Применение метода переменных состояния к анализу стационарных и динамических режимов нелинейных электромагнитных устройств

В.А. Мартынов, А.Н. Голубев, А.В. Алейников

¹ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
г. Иваново, Российская Федерация
E-mail: zav@toe.ispu.ru, alenikgo@yandex.ru

Авторское резюме

Состояние вопрос: Методы расчета нелинейных динамических систем имеют ряд недостатков, заключающихся в принятии ряда допущений, влияющих на точность построения математической модели: процессы преобразования энергии определяются главным образом основной гармонической магнитной индукции; насыщение магнитной цепи не учитывается или учитывается приближенно; основное поле и поля рассеяния рассматриваются независимо; математические модели ограничены конкретными конструкциями электромагнитных устройств. В связи с этим важной задачей является разработка численных методов моделирования динамических режимов нелинейных систем на основе кусочно-линейной аппроксимации, повышающих адекватность результатов моделирования.

Материалы и методы: Использованы метод переменных состояния, совместимый со многими методами численного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений, а также схемы замещения электромагнитных устройств, учитывающие нелинейность магнитной цепи, построенные с использованием кусочно-линейной аппроксимации.

Результаты: На основе метода переменных состояния разработан подход к расчету нелинейных динамических схем, реализующий численный анализ магнитного поля на каждом шаге интегрирования и позволяющий рассчитывать электромагнитное поле в активной зоне устройств без использования понятий индуктивных параметров и пространственных и временных гармонических.

Выводы: Разработанный подход к математическому моделированию нелинейных систем позволяет анализировать переходные, установившиеся и аварийные режимы работы различных цепей, содержащих нелинейные электромагнитные устройства. Достоверность результатов моделирования, получаемых на основе разработанного метода, подтверждается их совпадением с результатами натурных экспериментов на различных электро-механических устройствах. Полученные результаты могут быть использованы для уточнения характеристик электромагнитных устройств различного исполнения при их проектировании.

Ключевые слова: метод переменных состояния, расчетная схема замещения, электромагнитное устройство, кусочно-линейная аппроксимация, метод Ньютона-Рафсона.

Application of state variable method to the analysis of steady-state and dynamic conditions of nonlinear electromagnetic devices

V.A. Martynov, A.N. Golubev, A.V. Aleynikov

Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russian Federation
E-mail: zav@toe.ispu.ru, alenikgo@yandex.ru

Abstract

Background: Methods of nonlinear dynamic systems calculation have several drawbacks which consist in adopting a number of assumptions influencing the accuracy of mathematical models construction: energy conversion processes are mainly determined by the basic harmonic of magnetic induction; the saturation of the magnetic circuit is not considered at all or is taken into account approximately, the main field and stray fields are considered independently; the mathematical models are limited by specific structures of electromagnetic devices. Therefore, an important task is to develop numerical methods for modeling the dynamics of nonlinear systems based on piecewise linear approximation, which increases the value of simulation results.

Materials and methods: The method of state variables compatible with a lot of methods of nonlinear differential equations numerical integration and the electromagnetic device equivalent circuits accounting for magnetic circuit nonlinearity and constructed on the basis of piecewise linear approximation.

Results: An approach to nonlinear dynamic circuit calculation has been developed based on the state variables method. This approach implements magnetic field numerical analysis at each integration step and allows calculating the electromagnetic field in the device core without using the concepts of inductive parameters and spatial and temporal harmonics.

Conclusion: The developed approach to mathematical modeling of nonlinear systems allows us to analyze the transitional, set and emergency operation modes of various chains containing nonlinear electromagnetic devices. The reliability of the simulation results obtained by this method has been confirmed by their agreement with the results of field experiments on various electro-mechanical devices. The results can be used to clarify the characteristics of electromagnetic devices of various types at the design stage.

Key words: state variables method, calculated equivalent circuit, electromagnetic device, piecewise-linear approximation, Newton-Raphson method.

DOI: 10.17588/2072-2672.2015.4.027-032

В настоящее время при анализе нелинейных динамических схем широко применяется метод переменных состояния, который совместим со многими методами численного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений и может считаться универсальным методом.

Как известно [1], в методе переменных состояния инвариантную относительно времени расчетную схему представляют двумя уравнениями:

$$\dot{[x]} = [A_p][x] + [B_p][e]; \quad (1)$$

$$[y] = [C_p][x] + [D_p][e] + \left([D_{1p}]\dot{[e]} + \dots \right), \quad (2)$$

где $[e]$ – матрица-столбец независимых источников ЭДС; $[y]$ – матрица-столбец искомых напряжений и (или) токов ветвей; $[x]$ – матрица-столбец, содержащая независимые вспомогательные переменные (переменные состояния); $[A_p]$, $[B_p]$, $[C_p]$, $[D_p]$, $[D_{1p}]$ – матрицы соответствующего размера, элементы которых определяются параметрами пассивных элементов расчетной схемы.

В случае линейных расчетных схем, содержащих в качестве пассивных элементов резисторы, идеальные катушки с взаимными индуктивностями и конденсаторы (RLCM-схемы), элементы матриц $[A_p]$, $[B_p]$, $[C_p]$, $[D_p]$, $[D_{1p}]$ являются постоянными и определяются параметрами пассивных линейных элементов. В нелинейных схемах элементы этих матриц являются переменными и их необходимо определять на каждом шаге численного интегрирования системы уравнений (1).

Как показано в [1], формирование матриц $[A_p]$, $[B_p]$, $[C_p]$, $[D_p]$, $[D_{1p}]$ целесообразно производить используя топологию схемы. Дерево графа расчетной схемы замещения электрической цепи выбирается таким образом, чтобы оно удовлетворяло следующим условиям:

- включены все идеальные источники ЭДС (источники напряжения);
- включено максимально возможное количество конденсаторов (если они есть);
- включено минимально возможное количество катушек индуктивностей.

В зависимости от вида расчетной схемы, часть индуктивных катушек может войти в дерево графа, а часть будет относиться к связям. Обозначим индексом « l » все, что относится к

дереву графа, а индексом « s » все, что относится к дополняющему подграфу (связям). С учетом принятой нумерации ветвей матрицы-столбцы напряжений и токов всех ветвей (элементов) расчетной электрической схемы замещения можно представить соответственно из семи векторов:

$$[i] = [i_{EI} \ i_{CI} \ i_{RI} \ i_{LI} \ i_{LS} \ i_{RS} \ i_{CS}]^T, \quad (3)$$

где индексы E, C, R, L относятся соответственно к идеальным источникам ЭДС (источникам напряжения), конденсаторам, резисторам и идеальным индуктивным катушкам; при этом векторы напряжений и токов ветвей с индексом « l » соответствуют ветвям дерева графа, а векторы напряжений и токов ветвей с индексом « s » – связям графа расчетной схемы.

Уравнения для главных сечений и главных контуров электрической расчетной схемы запишутся следующим образом [1]:

$$[D][i] = \begin{bmatrix} 1_{EI} & 0 & 0 & 0 & Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ 0 & 1_{CI} & 0 & 0 & Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ 0 & 0 & 1_{RI} & 0 & Q_{31} & Q_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{LI} & Q_{41} & 0 & 0 \end{bmatrix} [i] = 0, \quad (4)$$

$$[B][u] = \begin{bmatrix} -Q_{11}^T & -Q_{21}^T & -Q_{31}^T & -Q_{41}^T & 1_{LS} & 0 & 0 \\ -Q_{12}^T & -Q_{22}^T & -Q_{32}^T & 0 & 0 & 1_{RS} & 0 \\ -Q_{13}^T & -Q_{23}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{CS} \end{bmatrix} [u] = 0,$$

где 1_{EI} означает единичную матрицу порядка, равного числу идеальных источников ЭДС в дереве, такой же порядок имеют и другие единичные матрицы; элементы подматриц Q равны 1, -1 или 0 в зависимости от графа схемы.

Ветви, содержащие линейные резисторы, индуктивные катушки и конденсаторы, описываются следующими соотношениями:

• для резисторов

$$[u_{RI}] = [R_I][i_{RI}] \text{ или } [i_{RI}] = [G_I][u_{RI}];$$

$$[i_{RS}] = [G_S][u_{RS}] \text{ или } [u_{RS}] = [R_S][i_{RS}]; \quad (5)$$

• для конденсаторов

$$\begin{bmatrix} i_{CI} \\ i_{CS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_I & 0 \\ 0 & C_S \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{CI} \\ u_{CS} \end{bmatrix} \text{ или}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{CI} \\ u_{CS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_I & 0 \\ 0 & C_S \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i_{CI} \\ i_{CS} \end{bmatrix}; \quad (6)$$

• для индуктивных катушек (с учетом взаимноиндуктивных связей)

$$\begin{bmatrix} u_{LI} \\ u_{LS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{II} & L_{IS} \\ L_{SI} & L_{SS} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{LI} \\ i_{LS} \end{bmatrix} \text{ или}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{LI} \\ i_{LS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{II} & L_{IS} \\ L_{SI} & L_{SS} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_{LI} \\ u_{LS} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Если в качестве переменных состояния $[x]$ в (1) принять

$$[x] = \begin{bmatrix} u_{CI} \\ i_{LS} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

то с учетом соотношений (4)–(7) получение элементов матриц $[A_p]$, $[B_p]$, $[C_p]$, $[D_p]$, $[D_{ip}]$ не представляет труда по известным алгоритмам [1].

При наличии в исследуемой цепи электромагнитных устройств (ЭМУ) расчетная электрическая схема будет содержать как линейные, так и нелинейные элементы. Возможность получения нормальной формы уравнений для нелинейных цепей в этом случае зависит от вида характеристик нелинейных элементов. Как показано в [1, 2], при монотонной зависимости потокоцеплений ветвей ЭМУ $[\Psi_B]$ от токов $[i_B]$ уравнения переменных состояния в нормальной форме можно получить всегда, при этом в качестве этих переменных могут быть взяты как потокоцепления, так и токи ветвей.

Если напряжения ветвей ЭМУ, обусловленные ЭДС само- и взаимной индукции $[u_E]$, на каждом шаге численного интегрирования уравнений (1) можно было бы выразить через производные токов этих ветвей:

$$[u_E] = [L_B] \frac{d[i_B]}{dt}, \quad (9)$$

где элементы матрицы $[L_B]$ определяются токами ветвей ЭМУ $[i_B]$, то формирование уравнений переменных состояния в соответствии с (7) ничем не отличалось бы от формальных алгоритмов для линейных RLCM-схем.

Рассмотрим, как это можно сделать на основе анализа магнитной цепи ЭМУ. Магнитная цепь ЭМУ при любых токах и напряжениях ее ветвей может быть представлена аналоговой схемой замещения с сосредоточенными параметрами, которая будет содержать нелинейные и линейные магнитные проводимости и источники МДС.

В качестве примера на рис. 1 изображена схема замещения магнитной цепи синхронной машины с постоянными магнитами, на рис. 2 – магнитная цепь трехфазного трехстержневого трансформатора, а на рис. 3 – схема замещения магнитной цепи этого трансформатора. На рис. 2 не показаны цепи магнитных потоков рассеяния, так как они практически не влияют на распределение магнитных потоков в стальном сердечнике.

Рис. 1. Схема замещения магнитной цепи синхронной машины с постоянными магнитами

Рис. 2. Магнитная цепь трехфазного трехстержневого трансформатора

Рис. 3. Схема замещения магнитной цепи трехфазного трехстержневого трансформатора

Представление магнитного поля ЭМУ для любого момента времени схемой замещения в виде дискретных линейных и нелинейных проводимостей и источников МДС позволяет от локальных значений векторов напряженности и индукции магнитного поля перейти к интегральным скалярным значениям потока и магнитного напряжения участков магнитной цепи. Это дает возможность применить к анализу поля и получению уравнений связи между мгновенными токами и потокоцеплениями ветвей методы теории линейных и нелинейных схем.

Представим каждую k -ю ветвь схемы замещения магнитной цепи ЭМУ в виде обобщенной ветви, образованной последовательным соединением нелинейного элемента и источника МДС F_k (рис. 4,а), при этом Φ_k , U_{mk} – поток и падение магнитного напряжения на k -м элементе: $U_k = \varphi_a - \varphi_b$ – магнитное напряжение на обобщенной ветви; φ_a , φ_b – магнитные потенциалы узлов обобщенной ветви.

Как показано в [2, 3], вебер-амперные характеристики каждого нелинейного элемента магнитной цепи $\Phi_k(U_{mk})$ (рис. 4,б) можно рас-

считать заранее методами теории поля. При кусочно-линейной аппроксимации зависимости $\Phi_k(U_{mk})$ справедливо соотношение

$$\Phi_k = \Lambda_k U_{mk} + J_k, \quad (10)$$

где Λ_k – дифференциальная проводимость k -й ветви; J_k – управляемый напряжением U_{mk} источник магнитного потока.

Рис. 4. Обобщенная ветвь схемы замещения магнитной цепи и вебер-амперная характеристика ее нелинейного элемента

Пронумеруем слева направо все отрезки аппроксимированной k -й кривой $\Phi_k(U_{mk})$. Если через σ_k обозначить один из отрезков характеристики, то величины Λ_k и J_k в (10) будут определяться номером отрезка σ_k , который, в свою очередь, зависит от значений Φ_k или U_{mk} (рис. 4,б). Для линейных ветвей зависимость $\Phi_k(U_{mk})$ представляет собой прямую линию, поэтому величина Λ_k является постоянной, а $J_k = 0$.

Так как $U_{mk} = U_k + F_k$, то уравнение (10) можно записать как

$$\Phi_k = \Lambda_k U_k + \Lambda_k F_k + J_k. \quad (11)$$

Последнему уравнению соответствует схема замещения k -й ветви, приведенная на рис. 4,в.

Одним из достоинств кусочно-линейной аппроксимации является то, что если номера отрезков σ_k всех нелинейных ветвей магнитной цепи ЭМУ будут известны, то при изменении значений Φ_k или U_{mk} в пределах отрезка σ_k магнитную цепь ЭМУ можно считать линейной.

Естественно, что значения σ_k, Λ_k и J_k каждой ветви будут зависеть от токов ветвей ЭМУ $[i_B]$ и должны определяться на каждом шаге численного интегрирования уравнений (1) на основе анализа магнитной цепи.

Обозначим через n число ветвей схемы замещения магнитной цепи ЭМУ и введем следующие обозначения:

• $[\Phi]$ – матрица-столбец магнитных потоков всех ветвей:

$$[\Phi] = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_k \ \dots \ \Phi_n]^T;$$

• $[U_M]$ – матрица-столбец падений магнитного напряжения на элементах ветвей:

$$[U_M] = [U_{M1} \ U_{M2} \ \dots \ U_{Mk} \ \dots \ U_{Mn}]^T;$$

• $[U]$ – матрица-столбец магнитных напряжений на обобщенных ветвях:

$$[U] = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_k \ \dots \ U_n]^T;$$

• $[F]$ – матрица-столбец источников МДС всех ветвей:

$$[F] = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_k \ \dots \ F_n]^T.$$

С учетом принятых обозначений уравнение (8) можно записать для всех ветвей в матричной форме:

$$[\Phi] = [\Lambda][U] + [\Lambda][F] + [J], \quad (12)$$

где $[\Lambda]$ – диагональная матрица дифференциальных проводимостей ветвей:

$$[\Lambda] = \text{diag}[\Lambda_1 \ \Lambda_2 \ \dots \ \Lambda_k \ \dots \ \Lambda_n];$$

$[J]$ – матрица-столбец управляемых напряжением источников магнитного потока:

$$[J] = [J_1 \ J_2 \ \dots \ J_k \ \dots \ J_n]^T.$$

Как показано в [2, 4, 5], величины МДС ветвей схемы замещения магнитной цепи ЭМУ $[F]$ могут быть выражены через значения токов ветвей ЭМУ $[i_B]$ с помощью сингулярной матрицы преобразования $[C]$:

$$[F] = [C][i_B]. \quad (13)$$

Матрица $[C]$ имеет число столбцов, равное числу ветвей электрической цепи, и число строк, равное числу ветвей n схемы замещения магнитной цепи ЭМУ. Элементом этой матрицы, расположенном в k -й строке и j -м столбце, является число w_k , равное количеству витков с током j -й ветви электрической цепи i_{Bj} , охватывающих k -ю ветвь схемы замещения магнитной цепи. При этом если число витков с током i_{Bj} создают в k -й ветви МДС, совпадающие с выбранным положительным направлением магнитного потока, то w_k берется со знаком «плюс». В противном случае число w_k берется со знаком «минус». Так, для схемы замещения магнитной цепи трансфор-

матора, приведенной на рис. 3, матрицы $[\Phi]$, $[C]$ и $[i_B]$ будут иметь следующую структуру:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \\ \Phi_C \\ \Phi_N \end{bmatrix};$$

$$[C] = \begin{bmatrix} w_A & 0 & 0 & -w_a & 0 & 0 \\ 0 & w_B & 0 & 0 & -w_b & 0 \\ 0 & 0 & w_C & 0 & 0 & -w_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[i_B] = [i_A \ i_B \ i_C \ i_a \ i_b \ i_c]^T.$$

С учетом (13) уравнение (12) можно записать в виде

$$[\Phi] = [\Lambda][U] + [\Lambda][C][i_B] + [J]. \quad (14)$$

Потокоцепления ветвей ЭМУ определяются выражением

$$[\Psi_B] = [C]^T [\Phi] + [L_\sigma][i_B], \quad (15)$$

где элементами матрицы $[L_\sigma]$ являются линейные само- и взаимноиндуктивности рассеяния ветвей ЭМУ, не входящие в схему замещения магнитной цепи.

С учетом (12)–(14) выражение (15) можно записать в виде

$$[\Psi_B] = [C]^T [\Lambda][U] + [C]^T [\Lambda][C][i_B] + [C]^T [J] + [L_\sigma][i_B] = [L_M][i_B] + [C]^T ([\Lambda][U] + [J]), \quad (16)$$

$$\text{где } [L_M] = [C]^T [\Lambda][C] + [L_\sigma]. \quad (17)$$

Напряжения ветвей ЭМУ, обусловленные ЭДС само- и взаимноиндукции как главного поля, так и полей рассеяния, могут быть выражены через производные потокоцеплений ветвей [3, 6]:

$$[u_E] = \frac{d[\Psi_B]}{dt}. \quad (18)$$

Как отмечалось выше, элементы матриц $[\Lambda]$ и $[J]$, соответствующие k -й нелинейной ветви, определяются номером отрезка σ_k аппроксимированной характеристики $\Phi_k(U_{mk})$. Для всех m нелинейных ветвей схемы замещения будут иметь комбинацию отрезков. Обозначим через $[\sigma]$ одну из таких комбинаций:

$$[\sigma] = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \dots, \sigma_m\}, \quad (19)$$

т.е. $[\sigma]$ – такой набор отрезков, когда σ_k ($k = 1, \dots, m$) берется для k -й нелинейной ветви.

Если комбинация отрезков $[\sigma]$ задана, то можно считать известными все элементы матриц $[\Lambda]$ и $[J]$. При этом, в соответствии с (16)–(18),

$$[u_E] = [L_M] \frac{d[i_B]}{dt} + [C]^T [\Lambda] \frac{d[U]}{dt}. \quad (20)$$

Токи ветвей ЭМУ $[i_B]$ на каждом шаге численного интегрирования уравнений (1) все-

гда могут быть определены через переменные состояния $[x]$ уравнения (8). Выразим магнитные напряжения $[U]$ на обобщенных ветвях схемы замещения магнитной цепи ЭМУ через токи $[i_B]$ электрической цепи. Для этого составим уравнения по первому закону Кирхгофа для схемы замещения магнитной цепи:

$$[A][\Phi] = 0, \quad (21)$$

где $[A]$ – редуцированная матрица инцидентий [1].

Ненулевые значения скалярных магнитных потенциалов узлов схемы замещения магнитной цепи машины сведем в матрицу-столбец $[\varphi]$.

Напряжения ветвей $[U]$ связаны с потенциалами узлов $[\varphi]$ соотношением [1]

$$[U] = [A]^T [\varphi]. \quad (22)$$

Подставив в (21) выражения (14) и (22), получим

$$[A][\Lambda][A]^T [\varphi] + [A][\Lambda][C][i_B] + [A][J] = 0. \quad (23)$$

Введем обозначения:

$$[Y(\sigma)] = [A][\Lambda][A]^T, \quad (24)$$

$$[I(\sigma)] = -[A][\Lambda][C][i_B] + [J].$$

Тогда нелинейное уравнение относительно неизвестных магнитных потенциалов узлов схемы замещения магнитной цепи ЭМУ $[\varphi]$ примет вид

$$[Y(\sigma)][\varphi] = [I(\sigma)]. \quad (25)$$

Необходимо отметить, что при заданных номерах отрезков $[\sigma]$, аппроксимированных кусочно-линейными функциями вебер-амперных характеристик ветвей магнитной цепи, матрицы $[Y(\sigma)]$ и $[I(\sigma)]$ легко могут быть получены непосредственно без построения матриц $[A]$, $[\Lambda]$ и $[J]$ по алгоритмам, приведенным в [1].

Представим уравнение (25) в другой форме:

$$[f(\varphi)] = [Y(\sigma)][\varphi] - [I(\sigma)] = 0 \quad (26)$$

и решим его кусочно-линейным методом Ньютона-Рафсона.

Зададимся начальной комбинацией отрезков $[\sigma(0)]$, аппроксимированных вебер-амперных характеристик ветвей схемы замещения магнитной цепи ЭМУ. Этой комбинации $[\sigma(0)]$ будут соответствовать некоторые начальные значения элементов матриц $[Y(\sigma(0))]$, $[I(\sigma(0))]$ и магнитных потенциалов

$[\varphi^{(0)}]$. Первая итерация по методу Ньютона-Рафсона запишется в виде

$$[\varphi^{(1)}] = [\varphi^{(0)}] - [Y(\sigma^{(0)})]^{-1} [Y(\sigma^{(0)})][\varphi^{(0)}] + [Y(\sigma^{(0)})]^{-1} [I(\sigma^{(0)})]. \quad (27)$$

Первые два члена в правой части равенства (27) взаимно уничтожаются. В результате получаем простую формулу:

$$[\varphi^{(1)}] = [Y(\sigma^{(0)})]^{-1} [I(\sigma^{(0)})].$$

Определив магнитные потенциалы узлов $[\varphi^{(1)}]$ после первой итерации, можно по (22) найти магнитные напряжения $[U^{(1)}]$ ветвей и определить соответствующую им комбинацию отрезков $[\sigma^{(1)}]$. Повторно применяя формулу Ньютона-Рафсона, получаем

$$[\varphi^{(2)}] = [Y(\sigma^{(1)})]^{-1} [I(\sigma^{(1)})].$$

Этот итерационный процесс продолжается до тех пор, пока комбинация отрезков $[\sigma^{(k+1)}]$ на $(k+1)$ -й итерации полностью не повторит комбинацию отрезков $[\sigma^{(k)}]$ на итерации k . Если начальное приближение (комбинация отрезков $[\sigma^{(0)}]$) оказывается далеким от точного решения, то метод Ньютона-Рафсона может и не сходиться. Однако, в отличие от обычного метода Ньютона-Рафсона, в приведенном выше кусочно-линейном алгоритме расходимость к бесконечности невозможна. В [1] приведены алгоритмы, позволяющие получить стабильную сходимость итерационного процесса к решению.

Считая известными значения матриц $[\Lambda]$ и $[J]$, введем следующее обозначение:

$$[\Lambda_U] = [\Lambda][\Lambda][A]^T. \quad (28)$$

С учетом (20), (21) и (26) получим

$$[U] = -[A]^T [\Lambda_U]^{-1} [A][\Lambda][C][i_B] - [\Lambda_U]^{-1} [A][J]; \quad (29)$$

$$\frac{d[U]}{dt} = -[A]^T [\Lambda_U]^{-1} [A][\Lambda][C] \frac{d[i_B]}{dt}. \quad (30)$$

Обозначим

$$[L_B] = [L_M] - [C]^T [\Lambda][A]^T [\Lambda_U]^{-1} [A][\Lambda][C]. \quad (31)$$

Тогда напряжения ветвей ЭМУ, обусловленные ЭДС само- и взаимной индукции $[u_E]$ (18), можно выразить через производные токов ветвей:

$$[u_E] = [L_B] \frac{d[i_B]}{dt}. \quad (32)$$

С учетом (31) выражение (32) для напряжений $[u_E]$ по своей структуре ничем не будет отличаться от уравнения связи между током и напряжением на идеальных линейных индуктивностях схемы замещения электрической цепи (9). При этом элементы матрицы $[L_B]$ имеют размерность индуктивностей и зависят от комбинации отрезков вебер-амперных характеристик $[\sigma]$ (19) нелинейных ветвей схемы замещения магнитной цепи ЭМУ.

В качестве примера использования предложенной математической модели на рис. 5 приведены кривые изменения тока фазы статора при пуске асинхронного двигателя 4AA56B2Y3 в режиме холостого хода, иллюстрирующие корректность разработанного подхода к моделированию ЭМУ.

Рис. 5. Ток фазы статора при пуске асинхронного двигателя в режиме холостого хода: 1 – эксперимент; 2 – расчет по рассматриваемой модели; 3 – расчет по уравнениям Парка-Горева

Предложенная математическая модель является универсальной и позволяет анализировать переходные, установившиеся и аварийные режимы работы различных цепей, содержащих ЭМУ, с учетом их магнитной несимметрии, несимметрии питающих напряжений и присоединенной нагрузки, а также нелинейности ферромагнитных материалов.

Список литературы

1. Дж. Кеон. Анализ электрических цепей. – СПб.: Питер, 2008. – 640 с.
2. Мартынов В.А. Математическая модель несимметричных переходных процессов электрической машины // Электричество. – 2006. – № 12. – С. 40–45.
3. Основы теории цепей: учеб. для вузов / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
4. Мартынов В.А., Голубев А.Н., Алейников А.В. Математическое моделирование режимов работы многофазных синхронных двигателей с постоянными магнитами // Вестник ИГЭУ. – 2013. – Вып. 2. – С. 62–66.
5. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин: учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 327 с.
6. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В. Теоретические основы электротехники: учеб. для вузов. – 5-е изд. Т.2. – СПб.: Питер, 2009. – 432 с.

References

1. Keoun, Dzh. *Analiz elektricheskikh tsepey* [Analysis of electric circuits]. Saint-Petersburg, Piter, 2008. 640 p.
2. Martynov, V.A. Matematicheskaya model' nesimmetrichnykh perekhodnykh protsessov elektricheskoy mashiny [Mathematical model of asymmetric transients in electric machines]. *Elektrichestvo*, 2006, no. 12, pp. 40–45.
3. Zeveke, G.V., Ionkin, P.A., Netushil, A.V., Strakhov, S.V. *Osnovy teorii tsepey* [Fundamentals of circuit theory]. Moscow, Energoatomizdat, 1989. 528 p.
4. Martynov, V.A., Golubev, A.N., Aleynikov, A.V. Matematicheskoe modelirovanie rezhimov raboty mnogofaznykh sinkhronnykh dvigateley s postoyannymi magnitami [Mathematical modeling of operation modes of multi-phase synchronous motors with permanent magnets]. *Vestnik IGEU*, 2013, issue 2, pp. 62–66.
5. Kopylov, I.P. *Matematicheskoe modelirovanie elektricheskikh mashin* [Mathematical modeling of electrical machines]. Moscow, Vysshaya shkola, 2001. 327 p.
6. Demirchyan, K.S., Neyman, L.R., Korovkin, N.V. *Teoreticheskie osnovy elektrotekhniki* [Theoretical foundations of electrical engineering]. Saint-Petersburg, Piter, 2009. 432 p.

Голубев Александр Николаевич,

ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор технических наук, профессор кафедры теоретических основ электротехники и электротехнологий,
e-mail: alenikgo@yandex.ru

Мартынов Владимир Александрович,

ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой теоретических основ электротехники и электротехнологий,
e-mail: zav@toe.ispu.ru

Алейников Алексей Владимирович,

ФГБОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»,
аспирант кафедры теоретических основ электротехники и электротехнологий,
e-mail: Aleynikov-AV@yandex.ru