколько различных подходов к генерации походки. В [12] рассматривается алгоритм генерации походок, основанный на численной оптимизации, причем одной из его особенностей является использованием целочисленного программирования, а также алгоритма IRIS для разложения опорной поверхности на выпуклые области свободные от препятствий (подробнее алгоритм IRIS описан [13]). В статье [14] алгоритм генерации походок реализован на основе методов квадратичного

программирования (КП). В [15] алгоритм генерации походок для двуногого робота Honda был разработан на основе алгоритма поиска A^* . Данный алгоритм не обеспечивает оптимальность выбранного пути, но имеет относительно низкую вычислительную сложность. Отметим, что значительный прогресс численных методов решения задач квадратичного программирования, достигнутый за последние десятилетия, позволяет непосредственно применять КП в контурах систем автоматического управления, решая задачу КП на каждой итерации работы системы управления. Такие примеры можно найти в [16, 17]. В данной статье будем использовать задачу квадратичного программирования как часть алгоритма генерации походок. Предлагаемый здесь алгоритм также требует частичного разложения опорной поверхности (или карты высот) на выпуклые области. Алгоритм разложения описывается в последующих главах.

Отметим, что данная статья ограничивается рассмотрением метода генерации последовательности шагов робота. Используя данную информацию можно вычислить траекторию движения центра масс механизма, используя подходы, описанные в [17-18]. В обеих работах информация о текущем размере и положении опорного полигона (выпуклой оболочки точек на стопах робота, покоящихся на опорной поверхности) была использована для построения траектории точки ZMP (от англ. zero-moment point). В работе [17] генерация траектории центра масс производилась путем решения дифференциального уравнения, описывающего связь между точкой ZMP и положением центра масс, а в работе [18] – путем решения задачи оптимального управления положением центра масс с учетом желаемой траектории точки ZMP. Альтернативные подходы к построению траектории центра масс экзоскелета даны в работах [19, 20].

Методы управления экзоскелетом нижних конечностей описаны в [21-25], в частности в статьях [23-25] обсуждаются методы, обеспечивающие перемещение центра масс экзоскелета по желаемой траектории. В работе [23] предложено использовать многоканальный пропорционально-дифференциальный регулятор, расстраиваемый при помощи Irt последовательностей. В статьях [26-27] рассмотрены вопросы оптимизации и адаптации времени выполнения движения экзоскелетом. В публикациях [28-29] предложены способы решения обратной задачи динамики для шагающих роботов с учетом динамически накладываемых и снимаемых с системы связей.

2. Описание экзоскелета

В данной работе будем рассматривать задачу генерации шагов для экзоскелета нижних конечностей. В качестве прототипа экзоскелета выберем устройство ExoLite, разработанное в ЮЗГУ [30]. Данный робот состоит из корпуса и двух ног, разделённых на четыре части (поясничное звено, бедро, голень и стопа), и имеет 10 активных шарниров: по одному в каждом поясничном звене, бедре, и колене, и по два в каждой стопе [31-34]. Все шарниры робота оснащены датчиками углов поворота, а стопы дополнительно оснащены датчиками давления и инерциальными измерительными модулями. Общий вид экзоскелета показана на рис. 1.

Рис.1. Общий вид экзоскелета ExoLite; 1 – корпус, 2 – бедро, 3 – голень, 4 – стопа

Поверхность контакта стоп экзоскелета имеет форму невыпуклого полигона. Рассматриваемый в данной работе алгоритм реализует выбор нового положения стопы (участка, куда шагает робот), такого, что вся стопа располагается в области, свободной от препятствий. Будем рассматривать только выпуклые области без препятствий. Тогда можем сформулировать следующее условие, накладываемое на положение стопы: выпуклая оболочка F_c точек на стопе экзоскелета должна целиком находиться внутри области без препятствий на опорной поверхности. Это гарантирует, что стопа робота не пересечет ни одно из препятствий. Так как выпуклая оболочка F_c может быть задана как полигон, достаточно убедиться, что все вершины этого полигона лежат в одной и той же области, свободной от препятствий.

В последующих разделах примем допущение, что роботу доступна карта высот опорной поверхности, являющаяся функцией $z_{map} = z_{map}(x, y)$, которая возвращает высоту z для заданной точки на опорной поверхности с координатами x и y .

3. Алгоритм частичного разбиения опорной поверхности на выпуклые многогранники свободные от препятствий

В этом разделе рассматриваем алгоритм частичного разбиения опорной поверхности на выпуклые области без препятствий. Под областью без препятствий понимаем область, в которой любые две точки отличаются по высоте не больше, чем на величину ε - порог изменения высоты. Мы называем этот алгоритм «частичным» разбиением, чтобы указать на то, что процедура позволяет найти лишь несколько выпуклых областей без препятствий, но эти области не покрывают всю опорную поверхность.

Первый этап алгоритма – генерация набора начальных точек $\Sigma = \{\sigma_i\}$, где $\sigma_i = [x_i \ y_i]$ - начальная точка с декартовыми координатами x_i и y_i . Для генерации набора Σ можем использовать решетки, наборы случайных чисел или Irt последовательности.

Второй этап – построение аппроксимации выпуклой области без препятствий, к которой принадлежит начальная точка σ_i . Сделаем это следующим образом. Во первых,

строим последовательность из n лучей, с началом в точке σ_i . Первый луч можно выбрать произвольно, а остальные строим, поворачивая предыдущий на $2\pi/n$ радиан. Эти лучи можно параметризовать, введя переменную ξ , которая определяет расстояние из начальной точки σ_i до точки на луче. Для случая, когда первый луч выбран лежащим вдоль положительной оси x на поверхности x_0 , каждая точка на каждом луче описывается следующей формулой:

$$\chi_{i,j}(\xi) = \sigma_i + [\xi \cos(2j\pi/n) \quad \xi \sin(2j\pi/n)], \quad (1)$$

где $\chi_{i,j}$ - точка на j -ом луче и ξ - переменная, определяющая расстояние от $\chi_{i,j}$ до начальной точки σ_i . Тогда для каждого луча можно найти точку $v_{i,j}$ (где i - порядковый номер начальной точки, а j - порядковый номер луча, $j = \overline{1, n}$), ближайшую к точке σ_i из всех точек на луче, лежащий на препятствии. Это можно формулировать следующим образом:

$$\begin{cases} v_{i,j} = \chi_{i,j}(\xi_{\min}) \\ \xi_{\min} = \min\{\xi: |z_{map}(\chi_{i,j}(\xi)) - z_{map}(\sigma_i)| > \varepsilon/2\} \end{cases} \quad (2)$$

где $\xi_{\min}$ - минимальное значение ξ такое, что точка $\chi_{i,j}$ лежит на препятствии. Для того, чтобы установить, лежит или не лежит $\chi_{i,j}(\xi)$ на препятствии используем карту высот z_{map} . Если разница по высоте между точкой $\chi_{i,j}$ и начальной точкой σ_i больше, чем $\varepsilon/2$, то полагаем, что точка лежит на препятствии.

Таким образом, можем задать аппроксимацию выпуклой области без препятствий как выпуклую оболочку множества точек $v_{i,j}$ (для заданного i и всех j). Обозначим эту область как Ω_i :

$$\Omega_i = \text{Conv}\{v_{i,j}\} \quad j = \overline{1, n} \quad (3)$$

Так как область Ω_i является выпуклой оболочкой конечного множества точек, то она представляет собой выпуклый многоугольник, и как всякий выпуклый многоугольник его можно представить системой неравенств:

$$\Omega_i = \{\mathbf{r}: \mathbf{A}_i \mathbf{r} \leq \mathbf{b}_i\} \quad (4)$$

где $\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{b}_i$ - матрица и вектор, соответствующие представлению линейными неравенствами Ω_i , а $\mathbf{r}$ - радиус-вектор точки, принадлежащей многоугольнику Ω_i . Подробное описание алгоритмов определения $\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{b}_i$ из набора вершин $v_{i,j}$ можно найти в [35].

Третий этап алгоритма – улучшение аппроксимации области без препятствий. Так как Ω_i был задан, как выпуклая оболочка множества точек $v_{i,j}$, то некоторые из этих

точек могут находиться внутри нее. На этом этапе добавляем новые неравенства в систему $\mathbf{A}_i \mathbf{r} \leq \mathbf{b}_i$ и строим новый выпуклый многоугольник Ω_i^* , так что каждая точка $v_{i,j}$ находится вне Ω_i^* или на его границе.

Предполагаем, что точка, определенная ее радиус-вектором $\mathbf{v}_{in}$, лежит внутри Ω_i . Тогда можем добавить следующее линейное неравенство в систему $\mathbf{A}_i \mathbf{r} \leq \mathbf{b}_i$, так что эта точка будет лежать на ребре нового многоугольника Ω_i^* :

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{new}^T \mathbf{r} \leq b_{new} \\ \mathbf{a}_{new} = (\mathbf{v}_{in} - \boldsymbol{\sigma}_i) / \|\mathbf{v}_{in} - \boldsymbol{\sigma}_i\| \\ b_{new} = \|\mathbf{v}_{in}\| + \mathbf{a}_{new}^T \boldsymbol{\sigma}_i \end{cases} \quad (5)$$

Тогда новый многоугольник Ω_i^* определяется следующим образом:

$$\Omega_i^* = \left\{ \mathbf{r} : \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{a}_{new}^T \end{bmatrix} \mathbf{r} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{b}_i \\ b_{new} \end{bmatrix} \right\} \quad (6)$$

Таким образом, мы итерационно добавляем неравенства к описанию многоугольника Ω_i^* , до тех пор пока все точки $v_{i,j}$ не будут лежать или вне Ω_i^* или располагаться на его границе.

4. Алгоритм генерации походок, основанный на квадратичном программировании

В этом разделе обсуждаем алгоритм генерации походок, основанный на квадратичном программировании. Обозначаем желаемое смещение ноги при совершении одного шага как $\mathbf{r}_d = [x_d \ y_d]^T$. Желаемый шаг задает пользователь, а алгоритм находит осуществимый шаг, ближайший к $\mathbf{r}_d$. Это можно сформулировать как задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \mathbf{r}_s^T \mathbf{r}_s \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{A}_i^* (\mathbf{r}_d + \mathbf{r}_s + \mathbf{r}_{e,j}) \leq \mathbf{b}_i^* \end{aligned} \quad (7)$$

где $\mathbf{r}_s = [x_s \ y_s]^T$ - сдвиг от желаемого положения стопы $\mathbf{r}_d$, $\mathbf{r}_{e,j}$ - относительное положение j -ой вершины многоугольника F_c , соответствующее точке на стопе экзоскелета, и $\mathbf{A}_i^*$ и $\mathbf{b}_i^*$ - матрица и вектор в представлении области Ω_i^* линейными неравенствами. Данная задача решается для всех областей Ω_i^* , найденных с помощью выше сказанной процедуры разбиения, после чего выбирается решение с наименьшим значением целевой функции.

Алгоритм можно модифицировать заменой целевой функции квадратичной формой от $\mathbf{r}_s$. Тогда, используя подходящую квадратичную форму, можем выбрать предпочитаемое направление сдвига $\mathbf{r}_s$.

5. Результаты моделирования

В этом разделе представлены результаты, полученные в ходе моделирования работы алгоритма. Рассмотрим две разные лестницы с углами наклона $\pi/6$ и $\pi/12$. Обе лестницы имеют высоту подъема, равную 0.12 м, а желаемая длина шага была принята равной 0.32 м. Сгенерированные последовательности шагов показаны на рис. 2.

Отметим, что для более крутой лестницы (рис. 2, а) полученная последовательность шагов такова, что робот наступает на каждую ступень лестницы. В процессе движения по второй лестнице робот наступает на каждую ступень три раза, что связано с большей длиной ступеней. Удвоив желаемую длину шага для первой лестницы можем получить последовательность шагов, при которой робот будет шагать через одну ступень.

Рис.2. Экзоскелет, поднимающийся по лестницам с углами наклона: а) $\pi/6$, б) $\pi/12$

Предложенный алгоритм можно применить и в случае наличия дополнительных препятствий на лестнице. Рис. 3 показывает последовательность шагов, генерированную для лестницы с углом наклона $\pi/8$ при наличии 3 препятствия на лестнице.

Рис.3. Экзоскелет, поднимающийся на лестницы с препятствиями

Заметим, что третий этап алгоритма частичного разбиения свободной от препятствий опорной поверхности на выпуклые многоугольники необходим для решения этой задачи. Лестницы без препятствий могут быть естественным образом разбиты на выпуклые четырехугольники. При работе с такими лестницами достаточно использовать лишь первые два этапа алгоритма. С другой стороны, добавления третьего этапа в алгоритм разбиения позволяет учесть местоположение стопы опорной ноги, которая являет собой препятствие при планировании движения второй стопы. Для этого достаточно добавить к найденным ранее областям Ω_i^* новые неравенства, такие что все точки неподвижной стопы лежат вне выпуклых свободных от препятствий многоугольников Ω_i^* .

6. Заключение

В работе представлен алгоритм генерации походки для экзоскелета нижних конечностей, выполняющего подъем по лестнице. Алгоритм основан на использовании карты высот опорной поверхности. Алгоритм можно разделить на два независимых друг от друга метода: частичное разбиение опорной поверхности на выпуклые свободные от препятствий области и поиск оптимального расположения стопы в этих областях путем решения задачи квадратичного программирования. Было показано, что алгоритм генерации походки работает для различных лестниц, в том числе в случае, когда на лестнице имеются препятствия.

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 14-39-00008.

Литература

1. Ferrati, F., Bortoletto, R., Menegatti, E. and Pagello, E., 2013, November. Socio-economic impact of medical lower-limb exoskeletons. In *Advanced Robotics and its Social Impacts (ARSO)*, 2013 IEEE Workshop on (pp. 19-26). IEEE.
2. Яцун С.Ф., Кинематический анализ экзоскелета в процессе подъема груза Яцун С.Ф., Савин С.И., Яцун А.С., Климов Г.В. / *Известия Юго-Западного государственного университета. Серия Техника и технологии*, 2015. №3 (16), 24-30 с.
3. Barbareschi, G., Richards, R., Thornton, M., Carlson, T. and Holloway, C., 2015, August. Statically vs dynamically balanced gait: Analysis of a robotic exoskeleton compared with a human. In *Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC)*, 2015 37th Annual International Conference of the IEEE (pp. 6728-6731). IEEE.
4. Kazerooni, H., Racine, J.L., Huang, L. and Steger, R., 2005, April. On the control of the berkeley lower extremity exoskeleton (BLEEX). In *Robotics and automation*, 2005. ICRA 2005. Proceedings of the 2005 IEEE international conference on (pp. 4353-4360). IEEE.
5. Яцун С.Ф., Савин С.И., Емельянова О.В., Яцун А.С., Турлапов Р.Н. *Экзоскелеты: анализ конструкций, принципы создания, основы моделирования: моногр. - Курск: Университетская книга*, 2015. 179 с.
6. Яцун С.Ф., Павловский В.Е., Лушников Б.В., Емельянова О.В., Яцун А.С., Савин С.И., Ворочаев А.В. *Экзоскелеты: анализ конструкций, классификации, принципы создания, основы моделирования: моногр. - Курск: Университетская книга*, 2014. 149 с.
7. Fu, C. and Chen, K., 2008. Gait synthesis and sensory control of stair climbing for a humanoid robot. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 55(5), pp.2111-2120.
8. Lum, H.K., Zribi, M. and Soh, Y.C., 1999. Planning and control of a biped robot. *International Journal of Engineering Science*, 37(10), pp.1319-1349.
9. Figliolini, G. and Ceccarelli, M., 2001. Climbing stairs with EP-WAR2 biped robot. In *Robotics and Automation*, 2001. Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on (Vol. 4, pp. 4116-4121). IEEE.

10. Fallon, M., Kuindersma, S., Karumanchi, S., Antone, M., Schneider, T., Dai, H., D'Arpino, C.P., Deits, R., DiCicco, M., Fourie, D. and Koolen, T., 2015. An Architecture for Online Affordance-based Perception and Whole-body Planning. *Journal of Field Robotics*, 32(2), pp.229-254.
11. Thrun, S. and Leonard, J.J., 2008. Simultaneous localization and mapping. In *Springer handbook of robotics* (pp. 871-889). Springer Berlin Heidelberg.
12. Kuindersma, S., Deits, R., Fallon, M., Valenzuela, A., Dai, H., Permenter, F., Koolen, T., Marion, P. and Tedrake, R., 2016. Optimization-based locomotion planning, estimation, and control design for the atlas humanoid robot. *Autonomous Robots*, 40(3), pp.429-455.
13. Deits, R. and Tedrake, R., 2015. Computing large convex regions of obstacle-free space through semidefinite programming. In *Algorithmic Foundations of Robotics XI* (pp. 109-124). Springer International Publishing.
14. Feng, S., Whitman, E., Xinjilefu, X. and Atkeson, C.G., 2015. Optimization-based Full Body Control for the DARPA Robotics Challenge. *Journal of Field Robotics*, 32(2), pp.293-312.
15. Chestnutt, J., Lau, M., Cheung, G., Kuffner, J., Hodgins, J. and Kanade, T., 2005, April. Footstep planning for the Honda ASIMO humanoid. In *Robotics and Automation, 2005. ICRA 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on* (pp. 629-634). IEEE.
16. Kuindersma, S., Permenter, F. and Tedrake, R., 2014, May. An efficiently solvable quadratic program for stabilizing dynamic locomotion. In *Robotics and Automation (ICRA), 2014 IEEE International Conference on* (pp. 2589-2594). IEEE.
17. Пановко Г.Я., Савин С.И., Яцун С.Ф., Яцун А.С. Моделирование процесса вставания экзоскелета из положения сидя / Проблемы машиностроения и надежности машин, №3, с 19-24, 2016.
18. Wang, Y. and Boyd, S., 2010. Fast model predictive control using online optimization. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 18(2), pp.267-278.
19. Jatsun, S., Savin, S., Yatsun, A. and Malchikov, A., 2016. Study of Controlled Motion of Exoskeleton Moving from Sitting to Standing Position. In *Advances in Robot Design and Intelligent Control* (pp. 165-172). Springer International Publishing.
20. Яцун С.Ф. Изучение управляемого движения экзоскелета во фронтальной плоскости в режиме восстановления равновесия / Яцун С.Ф., Савин С.И., Яцун А.С., Мальчиков А.В. / Экстремальная робототехника 2016. 236-245 с.
21. Лавровский Э.К., Проблемы построения системы управления ходьбой экзоскелетона нижних конечностей с помощью гидроцилиндров / Лавровский Э.К., Письменная Е.В., Комаров П.А. // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2015. №7, 96-114 с.
22. Болотник Н.Н., Механика экзоскелетных систем и управление экзоскелетом на основе информации о биоэлектрических потенциалах / Болотник Н.Н., Градецкий В.Г., Ермолов И.Л., Князьков М.М., Семёнов Е.А., Крюкова А.А., Суханов А.Н. // Актуальные проблемы механики. 50 лет институту проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН Отв. редактор Ф.Л. Черноусько, Москва, Наука, 2015, 50-62 с.
23. Яцун С.Ф., Известия ЮЗГУ Синтез параметров регулятора экзоскелета, с использованием Iрт последовательностей / Яцун С.Ф., Савин С.И., Яцун А.С., Яковлев И.А. / Известия Юго-Западного государственного университета. Серия Техника и технологии, 2015. №4 (17), 24-31 с.
24. Яцун С.Ф., Адаптивная система управления экзоскелета, осуществляющего вертикализацию человека / Яцун С.Ф., Савин С.И., Яцун А.С., Турлапов Р.Н. / Известия Юго-Западного государственного университета. Серия Техника и технологии, 2015. №3 (16), 30-37 с.
25. Пановко Г.Я. Особенности управления движением многозвенной электромеханической системы с учетом свойств электропривода / Г.Я. Пановко, С.Ф.

- Яцун, С.И. Савин, А.С. Яцун // Машиностроение и инженерное образование, 2 (47), 2016, с. 2-10
26. Jatsun, S., Savin, S., Yatsun, A. and Turlapov, R., 2015, December. Adaptive control system for exoskeleton performing sit-to-stand motion. In *Mechatronics and its Applications (ISMA)*, 2015 10th International Symposium on (pp. 1-6). IEEE.
 27. Jatsun, S., Savin, S. and Yatsun, A., 2016, June. Improvement of energy consumption for a lower limb exoskeleton through verticalization time optimization. In *Control and Automation (MED)*, 2016 24th Mediterranean Conference on (pp. 322-326). IEEE.
 28. Mistry, M., Buchli, J. and Schaal, S., 2010, May. Inverse dynamics control of floating base systems using orthogonal decomposition. In *Robotics and Automation (ICRA)*, 2010 IEEE International Conference on (pp. 3406-3412). IEEE.
 29. Nakanishi, J., Mistry, M. and Schaal, S., 2007, April. Inverse dynamics control with floating base and constraints. In *Robotics and Automation*, 2007 IEEE International Conference on (pp. 1942-1947). IEEE.
 30. Jatsun, S., Savin, S. and Yatsun, A., 2016. Parameter optimization for exoskeleton control system using sobol sequences. In *ROMANSY 21-Robot Design, Dynamics and Control* (pp. 361-368). Springer International Publishing.
 31. Jatsun, S., Savin, S., Lushnikov, B. and Yatsun, A., 2016. Algorithm for motion control of an exoskeleton during verticalization. In *ITM Web of Conferences* (Vol. 6, p. 1-6). EDP Sciences.
 32. Jatsun, S., Savin, S., Yatsun, A. and Postolnyi, A., 2017. Control system parameter optimization for lower limb exoskeleton with integrated elastic elements. In *Advances in Cooperative Robotics* (pp. 797-805).
 33. Jatsun, S., Savin, S., Yatsun, A. and Gaponov, I., 2017. Study on a Two-Staged Control of a Lower-Limb Exoskeleton Performing Standing-Up Motion from a Chair. In *Robot Intelligence Technology and Applications 4* (pp. 113-122). Springer International Publishing.
 34. Jatsun, S., Savin, S. and Yatsun, A., 2016, October. Study of controlled motion of an exoskeleton performing obstacle avoidance during a single support walking phase. In *System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*, 2016 20th International Conference on (pp. 113-118). IEEE.
 35. Bremner, D., Fukuda, K. and Marzetta, A., 1998. Primal—dual methods for vertex and facet enumeration. *Discrete & Computational Geometry*, 20(3), pp.333-357.

СФЕРИЧЕСКИЕ РОБОТЫ: МЕХАНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

Борисов А.В.¹, Мамаев И.С.^{1,2}, Килин А.А.¹, Караваев Ю.Л.²

¹ФГБОУ ВО "Удмуртский государственный университет", г. Ижевск, РФ,
borisov@rcd.ru

²ФГБОУ ВО "Ижевский государственный технический университет имени М.Т.
Калашникова", г. Ижевск, РФ, karavaev_yury@istu.ru

Аннотация. В данной статье приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований мобильных сферических роботов. Подобные роботы реализуют новые принципы передвижения, что требует развития соответствующих теоретических моделей для описания их движения и управления. Наибольший интерес представляют сферические роботы, реализованные в следующих конструкциях: с роторным двигателем, с внутренней омниколесной платформой, и с комбинированным двигателем. Управление всеми указанными типами роботов построено на базе динамических моделей в неголономной постановке. Разработаны опытные образцы и проведены серии экспериментов, подтверждающие адекватность предложенных моделей.

Ключевые слова: сферический робот, динамическая модель, управление.

В настоящее время существует большое количество работ, посвященных исследованию и разработке мобильных роботов в форме сферы. Наиболее полные и подробные обзоры конструкций и принципов приведения в движение подобных роботов можно найти в работах [1–4]. К популярным способам реализации движения сферических роботов относятся изменение положения центра масс [4–10] и изменение внутреннего гиросtatического момента [11–13]. Изменение положения центра масс сферического робота реализуется с помощью внутренних слайдеров, маятников, колесных платформ. Несмотря на большое количество моделей сферических роботов и разнообразие их технических реализаций, вопрос об оптимальности управления и эффективности совершения маневров остается открытым.

Экспериментальные исследования динамики сферороботов с различными внутренними двигателями (маятник, роторы, омниколесная платформа) показали, что наиболее перспективным механизмом для управляемого движения может стать механизм, комбинирующий указанные выше принципы приведения в движение.

В данной статье рассмотрены четыре различных конструкции сферических роботов, работы по исследованию которых проводились в лаборатории Нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения в Удмуртском государственном университете. Анализ разработанных динамических моделей движения позволил разработать алгоритмы управления для каждого сферического робота, которые впоследствии были верифицированы на практике на специально изготовленных натурных образцах.

1. Сферический робот с роторным двигателем

Конструкция сферического робота представляет собой полую сферическую оболочку, внутри которой в экваториальной плоскости установлены три ротора со взаимно перпендикулярными осями вращения. Трехмерная модель и фото натурального образца приведены на рис. 1. Каждый ротор приводится во вращение двигателем постоянного тока с редуктором. Конструкция рассматриваемой системы удовлетворяет ряду ограничений:

– центр масс всей системы сфера + роторы находится в геометрическом центре

сферы;

- все роторы одинаковы, осесимметричны и оси вращения совпадают с их осями симметрии, то есть их вращение не меняет распределение масс системы;
- оси вращения роторов некомпланарны, а в качестве управляющих воздействий выступают их угловые скорости.

Рис.1. Конструкция сферического робота с роторным двигателем

Подробный вывод уравнений движения сферического робота данной конструкции можно найти в работах [11] (для случая качения без проскальзывания (неголономная модель)) и [12] при наличии сил трения. Уравнения движения записаны в виде уравнений Феррерса в квазискоростях с неопределенными множителями. Кроме того, в данных работах выполнена оценка устойчивости и управляемости сфероробота с тремя роторами, получена аналитическая зависимость управляющих воздействий (угловых скоростей или кинетических моментов роторов) для реализации движения вдоль траектории, являющейся функцией времени.

Несмотря на полученные результаты теоретического анализа, а также успешные эксперименты с натурным образцом, следует указать ряд технических проблем, которые в настоящее время могут являться существенным препятствием для создания сферических роботов с основным двигателем в виде нескольких некомпланарных роторов:

- необходимость точной балансировки сферического робота, а также определения его тензора инерции;
- сложность определения коэффициентов трения, так как в общем случае, робот совершает качение, но при этом он может вращаться относительно вертикальной оси (верчение), и, кроме того, возможно возникновение проскальзывания;
- для достижения быстрого и хорошо управляемого движения сферического робота требуется, чтобы момент инерции каждого ротора составлял значительную часть общего момента инерции сфероробота, что в случае трех роторов оказывается технически реализовать достаточно сложно.

2. Сферический робот с внутренней омниколесной платформой

Особенностью конструкции сферического робота с внутренней омниколесной платформой является повышенная маневренность, т.е. возможность движения сферического робота в любом направлении без разворота. Указанного преимущества удалось добиться, разместив внутри полой сферической оболочки тележку со специальными роликонесущими колесами. В зарубежной литературе (или переводной) часто встречается термин омниколесо или колесо механум.

Движение экипажей (мобильных роботов) с роликонесущими колесами на плоскости хорошо изучено. Результаты исследований подробно изложены в работах [14-

17]. Однако, для обеспечения постоянного контакта роликов подобного колеса с внутренней поверхностью сферической оболочки профиль ролика изменен по сравнению с колесом для передвижения по плоскости. Трехмерная модель сферического робота с внутренней омниколесной платформой, а также фото натурального образца приведены на рис. 2.

Рис.2. Конструкция сферического робота с внутренней омниколесной платформой

Для управления подобными сферическими роботами используются кинематические уравнения движения [18-20]. Однако, на практике алгоритмы управления, построенные на кинематических моделях без технически сложных обратных связей, мало пригодны из-за «болтанки» сфероробота в процессе движения.

Динамическая модель сферического робота с внутренней омниколесной платформой как системы состоящей из многих тел является сложной. Особенностью алгоритма управления сферическим роботом в рамках динамической модели является то, что после завершения качения вдоль заданной траектории и отключения управления сфероробот может продолжать свободное движение, которое в общем случае является хаотическим [4]. Исключить данный недостаток позволил алгоритм управления сферороботом при помощи гейтов (базовых маневров). Данный способ заключается в вычислении управляющих воздействий, при которых сфероробот в начальный и конечный момент времени заведомо движется по какому-либо стационарному решению (в частном случае - стоит). Результаты апробации алгоритма управления при помощи гейтов приведены в работе [10].

3. Сферический робот с маятниковым двигателем

Принцип приведения в движение сферического робота с помощью внутренних маятниковых механизмов имеет самое большое количество различных вариантов конструкций и реализаций на практике [2,3,6,21]. В указанных работах можно найти обширную библиографию и обзор существующих конструкций, описание их особенностей и недостатков.

В лаборатории Нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения изготовлена модель сферического робота с маятниковым механизмом с тремя степенями подвижности. Фото натурального образца и трехмерная модель внутреннего механизма приведена на рис. 3.

Рис.3. Конструкция сферического робота с маятниковым движителем

Теоретические исследования проводились для более сложной модели сферического робота с расположенным внутри маятником Лагранжа. Динамическая модель движения сферического робота данной конструкции представлена в работах [22], где также проводится анализ устойчивости и управляемости сферического робота. На основании полученных результатов разработаны базовые маневры (гейты) для реализации движения вдоль заданной траектории. Гейт реализует конечный отрезок траектории движения робота за одно колебание маятника и задается углом его отклонения от вертикали и углом между осью Ox и направлением колебания маятника.

Существенным недостатком такого управления является сложность переключения на другой режим движения в произвольный момент времени (например, если скорость достигла заданного значения), так как маятник может не оказаться в нижнем положении. Кроме того, маневренность сферического робота данной конструкции может обеспечиваться в случае использования малогабаритных и высокомоментных электроприводов, что технически не всегда возможно.

На практике алгоритм управления с использованием гейтов для сфероробота с маятником Лагранжа апробирован для модели сферического робота с комбинированным движителем.

4. Сферический робот с комбинированным движителем

Конструкция сферического робота с комбинированным движителем приведена на рис. 4. Движение сфероробота происходит за счет перемещения внутренней двухколесной тележки, перемещающейся в экваториальной плоскости. Поворот сфероробота осуществляется за счет создания инерционной движущей силы (момента) при обеспечении ускоренного движения маятника, расположенного на тележке.

Рис.4. Конструкция сферического робота комбинированного типа

Результаты теоретических и экспериментальных исследований сферического робота с комбинированным движителем приведены в работе [23]. Основной причиной расхождения результатов теоретического моделирования и экспериментов является необходимость учета сил трения действующих на сферический робот. Данный вывод актуален также для сферических роботов всех рассмотренных конструкций, так как сила трения, возникающая при движении сферического тела по поверхности, в общем случае, имеет сложный характер. В процессе движения подобных тел по горизонтальной поверхности, как показано в экспериментальных работах [24-28], возможны переходы между режимами качения без проскальзывания и верчения к качению с верчением или проскальзыванию. Важным фактором, оказывающим существенное, но не всегда предсказуемое, влияние на характер движения оказывает соотношение массо-геометрических параметров системы. Так для более простых, чем сферический робот с внутренними приводными механизмами, систем обнаружены эффекты разворота, переворота, отрыва от поверхности и т.п. Подробно с исследованиями подобных систем можно ознакомиться в работах [29-36] и их библиографии.

Литература

1. Chase R., Pandya A. A review of active mechanical driving principles of spherical robots. *Robotics*, 2012, vol.1, no.1, pp.3–23.
2. Crossley V.A. A literature review on the design of spherical rolling robots. Pittsburgh, Pa., 2006, 6pp.
3. Ylikorpi T., Suomela J. Ball-shaped robots. Climbing and walking robots: Towards new applications, H.Zhang (Ed.). Vienna: InTech, 2007. P.235–256.
4. Karavaev Yu.L., Kilin A.A., The dynamics and control of a spherical robot with an internal omniwheel platform. *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol.20, no.2, pp.134–152.
5. Kilin A. A., Pivovarova E. N., Ivanova T. B., Spherical Robot of Combined Type: Dynamics and Control, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 6, pp. 716-728.
6. Svinin M., Bai Y., Yamamoto M. Dynamic model and motion planning for a pendulum-actuated spherical rolling robot. *Proc. of the 2015 IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pp.656–661.
7. Zhan Q. Motion planning of a spherical mobile robot. *Motion and operation planning of robotic systems*. G.Carbone, F.Gomez-Bravo (Eds.). Cham: Springer, 2015, P.361–381.
8. Gajbhiye S., Banavar R.N. Geometric modeling and local controllability of a spherical mobile robot actuated by an internal pendulum. In *t. J. Robust Nonlinear Control*, 2015.
9. Borisov A.V., Mamaev I.S. Two non-holonomic integrable problems tracing back to Chaplygin. *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol.17, no.2, pp.191–198.
10. Караваев Ю. Л., Килин А. А., Неголономная динамика и управление сферороботом с внутренней омниколесной платформой: теория и эксперименты. *Труды Математического института имени В. А. Стеклова*, 2016, т. 295, с. 174-183.
11. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. How to control Chaplygin's sphere using rotors. *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol.17, nos.3–4, pp.258–272.
12. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. How to control the Chaplygin ball using rotors: 2. *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol.18, nos.1–2, pp.144–158.
13. Morinaga A., Svinin M., Yamamoto M. A motion planning strategy for a spherical rolling robot driven by two internal rotors. *IEEE Trans. on Robotics*, 2014, vol.30, no.4, pp. 993–1002.
14. Караваев Ю. Л., Трефилов С. А., Дискретный алгоритм управления по отклонению мобильным роботом с омниколесами. *Нелинейная динамика*, 2013, т. 9, № 1, с. 91-100.
15. Килин А. А., Бобыкин А. Д., Управление тележкой с омниколесами на плоскости. *Нелинейная динамика*, 2014, т. 10, № 4, с. 473-481.
16. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S., On the Hadamard – Hamel Problem and the Dynamics of Wheeled Vehicles. *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 6, pp. 752-766.

17. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S., Dynamics and Control of an Omniwheel Vehicle. Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 2, pp. 153-172.
18. Килин А. А., Караваев Ю. Л., Клековкин А. В., Кинематическая модель управления высокоманевренным мобильным сферороботом с внутренней омниколесной платформой. Нелинейная динамика. 2014, т. 10, № 1, с. 113-126.
19. Килин А. А., Караваев Ю. Л., Кинематическая модель управления сферороботом с неуравновешенной омниколесной платформой. Нелинейная динамика, 2014, т. 10, № 4, с. 497-511.
20. Chen W.-H., Chen Ch.-P., Yu W.-Sh., Lin Ch.-H., Lin P.-Ch. Design and implementation of an omnidirectional spherical robot Omnicron. IEEE/ASME Internat. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics (Kachsiung, Taiwan, 2012), pp. 719-724.
21. Tomi J. Ylikorpi, Aarne J. Halme, Pekka J. Forsman, Dynamic modeling and obstacle-crossing capability of flexible pendulum-driven ball-shaped robots. Robotics and Autonomous Systems, Volume 87, 2017, Pages 269-280.
22. Иванова Т.Б., Пивоварова Е.Н. Динамика и управление сферическим роботом с осесимметричным маятниковым приводом. Нелинейная динамика, 2013, т.9, No3, с.507–520.
23. Килин А. А., Караваев Ю. Л., Экспериментальные исследования динамики сферического робота комбинированного типа. Нелинейная динамика, 2015, т. 11, № 4, с. 721–734.
24. Jalali, Mir Abbas and Sarebangholi, Milad S. and Alam, Mohammad-Reza, Terminal retrograde turn of rolling rings. Phys. Rev. E, 92, 032913, 2015, doi: 10.1103/PhysRevE.92.032913.
25. Cross, R., The Rise and Fall of Spinning Tops. Amer. J. Phys., 2013, vol.81, no.4, pp. 280–289.
26. Borisov, A.V., Mamaev, I. S., and Karavaev, Yu. L., On the loss of contact of the Euler disk. Nonlinear Dynam., 2015, vol. 79, no. 4, pp. 2287–2294.
27. Ma, D., Liu, C., Zhao, Z., Zhang, H., Rolling friction and energy dissipation in a spinning disc. Proc. R. Soc. A470: 20140191, 2014, <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2014.0191>.
28. Иванова Т. Б., Ердякова Н. Н., Караваев Ю. Л., Экспериментальное исследование динамики тормозной колодки. Доклады Академии наук, 2016, т. 471, № 4, с. 421-424
29. Kilin, A. A., The Dynamics of Chaplygin Ball: The Qualitative and Computer Analysis. Regul. Chaotic Dyn., 2001, vol.6, no. 3, pp. 291–306.
30. Borisov, A. V. and Mamaev, I. S., Strange Attractors in Rattleback Dynamics. Physics–Uspekhi, 2003, vol.46, no.4, pp. 393–403.
31. Borisov, A. V., Kazakov, A. O., and Sataev, I. R., The Reversal and Chaotic Attractor in the Nonholonomic Model of Chaplygin's Top. Regul. Chaotic Dyn., 2014, vol.19, no.6, pp. 718–733.
32. Ivanov, A. P., On Final Motions Of a Chaplygin Ball on a Rough Plane. Regul. Chaotic Dyn., 2016, vol.21, nos.7–8, pp. 804–810.
33. Ivanov, A. P., On Detachment Conditions in the Problem on the Motion of a Rigid Body on a Rough Plane. Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol.13, no. 4, pp. 355–368.
34. Ehlers, K. M. and Koiller, J., Rubber Rolling: Geometry and Dynamics of 2 – 3 – 5 Distributions. In Proc. IUTAM Symposium 2006 on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence (Moscow, Russia, 25–30 August 2006), pp. 469–480.
35. Borisov A. V., Kazakov A. O., Pivovarova E. N., Regular and Chaotic Dynamics in the Rubber Model of a Chaplygin Top. Regul. Chaotic Dyn., 2016, vol. 21, no. 7-8, pp. 885-901
36. Mamaev, I. S., Ivanova, T. B., The Dynamics of a Rigid Body with a Sharp Edge in Contact with an Inclined Surface in the Presence of Dry Friction. Regul. Chaotic Dyn., 2014, vol. 19, no. 1, pp. 116-139.