В. А. АРБУЗОВ, Ю. И. ДУБНИЩЕВ

МЕТОДЫ
ГИЛЬБЕРТ-ОПТИКИ
В ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ
ТЕХНОЛОГИЯХ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Институт теплофизики СО РАН
Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.А. АРБУЗОВ, Ю.Н. ДУБНИЦЕВ

МЕТОДЫ ГИЛЬБЕРТ-ОПТИКИ В ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

Монография

Ответственный редактор
профессор Ю.В. Чузуй

НОВОСИБИРСК
2007

УДК 535.3
А 795

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. *В.П. Коронкевич*,
д-р физ.-мат. наук, проф. засл. деятель науки
и техники РФ *П.Е. Твердохлеб*

Арбузов, В.А.

А 795 Методы гильберт-оптики в измерительных технологиях: монография / В.А. Арбузов, Ю.Н. Дубнищев; отв. ред. проф. Ю.В. Чугуй. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 316 с.

ISBN 978-5-7782-0843-8

Книга содержит систематическое и вместе с тем доступное изложение гильберт-оптики и разработанных на ее основе измерительных и информационных технологий. Основы гильберт-оптики даются на языке теории линейных систем, понятном специалистам любого профиля. Методы гильберт-фильтрации и преобразования сигналов рассматриваются как самостоятельное направление в фурье-оптике. Особое внимание уделяется применению гильберт-оптики в экспериментальной гидро- и газодинамике, в том числе для исследования нестационарных быстропротекающих процессов, в промышленных технологиях для невозмущающего контроля структуры и оптического качества различных сред и изделий. Предназначена для специалистов в области прикладной оптики, измерительной техники, а также для всех, кто использует в своей работе оптические методы контроля и измерений. Книга может служить учебным пособием для студентов старших курсов, магистрантов и аспирантов соответствующих специальностей.

УДК 535.3

ISBN 978-5-7782-0843-8

© В.А. Арбузов, Ю.Н. Дубнищев, 2007
© Институт теплофизики
СО РАН, 2007
© Новосибирский государственный
технический университет, 2007

ПРЕДИСЛОВИЕ

Интегральные преобразования Фурье и Гильберта являются универсальными и широко применяются в различных областях науки и техники [1, 2]. В современной оптике они составляют методическую базу фундаментальных и прикладных исследований. Преобразования Гильберта в оптических системах явились одним из важнейших результатов плодотворного синтеза идей и методов, развиваемых в оптике и радиотехнике. Они служат основой для современных информационных и измерительных технологий. Гильберт-фильтрация в оптике — это интегральная операция, выполняющая заданное перераспределение энергии сигнала во всей полосе пространственных частот, пропускаемых оптической системой. В этом ее безусловное преимущество по сравнению, например, с такой операцией, как дифференцирование, которое в силу своей локальности всегда сопряжено с большими энергетическими потерями. Физически преобразование Гильберта в частотном пространстве сводится к определенному виду фазовой трансформации фурье-спектра сигнала в широкой полосе частот. Такая фильтрация реализуется в оптике сравнительно легко с помощью соответствующего пространственно-частотного фазового фильтра, в отличие, скажем, от радиотехники, где создание широкополосного фазовращателя является достаточно сложной проблемой и поэтому гильберт-фильтрация выполняется в основном для узкополосных сигналов.

Одна из первых работ, в которой отмечалась полезность преобразования Гильберта в оптической фурье-спектроскопии, была опубликована в 1966 году [3]. Впервые одномерное преобразование Гильберта в оптике было реализовано Ловенталем и Бельво в монохроматическом свете [4] и с использованием ахроматического фильтра Кастлера в белом свете [5]. Л.М. Сороко и В.А. Суэтин в работе [6] предложили использовать для гильберт-фильтрации дифракционную решетку со сбоем, а в [7] сообщили об ее экспериментальном исследовании в этом качестве; Еу и Ломан [8] реализовали изотропное преобразование Гильберта в схеме с кольцевым источником как усреднение по углу одномерного преобразования при когерентном и некогерентном освещении; В.А. Арбузов и В.А. Федоров реализовали изотропное преобразование Гильберта [9] с использованием точечного и крестовидного источников света. Преобразования Гильберта состав-

ляют фундаментальную основу традиционных и современных методов визуализации оптических неоднородностей и широко используются в науке и технике. В последнее время эти методы интегрировались в гильберт-диагностику газовых и конденсированных сред как одно из направлений развития оптических измерительных технологий.

В настоящей книге методы гильберт-оптики излагаются в контексте задач визуализации и измерения полей фазовой оптической плотности. Выбор материала обусловлен профессиональными интересами и опытом авторов. Изложение ведется на языке теории линейных систем [10–17] и в самодостаточной форме, не требующей обращения к другим источникам учебного и справочного характера. Поэтому монография может быть использована в качестве учебного пособия для студентов, специализирующихся в области оптики и ее приложений в задачах экспериментальной гидро- и газодинамики, биологии и промышленных технологий, связанных с необходимостью оптической диагностики различных физических сред.

Значительная часть материала книги основана на курсе лекций «Методы гильберт-оптики», читаемого авторами в техническом университете для магистрантов и аспирантов, обучающихся по направлению «Оптотехника». Этим объясняется, что в первой главе приводятся основные сведения по линейным системам в оптике и преобразованиям оптических сигналов [17]. Квалифицированный в этой области читатель может ее пропустить. Вторая глава посвящена теории гильберт-фильтрации в оптике, включая одномерное, двумерное и изотропное преобразования Гильберта и Фуко–Гильберта для произвольных оптических сигналов. В третьей главе излагаются различные методы реализаций преобразования Гильберта и Фуко–Гильберта. В четвертой главе приведены некоторые примеры приложений оптической фильтрации Гильберта в науке и технике. Первая и вторая главы написаны Ю.Н. Дубнищевым, третья глава и параграфы 4.1 и 4.2 – В.А. Арбузовым, разделы 2.10, 3.4, 4.3 и 4.4 написаны совместно.

Авторы выражают благодарность Н.А. Дворникову, предоставившему материалы по моделированию процессов формирования и эволюции вихревых колец, П.П. Белоусову, А.В. Гнеушеву, А.С. Помыткиной и М.В. Шумкину за помощь в эксперименте, Е.Е. Мешкову за предоставление лабораторной ударной трубы и полезные обсуждения. Авторы глубоко признательны Р.Г. Надыровой за неоценимую помощь в подготовке рукописи. Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 05-02-16896 и 05-08-50308.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ОПТИКЕ

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ СИГНАЛОВ

1.1.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ В КООРДИНАТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Сигналом называют процесс изменения во времени или в пространстве физического состояния какого-либо объекта, служащий для отображения, регистрации и передачи сообщений (информации). Теоретический анализ сигналов различной физической природы возможен, если выбран способ их математического описания. Математической моделью сигнала является адекватная функциональная зависимость от временного и пространственного аргумента. По ходу изложения, если не требуется уточнения временного или пространственного характера сигнала, будем пользоваться для аргумента обозначением x .

Размерность сигнала определяется числом независимых функций.

Многомерный сигнал – упорядоченная совокупность одномерных сигналов. Пример многомерного сигнала – система напряжений на выходе многополюсника (рис. 1.1):

$$s(x) = \{s_1(x), s_2(x), \dots, s_N(x)\},$$

где N – размерность сигнала.

В общем случае сигналы с разным порядком следования компонент не равны друг другу, $\{s_1, s_2\} \neq \{s_2, s_1\}$.

Детерминированный сигнал описывается функциональной зависимостью, позволяющей точно установить его параметры при заданном значении аргумента.

Рис. 1.1

Случайный сигнал статистически связан со значением аргумента.

Импульсный сигнал существует на конечном интервале значений аргумента (временного или пространственного). Для сигналов, зависящих от времени (например, в радиотехнике), различают видеоимпульсы (рис. 1.2, а) и радиоимпульсы (рис. 1.2, б).

Если $s_v(t)$ – видеоимпульс, то соответствующий ему радиоимпульс $s_r(t) = s_v(t) \cos(\omega t + \varphi)$. Радиоимпульсы отличаются от видеоимпульсов заполнением гармонической несущей $\cos(\omega t + \varphi)$, где ω – частота; φ – фаза. Параметры, характеризующие импульсный сигнал, показаны на рис. 1.2, в, где A – амплитуда; τ_s , τ_f , τ_c – длительность импульса, фронта и среза соответственно. Различают аналоговые, дискретные и цифровые сигналы.

Рис. 1.2

Аналоговый сигнал является непрерывной функцией аргумента. Дискретный определяется на счетном множестве значений аргумента. Интервал между соседними значениями аргумента называется шагом дискретизации.

Цифровой сигнал – разновидность дискретного, представленного в отсчетных точках в виде чисел.

Динамическое представление сигналов. Любой сигнал, заданный в пространстве или во времени, можно приближенно описать суммой определенным образом выбранных элементарных сигналов, среди которых два вида получили наибольшее распространение. За один из них принимаются ступенчатые функции, аппроксимирующие огибающую реального сигнала. Высота каждой ступеньки равна приращению сигнала на заданном интервале изменения Δx временного или пространственного аргумента x (рис. 1.3). Другой вид элементарного сигнала представляет собой прямоугольный импульс, высота ко-

торого аппроксимирует амплитуду сигнала на заданном интервале (рис. 1.4).

Рис. 1.3

Рис. 1.4

Функция включения. В качестве математической модели элементарного сигнала при ступенчатой аппроксимации может использоваться *функция Хевисайда* или, как ее еще называют, *функция включения*. Она образуется как предел функции, описывающий переход системы из одного состояния в другое на бесконечно малом интервале.

$$s_e(x) = \begin{cases} 0, & x < -\xi; \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\xi} \right), & -\xi \leq x \leq \xi; \\ 1, & x > \xi. \end{cases}$$

Пример такой модели элементарного сигнала $s_e(x)$ представлен на рис. 1.5. Видно, что в интервале $-\xi \leq x \leq \xi$ функция s_e изменяется по линейному закону от нуля до единицы. Функция Хевисайда образуется посредством предельного перехода

$$\sigma(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} s_e(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Рис. 1.5

Если функция смещена относительно начала отсчета по оси x на величину x_0 , используется следующая форма записи:

$$\sigma(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x < x_0; \\ \frac{1}{2}, & x = x_0; \\ 1, & x > x_0. \end{cases}$$

Функции включения очень удобно применять для задания интервалов значений аргумента, в которых существует сигнал. В частности, это относится к описанию импульсных сигналов. Функция Хевисайда является примером так называемых *обобщенных функций*, широко применяемых в теории сигналов.

Функция Дирака или дельта-функция, определяется как производная функции включения

$$\delta(x) = \frac{d}{dx} \sigma(x).$$

Рис. 1.6

Она образуется как предел, к которому стремится прямоугольный элементарный импульс, сохраняющий оконтуренную огибающей площадь при бесконечно малой длительности. Определим такой элементарный импульс через разность двух функций включения (рис. 1.6)

$$\tilde{s}_e(x) = \frac{1}{2\xi} [\sigma(x + \xi) - \sigma(x - \xi)].$$

Найдем его площадь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}_e(x) dx = \frac{1}{2\xi} \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma(x + \xi) - \sigma(x - \xi)] dx = \frac{1}{2\xi} \int_{-\xi}^{\xi} dx = 1.$$

Видно, что площадь, оконтуренная огибающей импульса $\tilde{s}_e$, действительно не зависит от его длительности и равна единице. Найдем предел, к которому стремится элементарный импульс $\tilde{s}_e(x)$ при бесконечном уменьшении длительности:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \tilde{s}_e(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{2\xi} \sigma(x + \xi) - \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{2\xi} \sigma(x - \xi) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{2\xi} \{ [\sigma(x) + \sigma'(x)\xi] - [\sigma(x) - \sigma'(x)\xi] \} = \\
 &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{2\xi} 2\sigma'(x)\xi = \sigma'(x) = \delta(x).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при бесконечно малой длительности элементарный импульс трансформируется в δ -функцию, определяемую как производная функции включения и обладающую свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Сохранение единичной площади элементарного прямоугольного импульса при бесконечном уменьшении длительности означает, что амплитуда его стремится к бесконечности.

Приведем ряд соотношений, полезных при использовании δ -функции в теории сигналов (читателю предлагается их доказать в качестве упражнения):

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x). \quad (1.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{2} e^{-n|x|} \right] = \delta(x). \quad (1.2)$$

$$\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\pi); \quad (1.3)$$

$$\varphi(x) \delta(x - x_0) = \varphi(x_0) \delta(x - x_0); \quad (1.4)$$

$$\delta(x) \delta(x - x_0) = 0 \text{ при } x_0 \neq 0; \quad (1.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x - x_0) \delta(x - x_1) dx = \varphi(x_1 - x_0); \quad (1.6)$$

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_n \frac{1}{|\delta'(x_n)|} \delta(x - x_n), \quad (1.7)$$

где x_n — корни уравнения $\varphi(x) = 0$. Из уравнения (1.7) следует (1.1).

Обратимся к рис. 1.4, иллюстрирующему аппроксимацию произвольного сигнала прямоугольными элементарными импульсами равной длительности Δ . Каждый отсчет сигнала s_n равен амплитуде соответствующего элементарного импульса $\tilde{s}_{en}$. Для n -го отсчета сигнала имеем

$$\tilde{s}_{en}(x) = s_n \{ \sigma[x - n\Delta] - \sigma[x - (n+1)\Delta] \} = s_n [\sigma(x - x_n) - \sigma(x - x_n - \Delta)].$$

Сигнал можно приближенно представить как сумму соответствующих элементарных импульсов

$$s(x) = \sum_{n=-N_1}^{N_2} \tilde{s}_{en}(x) = \sum_{n=-N_1}^{N_2} s_n [\sigma(x - x_n) - \sigma(x - x_n - \Delta)]. \quad (1.8)$$

Здесь N_1 и N_2 — число отсчетов соответственно в области отрицательных и положительных x . В этой сумме приближенное текущее значение сигнала $s(x)$ отвечает номеру n , удовлетворяющему условию $x_{n-1} < x < x_n$. Если выбирать интервал Δ бесконечно малым, дискретная сумма (1.8) трансформируется в интеграл, поскольку Δ заменяется дифференциалом, $N_1 \rightarrow \infty$, $N_2 \rightarrow \infty$, а функцию включения $\sigma(x - x_n - \Delta)$ можно разложить в ряд Тейлора по малому параметру Δ :

$$\sigma(x - x_n - \Delta) = \sigma(x - x_n) - \sigma'(x - x_n)\Delta.$$

Подставляя это выражение в (1.8), получаем

$$\begin{aligned} s(x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=-N_1}^{N_2} s_n [\sigma(x - x_n) - \sigma(x - x_n - \Delta)] \right\} = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=-N_1}^{N_2} s_n [\sigma(x - x_n) - \sigma(x - x_n) + \sigma'(x - x_n)\Delta] \right\} = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{n=N_1}^{N_1} s_n \sigma'(x - x_n) \Delta = \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi) \sigma'(x - \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Учитывая, что производная функции включения есть дельта-функция, приходим к следующей форме динамического представления сигнала:

$$s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi) \delta(x - \xi) d\xi. \quad (1.9)$$

Выражение (1.9) представляет интегральную операцию *свертки* сигнала с δ -импульсом и характеризует так называемое *фильтрующее свойство дельта-функции*: свертка сигнала с дельта-функцией определяет значение сигнала в точке, где локализован δ -импульс.

Представим функцию Дирака в (1.9) через функцию Хевисайда и выполним интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} s(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi) \delta(x - \xi) d\xi = - \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi) \frac{d}{d\xi} \sigma(x - \xi) d\xi = \\ &= -s(\xi) \sigma(\xi) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds(\xi)}{d\xi} \sigma(x - \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Первый член в этом выражении при подстановке пределов интегрирования обращается в нуль, поскольку сигнал имеет конечную энергию. Отсюда находим динамическое представление сигнала (см. рис. 1.3) через функцию включения:

$$s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds(\xi)}{d\xi} \sigma(x - \xi) d\xi.$$

Разложение сигналов в ряд Фурье. В исследованиях оптических сигналов широко используются ортогональные координатные базисы, основанные на гармонических функциях. Важность гармонической модели сигналов, как будет показано в дальнейшем, обусловлена в первую очередь её инвариантностью относительно преобразований, осуществляемых линейными системами.

Математической моделью сигнала, периодически повторяющегося во времени или в пространстве, является периодическая функция вида

$$s(t) = s(t + nT), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$s(x) = s(x + m\Lambda), \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Здесь T – период сигнала во времени, Λ – период сигнала в пространстве.

Обобщенную модель функции, периодической в пространстве и времени, можно записать так: $s(x, t) = s(x + m\Lambda, t + nT)$. Представле-

ние сигнала в виде суммы гармонических функций называется *спектральным разложением в ряд Фурье*:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n u_n(t).$$

Здесь u_n – гармонические функции, образующие ортонормированный базис

$$u_n = \sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}} \sin n\omega_1 t \quad \text{или} \quad u_n = \sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}} \cos n\omega_1 t,$$

где $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ – основная частота последовательности, образующей периодический сигнал, T – временной интервал, на котором задается ортонормированный базис $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Легко проверить, что эти гармонические функции – ортонормированы: $(u_n, u_m) = \delta_{n,m}$. Если ортонормированный базис образован в пространственной области, переменная t заменяется на пространственную координату x , временной период T на пространственный интервал Λ , а частота ω_1 на пространственную частоту $K = \frac{2\pi}{\Lambda}$.

Запишем разложение сигнала $s(t)$ в ряд Фурье (для определенности сигнал выбираем зависящим от времени):

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t). \quad (1.10)$$

Для коэффициентов разложения, по определению, имеем

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt;$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt;$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt.$$

Периодический сигнал содержит постоянную составляющую и бесконечный набор гармонических колебаний (гармоник) с частотами, кратными основной частоте.

Другая, эквивалентная, форма ряда Фурье легко получается из (1.10):

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n),$$

где $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$; $\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}$.

Комплексная форма ряда Фурье. Пользуясь формулами Эйлера, запишем ряд (1.10) в виде

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{1}{2} (e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}) + b_n \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}) \right] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_1 t} + \frac{1}{2} (a_n + jb_n) e^{-jn\omega_1 t} \right\}. \end{aligned}$$

Введем коэффициенты

$$C_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n); \quad C_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + jb_n) = C_n^*.$$

Тогда

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n e^{jn\omega_1 t} + C_{-n} e^{-jn\omega_1 t}] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-jn\omega_1 t} = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}. \end{aligned}$$

Распространяя суммирование на все значения n от $-\infty$ до ∞ , включая $n = 0$, приходим к комплексной форме ряда Фурье

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t},$$

где

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (1.11)$$

1.1.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Спектральная плотность сигнала. Пусть интервал $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, на котором задан ортонормированный базис, неограниченно растет. Тогда частоты соседних спектральных компонент будут отличаться на величину $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, сколь угодно малую, и спектр станет непрерывным.

Введем обозначения $n\omega_1 = \omega$ и соответственно $T = \frac{2\pi n}{\omega}$ в (1.11):

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{\omega}{2\pi n} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Тогда равенство $\frac{\omega}{2\pi n} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \Delta f$ будет иметь смысл частотного интервала, приходящегося на одну спектральную компоненту

$$c_n = \Delta f \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Разделяя это равенство на Δf и переходя к пределу при неограниченном увеличении интервала T (соответственно неограниченном уменьшении частотного интервала Δf), получаем

$$\lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{c_n}{\Delta f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Величина $\lim_{\Delta f \rightarrow 0} (c_n / \Delta f)$ имеет смысл спектральной плотности сигнала $s(\omega)$. Отсюда

$$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.12)$$

Выражение (1.12), определяющее спектральную плотность сигнала, называется преобразованием Фурье.

Обратное преобразование Фурье. Обратимся к задаче определения сигнала по известной спектральной плотности. Воспользуемся комплексной формой ряда Фурье

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}.$$

Умножим и разделим правую часть этого выражения на ω_1 :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_n}{\omega_1} e^{jn\omega_1 t} \omega_1.$$

При неограниченном увеличении временного интервала T , на котором определяется сигнал, сумма в правой части трансформируется в интегральную сумму, где число ω_1 приобретает смысл дифференциала частоты $n\omega_1 = \omega$, $\omega_1 = \Delta\omega = 2\pi\Delta f$ и $\lim_{\Delta f \rightarrow 0} c_n / \Delta f = s(\omega)$:

$$s(t) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_n}{2\pi\Delta f} e^{j\omega t} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.13)$$

Эта формула получила название обратного преобразования Фурье.

Из (1.12) и (1.13) следует, что сигнал и его спектральная плотность составляют фурье-сопряженную пару $s(t) \leftrightarrow s(\omega)$:

$$\left. \begin{aligned} s(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt; \\ s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \right\}$$

Преобразование Фурье существует только для сигналов с ограниченной энергией. Поскольку любой физический сигнал регистрируется на конечном временном и пространственном интервалах, преобразование Фурье для реального физического сигнала всегда существует.

При выполнении преобразования Фурье для сигнала, заданного на конечном временном или пространственном интервалах, функция, описывающая сигнал, доопределяется на всю временную или пространственную ось в предположении, что вне интервалов T или Λ она равна нулю.

При представлении физического сигнала рядом Фурье функция, описывающая сигнал в интервалах T или Λ , доопределяется на всю ось в предположении, что T или Λ являются соответственно временным и пространственным периодом. В этом случае спектр сигнала, описываемого периодической функцией, становится дискретным, определенным только для временных ω и пространственных K частот, разделенных промежутками, кратными соответственно $2\pi/T$ и $2\pi/\Lambda$.

Основные свойства преобразования Фурье

Линейность. Преобразование Фурье взвешенной суммы сигналов с произвольными числовыми коэффициентами определяется суммой спектральных плотностей сигналов с теми же коэффициентами:

$$\sum_i \alpha_i s_i(t) \leftrightarrow \sum_i \alpha_i s_i(\omega).$$

Свойства вещественной и мнимой частей спектральной плотности. Реальная часть спектральной плотности вещественного (физического) сигнала есть четная, а мнимая часть – нечетная функция частоты.

Пусть $s(t)$ – сигнал, принимающий вещественные значения. Спектральная плотность такого сигнала

$$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt = A(\omega) - jB(\omega).$$

Выполним обратное преобразование Фурье:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) - jB(\omega)] [\cos \omega t + j \sin \omega t] d\omega =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t] d\omega + \\
&+ j \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) \sin \omega t - B(\omega) \cos \omega t] d\omega.
\end{aligned}$$

Поскольку сигнал вещественный, $A(\omega) \sin \omega t - B(\omega) \cos \omega t = 0$ на всей частотной оси. Это выполняется при условиях

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin \omega t d\omega = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega = 0.$$

Отсюда следует, что $A(\omega)$ – четная, а $B(\omega)$ – нечетная функции частоты.

Теорема смещения. Пусть $s(t) \leftrightarrow s(\omega)$. Определим спектральную плотность сигнала, запаздывающего на интервал t_0 , $s(t - t_0)$.

Выполним фурье-преобразование смещенного сигнала, воспользовавшись заменой переменной $t - t_0 = x$:

$$\begin{aligned}
s(t - t_0) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j\omega(x+t_0)} dx = \\
&= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j\omega x} dx = s(\omega) e^{-j\omega t_0}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$s(t - t_0) \leftrightarrow s(\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (1.14)$$

Спектральная плотность смещенного сигнала равна спектральной плотности несмещенного сигнала, умноженной на экспоненту, мнимый показатель которой определяется произведением частоты на величину смещения.

Если спектральная плотность сигнала смещена по шкале частот на величину ω_0 , это проявляется в изменении фазы сигнала:

$$s(\omega - \omega_0) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{j(x+\omega_0)t} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{jxt} dx = s(t) e^{j\omega_0 t}.$$

$$s(\omega - \omega_0) \leftrightarrow s(t) e^{j\omega_0 t}. \quad (1.15)$$

Из сравнения (1.14) и (1.15) следует, что при смещении сигнала и спектральной плотности соответствующие изменения фазы спектральной плотности и сигнала различны по знаку.

Влияние масштаба измерения аргумента. Пусть $s(t) \leftrightarrow s(\omega)$. Изменим масштаб аргумента сигнала и найдем, как это отразится на спектральной плотности:

$$s(\alpha t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(\alpha t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j\frac{\omega}{\alpha} x} dx = \frac{1}{\alpha} s\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Отрицательный масштабный коэффициент α соответствует инверсии осей:

$$s(-\alpha t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(-\alpha t) e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{\alpha} \int_{\infty}^{-\infty} s(x) e^{-j\omega x/\alpha} dx = \frac{1}{\alpha} s\left(-\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Следовательно,

$$s(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} s\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Отсюда

$$s(\alpha \omega) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} s\left(\frac{t}{\alpha}\right).$$

Сжатие сигнала ведет к расширению его спектральной плотности в частотном пространстве при обратно пропорциональном коэффициенту сжатия уменьшении ее амплитуды.

Растяжение сигнала вызывает сжатие спектральной плотности в частотном пространстве и соответствующее увеличение ее амплитуды.

Если $\alpha = -1$ (обращение временной или пространственной оси), модуль спектральной плотности не меняется, а частотная ось инвертируется. Для сигналов, зависящих от времени, обращение временной оси — чисто математический прием, потому что физическое время однопонравлено. Однако для пространственных сигналов инверсия про-

пространственной оси и инверсия оси пространственных частот физически реализуемы.

Спектральная плотность производной. Пусть $s(t) \leftrightarrow s(\omega)$. Найдем спектральную плотность производной сигнала $s(t)$:

$$\frac{d}{dt}s(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}s(t)e^{-j\omega t} dt = s(t)e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = j\omega s(\omega).$$

Здесь выполнено интегрирование по частям. Слагаемое $s(t)e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty}$ обращается в нуль, поскольку сигнал имеет конечную энергию. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}s(t) \leftrightarrow j\omega s(\omega). \quad (1.16)$$

Спектральная плотность производной сигнала равна произведению спектральной плотности сигнала на множитель $j\omega$. Из (1.16) следует, что при дифференцировании сигнала подчеркиваются высокочастотные компоненты его спектральной плотности.

Для спектральной плотности производной n -го порядка сигнала согласно (1.16) имеем

$$\frac{d^n}{dt^n}s(t) \leftrightarrow (j\omega)^n s(\omega).$$

Мнимое число $(j\omega)$ в частотной области выполняет роль оператора дифференцирования. Если дифференцируется спектральная плотность, то

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega}s(\omega) &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega}s(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \\ &= s(\omega)e^{j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{j t}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)e^{j\omega t} d\omega = -j t s(t). \end{aligned}$$

Для фурье-преобразования производной высшего порядка спектральной плотности имеем

$$\frac{d^n}{d\omega^n}s(\omega) \leftrightarrow (-j t)^n s(t). \quad (1.17)$$

Из-за однонаправленности времени преобразование (1.17) время – зависимых сигналов может быть использовано как математический прием. Однако для сигналов, заданных в координатном и в частотном пространствах, это преобразование физически реализуемо:

$$\frac{d^n}{dK^n} s(K) \leftrightarrow (-jx)^n s(x).$$

Спектральная плотность интеграла. Спектральная плотность сигнала и его неопределенный интеграл связаны фурье-преобразованием

$$\int_{-\infty}^t s(\xi) d\xi \leftrightarrow \frac{s(\omega)}{j\omega}. \quad (1.18)$$

Доказательство следует из определения первообразной

$$s(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t s(\xi) d\xi$$

и теоремы о спектральной плотности производной.

Для пространственно-зависимых сигналов по аналогии с (1.18) можно записать

$$\int_{-\infty}^x s(\xi) d\xi \leftrightarrow \frac{1}{jK} s(K).$$

Спектральная плотность произведения сигналов. Пусть $s_1(t)$ и $s_2(t)$ – сигналы, для которых известны спектральные плотности $s_1(t) \leftrightarrow s_1(\omega)$, $s_2(t) \leftrightarrow s_2(\omega)$. Найдем спектральную плотность произведения сигналов:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_2(\xi) e^{j\xi t} d\xi e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} s_2(\xi) e^{-j(\omega-\xi)t} d\xi dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_2(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-j(\omega-\xi)t} dt d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_2(\xi) s_1(\omega-\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\xi) s_2(\omega-\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Следовательно, спектральная плотность произведения двух сигналов с точностью до множителя $1/(2\pi)$ равна свертке спектральных плотностей сигналов,

$$s_1(t)s_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\xi)s_2(\omega - \xi)d\xi. \quad (1.19)$$

В записи с использованием обозначения операции свертки символом $\otimes$ это выражение запишется так:

$$s_1(t)s_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} s_1(\omega) \otimes s_2(\omega).$$

Для спектральной плотности, представленной в виде двух сомножителей, сигнал описывается сверткой фурье-образов сомножителей:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega)s_2(\omega)e^{j\omega t}d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\xi)e^{-j\omega\xi}d\xi s_2(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} s_2(\omega)e^{j(t-\xi)\omega}d\omega d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\xi)s_2(t-\xi)d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_2(\xi)s_1(t-\xi)d\xi. \end{aligned}$$

$$s_1(\omega)s_2(\omega) \leftrightarrow s_1(t) \otimes s_2(t). \quad (1.20)$$

В случае пространственных сигналов формулы (1.19) и (1.20) остаются справедливыми. В них достаточно ввести переобозначения $t \rightarrow x$, $\omega \rightarrow K$:

$$s_1(x)s_2(x) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} s_1(K) \otimes s_2(K);$$

$$s_1(K)s_2(K) \leftrightarrow s_1(x) \otimes s_2(x).$$

Из приведенных доказательств следует, что операция свертки коммутативна.

Спектральная плотность постоянного сигнала $s(t) = s_0$.

$$s(\omega) = s_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = s_0 \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} 2s_0 \frac{\sin \omega t}{\omega}.$$

Используя обратное фурье-преобразование, имеем

$$s(t) = s_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Следовательно,

$$s(\omega) = 2\pi s_0 \delta(\omega). \quad (1.21)$$

Сравнивая полученные выражения для спектральной плотности, находим

$$\delta(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega t}{\pi \omega}.$$

Мы получили еще одно представление δ -функции.

Таким образом, спектральная плотность постоянного во времени сигнала имеет компоненты только на нулевой частоте.

Спектральная плотность комплексного экспоненциального сигнала. Пусть $s(t) = e^{j\omega_0 t}$. Тогда, воспользовавшись теоремой сдвига, получаем из (1.21)

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0). \quad (1.22)$$

Следовательно, спектральная плотность комплексного экспоненциального сигнала $s(t) = e^{j\omega_0 t}$ описывается δ -функцией на частоте ω_0 и равна нулю на остальных частотах.

По аналогии для сигнала, спектральная плотность которого описывается экспоненциальной комплексной функцией, получаем

$$e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow \delta(t - t_0).$$

Сигнал, спектральная плотность которого описывается экспоненциальной комплексной функцией $s(\omega) = e^{-j\omega t_0}$, равен нулю во всем временном интервале, кроме точки $t=t_0$, где он имеет δ -особенность.

Спектральная плотность гармонических колебаний. Пусть $s(t) = \cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$. Для получения спектральной плотности достаточно воспользоваться (1.22):

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

По аналогии

$$\sin \omega_0 t \leftrightarrow -j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)].$$

Спектральная плотность произвольного периодического сигнала. Пусть $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_1 t}$. Это произвольный периодический сигнал, разложенный в ряд Фурье. Согласно формуле (1.22) получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_1 t} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_1).$$

Спектральная плотность прямоугольного видеоимпульса (рис. 1.7)

$$s(t) = s_0 \operatorname{rect}\left(\frac{2t}{\tau_u}\right) = \begin{cases} s_0, & |t| \leq \frac{\tau_u}{2}; \\ 0, & |t| > \frac{\tau_u}{2}. \end{cases}$$

$$s(\omega) = s_0 \int_{-\frac{\tau_u}{2}}^{\frac{\tau_u}{2}} e^{-j\omega t} dt = s_0 \tau_u \frac{\sin \frac{\omega \tau_u}{2}}{\frac{\omega \tau_u}{2}} = s_0 \tau_u \operatorname{sinc} \frac{\omega \tau_u}{2}. \quad (1.23)$$

Как видно из (1.23), значение спектральной плотности прямоугольного импульса на нулевой частоте равняется площади импульса.

Спектральная плотность знаковой функции (рис. 1.8)

$$s(t) = \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t = 0; \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Рис. 1.7

Рис. 1.8

Представим прямоугольный видеоимпульс, рассмотренный в предыдущей задаче, в виде суммы функций включения:

$$s(t) = \text{rect}\left(\frac{2t}{\tau_u}\right) = \sigma\left(t + \frac{1}{2}\tau_u\right) - \sigma\left(t - \frac{1}{2}\tau_u\right).$$

Здесь амплитуда импульса выбрана единичной. Функцию включения можно представить как сумму знаковой функции и постоянной (рис. 1.9):

$$\sigma(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn } t).$$

Рис. 1.9

Тогда

$$\begin{aligned} s(t) &= \sigma\left(t + \frac{1}{2}\tau_u\right) - \sigma\left(t - \frac{1}{2}\tau_u\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \text{sgn}\left(t + \frac{1}{2}\tau_u\right)\right] - \\ &- \frac{1}{2}\left[1 + \text{sgn}\left(t - \frac{1}{2}\tau_u\right)\right] = \frac{1}{2}\text{sgn}\left(t + \frac{1}{2}\tau_u\right) - \frac{1}{2}\text{sgn}\left(t - \frac{1}{2}\tau_u\right). \end{aligned}$$

Воспользуемся выражением (1.23) для спектральной плотности такого импульса:

$$\frac{1}{2}\text{sgn}\left(t + \frac{1}{2}\tau_u\right) - \frac{1}{2}\text{sgn}\left(t - \frac{1}{2}\tau_u\right) \leftrightarrow \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau_u}{2}\right)$$

или

$$\frac{1}{2}\text{sgn}\left(t + \frac{1}{2}\tau_u\right) - \frac{1}{2}\text{sgn}\left(t - \frac{1}{2}\tau_u\right) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} e^{\frac{j\omega\tau_u}{2}} - \frac{1}{j\omega} e^{-\frac{j\omega\tau_u}{2}}.$$

Отсюда с учетом линейности преобразования Фурье и теоремы сдвига имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{sgn}\left(t + \frac{1}{2} \tau_u\right) &\leftrightarrow \frac{1}{j\omega} e^{\frac{j\omega\tau_u}{2}}, \\ \frac{1}{2} \operatorname{sgn}\left(t - \frac{1}{2} \tau_u\right) &\leftrightarrow \frac{1}{j\omega} e^{-\frac{j\omega\tau_u}{2}}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Полагая $\tau_u = 0$, получаем

$$\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}.$$

Спектральная плотность функции включения $\sigma(t)$. Поскольку (рис. 1.9)

$$\sigma(t) = 0,5[1 + \operatorname{sgn}(t)],$$

используя (1.24) и (1.21), для спектральной плотности функции включения получаем

$$\sigma(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.$$

Спектральная плотность радиоимпульса. Пусть

$$s(t) = s_0(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = s_0(t) \frac{1}{2} \left[e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)} \right].$$

Здесь $s_0(t)$ – огибающая радиоимпульса, $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ – несущая, ω_0 и φ_0 – частота и начальная фаза несущей. Воспользовавшись теоремой сдвига, находим спектральную плотность радиоимпульса:

$$\begin{aligned} s_0(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) &\leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} s_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} s_0(\omega + \omega_0). \end{aligned}$$

Спектральная плотность радиоимпульса состоит из суммы двух спектральных плотностей огибающих, разнесенных симметрично относительно нуля на частоту несущей ω_0 и имеющих с точностью до комплексного множителя половинную амплитуду (рис. 1.10).

Рис. 1.10

Рис. 1.11

Спектральная плотность экспоненциального видеопульса (рис. 1.11) $s(t) = s_0 e^{-\alpha t} \sigma(t)$.

$$s(\omega) = s_0 \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \frac{s_0}{\alpha + j\omega}.$$

Спектральная плотность гауссова видеопульса (рис. 1.12) $s(t) = s_0 e^{-\beta t^2}$.

$$\begin{aligned} s(\omega) &= s_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} e^{-j\omega t} dt = s_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\beta \left[t^2 + j \frac{\omega}{\beta} t - \frac{\omega^2}{4\beta^2} + \frac{\omega^2}{4\beta^2} \right] \right\} dt = \\ &= s_0 \exp \left(-\frac{\omega^2}{4\beta} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\left(\sqrt{\beta} \cdot t + j \frac{\omega}{2\sqrt{\beta}} \right)^2 \right\} dt. \end{aligned}$$

Выполним замену переменной

Рис. 1.12

$$\left[\sqrt{\beta} \cdot t + j \frac{\omega}{2\sqrt{\beta}} = u; \quad dt = \frac{du}{\sqrt{\beta}} \right].$$

$$\begin{aligned} s(\omega) &= \frac{s_0}{\sqrt{\beta}} \exp \left(-\frac{\omega^2}{4\beta} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) du = \\ &= s_0 \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp \left(-\frac{\omega^2}{4\beta^2} \right). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Если $\beta = j\gamma$, то в соответствии с (1.25)

$$s(t) = s_0 e^{-j\gamma t^2} \leftrightarrow s_0 \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \exp\left(j \frac{\omega^2}{4\gamma}\right) \exp\left(-j \frac{\pi}{4}\right).$$

1.1.3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИГНАЛОВ

Обобщенная формула Рэлея. Пусть имеются сигналы $s_1(t)$, $s_2(t)$ и их спектральные плотности $s_1(\omega)$, $s_2(\omega)$:

$$s_1(t) \leftrightarrow s_1(\omega);$$

$$s_2(t) \leftrightarrow s_2(\omega).$$

Скалярное произведение сигналов в координатном пространстве

$$(s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t) dt \quad (1.26)$$

определяет взаимную энергию этих сигналов. Если сигналы тождественно равны, скалярное произведение есть энергия сигнала,

$$(s, s) = \int_{-\infty}^{\infty} |s|^2(t) dt.$$

Подставим в скалярное произведение (1.26) выражение сигнала $s_1(t)$ через его спектральную плотность $s_1(\omega)$:

$$(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_2^*(t) \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega dt.$$

Изменим порядок интегрирования:

$$(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} s_2^*(t) e^{j\omega t} dt.$$

Для внутреннего интеграла имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_2^*(t) e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [s_2(t) e^{-j\omega t}]^* dt = s_2^*(\omega).$$

С учетом этого для скалярного произведения сигналов получаем

$$(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega) s_2^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} (s_1(\omega) s_2(\omega)). \quad (1.27)$$

Следовательно, скалярное произведение двух сигналов пропорционально скалярному произведению их спектральных плотностей. Выражение (1.27) получило название *обобщенной формулы Рэлея*.

Формула Рэлея остается справедливой при изменении порядка следования операции комплексного сопряжения

$$(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi} (s_1(\omega) s_2(\omega)) = \frac{1}{2\pi} (s_1(\omega) s_2(\omega)).$$

В случае физических (вещественных) сигналов

$$(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega) s_2^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 s_1(\omega) s_2^*(\omega) d\omega + \int_0^{\infty} s_1(\omega) s_2^*(\omega) d\omega \right\}.$$

Делая замену в первом интеграле $\omega \rightarrow -\omega$, получаем

$$\begin{aligned} (s_1, s_2) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ - \int_{\infty}^0 s_1(-\omega) s_2^*(-\omega) d\omega + \int_0^{\infty} s_1(\omega) s_2^*(\omega) d\omega \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} s_1^*(\omega) s_2(\omega) d\omega + \int_0^{\infty} s_1(\omega) s_2^*(\omega) d\omega \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [s_1^*(\omega) s_2(\omega) + s_1(\omega) s_2^*(\omega)] d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} [s_1(\omega) s_2^*(\omega)] d\omega. \end{aligned}$$

Введем вещественную функцию $W_{12}(\omega) = \operatorname{Re} [s_1(\omega) s_2^*(\omega)]$, которая называется *взаимным энергетическим спектром сигналов* s_1 и s_2 . Тогда

$$(s_1, s_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_{12}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\omega) d\omega. \quad (1.28)$$

Из формулы (1.28) следует, что в формирование обменной (взаимной) энергии наибольший вклад вносят частотные интервалы, в которых спектральные плотности сигналов перекрываются.

Энергетический спектр сигнала. Спектральное представление энергии сигнала получается из обобщенной формулы Рэлея, если в ней сигналы $s_1(t)$, и $s_2(t)$ считать тождественными:

$$(s, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) s^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |s(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega.$$

Величина $W(\omega)$ называется *спектральной плотностью энергии* (энергетическим спектром) сигнала.

При описании сигналов через их энергетические спектры теряется информация, заключающаяся в фазовой компоненте спектральной плотности $s(\omega)$. Для энергетического представления сигнала важна его форма, а не положение на временной или пространственной оси.

Энергетический спектр прямоугольного импульса $s(t) = A \operatorname{rect}\left[\frac{t}{\tau/2}\right]$. Согласно (1.23)

$$s(\omega) = A\tau \frac{\sin \omega \tau/2}{\omega \tau/2}.$$

Отсюда

$$W(\omega) = s^2(\omega) = A^2 \tau^2 \frac{\sin^2 \omega \tau/2}{\omega^2 \tau^2/4}.$$

Энергия в частотной области

$$E_s = \frac{A^2 \tau^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\omega \tau/2)}{\omega^2 \tau^2/4} d\omega = \frac{2A^2 \tau}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{2A^2 \tau}{\pi} \frac{\pi}{2} = A^2 \tau,$$

$$\left[\omega \tau/2 = u, d\omega = \frac{2}{\tau} du \right].$$

Взаимный энергетический спектр двух гауссовых импульсов

$$s_1 = A_1 e^{-\beta_1 t^2}, \quad s_2 = A_2 e^{-\beta_2 t^2}.$$

Найдем спектральную плотность сигналов (1.25):

$$s_1(\omega) = A_1 \sqrt{\frac{\pi}{\beta_1}} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta_1}}; \quad s_2(\omega) = A_2 \sqrt{\frac{\pi}{\beta_2}} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta_2}},$$

откуда

$$W_{12} = s_1(\omega)s_2(\omega) = \frac{\pi A_1 A_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} e^{-\frac{\omega^2}{4} \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right)}.$$

Обменная энергия экспоненциальных импульсов $s_1 = A_1 e^{-\alpha_1 t} \sigma(t)$,

$$s_2 = A_2 e^{-\alpha_2 t} \sigma(t).$$

Определим спектральные плотности

$$s_1(\omega) = \frac{A_1}{\alpha_1 + j\omega}; \quad s_2(\omega) = \frac{A_2}{\alpha_2 + j\omega}.$$

Отсюда находим обменную энергию сигналов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega) s_2^*(\omega) d\omega &= \frac{A_1 A_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\alpha_1 + j\omega)(\alpha_2 - j\omega)} = \\ &= \frac{A_1 A_2}{2\pi(\alpha_1 + \alpha_2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\alpha_1 + j\omega} + \frac{1}{\alpha_2 - j\omega} \right\} d\omega = \\ &= \frac{A_1 A_2}{2\pi(\alpha_1 + \alpha_2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha_1 - j\omega}{\alpha_1^2 + \omega^2} + \frac{\alpha_2 + j\omega}{\alpha_2^2 + \omega^2} \right\} d\omega = \\ &= \frac{A_1 A_2}{2\pi(\alpha_1 + \alpha_2)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\alpha_1^2}} \frac{d\omega}{\alpha_1} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\alpha_2^2}} \frac{d\omega}{\alpha_2} \right\} = \frac{A_1 A_2}{\alpha_1 + \alpha_2}. \end{aligned}$$

Функция корреляции. Функция корреляции определяет степень отличия сигнала $s(t)$ от его смещенной копии $s(t-\tau)$. Она равна скалярному произведению этих сигналов:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t-\tau) dt.$$

Свойства функции корреляции. При $\tau = 0$ функция корреляции равна энергии сигнала,

$$K(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt.$$

Функция корреляции является четной:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t - \tau) dt =$$

$$[t - \tau = x; \quad t = x + \tau]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau + x) s^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} s(t + \tau) s^*(t) dt = K(-\tau).$$

При любом значении сдвига τ модуль функции корреляции не превосходит энергии сигнала,

$$|K(\tau)| < K(0) = E.$$

Это следует из неравенства Коши–Буняковского

$$(s(t), s(t - \tau)) \leq \|s(t)\| \cdot \|s(t - \tau)\|.$$

Функция корреляции является симметричной кривой с центральным положительным максимумом и может иметь вид монотонно убывающей или колеблющейся.

Функция корреляции прямоугольного импульса. Как видно из рис. 1.13 и 1.14,

$$K(\tau) = A^2(\tau_u - |\tau|) = A^2\tau_u \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_u}\right).$$

Рис. 1.13

Рис. 1.14

Связь между энергетическим спектром и корреляционной функцией сигнала. Пусть имеются сигнал $s(t)$ и его смещенная копия $s_\tau(t) = s(t - \tau)$. Тогда формула для корреляционной функции принимает вид

$$K(\tau) = (s, s_\tau).$$

Воспользуемся обобщенной формулой Рэлея

$$(s, s_\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) s_\tau^*(\omega) d\omega. \quad (1.29)$$

По теореме смещения

$$s_\tau(\omega) = s(\omega) e^{-j\omega\tau}; \quad s_\tau^*(\omega) = s^*(\omega) e^{j\omega\tau}.$$

После подстановки $s(\omega)$ и $s_\tau^*(\omega)$ в (1.29) получаем

$$(s, s_\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |s(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Учитывая, что $|s(\omega)|^2 = W_s(\omega)$, приходим к выводу, что корреляционная функция и энергетический спектр сигнала образуют фурье-сопряженную пару $K(\tau) \leftrightarrow W_s(\omega)$:

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_s(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega;$$

$$W_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Взаимно-корреляционная функция. Пусть имеются два сигнала $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Скалярное произведение одного сигнала со смещенной копией второго называется *взаимной корреляционной функцией*:

$$K_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t - \tau) dt = (s_1, s_{2\tau}).$$

Взаимно-корреляционная функция не обладает свойством четности:

$$\begin{aligned} K_{12}(-\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t + \tau) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(u - \tau) s_2^*(u) du = K_{21}(\tau). \end{aligned}$$

Поскольку $K_{12}(\tau) \neq K_{21}(\tau)$, следует $K_{12}(-\tau) \neq K_{12}(\tau)$. Для нахождения взаимной спектральной плотности воспользуемся обобщенной формулой Рэлея (1.29),

$$\begin{aligned} K_{12}(\tau) &= (s_1, s_{2\tau}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega) s_{2\tau}^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega) [s_2(\omega) e^{-j\omega\tau}]^* d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega) s_2^*(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{12} e^{j\omega\tau} d\omega. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Здесь $W_{12}(\omega) = s_1(\omega) s_2^*(\omega)$ – взаимный энергетический спектр. Как следует из (1.30), взаимная корреляционная функция и взаимный энергетический спектр двух сигналов являются фурье-сопряженной парой:

$$\begin{aligned} K_{12}(\tau) &\leftrightarrow W_{12}(\omega); \\ K_{12}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega; \\ W_{12}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Взаимно-корреляционная функция удовлетворяет неравенству Коши–Буняковского

$$|K_{12}(\tau)| = |(s_1, s_{2\tau})| \leq \|s_1\| \|s_{2\tau}\|.$$

Для ортогональных сигналов в отсутствие смещения ($\tau = 0$) взаимно-корреляционная функция равна нулю,

$$K_{12}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t) dt = 0.$$

Взаимно-корреляционная функция может отражать устойчивость состояния ортогональности относительно взаимного сдвига сигналов.

1.2. ПОНЯТИЕ О ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ И ИХ ВОЗДЕЙСТВИИ НА СИГНАЛЫ

Любую систему можно представить в виде структуры, имеющей вход и выход (рис. 1.15). Входной и выходной сигналы могут зависеть от времени и пространственных координат. Выходной сигнал часто называют *откликом* или выходной реакцией системы. Будем считать, что сигнал является функцией обобщенной координаты x . Связь между входным и выходным сигналами можно задать, введя *системный оператор* $\hat{G}$:

$$\vec{s}_e = \hat{G}s_i.$$

Выходной сигнал s_e является результатом действия системного оператора $\hat{G}$ на входной сигнал s_i . В общем случае сигналы могут быть многомерными (векторными). Математическая модель физической системы задается системным оператором и областью допустимых сигналов на входе и выходе.

Рис. 1.15

Системы с постоянными во времени параметрами называются *стационарными*. Выходная реакция стационарной системы не зависит от момента поступления входного сигнала:

$$s_e(t \pm t_0) = \hat{G}s_i(t \pm t_0)$$

при любом значении t_0 .

Если система не обладает инвариантностью относительно начала отсчета времени, она называется *нестационарной*. Среди стационарных систем выделяют *линейные системы*, системный оператор которых удовлетворяет следующим свойствам:

$$\hat{G}(s_{i1} + s_{i2}) = \hat{G}s_{i1} + \hat{G}s_{i2};$$

$$\hat{G}(\alpha s_i) = \alpha \hat{G}s_i.$$

(α – произвольное число). Исследование линейных систем можно проводить, изучая реакцию на входные сигналы простейших типов.

Импульсной характеристикой системы (или *импульсным откликом*) называется функция $h(t)$, описывающая реакцию на короткий импульсный сигнал, моделируемый дельта-функцией:

$$s_i = \delta(t),$$

$$h(t) = \hat{G}\delta(t).$$

Для стационарной системы

$$h(t - t_0) = \hat{G}\delta(t - t_0). \quad (1.31)$$

С физической точки зрения импульсный отклик отражает реакцию системы на короткий входной импульсный сигнал с единичной площадью, длительность которого много меньше постоянной времени системы. Используя динамическое представление сигнала через δ -функцию (1.9), для выходной реакции системы получаем

$$s_e = \hat{G}s_i = \hat{G} \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (1.32)$$

Имея в виду, что оператор $\hat{G}$ воздействует лишь на величины, зависящие от времени, запишем (1.32) в виде

$$s_e = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\tau) \hat{G}\delta(t - \tau) d\tau$$

или с учетом (1.31)

$$s_e = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (1.33)$$

Следовательно, выходной сигнал линейной стационарной системы определяется сверткой входного сигнала с импульсным откликом. Выражение (1.33) получило название интеграла Дюамеля.

Для физически реализуемой системы выходной сигнал, отвечающий входному импульсному воздействию, не может возникнуть до момента подачи сигнала на вход: $h(t)=0$ при $t<0$. Поэтому верхний предел в интеграле Дюамеля может быть заменен на текущее время

$$s_e(t) = \int_{-\infty}^t s_i(\tau) h(t-\tau) d\tau.$$

Линейная стационарная система проводит операцию взвешенного суммирования всех мгновенных значений входного сигнала в прошлом, т.е. на интервале $(-\infty, t)$. Физически реализуемая система ни при каких обстоятельствах не способна оперировать с информацией, заключенной в будущих значениях входного сигнала.

Переходной характеристикой линейной стационарной системы называется реакция на входной сигнал, отображаемый ступенчатой функцией Хевисайда:

$$g(t) = \hat{G}\sigma(t);$$

$$g(t-t_0) = \hat{G}\sigma(t-t_0). \quad (1.34)$$

Для физически реализуемой системы $g(t)=0$ при $t<0$.

$$\text{Поскольку } \delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt},$$

$$h(t) = \hat{G} \frac{d\sigma(t)}{dt}.$$

Для линейной системы оператор дифференцирования d/dt и системный оператор $\hat{G}$ коммутируемы и могут меняться местами,

$$h(t) = \frac{d}{dt} \hat{G}\sigma(t).$$

Отсюда с учетом (1.34) получаем

$$h(t) = \frac{d}{dt} g(t),$$

или

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(t) dt.$$

Воспользуемся динамическим представлением сигнала через функцию Хевисайда. Тогда

$$s_e(t) \hat{G} \int_0^t \frac{ds_i}{d\tau} \sigma(t-\tau) d\tau = \int_0^t \frac{ds_i}{d\tau} \hat{G} \sigma(t-\tau) d\tau = \int_0^t \frac{ds_i}{d\tau} g(t-\tau) d\tau.$$

Попробуем определить такой входной сигнал, реакция системы на который являлась бы собственной функцией системного оператора $\hat{G}$:

$$s_e(t) = \hat{G}s_i(t) = Hs_i(t).$$

Здесь H – собственное значение оператора $\hat{G}$. Этому свойству удовлетворяют гармонические сигналы $s_i(t) = \exp(j\omega t)$. Воспользовавшись интегралом Дюамеля, получаем

$$s_e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} h(t-\tau) d\tau.$$

После переобозначения $t-\tau \rightarrow \tau$, $\tau \rightarrow t-\tau$ находим

$$s_e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = H(\omega) e^{j\omega t}.$$

Отсюда следует, что $H(\omega)$ является собственным значением системного оператора $\hat{G}$, а $e^{j\omega t}$ – его собственной функцией.

Комплексное число

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.35)$$

получило название *частотного коэффициента передачи системы*. Как следует из (1.35), *частотный коэффициент передачи и импульсный отклик линейной стационарной системы являются фурье-сопряженной парой*:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt;$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Представим частотный коэффициент передачи в виде

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\psi(\omega)}.$$

Модуль частотного коэффициента $|H(\omega)|$ называется *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ), а фаза $\psi(\omega)$ получила название *фазочастотной характеристики* (ФЧХ).

При описании взаимодействия с сигналом во временной области математической моделью линейной стационарной системы является импульсный отклик, а в частотном пространстве – частотный коэффициент передачи.

В физически реализуемой линейной стационарной системе импульсный отклик должен быть вещественной функцией. Тогда из свойств преобразования Фурье следует, что

$$H(\omega) = H^*(-\omega)$$

и амплитудно-частотная характеристика должна быть четной, а фазочастотная характеристика – нечетной функцией частоты.

Преобразование спектра сигнала линейной системой. Пусть входной сигнал $s_i(t)$ имеет спектральную плотность $s_i(\omega)$,

$$s_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Воздействуем на входной сигнал системным оператором $\hat{G}$:

$$\begin{aligned} s_e = \hat{G}s_i(t) &= \frac{\hat{G}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\omega) \hat{G} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $e^{j\omega t}$ является собственной функцией системного оператора $\hat{G}$, а $H(\omega)$ – его собственным значением. Тогда для спектральной плотности выходного сигнала имеем

$$s_e(\omega) = s_i(\omega) H(\omega). \quad (1.36)$$

Спектральная плотность сигнала определяется произведением спектральной плотности входного сигнала на частотный коэффициент передачи.

Выражение (1.36) следует из интеграла Дюамеля по свойству фурье-преобразования

$$s_e(t) = s_i(t) \otimes h(t) \leftrightarrow s_i(\omega) H(\omega).$$

Многозвенные системы. Пусть линейная стационарная система представляет собой последовательное соединение отдельных звеньев с коэффициентами передачи $H_n(\omega)$, где $n = 1, 2, \dots, N$, N – общее число звеньев (рис. 1.16). Тогда, подведя на вход сигнал $s_i = e^{j\omega t}$, получим для выходного сигнала

$$s_e(t) = H_1(\omega) H_2(\omega) \dots H_N(\omega) e^{j\omega t}.$$

Рис. 1.16

Отсюда находим результирующий коэффициент передачи

$$H(\omega) = \prod_{n=1}^N H_n(\omega).$$

Частотный коэффициент передачи системы, состоящей из последовательно соединенных звеньев, равен произведению частотных коэффициентов передачи звеньев.

В случае параллельного соединения звеньев (рис. 1.17) при входном сигнале $e^{j\omega t}$ выходной сигнал описывается выражением

$$s_e(t) = \sum_{n=1}^N H_n(\omega) e^{j\omega t}, \text{ откуда}$$

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^N H_n(\omega).$$

Результирующий частотный коэффициент передачи при параллельном соединении звеньев равен сумме коэффициентов передачи отдельных звеньев.

Рис. 1.17

Системы с обратной связью (рис. 1.18). Такая система состоит из двух ветвей. Прямая ветвь содержит звено с частотным коэффициентом передачи $H_1(\omega)$. В ветви обратной связи помещено звено с частотным

коэффициентом передачи $H_{fb}(\omega)$.

Рис. 1.18

Пусть спектральная плотность входного сигнала $s_i(\omega)$, выходного — $s_e(\omega)$.

Сигнал с выхода звена $H_1(\omega)$ в прямой ветви через цепь обратной связи вновь поступает на вход. Звено в прямой ветви преобразует суперпозицию сигналов входного $s_i(\omega)$ и преобразованного в цепи обратной связи $s_e(\omega)H_{fb}(\omega)$:

$$[s_i(\omega) \pm s_e(\omega)H_{fb}(\omega)]H_1(\omega) = s_e(\omega).$$

Отсюда получаем

$$s_e(\omega)[1 \mp H_{fb}(\omega)H_1(\omega)] = s_i(\omega)H_1(\omega)$$

или

$$s_e(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{1 \mp H_{fb}(\omega)H_1(\omega)} = H(\omega)s_i(\omega).$$

Следовательно, частотный коэффициент передачи системы с обратной связью определяется выражением

$$H(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{1 \mp H_{fb}(\omega)H_1(\omega)}.$$

Знак « $\rightarrow$ » соответствует положительной обратной связи, а знак « $+$ » — отрицательной.

Преобразование линейной системой энергетических спектральных характеристик сигналов. Согласно формуле Рэлея энергия выходного сигнала

$$E_e = \int_{-\infty}^{\infty} s_e(\omega)s_e^*(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)s_i(\omega)H^*(\omega)s_i^*(\omega)d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 |s_i(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 W_i(\omega) d\omega.$$

Отсюда находим спектр мощности выходного сигнала

$$W_e(\omega) = |H(\omega)|^2 W_i(\omega).$$

Величина

$$H_W(\omega) = |H(\omega)|^2$$

называется частотным коэффициентом передачи мощности системы. Как следует из определения, коэффициент передачи мощности является вещественным.

Преобразование Фурье от коэффициента передачи мощности называется *корреляционной функцией системы*

$$\begin{aligned} K_W(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) [H(\omega) e^{-j\omega\tau}]^* d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_W(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \end{aligned}$$

1.3. ПРОСТРАНСТВО КАК ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА, ПРЕОБРАЗУЮЩАЯ ОПТИЧЕСКИЙ СИГНАЛ

Методы теории линейных систем применимы к любым сигналам, в том числе и к оптическим. В отличие от радиотехники, особенность оптических сигналов – это их пространственный характер. В общем случае сигналы в оптике являются функцией как времени, так и пространства, $s(x, y, z, t)$. Обычно времязависимая и пространственно-зависимая части в математических моделях сигналов могут быть разделены. Преобразования сигналов во времени выполняются с помощью известных методов, широко применяемых в радиотехнике, связи и электронике. Очевидные ограничения здесь определяются односторонностью времени, различием «прошлого» и «будущего» и необходимостью учитывать принцип причинности. Специфика оптических сигналов заключается именно в пространственной зависимости. Обра-

ботка осуществляется обычно системами с двумерным входом и выходом. Для пространственно-зависимых сигналов снимаются ограничения, связанные с однонаправленностью и соответственно причинностью. Вместе с тем плодотворные теории линейных систем в оптике следуют из аналогии волновых и колебательных явлений, электромагнитной природы света и общности используемого математического аппарата [18].

Формальное сходство между оптическими и электрическими сигналами имеет место и при многих нелинейных преобразованиях. Например, фиксация оптического сигнала на фотоплёнке и квадратичное детектирование, голографические методы и гетеродинные преобразования [19].

Распространение оптического сигнала в среде подчиняется общим закономерностям распространения волновых процессов и описывается волновым уравнением $v^2 \nabla^2 s = \partial^2 s / \partial t^2$. Решением волнового уравнения является плоская монохроматическая волна вида

$$s(\mathbf{R}, t) = A \exp\{-j(\omega t - \mathbf{kR})\}, \quad (1.37)$$

где $A \exp\{j(\mathbf{kR})\}$ — комплексная амплитуда. Волновое число

$|\mathbf{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$ однозначно определяется через проекции волнового вектора $\mathbf{k}$ на ортогональные оси (рис. 1.19)

$$k^2 = 4\pi^2 / \lambda^2 = \omega^2 / c^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2,$$

где $k_x = k \sin \alpha$, $k_y = k \cos \alpha \sin \beta$, $k_z = k \cos \alpha \cos \beta$, α и β — углы, задающие направление волнового вектора.

Из (1.37) видно, что в описание плоской волны временные параметры (ω, t) и пространственные $(\mathbf{k}, \mathbf{R})$ входят равноправно.

В параксиальном приближении волновой вектор световой волны направлен под небольшим углом к оптической оси. Если $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ и $\frac{k_x^2 + k_y^2}{2k_z^2} \ll 1$, то волновой вектор $\mathbf{k}$ является параксиальным и для его

z -компоненты справедливо выражение $k_z = \left[k^2 - (k_x^2 + k_y^2) \right]^{1/2} \approx \approx k - \frac{1}{2k} (k_x^2 + k_y^2)$. Это равносильно утверждению, что функция $s(x, y, z)$, описывающая световое поле, по отношению к переменным x и y является медленной функцией в сравнении с зависимостью от координаты z .

Рис. 1.19

Выбирая k_x и k_y независимыми переменными, выражение для комплексной амплитуды поля можно записать в виде

$$A(x, y, z) = A \exp \left\{ \pm jz \left(k^2 - k_x^2 - k_y^2 \right)^{1/2} \right\} \exp \left\{ j \left(k_x x + k_y y \right) \right\}.$$

Условие $k^2 \geq k_x^2 + k_y^2$ соответствует плоской волне, удовлетворяющей в качестве решения волновому уравнению в параксиальном приближении [18]. Если же $k^2 < k_x^2 + k_y^2$, то получается волна неоднородная, экспоненциально затухающая.

Поскольку волновое уравнение – линейное и для него справедлив принцип суперпозиции, в параксиальном приближении решение этого уравнения можно разложить по плоским волнам в интеграл суперпозиции

$$s(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(k_x, k_y, 0) \exp \left\{ \pm jz \left(k^2 - k_x^2 - k_y^2 \right)^{1/2} \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{j(k_x x + k_y y)\right\} dk_x dk_y. \quad (1.38)$$

Здесь $s(k_x, k_y, 0)$ – функция, описывающая угловой спектр поля. Название «угловой спектр» связывается с тем, что функция $s(k_x, k_y, 0)$ определяет распределение амплитуд и фаз плоских волн по направлениям, которые задаются переменными k_x и k_y . В радиофизике это выражение известно как представление Рэлея.

Задавая граничные условия, можно из (1.38) получить точное решение волнового уравнения. Сведем дифракционную задачу к следующей: известно распределение поля $s(x, y, 0)$ в плоскости $z = 0$. Требуется найти поле в произвольной точке $M(x, y, z)$ в полупространстве $z > 0$. Поскольку функция (1.38) аналитическая, она однозначно задается своими значениями на произвольной замкнутой поверхности, ограничивающей пространство $z > 0$. Выберем в качестве такой поверхности плоскость $z = 0$ и полусферу бесконечного радиуса, опирающуюся на эту плоскость. Граничным условием на этой сфере является равенство нулю значений функции (1.38). Физическая обоснованность этого решения следует из конечной скорости распространения света. Выбранные граничные условия известны как приближение Кирхгофа.

Из (1.38) получаем разложение поля в плоскости $z = 0$,

$$s(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(k_x, k_y, 0) \exp\left\{j(k_x x + k_y y)\right\} dk_x dk_y.$$

Это выражение представляет собой интеграл Фурье. Угловой спектр $s(k_x, k_y, 0)$ и поле $s(x, y, 0)$ являются фурье-сопряженными функциями,

$$s(k_x, k_y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y, 0) \exp\left\{-j(k_x x + k_y y)\right\} dx dy. \quad (1.39)$$

Выбор граничных условий на полусфере бесконечного радиуса позволяет устранить знаковую неопределенность показателя экспоненты в интеграле суперпозиции (1.38). Если выбрать знак плюс, то неоднородная волна, распространяющаяся в слабопоглощающейся среде в направлении $z > 0$, будет затухать, что соответствует физической реальности.

Найдем угловой спектр поля в произвольной плоскости z . Выполняя обратное фурье-преобразование в (1.38), получим

$$\begin{aligned} s(k_x, k_y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int s(x, y, z) \exp\{-j(k_x x + k_y y)\} dx dy = \\ &= s(k_x, k_y, 0) H(k_x, k_y). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Отсюда следует, что угловой спектр поля в произвольной плоскости z определяется произведением углового спектра поля в плоскости $z = 0$ на функцию, описывающую фильтрующие свойства пространства, заключенного между плоскостями $z = 0$ и z :

$$H(k_x, k_y) = \exp\left\{jz(k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}\right\}. \quad (1.41)$$

Угловой спектр поля в плоскости $z = 0$ есть фурье-образ поля в этой плоскости (1.39). Аналогично $H(k_x, k_y)$ можно определить как фурье-образ функции $h(x, y)$:

$$H(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int h(x, y) \exp\{-j(k_x x + k_y y)\} dx dy. \quad (1.42)$$

Функции $h(x, y)$ и $H(k_x, k_y)$ составляют фурье-сопряженную пару,

$$h(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int H(k_x, k_y) \exp\{j(k_x x + k_y y)\} dk_x dk_y.$$

Подставляя (1.39) и (1.42) в (1.40), получаем

$$\begin{aligned} s(k_x, k_y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int s(x, y, 0) \exp\{-j(k_x x + k_y y)\} dx dy \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int h(\xi, \eta) \exp\{-j(k_x \xi + k_y \eta)\} d\xi d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \int s(x, y, 0) dx dy \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int h(\xi, \eta) \exp\{-j[k_x(x + \xi) + k_y(y + \eta)]\} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных: $x + \xi = x'$, $y + \eta = y'$. Тогда

$$s(k_x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-j(k_x x' + k_y y')\} dx' dy' \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y, 0) h(x' - x, y' - y) dx dy. \quad (1.43)$$

Сравнивая (1.43) и (1.40), приходим к выражению для поля в произвольной плоскости z :

$$s(x', y', z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y, 0) h(x' - x, y' - y) dx dy. \quad (1.44)$$

Из (1.44) следует, что поле в плоскости z представляется сверткой входного поля (сформированного в плоскости $z = 0$) с функцией $h(x' - x, y' - y)$.

Пространственные и угловые спектры оптических волновых полей. Мы установили, что распространение оптических полей в пространстве может описываться на языке теории линейных систем. Если входное поле $s(x, y, 0)$ задается в плоскости $(x, y, 0)$, а выходное поле $s(x', y', z)$ регистрируется в плоскости (x', y', z) , то угловые спектры и поля в этих плоскостях составляют фурье-сопряженные пары:

$$\begin{cases} s(k_x, k_y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y, 0) \exp\{-j(k_x x + k_y y)\} dx dy; \\ s(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(k_x, k_y, 0) \exp\{j(k_x x + k_y y)\} dk_x dk_y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} s(k_x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x', y', z) \exp\{-j(k_x x' + k_y y')\} dx' dy'; \\ s(x', y', z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(k_x, k_y, z) \exp\{j(k_x x' + k_y y')\} dk_x dk_y. \end{cases}$$

Здесь $s(k_x, k_y, 0)$ и $s(k_x, k_y, z)$ – угловые спектры полей, заданных соответственно в плоскостях $z = 0$ и z . Угловые спектры $s(k_x, k_y, 0)$ и

$s(k_x, k_y, z)$ связаны через частотную когерентную передаточную функцию пространства $H(k_x, k_y)$:

$$s(k_x, k_y, z) = s(k_x, k_y, 0) H(k_x, k_y),$$

где $H(k_x, k_y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \exp\{-j(k_x x + k_y y)\} dx dy$; $h(x, y)$ – импульсный отклик слоя пространства, ограниченного плоскостями $z = 0$ и z .

Поля в плоскостях $z = 0$ и z связаны через импульсный отклик:

$$s(x', y', z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y, 0) h(x' - x, y' - y) dx dy.$$

Частотная когерентная передаточная функция (КПФ) и импульсный отклик пространства составляют фурье-сопряженную пару:

$$H(k_x, k_y) \leftrightarrow h(x, y).$$

Под частотой здесь понимаются пространственные частоты k_x, k_y , однозначно связанные с направляющими углами. Согласно определению пространственной частоты угловой спектр полностью описывает пространственно-частотный спектр поля при известной длине волны. Возможность применения теории линейных систем следует из линейности волнового уравнения и представления его решения интегралом суперпозиции в виде интеграла Фурье. Правомерность такого подхода доказывается тем, что пространственная координата $\mathbf{R}$ и волновой вектор $\mathbf{k}$ (пространственная частота) входят в аргумент плоской волны равноправно со временем t и частотой ω (1.37). В общем случае оптическое поле, зависящее от $\mathbf{R}$ и t , можно представить интегралом Фурье, где спектральная функция сигнала зависит от пространственных и временной частот $s(k_x, k_y, \omega)$.

Импульсный отклик свободного пространства. Для нахождения этой функции в случае распространения излучения в свободном пространстве воспользуемся принципом Гюйгенса–Френеля. В соответствии с этим принципом результирующее поле является суперпозицией когерентных сферических волн, распространяющихся от каждой точки

замкнутой поверхности, окружающей действительный первичный источник. Принцип Гюйгенса–Френеля означает, что волна, сформированная источником, в дальнейшем может рассматриваться независимо от источника.

Пусть во входной плоскости $(x, y, 0)$ локализован точечный источник $\delta(x - \xi, y - \eta)$. Оптическое поле, излучаемое точечным источником, представляет собой сферическую волну. Поле в плоскости наблюдения (x', y', z) можно описать сверткой функции точечного источника с импульсным откликом пространства:

$$\frac{\exp(jkR)}{R} = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s - \xi, y - \eta) h(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где γ – произвольный коэффициент.

Пользуясь фильтрующим свойством δ -функции, находим

$$\frac{\exp\{jkR\}}{R} = \gamma h(x, y).$$

Отсюда

$$h(x, y) = \frac{\exp\{jkR\}}{\gamma R}. \quad (1.45)$$

Радиус волнового фронта сферической волны может быть представлен как

$$R = \left[z^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2 \right]^{\frac{1}{2}} = z \left[1 + \frac{(x - x')^2}{z^2} + \frac{(y - y')^2}{z^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, импульсный отклик свободного пространства с точностью до коэффициента $1/\gamma$ описывается сферической волной от точечного источника. Неоднозначность определения функции h устраняется, если учесть условие взаимной фурье-сопряженности функций h и H . Это условие выполняется при $k_x/k \ll 1$ и $k_y/k \ll 1$, когда выражение

(1.41), описывающее $H(k_x, k_y)$, принимает вид

$$H(k_x, k_y) = \exp \left\{ jkz \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{k_x}{k} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{k_y}{k} \right)^2 \right] \right\}. \quad (1.46)$$

Выполняя фурье-преобразование, получаем

$$\begin{aligned}
 h(x' - x, y' - y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ jkz \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{k_x}{k} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{k_y}{k} \right)^2 \right] \right\} \times \\
 &\times \exp \left\{ j \left[k_x (x' - x) + k_y (y' - y) \right] \right\} dk_x dk_y = \\
 &= \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \exp \left\{ jk \left[z + \frac{(x' - x)^2}{2z} + \frac{(y' - y)^2}{2z} \right] \right\}. \quad (1.47)
 \end{aligned}$$

Сравнивая (1.47) и (1.45), находим $\gamma = j\lambda$ и

$$R \approx z + \frac{(x' - x)^2}{2z} + \frac{(y' - y)^2}{2z}.$$

Следовательно, в параксиальном приближении, когда углы α и β малы, функция $h(x' - x, y' - y)$ удовлетворяет условиям (1.42) и (1.45).

В пространственно-частотной области условием применимости принципа Гюйгенса–Френеля является соотношение $k_x^2 + k_y^2 \ll k^2$.

Соответствующее приближение (1.46) в координатном пространстве называется приближением Френеля. Оно справедливо, если размер l тела, возмущающего входное поле, невелик по сравнению с расстоянием z , на котором регистрируется дифрагированное поле. Физически приближение Френеля соответствует замене вторичных сферических волн Гюйгенса поверхностями второго порядка. Быстрые осцилляции экспоненциальной функции с квадратичным показателем в (1.46) приводят к тому, что интеграл суперпозиции (1.44) имеет малую величину всюду, кроме области значений $x \sim x'$, $y \sim y'$, в которой скорость изменения фазы минимальна. Исследование интеграла суперпозиции методом стационарной фазы показывает, что достаточным условием приближения Френеля является соотношение $\lambda z / \pi l^2 \sim 1$, где l — характерный размер тела, на котором дифрагирует световая волна (например, в случае дифракции на круглом отверстии или экране l является диаметром).

Запишем интеграл суперпозиции (1.44) в приближении Френеля:

$$s(x', y', z) = \frac{1}{j\lambda z} \exp\{jkz\} \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y, 0) \times \\ \times \exp\left\{j\frac{k}{2z}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2\right]\right\} dx dy, \quad (1.48)$$

или

$$s(x', y', z) = \frac{1}{j\lambda z} \exp\{jkz\} \exp\left\{j\frac{k}{2z}(x'^2 + y'^2)\right\} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int s(x, y, 0) \exp\left\{j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right\} \exp\left\{-j\frac{k}{z}(xx' + yy')\right\} dx dy. \quad (1.49)$$

Из (1.49) следует, что распределение поля при дифракции Френеля можно представить как фурье-образ входного поля, умноженного на функцию $\exp\{jk(x^2 + y^2)/2z\}$. Выражение (1.48) описывает дифрагированное поле в приближении Френеля как свертку. Отсюда получаем, что КПФ свободного пространства при дифракции Френеля имеет вид (1.46). Круговые пространственные частоты $k_x = k \sin \alpha$, $k_y = k \cos \alpha \sin \beta$ в параксиальном приближении определяются при $\sin \alpha \approx \alpha \approx (x' - x)/z$, $\sin \beta \approx \beta \approx (y' - y)/z$.

Нахождение пространственной частоты k_x для плоской волны, распространяющейся под углом α к оси z , иллюстрирует рис. 1.20. На плоскости (x, z) параллельными эквидистантными линиями показаны последовательные положения волновых фронтов с пространственным периодом λ . Как видно из рисунка, пространственный период по оси x связан с длиной волны соотношением $\lambda_x = \lambda / \sin \alpha$. Отсюда для x -составляющей пространственной частоты получаем

Рис. 1.20

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x} = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha = k \sin \alpha.$$

Выражение (1.46) для когерентной передаточной функции означает, что свободное пространство по отношению к угловому спектру оптического поля проявляет себя как низкочастотный фильтр с пространственной частотой среза, удовлетворяющей приближению Френеля. Первый экспоненциальный множитель в (1.49) дает общую фазовую задержку, которую получает каждая спектральная компонента при распространении от плоскости $z = 0$ до плоскости z . Вторая экспонента определяет квадратичную по пространственной частоте фазовую дисперсию. Кроме того, j в знаменателе дает общий фазовый сдвиг $-\frac{\pi}{2}$ для углового спектра.

Для практических расчетов дифракционных явлений часто вполне достаточным оказывается еще более грубое приближение, чем приближение Френеля. Если в интеграле суперпозиции (1.49) выполнить условие $z \gg k(x^2 + y^2)/2$, то выходное поле можно найти непосредственно через фурье-преобразование входного поля, заданного в плоскости $z = 0$,

$$s(x', y', z) = \frac{1}{j\lambda z} \exp\{jkz\} \int_{-\infty}^{\infty} \int s(x, y, 0) \exp\left\{-j\frac{k}{z}(xx' + yy')\right\} dx dy. \quad (1.50)$$

Этот случай соответствует значениям $z \gg \pi l^2/\lambda$ и описывает *дифракцию Фраунгофера*. В приближении Фраунгофера модель свободного пространства в качестве низкочастотного фильтра по отношению к угловому спектру оптического поля имеет меньшую полосу пропускания, чем в приближении Френеля.

1.4. ЛИНЗА КАК КВАДРАТИЧНЫЙ ФАЗОВЫЙ ФИЛЬТР

Преобразование пространственно-когерентных оптических сигналов. Описание дифракционных явлений интегралом суперпозиции указывает на возможность применения элементов теории линейных систем в оптике. Это следует из общего вида волнового уравнения, описывающего распространение света в среде. Применение интеграла суперпозиции выявляет важнейшее свойство линейной системы,

состоящее в том, что она полностью определяется импульсным откликом $h(x_1, y_1; x_0, y_0)$:

$$s(x_1, y_1) = \int \int_{-\infty}^{\infty} s(x_0, y_0) h(x_1, y_1; x_0, y_0) dx_0 dy_0. \quad (1.51)$$

Импульсный отклик описывает выходной сигнал в точке x_1, y_1 , когда входным сигналом является δ -функция в точке x_0, y_0 . В оптике импульсный отклик часто называют функцией рассеяния. В решениях дифференциальных уравнений импульсному отклику соответствует функция Грина.

Из линейных оптических систем особо выделяются пространственно-инвариантные (изопланарные) системы, для которых импульсный отклик зависит только от разности координат:

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = h(x_1 - x_0; y_1 - y_0).$$

Пространственно-инвариантные системы преобразуют входной сигнал вида $s(x_0 - \xi, y_0 - \eta)$ в выходной $s(x_1 - \xi, y_1 - \eta)$ для всех $s(x_0, y_0)$. Например, изображение источника, создаваемого изопланарной системой, при неизменной форме меняет только свое положение, если источник в предметной плоскости перемещается. Условие пространственной инвариантности редко выполняется для реальных оптических систем полностью по входной и выходной плоскостям. Однако пространственная инвариантность имеет место в пределах малых областей, называемых изопланарными участками. Для полного описания системы достаточно разбить предметную плоскость на изопланарные участки, определив для каждого свой импульсный отклик. Интеграл суперпозиции (1.51) в случае пространственно-инвариантных систем принимает форму свертки входного сигнала и импульсного отклика:

$$s(x_1, y_1) = \int \int_{-\infty}^{\infty} s(x_0, y_0) h(x_1 - x_0, y_1 - y_0) dx_0 dy_0. \quad (1.52)$$

Анализ пространственно-инвариантных систем особенно упрощается с введением понятия когерентной передаточной функции (КПФ). Основным свойством таких систем является то, что свертке сигнала с импульсным откликом в координатном пространстве соответствует

произведение фурье-образа входного сигнала и передаточной функции в пространственно-частотной области. При этом предполагается, конечно, что масштабы пространственных частот входного и выходного сигналов согласованы,

$$s_e(K_x, K_y) = s_i(K_x, K_y) H(K_x, K_y). \quad (1.53)$$

Здесь $s_e(K_x, K_y)$ – фурье-образ выходной функции $s(x_1, y_1)$; $s_i(K_x, K_y)$ – фурье-образ функции $s_i(x_0, y_0)$; $H(K_x, K_y)$ – фурье-образ импульсного отклика; K_x, K_y – пространственные частоты.

Функция $H(K_x, K_y)$ называется *когерентной передаточной функцией системы*. По аналогии с (1.53) легко показать, что фурье-преобразование свертки в координатном пространстве соответствует произведению фурье-образа одной функции на комплексно-сопряженный фурье-образ другой:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(x_0, y_0) s_2^*(\xi - x_0, \eta - y_0) dx_0 dy_0 = s_1(K_x, K_y) s_2^*(K_x, K_y). \quad (1.54)$$

В соответствии с (1.54) для автосвертки сигнала можно записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x_0, y_0) s^*(\xi - x_0, \eta - y_0) dx_0 dy_0 = |s(K_x, K_y)|^2.$$

Импульсный отклик тонкой линзы. На рис. 1.21 условно изображена оптическая система, линейно преобразующая сигнал, заданный в плоскости (x_0, y_0) , в выходной сигнал, формируемый в плоскости (x_1, y_1) . В этой системе сигнал проходит через оптический элемент, расположенный в плоскости (x, y) . В дальнейшем мы будем широко пользоваться функциями вида

$$\psi(x, y, p) = \exp\left\{(jk/2)p(x^2 + y^2)\right\}, \quad (1.55)$$

где p – действительная или комплексная величина. Очевидно, что

Рис. 1.21

$\psi^*(x, y; p) = \psi(x, y; -p)$. Поместим во входную плоскость точечный источник, координаты которого (x_0, y_0) . Поле точечного источника в плоскости, локализованной непосредственно перед оптическим элементом, в приближении Френеля описывается импульсным откликом свободного пространства (1.47) с учетом (1.55):

$$h(x, y; x_0, y_0) = (D_0 / j\lambda) \psi(x - x_0, y - y_0; D_0),$$

где $D_0 = 1/d_0$. Пусть функция $\varphi(x, y)$ определяет амплитудное и фазовое пропускание исследуемого оптического элемента. Поле непосредственно за элементом можно описать выражением

$$E(x, y) = (D_0 / j\lambda) \psi(x - x_0, y - y_0; D_0) \varphi(x, y). \quad (1.56)$$

Импульсный отклик слоя пространства между оптическим элементом и плоскостью анализа (x_1, y_1) представим с учетом (1.55) в виде

$$h(x_1, y_1; x, y) = (D_1 / j\lambda) \psi(x_1 - x, y_1 - y; D_1),$$

где $D_1 = 1/d_1$. Поле в выходной плоскости определяется интегралом суперпозиции

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int E(x, y) h(x_1, y_1; x, y) dx dy.$$

После выполнения преобразований с учетом (1.56) получаем

$$\begin{aligned} h(x_1, y_1; x_0, y_0) = & - \left(\frac{D_0 D_1}{\lambda^2} \right) \psi(x_0, y_0; D_0) \psi(x_1, y_1; D_1) \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \int \varphi(x, y) \psi(x, y; D_0 + D_1) \times \\ & \times \exp \left\{ -jkD_0 \left[\left(x_0 + \frac{x_1}{\Gamma} \right) x + \left(y_0 + \frac{y_1}{\Gamma} \right) y \right] \right\} dx dy, \end{aligned} \quad (1.57)$$

где $\Gamma = D_0 / D_1$. Для установления явного вида функции $\varphi(x, y)$ необходима дополнительная информация, характеризующая свойства исследуемого оптического элемента. Найдем условия, при которых рас-

сматриваемая система являлась бы пространственно-инвариантной. Например, выберем в качестве выходной плоскости системы плоскость изображения входного сигнала, и пусть оптический элемент с неограниченной апертурой пространственно-инвариантно отображает с точностью до фазовых множителей $\psi(x_0, y_0; D_0)$ и $\psi(x_1, y_1; D_1)$ точку, заданную в предметной плоскости, в инвертированную относительно оптической оси точку на плоскости изображения. В этом случае можно записать:

$$\begin{aligned} \psi^*(x_0, y_0; D_0) \psi^*(x_1, y_1; D_1) h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \\ = -\Gamma^{-1} \delta\left(x_0 + \frac{x_1}{\Gamma}, y_0 + \frac{y_1}{\Gamma}\right). \end{aligned} \quad (1.58)$$

Уравнение (1.58) удовлетворяется при $\phi(x, y) \psi(x, y; D_0 + D_1) = 1$. Отсюда находим

$$\phi(x, y) = \psi\left[x, y; -(D_0 + D_1)\right].$$

Следовательно, оптический элемент в рассматриваемой системе выполняет фазовое преобразование

$$\phi(x, y) = \exp\left\{-j \frac{k}{2} \Phi(x^2 + y^2)\right\}, \quad (1.59)$$

где Φ удовлетворяет условию

$$D_0 + D_1 - \Phi = 0. \quad (1.60)$$

Видно, что (1.60) является известным условием формирования изображения тонкой линзой, оптическая сила которой $\Phi = 1/f$, где f – фокусное расстояние. Тогда Γ принимает смысл линейного коэффициента передачи (увеличения) оптической системы. Мы нашли, что тонкая линза осуществляет квадратичное фазовое преобразование сигнала. Исследуем свойства линзы как оптического элемента, линейно преобразующего комплексную амплитуду сигнала. Подставляя (1.59) в (1.57), получаем выражение для импульсного отклика тонкой линзы с неограниченной апертурой

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = -\left(\frac{D_0 D_1}{\lambda^2}\right) \psi(x_0, y_0; D_0) \psi(x_1, y_1; D_1) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int \psi(x, y; Q) \exp\{-jk[(D_0x_0 + D_1x_1)x + (D_0y_0 + D_1y_1)y]\} dx dy, \quad (1.61)$$

где $Q = D_0 + D_1 - \Phi$. При $Q = 0$ входная и выходная плоскости являются соответственно предметной и плоскостью изображения. Импульсный отклик в этом случае удовлетворяет условию (1.58),

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = -\Gamma^{-1} \psi(x_0, y_0; D_0) \psi(x_1, y_1; D_1) \delta\left[x_0 + \frac{x_1}{\Gamma}; y_0 + \frac{y_1}{\Gamma}\right]. \quad (1.62)$$

Пространственная инвариантность функции рассеяния (1.62) нарушается присутствием квадратичных фазовых множителей $\psi(x_0, y_0; D_0)$ и $\psi(x_1, y_1; D_1)$.

Как видно из (1.61), импульсный отклик тонкой линзы с неограниченной апертурой определяется через фурье-преобразование гауссовой функции $\psi(x, y; Q) = \exp\{(jk/2)Q(x^2 + y^2)\}$. Фурье-образ гауссовой функции согласно (1.25) имеет также гауссову форму:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\beta\xi^2\} \exp\{-jK\xi\} d\xi = \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{K^2}{4\beta}\right\}. \quad (1.63)$$

Учитывая это, для импульсного отклика (1.61) получаем

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \frac{kD_0D_1}{2\pi jQ} \psi\left(x_0, y_0; D_0 - \frac{D_0^2}{Q}\right) \psi\left(x_1, y_1; D_1 - \frac{D_1^2}{Q}\right) \times \\ \times \exp\left\{-jk \frac{D_0D_1}{Q}(x_0x_1 + y_0y_1)\right\}. \quad (1.64)$$

Когерентный импульсный отклик линзы в общем случае не представляется в пространственно-инвариантной форме из-за присутствия квадратичных фазовых множителей. Если на входе системы сформирован сигнал $s(x_0, y_0)$, выходной сигнал согласно (1.52) равен

$$s(x_1, y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x_0, y_0) h(x_1, y_1; x_0, y_0) dx_0 dy_0. \quad (1.65)$$

Обратимся снова к выражению (1.61), описывающему импульсный отклик, и исследуем, при каких условиях тонкая линза является пространственно-инвариантной системой. При $Q = 0$, когда выходная плоскость совпадает с плоскостью изображения входного сигнала, пространственная инвариантность когерентной системы нарушается квадратичными фазовыми множителями $\psi(x_0, y_0; D_0)$ и $\psi(x_1, y_1; D_1)$. Компенсация этих фазовых множителей может быть осуществлена в оптической схеме, показанной на рис. 1.22. В этой схеме пространственная инвариантность достигается за счет помещения в плоскости (x_0, y_0) и (x_1, y_1) компенсационных линз 1 и 3, фокусное расстояние которых выбирается соответственно равным $f_1 = d_0$ и $f_3 = d_1$. При этом импульсный отклик системы приводится к пространственно-инвариантному виду

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = -\Gamma^{-1} \delta\left(x_0 + \frac{x_1}{\Gamma}, y_0 + \frac{y_1}{\Gamma}\right). \quad (1.66)$$

Таким образом, линза в общем случае преобразует оптический сигнал как квадратичный фазовый фильтр.

Рис. 1.22

Преобразование пространственно-некогерентных оптических сигналов. До сих пор мы говорили об оптических системах, линейно отображающих комплексную амплитуду входного сигнала в комплексную амплитуду выходного. Это относится к ситуации, когда оптические сигналы пространственно когерентны, поэтому и система называется когерентной. Если же входной сигнал не является пространственно когерентным, импульсные отклики в выходной плоско-

сти для пространственно разнесенных точечных источников статистически независимы. В этом случае оптическая система, линейно преобразующая интенсивность входного сигнала, называется некогерентной. Импульсный отклик h_{nc} некогерентной системы пропорционален квадрату модуля когерентного импульсного отклика,

$$h_{nc} \sim |h(x_1 - x_0, y_1 - y_0)|^2.$$

Соответственно интенсивность выходного сигнала определяется сверткой интенсивности входного сигнала с некогерентным импульсным откликом:

$$I(x_1, y_1) \sim \int \int_{-\infty}^{\infty} |h(x_1 - x_0, y_1 - y_0)|^2 I(x_0, y_0) dx_0 dy_0.$$

Для пространственно-инвариантной системы можно определить передаточную функцию

$$H_{nc}(K_x, K_y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} h_{nc} \exp \left\{ -j \left[K_x (x_1 - x_0) + K_y (y_1 - y_0) \right] \right\} \times \\ \times d(x_1 - x_0) d(y_1 - y_0),$$

которая называется *оптической передаточной функцией* (ОПФ). Она является фурье-образом импульсного отклика некогерентной изопланарной системы. Фурье-образ $I(K_x, K_y)$ интенсивности выходного сигнала равен произведению фурье-образа $I_0(K_x, K_y)$ интенсивности входного сигнала на ОПФ:

$$I(K_x, K_y) = I_0(K_x, K_y) H_{nc}(K_x, K_y).$$

Связь между ОПФ и КПФ находится из выражения, определяющего фурье-преобразование автосвертки

$$H_{nc}(K_x, K_y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi, \eta) H^*(K_x - \xi, K_y - \eta) d\xi d\eta.$$

1.5. ОПТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

В зависимости от расположения плоскости, в которой локализован входной сигнал, и плоскости его регистрации линза может выполнять различные функции (рис. 1.23). При выполнении условия $D_1 = \Phi$ импульсный отклик (1.64) принимает вид

$$h(x_f, y_f; x_0, y_0) = \frac{k\Phi}{2\pi j} \psi\left(x_f, y_f; \Phi - \frac{\Phi^2}{D_0}\right) \exp\left\{-j(K_x x_0 + K_y y_0)\right\}, \quad (1.67)$$

где $K_x = \frac{k}{f} x_f$, $K_y = \frac{k}{f} y_f$ — круговые пространственные частоты.

Рис. 1.23

Таким образом, если выходной сигнал регистрируется в задней фокальной плоскости (рис. 1.24), он с точностью до квадратичного фазового множителя представляет собой фурье-образ входного сигнала. Из (1.65) с учетом (1.67) имеем

$$\begin{aligned} s(x_f, y_f) &= \frac{k\Phi}{2\pi j} \psi\left(x_f, y_f; \Phi - \frac{\Phi^2}{D_0}\right) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x_0, y_0) \exp\left\{-j(K_x x_0 + K_y y_0)\right\} dx_0 dy_0 = \\ &= \frac{k\Phi}{2\pi j} \psi\left(x_f, y_f; \Phi - \frac{\Phi^2}{D_0}\right) s(K_x, K_y). \end{aligned} \quad (1.68)$$

Рис. 1.24

Следовательно, в задней фокальной плоскости линзы формируется распределение комплексных амплитуд выходного сигнала, которое имеет вид фурье-образа входного сигнала. С точностью до квадратичного фазового множителя это распределение не зависит от положения плоскости, в которой задается входной сигнал. Квадратичный

фазовый множитель $\psi\left(x_f, y_f; \Phi - \frac{\Phi^2}{D_0}\right)$ обращается в единицу,

если входной сигнал задан в передней фокальной плоскости линзы ($D_0 = \Phi$). В этом случае выходной сигнал является фурье-образом

входного сигнала с точностью до постоянного множителя $\frac{k\Phi}{2\pi j}$,

$$\begin{aligned} s(x_f, y_f) &= \frac{k\Phi}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \int s(x_0, y_0) \exp\left\{-j(K_x x_0 + K_y y_0)\right\} dx_0 dy_0 = \\ &= \frac{k\Phi}{2\pi j} s(K_x, K_y). \end{aligned} \quad (1.69)$$

При этом импульсный отклик имеет вид

$$h(x_f, y_f; x_0, y_0) = \frac{k\Phi}{2\pi j} \exp\left\{-j(K_x x_0 + K_y y_0)\right\}. \quad (1.70)$$

Так как сигналы в передней и задней фокальных плоскостях линзы оказываются фурье-сопряженными, эти плоскости называются *фурье-плоскостями*. Если входной сигнал сформирован в произвольной плоскости, для получения точного фурье-преобразования следует в задней фокальной плоскости линзы поместить другую линзу, компенсирующую

в (1.68) квадратичный фазовый множитель $\psi\left(x_f, y_f; \Phi - \frac{\Phi^2}{D_0}\right)$. Фокус-

ное расстояние компенсирующей линзы выбирается из условия

$$\psi\left(x_f, y_f; \Phi - \frac{\Phi^2}{D_0}\right) \psi^*\left(x_f, y_f; \frac{1}{f_K}\right) = 1,$$

откуда $1/f_K = \Phi(1 - \Phi/D_0)$. В частности, если входной сигнал задан в плоскости, расположенной вплотную к основной линзе ($D_0 \rightarrow \infty$), компенсирующая линза и линза, выполняющая фурье-преобразование, идентичны (рис. 1.25). Операция преобразования Фурье, реализуемая оптической системой, связывает координатную (x_0, y_0) и частот-

Рис. 1.25

ную (K_x, K_y) плоскости. Она выполняется как разложение пространственной структуры сложного светового сигнала на множество плоских волн, направляющие косинусы которых соответствуют пространственным частотам. Координатная и частотная плоскости в рассматриваемой оптической системе являются фурье-сопряженными.

Рассмотрим ситуацию, когда условие ($D_1 = \Phi$) не выполняется. В этом случае импульсный отклик (1.64) описывает ядро интегрального преобразования Френеля. Выходной сигнал (1.65) с точностью до квадратичного множителя и постоянного комплексного коэффициента является френелевским образом входного сигнала, а импульсный отклик (1.64) с учетом (1.55) принимает вид

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \frac{D_0 D_1}{j\lambda Q} \exp \left\{ -j \frac{k D_1 \Phi}{2(D_1 - \Phi)} (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ j\gamma \left[(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 \right] \right\},$$

$$\text{где } \gamma = \frac{k}{2} \left(D_0 - \frac{D_0^2}{Q} \right), \quad \xi = \frac{D_1 x_1}{D_1 - \Phi}, \quad \eta = \frac{D_1 y_1}{D_1 - \Phi}.$$

Квадратичный фазовый множитель можно скомпенсировать, поместив в плоскость (x_1, y_1) тонкую линзу, выполняющую фазовое

преобразование $\psi \left[x_1, y_1; \frac{D_1 \Phi}{(D_1 - \Phi)} \right]$. Выходной сигнал в такой системе

является френелевским образом входного сигнала с точностью до постоянного комплексного множителя

$$s(\xi, \eta) = \frac{D_0 D_1}{j\lambda Q} \int_{-\infty}^{\infty} s(x_0, y_0) \exp \left\{ j\gamma \left[(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 \right] \right\} dx_0 dy_0.$$

Отсюда видно, что система с компенсирующей линзой пространственно-инвариантна. Следовательно, фурье-образ выходного сигнала определяется произведением фурье-образа входного сигнала на когерентную передаточную функцию, являющуюся фурье-образом функции Френеля. Согласно (1.63)

$$\begin{aligned} H(K_x, K_y) &= \frac{D_0 D_1}{j\lambda Q} \iint \exp \left\{ j\gamma \left[(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 \right] \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -j \left[K_x (x_0 - \xi) + K_y (y_0 - \eta) \right] \right\} d(x_0 - \xi) d(y_0 - \eta) = \\ &= \frac{\pi D_0 D_1}{\gamma \lambda Q} \exp \left\{ -j \frac{1}{4\gamma} (K_x^2 + K_y^2) \right\}. \end{aligned}$$

Преобразование Френеля является обратимым. Повторное применение этого преобразования с комплексно-сопряженным ядром восстанавливает исходную функцию. Преобразование Френеля основано на явлении дифракции Френеля и имеет в оптике такое же фундаментальное значение, как и преобразование Фурье.

Рассмотрим особенности *обратного преобразования Фурье в оптике*. Обратимся к схеме, показанной на рис. 1.26. На схеме представлены последовательно расположенные вдоль оптической оси две идентичные линзы с оптически сопряженными фурье-плоскостями.

Рис. 1.26

Входной сигнал $s(x_0, y_0)$ задан в передней фокальной плоскости первой линзы. Согласно (1.68) в задней фокальной плоскости формируется фурье-спектр сигнала

$$\begin{aligned} s(x_f, y_f) &= \frac{k\Phi}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x_0, y_0) \exp\left\{-j(K_x x_0 + K_y y_0)\right\} dx_0 dy_0 = \\ &= \frac{k\Phi}{2\pi j} s(K_x, K_y). \end{aligned}$$

Вторая линза выполняет обратное фурье-преобразование сигнала $s(x_f, y_f)$, сформированного в ее передней фурье-плоскости:

$$\begin{aligned} &\frac{k\Phi}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x_f, y_f) \exp\left\{-j(K_x x_0 + K_y y_0)\right\} dx_f dy_f = \\ &= \frac{k\Phi}{(2\pi j)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(K_x, K_y) \exp\left\{-j(K_x x_0 + K_y y_0)\right\} dx_f dy_f = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(K_x, K_y) \exp\left\{-j(K_x x_0 + K_y y_0)\right\} dK_x dK_y = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(K_x, K_y) \exp\left\{j[K_x(-x_0) + K_y(-y_0)]\right\} dK_x dK_y = \\ &= -s(-x_0, -y_0). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что обратное преобразование Фурье в оптике выполняется с инверсией координатных осей. В случае, когда фокусные расстояния линз, выполняющих последовательно прямое и обратное преобразования Фурье, не одинаковы, исходный сигнал восстанавливается в инвертированных осях с линейным коэффициентом увеличения Γ , равным отношению фокусных расстояний:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(K_x, K_y) \exp\left\{-j\left[K_x\left(-\frac{x_0}{\Gamma}\right) + K_y\left(-\frac{y_0}{\Gamma}\right)\right]\right\} dK_x dK_y = \\ &= s\left(-\frac{x_0}{\Gamma}, -\frac{y_0}{\Gamma}\right), \end{aligned}$$

где $\Gamma = \frac{f_1}{f_2}$.

В разделе 1.1.2 обсуждались свойства одномерного преобразования Фурье. Поэтому, не повторяясь в доказательствах, приведем основные свойства оптического преобразования Фурье.

Преобразование масштабов. Сжатие сигнала ведет к растяжению его спектральной плотности в частотном пространстве. При этом амплитуда спектральной плотности уменьшается обратно пропорционально коэффициенту сжатия. Растяжение сигнала вызывает сжатие спектральной плотности в частотном пространстве и соответствующее увеличение ее амплитуды

$$s(ax_0, by_0) \leftrightarrow |ab|^{-1} s\left(\frac{K_x}{a}, \frac{K_y}{b}\right).$$

Сжатие (растяжение) масштаба в координатной плоскости вызывает соответственно растяжение (сжатие) фурье-сопряженной (частотной) плоскости.

Теорема смещения. Смещение сигнала в координатной плоскости соответствует умножению его фурье-образа на фазовый множитель, являющийся линейной функцией частоты:

$$s(x_0 - a, y_0 - b) \leftrightarrow s(K_x, K_y) \exp\{-j(aK_x + bK_y)\}.$$

Смещение фурье-спектра сводится к умножению сигнала в координатной плоскости на соответствующий фазовый множитель

$$s(K_x - a, K_y - b) \leftrightarrow -s(-x_0, -y_0) \exp\{-j(ax_0 + by_0)\}.$$

Изменение знака в фазовом множителе связано с тем, что при обратном фурье-преобразовании в оптической системе происходит инверсия координатных осей.

Инверсия координат в плоскости, где задан сигнал, соответствует инверсии пространственной частоты для фурье-образа сигнала,

$$s(-x_0, -y_0) \leftrightarrow s(-K_x, -K_y).$$

Операция комплексного сопряжения входного сигнала в координатной области отображается в частотной плоскости как комплексное сопряжение фурье-образа сигнала с одновременной инверсией пространственных частот,

$$s^*(x_0, y_0) \leftrightarrow -s^*(-K_x, -K_y).$$

Отсюда непосредственно следует, что действительной и четной функции в координатном пространстве соответствует действительный и четный фурье-образ. Свертке сигналов в координатной плоскости соответствует произведение фурье-спектров в частотном пространстве:

$$s_1(x_0, y_0) \otimes s_2(x_0, y_0) \leftrightarrow s_1(K_x, K_y) s_2(K_x, K_y).$$

Здесь символ $\otimes$ обозначает свертку. Дифференцирование сигнала соответствует умножению его фурье-спектра на комплексный множитель $(jK)^n$, где n – порядок производной:

$$\left\{ \frac{d^n}{dx_0^n} \frac{d^m}{dy_0^m} s(x_0, y_0) \right\} \leftrightarrow (jK_x)^n (jK_y)^m s(K_x, K_y).$$

Интегрирование оптического сигнала соответствует делению его фурье-спектра на комплексный множитель jK ,

$$\left\{ \int_0^{x_0} \int_0^{y_0} s(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} \leftrightarrow \frac{1}{jK_x} \frac{1}{jK_y} s(K_x, K_y).$$

При дифференцировании подавляются спектральные компоненты на низких пространственных частотах и подчеркиваются высокочастотные компоненты, что ведет к оконтуриванию сигнала. Операция интегрирования соответствует подавлению высокочастотных спектральных компонент, в результате чего происходит сглаживание сигнала.

1.6. ОПТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ С ПЕРЕМЕННЫМ МАСШТАБОМ

Локализация входного оптического сигнала между линзой и плоскостью регистрации. Оптический фурье-анализатор, в котором входная плоскость (x_0, y_0) расположена между объективом и задней фурье-плоскостью, показан на рис. 1.27. Выходной сигнал регистрируется в задней фурье-плоскости. Линза освещается плоской волной. Оптическое поле, падающее на входную плоскость, определяется сверткой импульсного отклика непосредственно линзы с импульсным

Рис. 1.27

откликом слоя пространства толщиной $f - d$. В приближении Френеля и неограниченной апертуры можно записать:

$$\begin{aligned}
 E(x_0, y_0) &= \\
 &= \frac{1}{j\lambda(f-d)} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-j\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right\} \times \\
 &\times \exp\left\{j\frac{k}{2(f-d)}\left[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2\right]\right\} dx dy = \\
 &= \frac{1}{j\lambda(f-d)} \exp\left\{j\frac{k}{2(f-d)}(x_0^2 + y_0^2)\right\} \times \\
 &\times \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{j\frac{kd}{2f(f-d)}(x^2 + y^2)\right\} \exp\left\{-j\frac{k}{f-d}(x_0 x + y_0 y)\right\} dx dy = \\
 &= \frac{f}{d} \exp\left\{j\frac{k}{2(f-d)}(x_0^2 + y_0^2)\right\} \exp\left\{-j\frac{kf}{2(f-d)d}(x_0^2 + y_0^2)\right\} = \\
 &= \frac{f}{d} \exp\left\{-j\frac{k}{2d}(x_0^2 + y_0^2)\right\}.
 \end{aligned}$$

Учитывая полученное выражение для поля в плоскости (x_0, y_0) и импульсный отклик слоя пространства толщиной d , находим результирующий отклик

$$\begin{aligned}
 h(x_f, y_f; x_0, y_0) &= \frac{f}{j\lambda d^2} \exp\left\{-j\frac{k}{2d}(x_0^2 + y_0^2)\right\} \times \\
 &\times \exp\left\{j\frac{k}{2d}\left[(x_f - x_0)^2 + (y_f - y_0)^2\right]\right\} = \\
 &= \frac{f}{j\lambda d^2} \exp\left\{j\frac{k}{2d}(x_f^2 + y_f^2)\right\} \exp\left\{-j\frac{k}{d}(x_f x_0 + y_f y_0)\right\}.
 \end{aligned}$$

Введем обозначение $\frac{d}{f} = \xi$. Тогда

$$h(x_f, y_f; x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda d \xi} \exp\left\{j\frac{k}{2f\xi}(x_f^2 + y_f^2)\right\} \exp\left\{-j\frac{k}{f\xi}(x_f x_0 + y_f y_0)\right\}.$$

Отсюда видно, что оптическая схема, показанная на рис. 1.27, выполняет фурье-преобразование сигнала с точностью до квадратичного фазового множителя $\exp\left\{j\frac{k}{2f\xi}(x_f^2 + y_f^2)\right\}$. Квадратичный фазовый множитель устраняется в плоскости (x_f, y_f) с помощью компенсирующей линзы, фокусное расстояние которой $f_k = f\xi$. Масштаб фурье-преобразования изменяется за счет выбора параметра $\xi = \frac{d}{f}$. Если $\xi = 1$,

то $d = f$ и

$$h(x_f, y_f; x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda d f} \exp\left\{j\frac{k}{2f}(x_f^2 + y_f^2)\right\} \exp\left\{-j\frac{k}{f}(x_f x_0 + y_f y_0)\right\}.$$

При необходимости квадратичный фазовый множитель можно устранить, если установить в выходной плоскости компенсирующую линзу, идентичную линзе, выполняющей фурье-преобразование. Поскольку $\xi \leq 1$, выбор ξ определяет масштаб сжатия фурье-спектра сигнала в выходной плоскости,

$$h(x_f, y_f; x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda d \xi} \exp\left\{j\frac{k}{f\xi}(x_f^2 + y_f^2)\right\} \exp\left\{-j\frac{1}{\xi}(K_x x_0 + K_y y_0)\right\}. \quad (1.71)$$

Оптическая схема, позволяющая расширить предел изменения масштаба фурье-преобразования, представлена на рис. 1.28. Входная плоскость (x_0, y_0) расположена между линзой и плоскостью регистрации (x_1, y_1) . Отличительная особенность линзы состоит в том, что поле

Рис. 1.28

в плоскости (x_0, y_0) формируется линзой от точечного источника s , расположенного в плоскости (x', y') в точке $x' = 0, y' = 0$ на расстоянии d_0 от линзы (в отличие от ситуации на рис. 1.27, где источник находится в бесконечности).

Поле в плоскости (x_0, y_0) определяется импульсным откликом

$$h(x_0, y_0; x', y') = \frac{D_0 \tilde{D}}{j\lambda Q'} \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(D_0 - \frac{D_0^2}{Q'} \right) (x'^2 + y'^2) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(\tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'} \right) (x_0^2 + y_0^2) \right\} \exp \left\{ -j \frac{k D_0 \tilde{D}}{Q'} (x_0 x' + y_0 y') \right\}, \quad (1.72)$$

где $D_0 = \frac{1}{d_0}$; $\tilde{D} = \frac{1}{d_1 - d}$; $Q' = D_0 + \tilde{D} - \Phi$; $\Phi = \frac{1}{f}$. Поскольку источник расположен в точке $x' = 0, y' = 0$, получаем с точностью до постоянного коэффициента

$$h(x_0, y_0; 0, 0) = \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(D - \frac{D^2}{Q'} \right) (x_0^2 + y_0^2) \right\}.$$

Отсюда находим выражение для результирующего импульсного отклика:

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda d} h(x_1, y_1; 0, 0) \exp \left\{ j \frac{k}{2d} [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] \right\} = \\ = \frac{1}{j\lambda d} \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(\tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'} \right) (x_0^2 + y_0^2) \right\} \exp \left\{ j \frac{k}{2d} [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] \right\} = \\ = \frac{1}{j\lambda d} \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(\tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'} + \frac{1}{d} \right) (x_0^2 + y_0^2) \right\} \exp \left\{ j \frac{k}{2d} (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -j \frac{k}{2d} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}. \quad (1.73)$$

Для того чтобы перейти в (1.73) от преобразования Френеля к преобразованию Фурье, необходимо условие

$$\tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'} + \frac{1}{d} = 0. \quad (1.74)$$

Это условие выполняется, если $\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f} = 0$, т.е. в выходной плоскости должно формироваться изображение источника. В самом деле,

$$Q' = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_1 - d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f} - \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_1 - d} = \frac{d}{d_1(d_1 - d)} = \frac{D_1 \tilde{D}}{D}.$$

После подстановки в (1.74) получаем

$$\frac{1}{d_1 - d} - \frac{d_1(d_1 - d)}{d(d_1 - d)^2} + \frac{1}{d} = -\frac{1}{d} + \frac{1}{d} = 0.$$

Отсюда выражение (1.73) для результирующего импульсного отклика принимает вид

$$\begin{aligned} h(x_1, y_1; x_0, y_0) &= \frac{1}{j\lambda d} \exp \left\{ j \frac{k}{2d} (x_1^2 + y_1^2) \right\} \exp \left\{ -j \frac{k}{d} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\} = \\ &= \frac{1}{j\lambda d_1 \eta} \exp \left\{ j \frac{k}{2d_1 \eta} (x_1^2 + y_1^2) \right\} \exp \left\{ -j \frac{k}{d_1 \eta} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}, \end{aligned}$$

где $\eta = \frac{d}{d_1}$ — коэффициент, определяющий масштаб фурье-преобразования. Если перейти к коэффициенту $\xi = \frac{d}{f}$, как в выражении (1.71), получаем

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \frac{1}{jf\xi\lambda} \exp \left\{ j \frac{k}{2f\xi} (x_1^2 + y_1^2) \right\} \exp \left\{ -j \frac{k}{f\xi} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}. \quad (1.75)$$

Мы пришли к выражению, идентичному (1.71), однако теперь коэффициент ξ может принимать значения как меньше, так и больше

Рис. 1.29

единицы. Следовательно, схема, приведенная на рис. 1.28, позволяет выполнять преобразования Фурье не только со сжатием, но и с растяжением фурье-спектра, если за исходный пространственный масштаб принять значение, соответствующее $\xi = 1$.

Обратимся к наиболее общему случаю, когда световое поле, освещающее входную плоскость, является сходящейся сферической (в параболическом приближении) волной, радиус кривизны волнового фронта которой R (рис. 1.29). Сигнал регистрируется в плоскости (x_1, y_1) , расположенной на расстоянии d от входной плоскости (x_0, y_0) . Запишем выражение для импульсного отклика

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda d} \exp \left\{ -j \frac{k}{2R} (x_0^2 + y_0^2) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ j \frac{k}{2d} [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] \right\}.$$

После преобразований

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda d} \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right) (x_0^2 + y_0^2) \right\} \exp \left\{ j \frac{k}{2d} (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -j \frac{k}{2d} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}.$$

Отсюда видно, что слой пространства толщиной d , входная плоскость которого освещена сферической сходящейся волной, выполняет преобразование Френеля, которое с точностью до квадратичного фазового множителя переходит в преобразование Фурье при условии $1/d - 1/R = 0$:

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{j\lambda R} \exp \left\{ j \frac{k}{2R} (x_1^2 + y_1^2) \right\} \exp \left\{ -j \frac{k}{R} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}. \quad (1.76)$$

Как следует из (1.76), оптическое преобразование Фурье выполняется в сходящемся пучке, если выходная плоскость проходит через центр кривизны волнового фронта светового поля, освещающего входную плоскость.

Рис. 1.30

Рассмотрим преобразование Фурье с переменным масштабом в ситуации, когда входная плоскость (x_0, y_0) расположена между источником и линзой (рис. 1.30). В точке $x = 0, y = 0$ помещен точечный источник светового поля, освещающего входную плоскость (x_0, y_0) . Источник расположен на расстоянии d от входной плоскости (x_0, y_0) и d_0 — от линзы. Выходной сигнал регистрируется в плоскости (x_1, y_1) . Световое поле в плоскости (x_0, y_0) , сформированное точечным источником s , описывается с точностью до постоянного коэффициента выражением

$$h(x_0, y_0; 0, 0) = \exp \left\{ j \frac{k}{2d} (x_0^2 + y_0^2) \right\}.$$

С учетом этого импульсный отклик оптической системы, ограниченной плоскостями (x_0, y_0) и (x_1, y_1) , имеет вид

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \frac{\tilde{D} D_1}{j \lambda Q'} \exp \left\{ j \frac{k}{2d} (x_0^2 + y_0^2) \right\} \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(D_1 - \frac{D_1^2}{Q'} \right) (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(\tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'} \right) (x_0^2 + y_0^2) \right\} \exp \left\{ -j \frac{k \tilde{D} D_1}{Q'} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\},$$

где $Q' = \tilde{D} + D_1 - \Phi$; $\tilde{D} = \frac{1}{d_0 - d}$; $D_1 = \frac{1}{d_1}$; $\Phi = \frac{1}{f}$. После преобразования получим

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \frac{\tilde{D}D_1}{j\lambda Q'} \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(\frac{1}{d} + \tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'} \right) (x_0^2 + y_0^2) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(D_1 - \frac{D_1^2}{Q'} \right) (x_1^2 + y_1^2) \right\} \exp \left\{ -j \frac{k\tilde{D}D_1}{Q'} (x_1x_0 + y_1y_0) \right\}.$$

Отсюда видно, что в общем случае в схеме реализуется преобразование Френеля, которое переходит в преобразование Фурье, если выполняется условие, аналогичное по виду (1.74)

$$\frac{1}{d} + \tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'} = 0, \quad (1.77)$$

или

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f} = 0.$$

Действительно, с учетом (1.77) имеем

$$Q' = \frac{1}{d_0 - d} + \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f} = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f} - \frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_0 - d} = \frac{d}{d_0(d_0 - d)}.$$

После подстановки этого выражения в (1.77) получаем

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d_0 - d} - \frac{d_0(d_0 - d)}{(d_0 - d)^2 d} = \frac{1}{d} - \frac{1}{d} = 0.$$

Следовательно, преобразование Фурье выполняется, если выходная плоскость согласно (1.77) является плоскостью изображения источника. Учитывая (1.76), запишем

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \\ = \frac{d_0}{j\lambda d_1 d} \exp \left\{ j \frac{k}{2d_1} \left(1 - \frac{d_0(d_0 - d)}{d_1 d} \right) (x_1^2 + y_1^2) \right\} \exp \left\{ -j \frac{k d_0}{d_1 d} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}.$$

Вводя обозначение $\frac{d_1 d}{d_0 f} = \Gamma \xi$, где $\xi = \frac{d}{f}$, $\Gamma = \frac{d_1}{d_0}$ – линейный коэффициент увеличения при формировании изображения источника, получаем

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = -\frac{1}{\lambda f \Gamma \xi} \exp \left\{ j \frac{k}{2d_1} \left(1 - \frac{(d_0 - d)}{f \Gamma \xi} \right) (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -j \frac{k}{f \Gamma \xi} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}.$$

При $\Gamma = 1$ имеем

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \frac{1}{j \lambda f \xi} \exp \left\{ j \frac{k}{2d_1} \left(1 - \frac{d_0 - d_1}{f \xi} \right) (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -j \frac{k}{f \xi} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}.$$

Коэффициентом ξ определяется масштаб фурье-преобразования. При $\Gamma \xi < 1$; $\frac{d_1 d}{d_0 f} < 1$; $\frac{d_1}{d_0} < \frac{f}{d}$ происходит сжатие фурье-спектра. Если $\xi > 1$;

$\frac{d_1}{d_0} > \frac{f}{d}$ – фурье-спектр растягивается по сравнению с исходным мас-

штабом. Если $\Gamma \xi = 1$ $\frac{d_1}{d_0} = \frac{f}{d}$.

1.7. ОПТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ С ЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Рассмотрим ситуацию, когда произвольный источник светового поля, освещающего входную плоскость (x_0, y_0) в схеме на рис. 1.31, расположен в плоскости (x', y') . Для импульсного отклика оптической системы, входная плоскость которой (x_0, y_0) , а выходная (x_1, y_1) , имеем

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \frac{1}{j \lambda d} \exp \left\{ j \frac{k}{2d} [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] \right\} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x', y') h(x_0, y_0; x', y') dx' dy'. \quad (1.78)$$

Рис. 1.31

Здесь $h(x_0, y_0; x', y')$ определяется выражением (1.72), функция $p(x', y')$ описывает форму источника. Пусть источник – линейный, ориентированный вдоль оси x' , $p(x', y') = \delta(y')$. После подстановки $p(x', y') = \delta(y')$ и $h(x_0, y_0; x', y')$ из (1.72) в (1.78), получаем

$$\begin{aligned}
 h(x_1, y_1; x_0, y_0) &= \frac{1}{j\lambda d} \frac{D_0 \tilde{D}}{j\lambda Q'} \exp \left\{ j \frac{k}{2d} \left[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 \right] \right\} \times \\
 &\exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(\tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'} \right) (x_0^2 + y_0^2) \right\} \int \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y') \exp \left\{ j\beta (x'^2 + y'^2) \right\} \times \\
 &\times \exp \left\{ -j \frac{k D_0 \tilde{D}}{Q'} (x_0 x' + y_0 y') \right\} dx' dy' = \\
 &= -\frac{D_0 \tilde{D}}{\lambda^2 d Q'} \exp \left\{ j \frac{k}{2d} \left[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 \right] \right\} \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(\tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'} \right) (x_0^2 + y_0^2) \right\} \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(j\beta x'^2 \right) \exp \left\{ -j \frac{k D_0 \tilde{D}}{Q'} x_0 x' \right\} dx', \quad (1.79)
 \end{aligned}$$

где $\beta = \frac{k}{2} \left(D_0 - \frac{D_0^2}{Q'} \right)$. Интегрируя по y' , мы воспользовались фильтрующим свойством δ -функции. Интеграл по x' представляет собой

фурье-преобразование гауссовой функции. Выполняя интегрирование в (1.79), находим с точностью до комплексного множителя

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) \approx \exp \left\{ j \frac{k}{2d} \left[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 \right] \right\} \times \\ \times \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(\tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'} \right) (x_0^2 + y_0^2) \right\} \exp \left\{ -j \frac{k D_0 \tilde{D}^2}{2Q'(Q' - D_0)} x_0^2 \right\}. \quad (1.80)$$

Учитывая согласно (1.74) $Q' = D_0 + \tilde{D} - \Phi$, $\tilde{D} = 1/(d_1 - d)$ и подставляя β в (1.80), после элементарных преобразований приводим выражение (1.80) к виду

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) \approx \exp \left\{ j \frac{k}{2d} (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left[\frac{1}{d} + \tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'} \left(1 + \frac{D_0}{\tilde{D} - \Phi} \right) \right] x_0^2 \right\} \times \\ \times \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left[\frac{1}{d} + \tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'} \right] y_0^2 \right\} \exp \left\{ -j \frac{k}{d} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}. \quad (1.81)$$

Из (1.81) видно, что схема (рис. 1.31) выполняет в общем случае преобразование Френеля.

Как показано в разделе 1.6, если выходная плоскость (x_1, y_1) является плоскостью изображения источника, $D_0 + D_1 - \Phi = 0$ и зависящий от y_0 квадратичный фазовый множитель в (1.81) обращается в единицу (1.77). Тогда

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) \approx \exp \left\{ j \frac{k}{2d} (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -j \frac{k D_0 \tilde{D}^2}{2Q'(\tilde{D} - \Phi)} x_0^2 \right\} \exp \left\{ -j \frac{k}{d} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}. \quad (1.82)$$

Следовательно, в выходной плоскости (x_1, y_1) , оптически сопряженной с плоскостью (x', y') , выполняется фурье-преобразование по оси y_1 и

преобразование Френеля по оси x_1 . Деля в (1.82) подстановку

$$\frac{D_0 \tilde{D}^2}{Q'(\tilde{D} - \Phi)} = -\frac{d_1 f}{d_0 d(f + d - d_1)}, \text{ окончательно получаем}$$

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \exp \left\{ j \frac{k}{2d} (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ j \frac{kd_1 f}{dd_0(f + d - d_1)} x_0^2 \right\} \exp \left\{ -j \frac{k}{f\xi} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}, \quad (1.83)$$

где $\xi = \frac{d}{f}$. Отсюда видно, что фурье-преобразование по оси y_1 в анали-

зируемой схеме реализуется с масштабным коэффициентом $\xi = \frac{d}{f}$.

Изображение линейного источника, формируемое вдоль оси x_1 , делит частотное пространство в фурье-плоскости на область положительных и область отрицательных частот.

Определим положение выходной плоскости, в которой формируется x -составляющая фурье-спектра. Позиционирование этой плоскости следует из условия, при котором зависящий от x_0 квадратичный фазовый множитель в (1.81) обращается в единицу. Это условие следует из равенства

$$\frac{1}{d} + \tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'} \left(1 + \frac{D_0}{\tilde{D} - \Phi} \right) = 0,$$

или

$$\frac{1}{d} + \tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{\tilde{D} - \Phi} = 0,$$

откуда получаем

$$f = d_1. \quad (1.84)$$

Выполняя с учетом (1.84) элементарные преобразования в (1.81), находим

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \exp \left\{ j \frac{k}{2d} (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times$$

$$\times \exp \left\{ j \frac{k}{2d_0} y_0^2 \right\} \exp \left\{ -j \frac{k}{f\xi} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}. \quad (1.85)$$

Как видно из (1.85), при выполнении условий (1.84) анализируемая оптическая схема осуществляет преобразование Фурье по оси x и преобразование Френеля по оси y .

При совмещении плоскости, в которой локализован линейный источник, с передней фокальной плоскостью линзы ($d_0 = f$) выражение (1.85) для импульсного отклика преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} h(x_1, y_1; x_0, y_0) = & \exp \left\{ j \frac{k}{2d} (x_1^2 + y_1^2) \right\} \exp \left\{ j \frac{k}{2f} y_0^2 \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -j \frac{k}{f\xi} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Из (1.85) и (1.86) следует, что в выходной плоскости формируется x -компонента фурье-спектра сигнала, локализованного в плоскости (x_0, y_0) с масштабным коэффициентом 3. В этом случае фурье-спектр линейного источника, в приближении бесконечной апертуры линзы пропорциональный дельта-функции $\delta(x_1)$, делит частотную плоскость (x_1, y_1) на две полуплоскости, соответствующие положительным и отрицательным x -компонентам частоты.

Рассмотрим ситуацию, когда в схеме, показанной на рис. 1.31, в плоскости (x', y') помещен крестообразный источник, структурная функция которого $P(x', y') = \delta(x') + \delta(y')$. Подставляя $P(x', y')$ в (1.78) и выполняя интегрирование, получаем с учетом (1.81) и с точностью до комплексного множителя

$$\begin{aligned} h(x_1, y_1; x_0 y_0) = & \exp \left\{ j \frac{k}{2d} (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times \\ & \times \left\{ \exp \left(j \frac{kD_0 \tilde{D}^2}{2Q'(\tilde{D} - \Phi)} x_0^2 \right) + \exp \left(j \frac{kD_0 \tilde{D}^2}{2Q'(\tilde{D} - \Phi)} y_0^2 \right) \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left[\frac{1}{d} + \tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'} \right] (x_0^2 + y_0^2) \right\} \exp \left\{ -j \frac{k}{d} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}. \end{aligned}$$

Если выходная плоскость (x_1, y_1) является плоскостью изображения источника, то $\frac{1}{d} + \tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'} = 0$ и это выражение для импульсного отклика принимает вид

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \exp \left\{ j \frac{k}{2d} (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times \\ \times \left\{ \exp \left[-j \frac{k D_0 (D + \tilde{D})}{2(\tilde{D} - \Phi)} x_0^2 \right] + \exp \left[-j \frac{k D_0 (D + \tilde{D})}{2(\tilde{D} - \Phi)} y_0^2 \right] \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -j \frac{k}{f \xi} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}.$$

Отсюда следует, что в плоскости изображения крестообразного источника выполняется преобразование Френеля.

В случае, когда плоскость, в которой сформирован источник, совмещена с передней фокальной плоскостью объектива, $(d_0 = f)$, а выходной плоскостью является задняя фокальная плоскость $(d_1 = f)$, импульсный отклик приводится к следующему выражению:

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \exp \left\{ j \frac{k}{2d} (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times \\ \times \left[\exp \left(j \frac{k}{d} x_0^2 \right) + \exp \left(j \frac{k}{d} y_0^2 \right) \right] \exp \left\{ -j \frac{k}{f \xi} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}. \quad (1.87)$$

В плоскости регистрации согласно (1.87) получается с точностью до комплексного множителя сумма произведений преобразования Фурье по оси x_0 на преобразование Френеля по оси y_0 и преобразования Фурье по оси y_0 на преобразование Френеля по оси x_0 .

Обратимся к схеме, представленной на рис. 1.32. Она является аксонометрическим изображением схемы, выполняющей оптическое преобразование Фурье с переменным масштабом, показанной на рис. 1.30.

Рис. 1.32

Пусть в плоскости (x', y') помещен точечный источник света. Световое поле в плоскости (x_0, y_0) , сформированное этим источником, определяется импульсным откликом слоя пространства толщиной d :

$$h(x_0, y_0; x', y') = \frac{f}{j\lambda d} \exp \left\{ j \frac{k}{2d} \left[(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 \right] \right\}. \quad (1.88)$$

Импульсный отклик оптической системы (рис. 1.32) с учетом освещающего светового поля (1.88) и в пренебрежении конечной апертурой фурье-объектива запишем в виде

$$\begin{aligned} h(x_1, y_1; x_0, y_0) &= \frac{1}{j\lambda d} \frac{\hat{D}D_1}{j\lambda \hat{Q}} \exp \left\{ j \frac{k}{d} \left(D_1 - \frac{D_1^2}{\hat{Q}} \right) (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ j \frac{k}{d} \left(\hat{D} - \frac{\hat{D}^2}{Q'} \right) (x_0^2 + y_0^2) \right\} \exp \left\{ -j \frac{k\hat{D}D_1}{\hat{Q}} (x_1x_0 + y_1y_0) \right\} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x', y') \exp \left\{ j \frac{k}{2d} \left[(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 \right] \right\} dx' dy', \quad (1.89) \end{aligned}$$

где $\hat{Q} = \hat{D} + D_1 - \Phi$; $\hat{D} = \frac{1}{d_0 - d}$; $D_1 = \frac{1}{d_1}$; $\Phi = \frac{1}{f}$. Для линейного источника, ориентированного вдоль оси x' , структурная функция $p(x', y') = \delta(y')$. Тогда интегрирование по y' в выражении (1.89) дает

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = -\frac{\tilde{D}D_1}{\lambda^2 d Q'} \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(D_1 - \frac{D_1^2}{\hat{Q}} \right) (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(\hat{D} - \frac{\hat{D}^2}{\hat{Q}} \right) (x_0^2 + y_0^2) \right\} \exp \left\{ j \frac{k}{2d} (x_0^2 + y_0^2) \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -j \frac{k \hat{D} D_1}{\hat{Q}} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(j \frac{k}{2d} x'^2 \right) \exp \left(-j \frac{k}{d} x_0 x' \right) dx'. \end{aligned}$$

После интегрирования по x' получаем с точностью до комплексного множителя

$$\begin{aligned} h(x_1, y_1; x_0, y_0) = & \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(D_1 - \frac{D_1^2}{\hat{Q}} \right) (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(\hat{D} - \frac{\hat{D}^2}{\hat{Q}} \right) x_0^2 \right\} \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(\hat{D} - \frac{\hat{D}^2}{\hat{Q}} + \frac{1}{d} \right) y_0^2 \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -j \frac{k \hat{D} D_1}{\hat{Q}} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}. \end{aligned} \quad (1.90)$$

При выполнении условия $\hat{D} - \frac{\hat{D}^2}{\hat{Q}} + \frac{1}{d} = 0$, или, что то же самое, при $D_0 + D_1 - \Phi = 0$ импульсный отклик (1.90) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} h(x_1, y_1; x_0, y_0) = & \exp \left\{ j \frac{k D_1 (\hat{D} - \Phi)}{2(\hat{D} - D_0)} (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -j \frac{k}{2d} x_0^2 \right\} \exp \left\{ -j \frac{k}{f \Gamma \xi} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}, \end{aligned} \quad (1.91)$$

где $\xi = \frac{d}{f}$; $\Gamma = \frac{d_1}{d_0}$ — коэффициент увеличения фурие-объектива. Из

(1.91) видно, что плоскость изображения линейного источника в схеме на рис. 1.32 является фурие-плоскостью, где реализуется одномерное фурие-преобразование по оси y_1 и преобразование Френеля по оси x_1 . Масштаб фурие-преобразования может изменяться выбором параметров Γ и ξ .

Условием выполнения одномерного фурье-преобразования по оси x_0 , как следует из (1.90), является $\hat{D} - \frac{\hat{D}^2}{\hat{Q}} = 0$, которое после элементарных преобразований трансформируется в равенство $D_1 = \Phi$. В этом случае выражение для импульсного отклика принимает вид

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = -\frac{1}{j\lambda f} \exp\left\{j\frac{k}{2d}y_0^2\right\} \exp\left\{-j\frac{k}{f}(x_1x_0 + y_1y_0)\right\}. \quad (1.92)$$

Пусть в схеме, показанной на рис. 1.32, используется крестообразный источник со структурной функцией $P(x', y') = \delta(x') + \delta(y')$. Выполняя интегрирование в (1.89) с использованием фильтрующих свойств δ -функции, получаем

$$\begin{aligned} h(x_1, y_1; x_0, y_0) = & -\frac{\hat{D}D_1}{j\lambda\hat{Q}} \exp\left\{j\frac{k}{2}\left(D_1 - \frac{D_1^2}{\hat{Q}}\right)(x_1^2 + y_1^2)\right\} \times \\ & \times \left[\exp\left(j\frac{k}{2d}x_0^2\right) + \exp\left(j\frac{k}{2d}y_0^2\right)\right] \times \\ & \times \exp\left[j\frac{k}{2}\left(\hat{D} - \frac{\hat{D}^2}{\hat{Q}}\right)(x_0^2 + y_0^2)\right] \exp\left\{-j\frac{k\hat{D}D_1}{\hat{Q}}(x_1x_0 + y_1y_0)\right\}. \quad (1.93) \end{aligned}$$

Из (1.93) следует, что в плоскости изображения крестообразного источника, положение которой определяется условиями $\hat{D} - \frac{\hat{D}^2}{\hat{Q}} + \frac{1}{d} = 0$, $D_0 + D_1 - \Phi = 0$, импульсный отклик $h(x_1, y_1; x_0, y_0)$ преобразуется к виду

$$\begin{aligned} h(x_1, y_1; x_0, y_0) = & -\frac{1}{j\lambda f\Gamma\xi} \exp\left\{j\frac{kD_1(\hat{D} - \Phi)}{2(\hat{D} - D_0)}(x_1^2 + y_1^2)\right\} \times \\ & \times \left[\exp\left(j\frac{k}{2d}x_0^2\right) + \exp\left(j\frac{k}{2d}y_0^2\right)\right] \exp\left[-j\frac{k}{f\Gamma\xi}(x_1x_0 + y_1y_0)\right]. \quad (1.94) \end{aligned}$$

Из (1.94) видно, что в плоскости изображения крестообразного источника реализуется с точностью до фазового множителя сумма произве-

дений одномерных преобразований Френеля и преобразований Фурье по соответствующим осям.

Обратимся к оптической схеме, показанной на рис. 1.33. Фрагмент этой схемы, ограниченный входной плоскостью (x_0, y_0) и выходной плоскостью (x_1, y_1) , идентичен схеме, показанной на рис. 1.23. Входная плоскость (x_0, y_0) освещается световым полем от линейного источника, ориентированного вдоль оси x' в передней фурье-плоскости

Рис. 1.33

(x', y') объектива 1. Задняя фурье-плоскость этого объектива совмещена с плоскостью (x_0, y_0) . Определим импульсный отклик оптической схемы (рис. 1.33) с учетом структуры светового поля, освещающего входную плоскость (x_0, y_0) :

$$\begin{aligned}
 h(x_1, y_1; x_0, y_0) = & \frac{D_0 D_1}{j \lambda Q} \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(D_1 - \frac{D_1^2}{Q} \right) (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times \\
 & \times \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(D_0 - \frac{D_0^2}{Q} \right) (x_0^2 + y_0^2) \right\} \exp \left\{ -j \left(\frac{D_0 D_1}{Q} \right) (x_0 x_1 + y_0 y_1) \right\} \times \\
 & \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x'_1, y'_1) h(x_0, y_0; x', y') dx' dy', \quad (1.95)
 \end{aligned}$$

где согласно (1.70) $h(x_0, y_0; x', y') = \frac{1}{j \lambda F} \exp \left\{ -j \frac{k}{F} (x' x_0 + y' y_0) \right\}$, $p(x'_1, y'_1)$ – структурная функция, описывающая источник в плоскости

(x', y') . Для линейного источника, ориентированного вдоль оси x' , $p(x'_1, y'_1) = \delta(y')$. В (1.95) мы воспользовались выражением (1.64) для импульсного отклика части оптической схемы, ограниченной плоскостями (x_0, y_0) и (x_1, y_1) . Делая подстановку $h(x_0, y_0; x', y')$ и $p(x', y') = \delta(y')$ в (1.95) и выполняя интегрирование по y' , получаем

$$\begin{aligned} h(x_1, y_1; x_0, y_0) = & -\frac{D_0 D_1}{\lambda^2 F Q} \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(D_1 - \frac{D_1^2}{Q} \right) (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(D_0 - \frac{D_0^2}{Q} \right) (x_0^2 + y_0^2) \right\} \exp \left\{ -jk \frac{D_0 D_1}{Q} (x_0 x_1 + y_0 y_1) \right\} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -j \frac{k}{F} x' x_0 \right\} dx'. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Учитывая, что $\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -j \frac{k}{F} x' x_0 \right\} dx' = \frac{1}{j} \lambda F \delta(x_0)$, и подставляя это значение интеграла в (1.96), находим

$$\begin{aligned} h(x_1, y_1; x_0, y_0) = & -\frac{D_0 D_1}{j \lambda Q} \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(D_1 - \frac{D_1^2}{Q} \right) (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(D_0 - \frac{D_0^2}{Q} \right) (x_0^2 + y_0^2) \right\} \exp \left\{ -jk \frac{D_0 D_1}{Q} (x_0 x_1 + y_0 y_1) \right\} \delta(x_0). \end{aligned} \quad (1.97)$$

Пусть входной сигнал в виде транспаранта описывается функцией $s(x_0, y_0)$. Оптическая схема с импульсным откликом (1.97) преобразует этот сигнал в

$$\begin{aligned} s(x_1, y_1) = & -\frac{D_0 D_1}{j \lambda Q} \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(D_1 - \frac{D_1^2}{Q} \right) (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x_0, y_0) \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(D_0 - \frac{D_0^2}{Q} \right) (x_0^2 + y_0^2) \right\} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left\{ -jk \frac{D_0 D_1}{Q} (x_0 x_1 + y_0 y_1) \right\} \delta(x_0) dx_0 dy_0 = \\
& = -\frac{D_0 D_1}{j\lambda Q} \exp \left\{ j \frac{k}{2} \left(D_1 - \frac{D_1^2}{Q} \right) (x_1^2 + y_1^2) \right\} \int_{-\infty}^{\infty} s(0, y_0) \times \\
& \times \exp \left\{ -j \frac{k}{2} \left(D_0 - \frac{D_0^2}{Q} \right) y_0^2 \right\} \exp \left\{ -jk \frac{D_0 D_1}{Q} y_0 y_1 \right\} dy_0. \quad (1.98)
\end{aligned}$$

Как видно из (1.98), в схеме с линейным источником $p(x', y') = \delta(y')$ выполняется с точностью до квадратичного фазового множителя одномерное преобразование Френеля по оси y_1 .

В случае, когда плоскости (x_0, y_0) и (x_1, y_1) являются фурье-плоскостями второго объектива, выражение (1.98) трансформируется к следующему виду:

$$s(x_1, y_1) = -\frac{1}{j\lambda f} \int_{-\infty}^{\infty} s(0, y_0) \exp \left\{ -j \frac{k}{f} y_0 y_1 \right\} dy_0.$$

Отсюда следует, что в схеме (рис. 1.33) с линейным источником, ориентированным вдоль оси y' , при $d_0 = f$ и $d_1 = f$ выполняется одномерное фурье-преобразование по оси y_1 . Применение крестообразного источника со структурной функцией $P(x', y') = \delta(x') + \delta(y')$ при тех же условиях обеспечивает выходной сигнал вида

$$\begin{aligned}
s(x_1, y_1) = & -\frac{1}{j\lambda f} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} s(x_0, 0) \exp \left(-j \frac{k}{f} x_0 x_1 \right) dx_0 + \right. \\
& \left. + \int_{-\infty}^{\infty} s(0, y_0) \exp \left(-j \frac{k}{f} y_0 y_1 \right) dy_0 \right\}.
\end{aligned}$$

Использование крестообразного источника трансформирует входной сигнал $s(x_0, y_0)$ в сумму одномерных преобразований по осям x_1 и y_1 :

$$s(x_1, y_1) = -\frac{1}{j\lambda f} [s(K_x, 0) + s(0, K_y)],$$

где $K_x = \frac{k}{f} x_1$, $K_y = \frac{k}{f} y_1$. Приведенный

выше анализ подтверждает, что частотная плоскость является плоскостью изображения источника. При этом изображение крестообразного источника преобразует частотную плоскость в квадрантную структуру, показанную на рис. 1.34.

Рис. 1.34

1.8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ–БЕССЕЛЯ (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГАНКЕЛЯ)

Запишем выражение для прямого и обратного преобразований Фурье оптического сигнала в полярной системе координат. Для этого введем обозначения: $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$; $x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$; $w = (K_x^2 + K_y^2)^{1/2}$; $K_x = w \cos \varphi$; $K_y = w \sin \varphi$; $K_x x + K_y y = r w (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi)$. Тогда

$$\begin{aligned} s(K_x K_y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y) e^{-j(x K_x + y K_y)} dx dy = \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} s(r, \theta) e^{-j r w \cos(\theta - \varphi)} r dr d\theta = s(w, \varphi); \\ s(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(K_x K_y) e^{j(x K_x + y K_y)} dx dy = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} s(w, \theta) e^{j r w \cos(\theta - \varphi)} w dw d\varphi = s(r, \theta). \end{aligned}$$

В случае, когда сигнал $s(r, \theta)$ имеет круговую симметрию, $s(r, \theta) = s(r)$, $s(w, \varphi) = s(w)$ и

$$s(r) = \int_0^{\infty} r s(r) dr \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j r w \cos(\theta - \varphi)} d\theta.$$

Согласно определению функций Бесселя (1.101)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jwr \cos(\theta-\varphi)} d\theta = J_0(wr).$$

Отсюда

$$\int_0^{\infty} rs(r) dr \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jwr \cos(\theta-\varphi)} d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} rs(r) J_0(wr) dr.$$

Следовательно,

$$s(K_x K_y) = 2\pi \bar{s}(w) = 2\pi \int_0^{\infty} rs(r) J_0(wr) dr. \quad (1.99)$$

Выражение

$$\bar{s}(w) = \int_0^{\infty} rs(r) J_0(wr) dr$$

определяет преобразование Ганкеля сигнала $s(r)$: $s(r) \xleftrightarrow{h} \bar{s}(w)$.

Как видно из (1.99), преобразование Фурье и преобразование Ганкеля сигнала $s(r)$ связаны соотношением

$$s(K_x, K_y) = 2\pi \bar{s}(w),$$

откуда

$$\bar{s}(w) = \frac{1}{2\pi} s(K_x, K_y) = \frac{1}{2\pi} s(w).$$

Таким образом, для сигнала с круговой симметрией имеем

$$s(r) \leftrightarrow s(w); \quad s(r) \xleftrightarrow{h} \bar{s}(w); \quad \bar{s}(w) = \frac{1}{2\pi} s(w).$$

Найдем формулу для обратного преобразования Ганкеля. Для этого воспользуемся обратным преобразованием Фурье для сигнала с круговой симметрией:

$$\begin{aligned} s(r) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} s(w) e^{jwr \cos(\theta-\varphi)} w dw d\varphi = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} 2\pi \bar{s}(w) w dw \times \\ &\times \int_{-\pi}^{\pi} e^{jwr \cos(\theta-\varphi)} d\varphi = \int_0^{\infty} \bar{s}(w) J_0(wr) dw. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что прямое и обратное преобразования Ганкеля совершенно симметричны:

$$\bar{s}(w) = \int_0^{\infty} r s(r) J_0(wr) dr; \quad s(r) = \int_0^{\infty} w \bar{s}(w) J_0(wr) dw.$$

Изменение масштаба. Из преобразования Фурье имеем

$$s(ax) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} s\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

В двумерном случае

$$s(ax, by) \leftrightarrow \frac{1}{|a||b|} s\left(\frac{K_x}{a}, \frac{K_y}{b}\right).$$

Для сигналов с круговой симметрией

$$s(ar) \leftrightarrow \frac{1}{a^2} s\left(\frac{w}{a}\right),$$

или с учетом связи преобразования Фурье с преобразованием Ганкеля

$$s(ar) \leftrightarrow \frac{2\pi}{a^2} \bar{s}\left(\frac{w}{a}\right).$$

Отсюда следует формула для преобразования Ганкеля с изменяемым масштабом

$$s(ar) \overset{h}{\leftrightarrow} \frac{1}{a^2} s\left(\frac{w}{a}\right).$$

Рассмотрим, как отображается дифференцирование сигнала при преобразовании Ганкеля. Для операции дифференцирования в цилиндрической системе координат можно записать

$$\frac{\partial^2 s(r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s(r)}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{ds}{dr} \right].$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{ds(r)}{dr} \right] \leftrightarrow (jw)^2 s(w) = 2\pi (jw)^2 \bar{s}(w).$$

Поэтому для преобразования Ганкеля второй производной сигнала с круговой симметрией имеем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{ds(r)}{dr} \right] \leftrightarrow (jw)^2 \bar{s}(w).$$

Используя обобщенную формулу Рэлея, запишем равенство Парсеваля для двумерного сигнала,

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |s(x, y)|^2 dx dy \leftrightarrow \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} |s(K_x, K_y)|^2 dK_x dK_y.$$

Формула Парсеваля утверждает, что энергия сигнала в координатном и частотном пространствах одинакова. Для сигналов, обладающих круговой симметрией, формула Парсеваля приводится к виду

$$\int_0^{\infty} |s(r)|^2 r dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} w \cdot 4\pi^2 |\bar{s}(w)|^2 dw \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi,$$

или

$$\int_0^{\infty} |s(r)|^2 r dr = \int_0^{\infty} w |\bar{s}(w)|^2 dw.$$

Преобразование Ганкеля некоторых сигналов

Сигнал $P_a(r) = \begin{cases} 1, & |r| < a; \\ 0, & |r| > a. \end{cases}$

$$\begin{aligned} P_a(r) &\leftrightarrow \int_0^h \int_0^a r J_0(wr) dr = \frac{1}{w^2} \int_0^{aw} (rw) J_0(wr) d(wr) = \\ &= \frac{1}{w^2} \left[(rw) J_1(wr) \right] \Big|_0^{aw} = \frac{a}{w} J_1(aw). \end{aligned}$$

Сигнал $s(r) = \frac{1}{r}$.

$$\bar{s}(w) = \int_0^{\infty} r \frac{1}{r} J_0(wr) dr = \int_0^a J_0(wr) dr = \frac{1}{w} \int_0^{\infty} J_0(x) dx,$$

$$\begin{aligned}
 s(r) &= \int_0^\infty w \left[\frac{1}{w} \int_0^\infty J_0(x) dx \right] J_0(wr) dw = \int_0^\infty J_0(x) dx \int_0^\infty J_0(wr) dw = \\
 &= \frac{1}{r} \left[\int_0^\infty J_0(x) dx \right]^2 = \frac{1}{r}.
 \end{aligned}$$

Отсюда $\int_0^\infty J_0(x) dx = 1$, $\frac{1}{r} \overset{h}{\longleftrightarrow} \frac{1}{w}$.

Сигнал $s(r) = \delta(r - a)$.

$$\int_0^\infty r \delta(r - a) J_0(wr) dr = a J_0(wa).$$

$$\delta(r - a) \overset{h}{\longleftrightarrow} a J_0(aw). \quad (1.100)$$

Сумма двух смещенных по оси x сигналов

$$s(r) = s_1(r) + s_2(r) = P_a \left(\sqrt{(x-b)^2 + y^2} \right) + P_a \left(\sqrt{(x+b)^2 + y^2} \right).$$

$$P_a \left(\sqrt{(x-b)^2 + y^2} \right) = \begin{cases} 1, & \left| \sqrt{(x-b)^2 + y^2} \right| < a; \\ 0, & \left| \sqrt{(x-b)^2 + y^2} \right| > a. \end{cases}$$

$$P_a \left(\sqrt{(x+b)^2 + y^2} \right) = \begin{cases} 1, & \left| \sqrt{(x+b)^2 + y^2} \right| < a; \\ 0, & \left| \sqrt{(x+b)^2 + y^2} \right| > a. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 s(x, y) &\overset{h}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} s(w) \left\{ e^{-jbK_x} + e^{jbK_x} \right\} = a \frac{J_1(aw)}{w} \left\{ e^{jbK_x} + e^{-jbK_x} \right\} = \\
 &= 2a \frac{J_1(aw)}{w} \cos(bK_x).
 \end{aligned}$$

Сигнал в виде кольца: $s(r) = P_a(r) - P_b(r)$, $a > b$.

$$P_a(r) = \begin{cases} 1, & |r| < a; \\ 0, & |r| > a; \end{cases}$$

$$P_b(r) = \begin{cases} 1, & |r| < b; \\ 0, & |r| > b. \end{cases}$$

$$s(r) \xleftrightarrow{h} \int_0^\infty r [P_a(r) - P_b(r)] J_0(wr) dr = a \frac{J_1(aw)}{w} - b \frac{J_1(bw)}{w}.$$

Исследуем на экстремум функцию $a \frac{J_1(aw)}{w}$:

$$\frac{d}{dx} \frac{J_1(x)}{x} = -\frac{J_2(x)}{x};$$

$$\frac{d}{dw} \left[\frac{J_1(aw)}{w} \right] = a \frac{d}{d(aw)} \left[\frac{J_1(aw)}{aw} \right] = -a \frac{J_2(aw)}{aw} = 0;$$

$$\frac{J_2(aw)}{aw} = 0.$$

Отсюда следует, что максимумы дифракционного изображения функции $P_a(r)$ соответствуют нулям x_i функции $J_2(aw) = J_2\left(\frac{ka\rho}{f}\right)$:

$$\rho_i = \frac{fx_i}{ka}.$$

Возвращаемся к свойствам преобразований Ганкеля и функций Бесселя. Функция Бесселя определяется как коэффициент разложения в ряд Фурье функции $a(x, \theta) = \exp\{jx \sin \theta\}$:

$$a(x, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{jn\theta}.$$

Поскольку функция $a(x, \theta)$ – периодическая по переменной θ , выражение для бесселевой функции имеет вид

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(x, \theta) \exp(-jn\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(jx \sin \theta) \exp(-jn\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-j(n\theta - x \sin \theta)] d\theta. \end{aligned} \quad (1.101)$$

Из (1.101) следует, что функция Бесселя $J_n(x)$ – действительная, поскольку вещественная часть подынтегрального выражения есть четная, а мнимая – нечетная функция переменной θ .

Для функций Бесселя справедливы рекуррентные формулы [10]

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x);$$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J'_n(x).$$

Из рекуррентных формул следует:

$$x^n J_{n-1}(x) = \frac{d}{dx} [x^n J_n(x)];$$

$$\frac{J_{n+1}(x)}{x^n} = \frac{d}{dx} \left[\frac{J_n(x)}{x^n} \right].$$

В частности,

$$xJ_0(x) = \frac{d}{dx} [xJ_1(x)];$$

$$\frac{dJ_0}{dx}(x) = -J_1(x);$$

$$\int J_1(x) dx = -J_0(x).$$

Суммируя рекуррентные формулы, получаем

$$J_{n-1}(x) = J'_n(x) + \frac{nJ_n(x)}{x}.$$

Отсюда при $n = 1$ имеем

$$\frac{J_1(x)}{x} = J_0(x) - J_1'(x).$$

Связь между преобразованиями Фурье и Ганкеля. Если $s(r) \xleftrightarrow{h} \bar{s}(w)$, то

$$s(K_x, K_y) = 2\pi \bar{s}(w) = 2\pi \bar{s}\left(\sqrt{K_x^2 + K_y^2}\right).$$

Как известно, двумерное преобразование Фурье определяется выражением

$$s(K_x, K_y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y) e^{-j(K_x x + K_y y)} dx dy.$$

Тогда для одномерного преобразования Фурье имеем

$$s(K_x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jK_x x} dx \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_c(x) e^{-jK_x x} dx = s_c(K_x).$$

Здесь $s_c(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y) dy$ является сечением сигнала. В случае цилиндрической симметрии

$$s_c(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) dy;$$

$$s(K_x, 0) = 2\pi \bar{s}_c(K_x) = s_c(K_x).$$

Отсюда

$$s_c(x) \leftrightarrow 2\pi \bar{s}_c(K_x).$$

Пусть функция $s(r)$ представляет собой единичный импульс радиуса r ,

$$s(r) = \text{circ} \frac{r}{a} = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Сечение запишем в виде

$$s_c(x) = \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy = 2\sqrt{a^2-x^2} \quad \text{при } x \leq a.$$

Двумерное преобразование Фурье сигнала $s(r)$:

$$\text{circ} \frac{r}{a} \leftrightarrow 2\pi a \frac{J_1(aw)}{w}.$$

Преобразование Фурье для сечения $s_c(x)$:

$$s_c(x) = \text{Re} \left\{ 2\sqrt{a^2-x^2} \right\} \leftrightarrow 2\pi a \frac{J_1(aK_x)}{K_x}.$$

Отсюда

$$\text{Re} \left\{ \sqrt{a^2-x^2} \right\} \leftrightarrow \pi a \frac{J_1(aK_x)}{K_x}.$$

Преобразование Ганкеля для линейных систем с осевой симметрией. Пусть двумерная линейная система имеет импульсный отклик $h(r)$, где $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Из свойств линейных систем следует, что выходной сигнал является сверткой входного сигнала с импульсным откликом системы:

$$s_e(r) = s_i(r) \otimes h(r).$$

Выполняя преобразование Ганкеля этого равенства, получаем

$$\bar{s}_e(w) = \bar{s}_i(w) \bar{h}(w). \quad (1.102)$$

Как следует из (1.102), когерентная передаточная функция линейной системы с осевой симметрией связана с импульсным откликом соотношением

$$H(w) = 2\pi \bar{h}(w).$$

Пусть ганкель-образ входного сигнала представляет собой в частотной плоскости бесконечно тонкое кольцо:

$$\bar{s}_i(w) = A\delta(w-a).$$

Тогда для ганкель-образа выходного сигнала согласно (1.102) имеем

$$\bar{s}_e(w) = A\delta(w-a)\bar{h}(w) = A\bar{h}(a)\delta(w-a).$$

Здесь мы учли свойства δ -функции. Выполняя обратное преобразование Ганкеля, найдем выражение для выходного сигнала $s_e(r)$ в координатном пространстве:

$$s_e(r) = A\bar{h}(a) \int_0^\infty w\delta(w-a)J_0(wr)dw = aA\bar{h}(a)J_0(ar).$$

Коэффициент A определяется из преобразования Ганкеля от $s_i(r) = J_0(ar)$. Из преобразования Ганкеля

$$J_0(ar) = \int_0^\infty ws_i(w)J_0(wr)dw$$

получаем, что $\bar{s}_i(w) = \frac{1}{a}\delta(w-a)$. Отсюда $A = \frac{2\pi}{a}$ и

$$\hat{G}[J_0(ar)] = 2\pi\bar{h}(a)J_0(ar) = H(a)J_0(ar). \quad (1.103)$$

Отсюда следует, что $J_0(ar)$ является собственной функцией системного оператора $\hat{G}$, описывающего линейную систему, а когерентная передаточная функция $H(a) = 2\pi\bar{h}(a)$ его собственным значением.

Обобщенное преобразование Ганкеля. Если в формуле для преобразования Ганкеля заменить функцию Бесселя $J_0(wr)$ на функцию Бесселя $J_n(wr)$, то получится преобразование Ганкеля n -го порядка:

$$\bar{s}_n(w) = \int_0^\infty rs(r)J_n(wr)dr, \quad (1.104)$$

где $J_n(wr) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(n\alpha - rws \sin \alpha)} d\alpha$.

Преобразование Ганкеля n -го порядка связано с двумерным преобразованием Фурье:

$$s(r)e^{jn\theta} \leftrightarrow 2\pi\bar{s}_n(w)e^{-jn\varphi}. \quad (1.105)$$

Пусть преобразование Фурье выполняется по переменным $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $w = (u^2 + v^2)^{1/2}$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$; $u = w \sin \varphi$, $v = w \cos \varphi$. Тогда

$$\begin{aligned} s(w, \varphi) &= \int_0^\infty r s(r) \int_{-\pi}^\pi e^{j[n\theta - wr \sin(\theta + \varphi)]} d\theta dr = \\ &= e^{-jn\varphi} \int_0^\infty r s(r) dr \int_{-\pi}^\pi e^{j[n\alpha - wr \sin \alpha]} d\alpha = \\ &= 2\pi e^{-jn\varphi} \int_0^\infty r s(r) J_n(wr) dr = 2\pi \bar{s}_n(w) e^{-jn\varphi}. \end{aligned}$$

Найдем обратное преобразование Ганкеля n -го порядка. Из формулы обратного преобразования Фурье получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi 2\pi w \bar{s}_n(w) e^{-jn\varphi} e^{jwr \sin(\theta + \varphi)} dw d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty w \bar{s}_n(w) dw \int_{-\pi}^\pi e^{-jn\varphi} e^{jwr \sin(\theta + \varphi)} d\varphi = \\ &= \int_0^\infty w \bar{s}_n(w) e^{jn\theta} dw \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-j(n\alpha - wr \sin \alpha)} d\alpha = \\ &= e^{jn\theta} \int_0^\infty w \bar{s}_n(w) J_n(wr) dw = e^{jn\theta} s(r). \end{aligned}$$

Отсюда

$$s(r) = \int_0^\infty w \bar{s}_n(w) J_n(wr) dw. \quad (1.106)$$

Из сравнения (1.106) и (1.104) следует, что прямое и обратное преобразования Ганкеля n -го порядка полностью симметричны.

Обобщенное преобразование Ганкеля можно применять для сигналов, не обладающих круговой симметрией. В этом случае произвольный сигнал $s(r, \theta)$ представляется разложением в ряд Фурье по полярным гармоникам $e^{jn\theta}$:

$$s(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r) e^{jn\theta}. \quad (1.107)$$

Выполним с учетом (1.104) преобразование Фурье сигнала $s(r, \theta)$, представленного рядом (1.107):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r) e^{jn\theta} \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \bar{c}_{nn} e^{-jn\varphi}. \quad (1.108)$$

Правая часть выражения (1.108) представляет собой разложение в ряд Фурье фурье-спектра произвольного сигнала:

$$s(w, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \bar{c}_{nn} e^{-jn\varphi}.$$

Коэффициентами разложения в этом представлении фурье-спектра сигнала являются коэффициенты $2\pi \bar{c}_{nn}$.

Рассмотрим ситуацию, когда произвольный двумерный сигнал (1.108) подан на вход линейной системы, обладающей круговой симметрией. Пусть импульсный отклик такой системы $h(r)$, соответственно когерентная передаточная функция равна

$$H(w) = 2\pi \bar{h}(w). \quad (1.109)$$

Для входного сигнала

$$s_i(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r) e^{jn\theta}.$$

Фурье-спектр с учетом (1.109) и (1.105) имеет вид

$$s_i(w, \varphi) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn} e^{-jn\varphi}.$$

Отсюда находим фурье-спектр выходной реакции линейной системы:

$$s_e(w, \varphi) = 4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{h}(w) \bar{c}_{nn} e^{-jn\varphi} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{a}_{nn} e^{-jn\varphi}. \quad (1.110)$$

Из (1.110) видно, что фурье-спектр выходного сигнала представляется рядом Фурье по полярной гармонике $e^{-jn\varphi}$ с коэффициентом разложения $\bar{a}_{nn} = 2\pi \bar{h}(w) \bar{c}_{nn}$. Выполняя обратное преобразование Фурье и используя обобщенное преобразование Ганкеля, находим выражение, описывающее фильтрованный сигнал в координатном пространстве:

$$s_e(w, \varphi) \leftrightarrow s_e(r, \theta)$$

или с учетом (1.106),

$$s_e(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} w \bar{a}_{nn} J_n(rw) dw e^{jn\theta} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nn} e^{jn\theta},$$

где

$$a_{nn} = \int_0^{\infty} w \bar{h}(w) \bar{c}_{nn}(w) J_n(r, w) dw. \quad (1.111)$$

Таким образом, выходной сигнал линейной оптической системы в координатном пространстве может быть представлен разложением в ряд Фурье по полярным гармоникам:

$$s(r, \theta) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nn} e^{jn\theta}, \quad (1.112)$$

где коэффициент разложения a_{nn} определяется выражением (1.111).

Преобразование Ганкеля произведения сигналов. Рассмотрим преобразование Ганкеля произведения двух осесимметричных сигналов $s_1(r) \leftrightarrow s_1(w)$ и $s_2(r) \leftrightarrow s_2(w)$. Найдем фурье-спектр произведения этих сигналов

$$\begin{aligned} s_1(r) s_2(r) &\leftrightarrow \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} s_1(r) s_2(r) e^{-jrw \cos(\theta-\varphi)} r dr d\theta = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} s_2(r) r dr d\theta \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} s_1(\xi) e^{jr\xi \cos(\theta-\varphi)} e^{-jrw \cos(\theta-\varphi)} \xi d\xi d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi s_1(\xi) \xi d\xi d\varphi \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi s_2(r) e^{-j(w-\xi)r \cos(\theta-\varphi)} r dr d\theta = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi s_1(\xi) \bar{s}_2(w-\xi) \xi d\xi d\varphi = 2\pi \int_0^\infty \bar{s}_1(\xi) \bar{s}_2(w-\xi) \xi d\xi.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$s_1(r) s_2(r) \xleftrightarrow{h} \int_0^\infty \bar{s}_1(\xi) \bar{s}_2(w-\xi) \xi d\xi. \quad (1.113)$$

Преобразование Ганкеля произведения двух сигналов с круговой симметрией определяется сверткой ганкель-образов в частотном пространстве.

Рассмотрим обратное преобразование Ганкеля от произведения ганкель-образов осесимметричных сигналов $\bar{s}_1(w) \bar{s}_2(w)$. Для этого выполним обратное фурье-преобразование от произведения фурье-спектров осесимметричных сигналов $s_1(r) \leftrightarrow s_1(w)$ и $s_2(r) \leftrightarrow s_2(w)$:

$$\begin{aligned}
s_1(w) s_2(w) &\leftrightarrow \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi s_1(w) s_2(w) e^{jwr \cos(\varphi-\theta)} w dw d\varphi = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi s_2(w) w dw d\varphi \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi s_1(\xi) e^{-j\xi w \cos(\varphi-\theta)} e^{jwr \cos(\varphi-\theta)} \xi d\xi d\theta = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi s_1(\xi) \xi d\xi d\theta \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi s_2(w) e^{jw(r-\xi) \cos(\varphi-\theta)} w dw d\varphi = \\
&= 2\pi \int_0^\infty s_1(\xi) s_2(r-\xi) \xi d\xi.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\bar{s}_1(w) \bar{s}_2(w) \xleftrightarrow{h} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty s_1(\xi) s_2(r-\xi) \xi d\xi. \quad (1.114)$$

Следовательно, обратное преобразование Ганкеля от произведения ганкель-образов двух сигналов определяется с точностью до множителя

$\frac{1}{2\pi}$ сверткой сигналов в координатном пространстве.

Обратимся теперь к произвольным оптическим сигналам $s_1(r, \theta)$ и $s_2(r, \theta)$. Воспользуемся разложением произвольного сигнала в ряд по гармоническим функциям полярного угла

$$s_1(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r) e^{jn\theta}; \quad s_2(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q_m(r) e^{jm\theta}.$$

Выполним фурье-преобразование произведения $s_1(r, \theta) s_2(r, \theta)$:

$$\begin{aligned} s_1(r, \theta) s_2(r, \theta) &\leftrightarrow \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} s_1(r, \theta) s_2(r, \theta) e^{-jwr \sin(\theta+\varphi)} r dr d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{n,m \\ n=-\infty \\ m=-\infty}}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} c_n(r) q_m(r) e^{jn\theta} e^{-jm\theta} e^{-jwr \sin(\theta+\varphi)} r dr d\theta + \text{K.C.} = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \sum_{\substack{n,m \\ n=-\infty \\ m=-\infty}}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} c_n(r) e^{jn\theta} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} q_m(\xi) e^{-jm\varphi} \times \\ &\quad \times e^{j\xi r \sin(\theta+\varphi)} e^{-jwr \sin(\theta+\varphi)} \xi r d\xi d\varphi d\theta + \text{K.C.} = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \sum_{\substack{n,m \\ n=-\infty \\ m=-\infty}}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} q_m(\xi) e^{-jm\varphi} \xi d\xi d\varphi \times \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} c_n(r) e^{jn\theta} e^{-jr(w-\xi)\sin(\theta+\varphi)} r dr d\theta + \text{K.C.} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{n,m \\ n=-\infty \\ m=-\infty}}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} q_m(\xi) e^{-j(n-m)\varphi} \xi d\xi d\varphi \int_0^{\infty} c_n(r) J_n[r(w-\xi)] r dr + \text{K.C.} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{n,m \\ n=-\infty \\ m=-\infty}}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} q_m(\xi) \bar{c}_n(w-\xi) e^{-j(n-m)\varphi} \xi d\xi d\varphi + \text{K.C.} \end{aligned}$$

Ненулевое значение этого выражения получается при условии $n = m$, откуда находим

$$s_1(r, \theta) s_2(r, \theta) \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} q_n(\xi) \bar{c}_n(w - \xi) \xi d\xi$$

или

$$s_1(r, \theta) s_2(r, \theta) \leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \bar{q}_n(\xi) \bar{c}_n(w - \xi) \xi d\xi.$$

Отсюда, учитывая связь преобразований Фурье и Ганкеля, получаем

$$s_1(r, \theta) s_2(r, \theta) \xleftarrow{h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \bar{q}_n(\xi) \bar{c}_n(w - \xi) \xi d\xi. \quad (1.115)$$

Следовательно, преобразование Ганкеля произведения двух произвольных сигналов определяется суммой сверток коэффициентов разложения сигналов в ряд по гармоническим функциям полярного угла.

1.9. ОПТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ С КОЛЬЦЕВЫМ ИСТОЧНИКОМ

Обратимся к рис. 1.35. Оптическая схема на рисунке содержит два конфокально расположенных объектива 1 и 2. В передней фокальной плоскости (ρ, α) объектива 1 помещен симметрично относительно оптической оси кольцевой источник, структурная функция которого $s_u(\rho) = \delta(\rho - a)$, где a — радиус кольца, которое считаем бесконечно тонким. Объектив 1 с фокусным расстоянием F выполняет функцию

Рис. 1.35

конденсора. Объектив 2 с фокусным расстоянием f является фурье-объективом. Световое поле в плоскости (r, θ) , сформированное объективом 1, определяется через фурье-преобразование осесимметричной функции источника $s_u(\rho)$.

$$s_u(r) = 2\pi \bar{s}_u(r) = 2\pi a J_0(ar). \quad (1.116)$$

Здесь мы воспользовались преобразованием Ганкеля

$$\bar{s}_u(r) = \int_0^{\infty} \rho \delta(\rho - a) J_0(r\rho) d\rho = a J_0(ar).$$

Пусть в плоскости (r, θ) помещен транспарант с осесимметричной амплитудно-фазовой функцией пропускания $s(r)$. С учетом структуры светового поля (1.116) непосредственно за транспарантом формируется оптический сигнал $2\pi \bar{s}_u(r) s(r)$. Объектив 2 выполняет фурье-преобразование этого сигнала,

$$E(w) = 2\pi \int_0^{\infty} rs(r) \bar{s}_u(r) J_0(wr) dr = 2\pi a \int_0^{\infty} rs(r) J_0(ar) J_0(wr) dr$$

Преобразование Ганкеля произведения двух осесимметричных сигналов определяется как свертка ганкель-образов (1.13),

$$a \int_0^{\infty} rs(r) J_0(ar) J_0(wr) dr = \int_0^{\infty} \delta\left(w - \frac{a}{\Gamma} - \xi\right) \bar{s}(\xi) \xi d\xi = \left|w - \frac{a}{\Gamma}\right| \bar{s}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right).$$

Отсюда

$$E(w) = 2\pi \left|w - \frac{a}{\Gamma}\right| \bar{s}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) = \left|w - \frac{a}{\Gamma}\right| s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right), \quad (1.117)$$

где Γ — коэффициент линейного увеличения оптической системы, состоящий из конфокально расположенных объективов 1 и 2. Из выражения (1.117) следует, что в плоскости (w, ϕ) формируется фурье-

спектр $\left|w - \frac{a}{\Gamma}\right| s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)$ осесимметричного сигнала $s(r)$. Фурье-

плоскость (w, ϕ) является плоскостью изображения кольцевого источника $s_u(\rho) = \delta(\rho - a)$. При этом границей, разделяющей пространства положительных и отрицательных частот, служит изображение кольцевого источника.

Рассмотрим преобразование произвольного сигнала в схеме с кольцевым источником, показанной на рис. 1.35. Воспользуемся разложением произвольного сигнала $s(r, \theta)$ в ряд Фурье по гармоническим функциям полярного угла:

$$s(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r) e^{jn\theta}.$$

Для светового поля в плоскости (r, θ) непосредственно за транспарантом имеем

$$s_u(r) s(r, \theta) = 2\pi a J_0(ar) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r) e^{jn\theta}. \quad (1.118)$$

Второй объектив формирует в задней фокальной плоскости фурье-спектр светового поля (1.118):

$$\begin{aligned} E(w, \varphi) &= 2\pi \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} r \bar{s}_u(r) s(r, \theta) e^{-jrw \sin(\theta + \varphi)} dr d\theta = \\ &= 2\pi a \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} r J_0(ar) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r) e^{jn\theta} e^{-jrw \sin(\theta + \varphi)} dr d\theta = \\ &= 4\pi^2 a \int_0^{\infty} r J_0(ar) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\varphi} c_n(r) J_n(wr) dr = \\ &= 4\pi^2 a \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\varphi} \int_0^{\infty} r J_0(ar) c_n(r) J_n(wr) dr. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Поле в плоскости (w, φ) согласно (1.119) определяется через обобщенное преобразование Ганкеля произведения ганкель-образа кольцевого источника и коэффициента разложения сигнала $s(r)$ в ряд по полярным гармоникам. Воспользовавшись теоремой о свертке (1.113), преобразуем (1.119):

$$\begin{aligned} E(w, \varphi) &= 4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\varphi} \int_0^{\infty} r a J_0(ar) c_n(r) J_n(wr) dr = \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\varphi} \int_0^{\infty} \delta\left(w - \frac{a}{\Gamma} - \xi\right) \bar{c}_{nn}(\xi) \xi d\xi = \\ &= 2\pi \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) e^{-jn\varphi}. \end{aligned} \quad (1.120)$$

Как следует из (1.120), световое поле в задней фокальной плоскости представляет собой разложение в ряд фурье-спектра сигнала $s(r, \theta)$ по гармоническим функциям полярного угла φ . Коэффициенты разложения $\bar{c}_{nm}$ определяются через обобщенное преобразование Ганкеля коэффициентов разложения исходного сигнала и смещены по радиусу на a/Γ . При этом индекс коэффициента разложения совпадает с порядком обобщенного преобразования Ганкеля. Фурье-плоскость (w, φ) совмещена с плоскостью изображения источника. Изображение кольцевого источника является разграничительной линией между областями положительных и отрицательных пространственных частот в фурье-плоскости.

1.10. ОПТИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Оптическая схема, осуществляющая в приближении тонкой линзы построение и фильтрацию изображения двумерного сигнала, показана на рис. 1.36. Предметная плоскость (x, y) и плоскость изображения (x_1, y_1) расположены от линзы соответственно на расстояниях d_0 и d_1 , удовлетворяющих условию $D_0 + D_1 - \Phi = 0$, где $D_0 = 1/d_0$, $D_1 = 1/d_1$, $\Phi = 1/f$. Коэффициент линейного увеличения $\Gamma = d_1/d_0$. Фокусное расстояние линзы f . Фурье-плоскость (K_x, K_y) является плоскостью изображения точечного светового источника O . Условие оптического сопряжения этих плоскостей: $D_2 + D_3 - \Phi = 0$, где $D_2 = 1/d_2$, $D_3 = 1/d_3$. Принцип формирования и фильтрация фурье-спектра адекватно объясняет классические эксперименты Аббе–Портера, выполненные в свое время (1873, 1906) для обоснования созданной Аббе теории формирования изображения в микроскопии [14].

Пусть в предметной плоскости (x, y) помещен объект в виде проводочной сетки, освещаемый источником O . Входной сигнал $s(x, y)$ можно описать как

$$s(x, y) = \sum_{n,m} \text{rect}\left(\frac{x-na}{b}\right) \text{rect}\left(\frac{y-ma}{b}\right),$$

где a – период структуры сетки, $2b$ – толщина проволоки.

Рис. 1.36

Выходной сигнал в плоскости изображения имеет вид

$$s(x_1, y_1) \approx \sum_{n,m} \text{rect}\left(\frac{x_1 - n\Gamma a}{\Gamma b}\right) \text{rect}\left(\frac{y_1 - m\Gamma a}{\Gamma b}\right).$$

В частотной плоскости (K_x, K_y) формируется фурье-спектр сигнала $s(K_x, K_y)$, показанный на рис. 1.37, а. Структура фурье-спектра состоит из дифракционных максимумов различных порядков, образованных из светового поля, рассеянного на сетке:

$$s(K_x, K_y) \approx \int \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n,m} \text{rect}\left(\frac{x - na}{b}\right) \text{rect}\left(\frac{y - ma}{b}\right) e^{-j(K_x x + K_y y)} dx dy =$$

$$\begin{aligned}
&= 4b^2 \frac{\sin(K_x b)}{K_x b} \frac{\sin(K_y b)}{K_y b} \sum_{n,m} e^{-ja(nK_x + mK_y)} = 8b^2 \frac{\sin(K_x b)}{K_x b} \frac{\sin(K_y b)}{K_y b} \times \\
&\quad \times \sum_{\substack{n,m \\ n>0 \\ m>0}} \left\{ \cos[(nK_x + mK_y)a] + \cos[(nK_x - mK_y)a] \right\}. \quad (1.121)
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались теоремой смещения. Выходной сигнал, соответствующий этому фурье-спектру, показан на рис. 1.37, б. Восстановление сигнала осуществляется за счет обратного фурье-преобразования частотного спектра $s(K_x, K_y)$ слоем пространства толщиной $d_1 - d_3$.

а

б

Рис. 1.37

Поместим в фурье-плоскость фильтр в виде узкой щели, пропускающей, например, один ряд горизонтальных спектральных компонент (рис. 1.38, а). Фурье-спектр на выходе щели получается из (1.121) при $K_x = 0$:

$$s(K_x, K_y) = 2b^2 \frac{\sin(K_y b)}{K_y b} \sum_m e^{-jamK_y}. \quad (1.122)$$

В выходной плоскости (x_1, y_1) восстанавливается вертикальная структура сетки (рис. 1.38, б), соответствующая фурье-спектру (1.122):

$$s_1(x_1, y_1) \approx \sum_m \text{rect}\left(\frac{y_1 - m\Gamma a}{\Gamma b}\right).$$

Рис. 1.38

Если же щелевой фильтр сориентировать так, чтобы он пропускал только вертикальный ряд максимумов в структуре фурье-спектра сигнала (рис. 1.39, а), выражение для фильтрованного фурье-спектра будет иметь вид при $K_y = 0$:

$$s_2(K_x, K_y) = 2b^2 \frac{\sin(K_x b)}{K_x b} \sum_m e^{-janK_x}.$$

При этом в плоскости изображения восстанавливается лишь горизонтальная структура сигнала (рис. 1.39, б):

$$s_2(x_2, y_2) \approx \sum_n \text{rect}\left(\frac{x_1 - n\Gamma a}{\Gamma b}\right).$$

Рис. 1.39

Как следует из рис. 1.36, диафрагма, помещенная в частотную плоскость и ограничивающая фурье-спектр сигнала, является выходным зрачком оптической системы. Если в качестве выходного зрачка использовать ирисовую диафрагму, установленную так, чтобы через нее проходила только осевая фурье-компонента сигнала, то можно убедиться, что периодическая структура в восстановленном изображении сетки

исчезает. При расширении ирисовой диафрагмы последовательно прослеживается фурье-синтез изображения сетки. Если же вместо диафрагмы в фурье-плоскости поместить фильтр в виде маленького экрана, закрывающего дифракционный максимум нулевого порядка и, следовательно, вырезающего из фурье-спектра нулевую частоту, восстанавливается изображение сетки с обращенным контрастом. При этом контраст повышается за счет подавления низкочастотного шума (фона).

Схема, позволяющая выполнять преобразование Фурье с заданным масштабом и осуществлять обратное фурье-преобразование, восстанавливая сигнал с линейным коэффициентом передачи $-\frac{d_1}{d+d_0}$, показана на рис. 1.40. Входной сигнал $s(x_0, y_0)$ задается в плоскости I. В плоскости II формируется фурье-спектр этого сигнала $s(K_x, K_y)$. В этой же плоскости может помещаться пространственный фильтр с комплексной функцией пропускания $H_\Phi(K_x, K_y)$. На выходе фильтра получаем сигнал $s(K_x, K_y) H_\Phi(K_x, K_y)$. Линза L_2 выполняет обратное фурье-преобразование. В плоскости III отображается сигнал, представляющий свертку входного сигнала с импульсным откликом фильтра:

$$s(x, y) = s(x, y) \otimes h_\Phi(x, y).$$

Здесь $h_\Phi(x, y) \leftrightarrow H_\Phi(K_x, K_y)$.

В задачах оптической фильтрации хорошо проявляются различия между пространственными и временными фурье-спектрами. Основное

Рис. 1.40

различие состоит в том, что временные спектры удовлетворяют условию эрмитовости,

$$s(\omega) = s^*(-\omega),$$

тогда как пространственные спектры этим свойством, вообще говоря, не обладают. Во временных спектрах составляющие с отрицательными частотами представляют собой просто комплексно сопряженные отображения компонент с положительными частотами и не имеют самостоятельного смысла, поскольку не содержат дополнительной информации. В пространственных фурье-спектрах компоненты с положительными и отрицательными частотами физически реально существуют. Им соответствуют составляющие углового спектра с различными направлениями распространения. Амплитуды и фазы компонент пространственного спектра в области положительных и отрицательных частот не связаны друг с другом и могут быть подвержены произвольным изменениям. Поэтому фильтрация пространственных спектров в положительных и отрицательных частотных полуплоскостях осуществляется независимо.

Если для освещения используется некогерентный свет, при фильтрации следует учитывать, что некогерентный импульсный отклик всегда является действительной неотрицательной функцией, а между амплитудным пропусканием зрачка и оптической передаточной функцией системы существует корреляционная связь. Поэтому, если необходимая передаточная функция и соответствует неотрицательному действительному некогерентному импульсному отклику, то синтезируемая функция зрачка оптической системы может оказаться не единственной.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА В ОПТИКЕ

2.1. ОДНОМЕРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА

Одномерное преобразование Гильберта определяется сверткой сигнала $s(x)$ с функцией $g(x) = 1/\pi x$:

$$\hat{s}(x) = s(x) \otimes g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\xi)}{x - \xi} d\xi. \quad (2.1)$$

Здесь интегрирование выполняется в смысле главного значения Коши:

$$\hat{s}(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{s(\xi) d\xi}{x - \xi} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \frac{s(\xi) d\xi}{x - \xi} \right\}.$$

$\hat{s}(x)$ называется гильберт-образом сигнала $s(x)$.

Спектральная плотность гильберт-образа согласно свойствам фурье-преобразования равна произведению спектральных плотностей сигнала $s(\omega)$ и функции $g(\omega) \leftrightarrow 1/\pi x$:

$$\hat{s}(\omega) = s(\omega) g(\omega).$$

Фурье-спектр функции $1/\pi x$

$$g(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega).$$

Для доказательства воспользуемся обратным фурье-преобразованием:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{j\omega x} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-j \operatorname{sgn} \omega) e^{j\omega x} d\omega = \\ &= -\frac{j}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} \omega e^{j\omega(x - \alpha \operatorname{sgn} \omega)} d\omega = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{j}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{j\omega(x+\alpha)} d\omega + \int_0^{\infty} e^{j\omega(x-\alpha)} d\omega \right\} = \\
&= -\frac{j}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ -\frac{e^{j\omega(x+\alpha)}}{j(x+\alpha)} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{j\omega(x-\alpha)}}{j(x-\alpha)} \Big|_0^{\infty} \right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x+\alpha} + \frac{1}{x-\alpha} \right\} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2 - \alpha^2} = \frac{1}{\pi x}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{1}{\pi x} \leftrightarrow -j \operatorname{sgn} \omega. \quad (2.2)$$

Следовательно, фурье-спектр гильберт-сопряженного сигнала определяется как

$$\hat{s}(\omega) = -j \operatorname{sgn} \omega s(\omega). \quad (2.3)$$

Свойства преобразования Гильберта [1, 17]. Преобразование Гильберта обладает свойством линейности:

$$G\{\alpha_1 s_1(x) + \alpha_2 s_2(x)\} = \alpha_1 \hat{s}_1(x) + \alpha_2 \hat{s}_2(x)$$

при любых постоянных α_1 и α_2 .

Гильберт-образ постоянного сигнала равен нулю. Действительно, при $s(x) = \operatorname{const}$

$$\hat{s}(x) = \frac{s}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{x - \xi} = 0,$$

поскольку ядро преобразования Гильберта есть нечетная функция относительно точки $\xi = x$. Отсюда следует, что в окрестности экстремума сигнала его гильберт-образ проходит через нуль, как это показано на рис. 2.1.

Из рис. 2.1, а видно, что в окрестности точки экстремума сигнал ведет себя как четная функция, тогда как ядро гильберт-преобразования является функцией нечетной (рис. 2.1, б). Следовательно, гильберт-образ сигнала в точке экстремума равен нулю (рис. 2.1, в).

Преобразование Гильберта имеет характер квазидифференцирования сигнала. Это следует из представления оператора дифференцирования в частотном пространстве:

$$\frac{d}{dx} \leftrightarrow j\omega = -|\omega|(-j \operatorname{sgn} \omega) = -|\omega|g(\omega).$$

Однако в отличие от операции дифференцирования преобразование Гильберта имеет нелокальный характер: поведение гильберт-образа в окрестности любой точки зависит от свойств сигнала на всем интервале его существования.

Обратное преобразование Гильберта следует из определения прямого гильберт-преобразования в частотном пространстве:

$$\hat{s}(\omega) = -j \operatorname{sgn} \omega s(\omega).$$

Отсюда

$$s(\omega) = j \operatorname{sgn}(\omega) \hat{s}(\omega) = -[-j \operatorname{sgn}(\omega)] \hat{s}(\omega).$$

Следовательно, в координатном пространстве обратное преобразование Гильберта имеет вид

$$s(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{s}(\xi)}{x - \xi} d\xi.$$

Оно отличается от прямого гильберт-преобразования только знаком и является сверткой гильберт-образа сигнала и ядра $1/\pi x$.

Изменение масштаба гильберт-преобразования. Пусть $s(x) \leftrightarrow s(\omega)$. Найдем гильберт-сопряженный сигнал для сигнала с измененным масштабом $s(ax)$,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(a\xi)}{x - \xi} d\xi = \frac{1}{\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(u)}{x - u/a} du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(u)}{ax - u} du = \hat{s}(ax).$$

Следовательно,

$$s(ax) \xrightarrow{g} \hat{s}(ax). \quad (2.4)$$

Рис. 2.1

Теорема смещения. Найдём гильберт-сопряженный сигнал для $s(x-a)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\xi-a)}{x-\xi} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(u)}{x-(u+a)} du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(u)}{x-a-u} du = \widehat{s}(x-a).$$

Таким образом,

$$s(x-a) \xrightarrow{g} \widehat{s}(x-a). \quad (2.5)$$

Гильберт-преобразование свертки двух сигналов:

$$s_1(x) \otimes s_2(x) \leftrightarrow s_1(\omega) s_2(\omega).$$

Фурье-спектр гильберт-образа свертки двух сигналов:

$$-j \operatorname{sgn} \omega s_1(\omega) s_2(\omega).$$

Выполняя обратное фурье-преобразование, получаем

$$-j \operatorname{sgn} \omega s_1(\omega) s_2(\omega) \leftrightarrow \widehat{s}_1(x) \otimes s_2(x).$$

$$s_1(\omega) [-j \operatorname{sgn} \omega s_2(\omega)] \leftrightarrow s_1(x) \otimes \widehat{s}_2(x).$$

Отсюда следует

$$s_1(x) \otimes s_2(x) \xrightarrow{g} \widehat{s}_1(x) \otimes s_2(x); \quad (2.6)$$

$$s_1(x) \otimes s_2(x) \xrightarrow{g} s_1(x) \otimes \widehat{s}_2(x). \quad (2.7)$$

Поскольку $\widehat{s}_1(\omega) \widehat{s}_2(\omega) = [-j \operatorname{sgn} \omega s_1(\omega)] [-j \operatorname{sgn} \omega s_2(\omega)] = -s_1(\omega) s_2(\omega)$, справедливо еще одно важное соотношение:

$$s_1(x) \otimes s_2(x) = -\widehat{s}_1(x) \otimes \widehat{s}_2(x). \quad (2.8)$$

Обратимся к функции корреляции сигнала

$$K_s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x+\tau) s^*(\tau) d\tau.$$

Её фурье-спектр:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(x+\tau) s^*(\tau) d\tau \leftrightarrow s(\omega) e^{j\omega\tau} s^*(\omega) = |s(\omega)|^2 e^{j\omega\tau}.$$

Фурье-спектр функции корреляции гильберт-сопряженного сигнала $\hat{s}(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(x+\tau) \hat{s}^*(x) dx \leftrightarrow [-j \operatorname{sgn} \omega s(\omega)] e^{j\omega\tau} [-j \operatorname{sgn} \omega s(\omega)]^* = |s(\omega)|^2 e^{j\omega\tau}.$$

Из сравнения фурье-спектров функции корреляции гильберт-сопряженного сигнала следует равенство функций корреляции сигнала и его гильберт-образа

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(x+\tau) s^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(x+\tau) \hat{s}^*(x) dx. \quad (2.9)$$

Полагая в (2.9) $\tau=0$, получаем еще одно важное соотношение, получившее название теоремы Рэлея:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{s}(x)|^2 dx.$$

Энергия сигнала при гильберт-преобразовании сохраняется. Это легко показать. Пусть произвольный сигнал $s(x)$ задан своей спектральной плотностью $s(\omega)$. Энергетический спектр его

$$W(\omega) = |s(\omega)|^2.$$

Определим энергетический спектр гильберт-образа сигнала:

$$|\hat{s}(\omega)|^2 = |-j \operatorname{sgn} \omega s(\omega)|^2 = |s(\omega)|^2 = W(\omega).$$

Отсюда следует равенство энергий.

Приведем примеры преобразований Гильберта. Сравним скалярные произведения двух различных сигналов $s_1(x)s_2(x)$ и $\hat{s}_1(x)\hat{s}_2(x)$. Согласно обобщенной формуле Рэлея

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(x) s_2^*(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega) s_2^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\omega) d\omega;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}_1(x) \hat{s}_2^*(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [-j \operatorname{sgn} \omega s_1(\omega)] [-j \operatorname{sgn} \omega s_2(\omega)]^* d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega) s_2^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\omega) d\omega.$$

Отсюда следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(x) s_2^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}_1(x) \hat{s}_2^*(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\omega) d\omega.$$

Полученный результат означает, что скалярные произведения двух различных сигналов и их гильберт-образов равны и определяют обменную энергию этих сигналов.

Преобразование Гильберта гармонических сигналов. Пусть $s(x) = \cos \omega_0 x$ (рис. 2.2, а). Тогда (рис. 2.2, б)

$$s(\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

Выполняя гильберт-преобразование, получаем спектральную плотность гильберт-образа косинусоиды (рис. 2.2, в):

$$\hat{s}(\omega) = -j \operatorname{sgn} \omega \{ \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \} = -j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)].$$

Посредством обратного фурье-преобразования этой спектральной области находим гильберт-образ косинусоиды:

$$-j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \leftrightarrow \sin \omega_0 x, \quad (2.10)$$

что отражено на рис. 2.2, г.

Выполним гильберт-преобразование синусоиды (рис. 2.3, а). На рис. 2.3, б показана спектральная плотность синусоиды. Спектральную плотность гильберт-образа синусоиды $\hat{s}(\omega)$ находим, умножая фурье-спектр синусоиды на собственное значение гильберт-оператора в частотном пространстве (рис. 2.3, в):

$$\begin{aligned} \hat{s}(\omega) &= -j \operatorname{sgn} \omega \{ -j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \} = \\ &= -\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \end{aligned}$$

Это есть спектральная плотность косинусоиды, взятой с обратным знаком (рис. 2.3, г):

$$-\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \leftrightarrow -\cos \omega_0 x.$$

Рис. 2.2

Рис. 2.3

Следовательно,

$$\cos \omega_0 x \xrightarrow{g} \sin \omega_0 x;$$

$$\sin \omega_0 x \xrightarrow{g} -\cos \omega_0 x.$$

Гильберт-преобразования прямоугольного импульса
(рис. 2.4, а):

$$s(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{x_0}\right) = \begin{cases} 1, & |x| < x_0; \\ 0, & |x| > x_0. \end{cases}$$

Воспользуемся формулой (2.1):

$$\hat{s}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{d\xi}{x - \xi} = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{x - x_0}{x + x_0} \right|.$$

Рис. 2.4

Гильберт-образ $\hat{s}(x)$ показан на рис. 2.4, б. Фурье-спектр прямоугольного импульса, $\hat{s}(\omega) = 2x_0 \frac{\sin(\omega x_0)}{\omega x_0}$, представлен на рис. 2.4, в, а фу-

рье-спектр гильберт-образа прямоугольного импульса, $\hat{s}(\omega) = -j \operatorname{sgn} \omega \left\{ 2x_0 \frac{\sin(\omega x_0)}{\omega x_0} \right\}$ – на рис. 2.4, г.

Гильберт-образ сигнала $s(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (рис. 2.5). Фурье-спектр этого сигнала

$$s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\omega x}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{1+jx} + \frac{1}{1-jx} \right] e^{-j\omega x} dx = \pi e^{-|\omega|}.$$

Фурье-спектр гильберт-сопряженного сигнала

$$\hat{s}(\omega) = \pi e^{-|\omega|} (-j \operatorname{sgn} \omega).$$

Выполняя обратное фурье-преобразование, находим гильберт-сопряженный сигнал

$$\begin{aligned} \hat{s}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} (-j \operatorname{sgn} \omega) e^{-|\omega|} d\omega = -\frac{j}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} \omega e^{-|\omega|} e^{-j\omega x} d\omega = \\ &= -\frac{j}{2} \left\{ -\int_{-\infty}^0 e^{\omega} e^{j\omega x} d\omega + \int_0^{\infty} e^{-\omega} e^{j\omega x} d\omega \right\} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{j}{2} \left\{ -\int_{-\infty}^0 e^{(1+jx)\omega} d\omega + \int_0^{\infty} e^{-(1-jx)\omega} d\omega \right\} = \frac{j}{2} \left[\frac{1}{1+jx} - \frac{1}{1-jx} \right] = \frac{x}{1+x^2}.$$

Рис. 2.5

Гильберт-образ сигнала (рис. 2.6, а)

$$s(x) = \delta(x - x_0) + \delta(x + x_0).$$

Воспользуемся формулой (2.1) для непосредственного определения гильберт-образа (рис. 2.6, б):

$$s(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\xi - x_0) + \delta(\xi + x_0)}{x - \xi} d\xi = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{x - x_0} + \frac{1}{x + x_0} \right) = \frac{2x}{\pi(x^2 - x_0^2)}.$$

Спектральная плотность сигнала $s(\omega)$ показана на рис. 2.6, в, а фурье-спектр $\hat{s}(\omega)$ гильберт-образа – на рис. 2.6, г.

Рассмотрим случай последовательного многократного преобразования Гильберта. Пусть сигнал $s(x)$, спектральная плотность которого $s(\omega)$, последовательно n раз подвергается преобразованию Гильберта. Для фурье-спектра сопряженного сигнала имеем

$$\hat{s}^{(n)}(\omega) = (-j \operatorname{sgn} \omega)^n s(\omega).$$

Рис. 2.6

При n четном, $n = 2m$, результирующий фурье-спектр имеет вид

$$(-j \operatorname{sgn} \omega)^{2m} s(\omega) = (-j)^{2m} s(\omega) = (-1)^m s(\omega) = (-1)^{n/2} s(\omega). \quad (2.11)$$

Результатом последовательного четного числа преобразований Гильберта является восстановленный с точностью до множителя $(-j)^{n/2}$ исходный сигнал. Сигнал восстанавливается со знаком минус при $n/2$ нечетном, а при $n/2$ четном – в первоизданном виде, со знаком плюс. В частном случае двукратного преобразования Гильберта исходный сигнал восстанавливается инвертированным по амплитуде.

В случае n нечетного, $n = 2m+1$, для фурье-спектра гильберт-сопряженного сигнала имеем

$$\begin{aligned} (-j \operatorname{sgn} \omega)^n s(\omega) &= (-j \operatorname{sgn} \omega)^{2m+1} s(\omega) = \\ &= (-j \operatorname{sgn} \omega)^{2m} (-j \operatorname{sgn} \omega) s(\omega) = (-1)^m \hat{s}(\omega) = (-1)^{(n/2)/2} \hat{s}(\omega). \end{aligned} \quad (2.12)$$

В этом случае результатом является с точностью до знака гильберт-сопряженный сигнал. При $(n-1)/2$ четном – знак плюс, а при $(n-1)/2$ нечетном результирующий гильберт-образ сигнала инвертирован по амплитуде.

Рассмотрим связь гильберт-преобразования с операциями дифференцирования и интегрирования. Для фурье-спектра производной сигнала n -го порядка имеем

$$\frac{d^n}{dx^n} s(x) \leftrightarrow (j\omega)^n s(\omega).$$

При n нечетном, $n = 2m+1$, для фурье-спектра производной сигнала получаем

$$\begin{aligned}(j\omega)^n s(\omega) &= (j\omega)^{2m+1} s(\omega) = -(j)^{2m} (-j \operatorname{sgn} \omega) |\omega|^{2m+1} s(\omega) = \\ &= (-1)^{m+1} |\omega|^{2m+1} (-j \operatorname{sgn} \omega) s(\omega) = (-1)^{(n+1)/2} |\omega|^n \hat{s}(\omega).\end{aligned}\quad (2.13)$$

Фурье-спектр производной сигнала n (нечетного) порядка равен произведению спектральной плотности гильберт-сопряженного сигнала на множитель $(-1)^{(n+1)/2} |\omega|^n$. Сравнивая (2.13) с (2.12), находим, что при n нечетном дифференцирование сигнала приводит в частотной области с точностью до коэффициента $(-1)^{(n+1)/2}$ к произведению фурье-спектра гильберт-сопряженного сигнала на модуль частоты в степени n .

В случае n четного, $n = 2m$, фурье-спектр производной сигнала имеет вид

$$\begin{aligned}(j\omega)^n s(\omega) &= (j\omega)^{2m} s(\omega) = (j)^{2m} \omega^{2m} s(\omega) = \\ &= (-1)^m \omega^{2m} s(\omega) = (-1)^{n/2} |\omega|^n s(\omega).\end{aligned}\quad (2.14)$$

Из (2.14) следует, что фурье-спектр четной производной сигнала с точностью до коэффициента $(-1)^{n/2}$ равен произведению фурье-спектра сигнала на множитель $|\omega|^n$.

Обобщая приведенные выше рассуждения, можно сделать вывод: фурье-спектр производной сигнала n -го порядка определяется произведением фурье-спектра n -кратного гильберт-сопряженного сигнала на модуль частоты в степени n .

Рассмотрим связь операции интегрирования сигнала с его гильберт-преобразованием. Для фурье-спектра интеграла сигнала имеем

$$\int_{-\infty}^x s(x) dx \leftrightarrow \frac{s(\omega)}{j\omega}$$

или

$$\frac{s(\omega)}{j\omega} = \frac{1}{|\omega|} (-j \operatorname{sgn} \omega) s(\omega) = \frac{\hat{s}(\omega)}{|\omega|}.\quad (2.15)$$

Следовательно, фурье-спектр интеграла сигнала определяется отношением спектральной плотности гильберт-сопряженного сигнала к модулю частоты.

Фурье-преобразование n -кратно интегрированного сигнала дает

$$\underbrace{\int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^x}_{n} s(x) dx \leftrightarrow \frac{s(\omega)}{(j\omega)^n}.$$

При n -четном, $n = 2m$, получаем

$$\frac{s(\omega)}{(j\omega)^n} = \frac{s(\omega)}{(j\omega)^{2m}} = (-1)^m \frac{s(\omega)}{|\omega|^{2m}} = \frac{(-1)^{n/2}}{|\omega|^n} s(\omega). \quad (2.16)$$

В этом случае фурье-спектр n -кратного интеграла сигнала равен с точностью до коэффициента $(-1)^{n/2}$ отношению спектральной плотности сигнала к $|\omega|^n$. В выражении (2.16), как следует из сравнения с (2.11), $(-1)^{n/2} s(\omega)$ является фурье-спектром n -кратного гильберт-сопряженного сигнала при n четном.

Положим теперь n нечетным, $n = 2m + 1$. Тогда для фурье-спектра n -кратного интеграла сигнала находим

$$\frac{s(\omega)}{(j\omega)^n} = \frac{s(\omega)}{(j\omega)^{2m+1}} = \frac{(-j \operatorname{sgn} \omega) s(\omega)}{(j)^{2m} |\omega|^{2m+1}} = (-1)^m \frac{\hat{s}(\omega)}{|\omega|^{2m+1}} = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{|\omega|^n} \hat{s}(\omega). \quad (2.17)$$

Как следует из (2.17), фурье-спектр n -кратного интеграла сигнала определяется с точностью до коэффициента $(-1)^{(n-1)/2}$ отношением спектральной плотности гильберт-сопряженного сигнала к модулю частоты в степени n при n нечетном.

2.2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИГНАЛ

Пусть задан сигнал $s(x)$ и его спектральная плотность $s(\omega)$. Эти величины являются фурье-сопряженными:

$$s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) e^{j\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 s(\omega) e^{j\omega x} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} s(\omega) e^{j\omega x} d\omega. \quad (2.18)$$

Преобразуем первый интеграл в правой части (2.18), сделав замену переменной $\psi = -\omega$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 s(\omega) e^{j\omega x} d\omega &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 s(-\psi) e^{j\psi x} d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} s^*(\psi) e^{j\psi x} d\psi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} s^*(\omega) e^{-j\omega x} d\omega. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Функция $z_s(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} s(\omega) e^{j\omega x} d\omega$, определенная в области положительных частот, называется аналитическим сигналом. Согласно (2.18) и (2.19) вещественный сигнал $s(x)$ определяется через аналитический сигнал $z_s(x)$:

$$s(x) = \frac{1}{2} [z_s(x) + z_s^*(x)],$$

или

$$s(x) = \operatorname{Re} z_s(x).$$

Мнимая часть аналитического сигнала

$$\hat{s}(x) = \operatorname{Im} [z_s(x)]$$

получила название сопряженного сигнала по отношению к исходному $s(x)$

$$z_s(x) = s(x) + j\hat{s}(x). \quad (2.20)$$

Обратимся к преобразованию Фурье, связывающему аналитический сигнал и его спектральную плотность,

$$z_s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z_s(\omega) e^{j\omega x} d\omega.$$

С другой стороны, по определению

$$z_s(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} s_s(\omega) e^{j\omega x} d\omega.$$

Следовательно,

$$z_s(\omega) = \begin{cases} 2s(\omega), & \omega > 0; \\ 0, & \omega < 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Спектральная плотность аналитического сигнала равна удвоенной спектральной плотности исходного физического сигнала и отлична от нуля только в области положительных частот. Выполняя преобразование Фурье аналитического сигнала (2.20), получаем

$$z_s(\omega) = s(\omega) + j\hat{s}(\omega), \quad (2.22)$$

где $\hat{s}(\omega)$ – спектральная плотность сопряженного сигнала.

Совместимость выражений (2.21) и (2.22) достигается при выполнении условия

$$\hat{s}(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) s(\omega).$$

Следовательно, исходный и сопряженный сигналы связаны преобразованием Гильберта в частотном пространстве:

$$\begin{aligned} \hat{s}(\omega) &= -j \operatorname{sgn}(\omega) s(\omega); \\ s(\omega) &= j \operatorname{sgn}(\omega) \hat{s}(\omega). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Соответственно в координатном пространстве:

$$\begin{aligned} \hat{s}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\xi)}{x - \xi} d\xi; \\ s(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{s}(\xi)}{\xi - x} d\xi. \end{aligned}$$

Согласно (2.23) преобразование Гильберта в частотном пространстве заключается в повороте фазы спектральных компонент на угол минус 90° в области положительных частот и на угол плюс 90° в области отрицательных частот. Такая функция выполняется идеальным квадратным фильтром.

Пусть $s(x)$ – произвольный сигнал,

$$s(x) = |z_s(x)| e^{j\psi(x)},$$

где согласно (2.23) огибающая (модуль) сигнала равна

$$|s(x)| = [s^2(x) + \hat{s}^2(x)]^{1/2},$$

а фаза $\psi(x)$ определяется как аргумент аналитического сигнала,

$$\psi(x) = \arctg \frac{\hat{s}(x)}{s(x)}.$$

Мгновенная частота такого сигнала находится как производная фазы $\psi(x)$ по переменной x :

$$\omega(x) = \frac{d}{dx} \arctg \frac{\hat{s}(x)}{s(x)} = \frac{\hat{s}'(x)s(x) - \hat{s}(x)s'(x)}{s^2(x) + \hat{s}^2(x)}.$$

Из (2.23) следует, что сигнал и его гильберт-образ взаимно ортогональны:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) \hat{s}^*(\omega) d\omega = j \int_{-\infty}^{\infty} |s(\omega)|^2 \operatorname{sgn}(\omega) d\omega = 0.$$

Комплексное преобразование Ганкеля [10]. Пусть имеется сигнал $s(r)$, ганкель-образ которого $\bar{s}(w)$. Комплексным преобразованием Ганкеля $\hat{\bar{s}}_s(w)$ сигнала $s(x)$ называется комплексно-сопряженная функция аналитического сигнала $\bar{z}_s(w) = \bar{s}(w) + j\hat{\bar{s}}(w)$:

$$\hat{\bar{s}}_c(w) = \bar{z}_s^*(w) = \bar{s}(w) - j\hat{\bar{s}}(w),$$

где $\hat{\bar{s}}(w)$ является гильберт-сопряженным фурье-спектром сигнала $\bar{s}(r)$:

$$\hat{\bar{s}}(w) = \int_0^{\infty} r s(r) \hat{J}_0(wr) dr. \quad (2.24)$$

Из (2.24) следует, что для нахождения $\hat{\bar{s}}_s(w)$ достаточно выполнить гильберт-преобразование функции Бесселя $J_0(x)$:

$$\hat{J}_0(wr) = H_0(wr) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(wr \cos \theta) d\theta.$$

Функция $H_0(wr)$ называется функцией Струве [20].

2.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА ДВУМЕРНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Пусть имеется оптический двумерный сигнал $s(x, y)$, фурье-спектр которого $s(K_x, K_y)$. Такой сигнал можно подвергнуть одномерному или двумерному преобразованию Гильберта, применяя фазовые или амплитудные фильтры.

Одномерное преобразование Гильберта двумерного сигнала можно выполнить в частотной плоскости, применяя соответствующие оптические фильтры, когерентные передаточные функции которых имеют вид

$$G_x(K_x, K_y) = -j \operatorname{sgn} K_x,$$

или

$$G_y(K_x, K_y) = -j \operatorname{sgn} K_y.$$

Для соответствующих фурье-спектров гильберт-сопряженных сигналов имеем

$$\hat{s}_x(K_x, K_y) = -j \operatorname{sgn} K_x s(K_x, K_y) \quad (2.25)$$

или

$$\hat{s}_y(K_x, K_y) = -j \operatorname{sgn} K_y s(K_x, K_y). \quad (2.26)$$

В результате обратного фурье-преобразования в координатной плоскости формируются гильберт-сопряженные сигналы:

$$\hat{s}_x(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\xi, y)}{x - \xi} d\xi;$$

$$\hat{s}_y(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\xi, x)}{y - \xi} d\xi.$$

Рис. 2.7

Пространственно-частотный фильтр, реализующий одномерное фурье-преобразование в соответствии с (2.25) и (2.26), может быть выполнен в

виде оптической пластинки со ступенькой Δl , создающей фазовый скачок величиной $\Delta\varphi = kn\Delta l = \pi$ (рис. 2.7), где n – коэффициент преломления.

На рис. 2.8 и 2.9 показаны примеры оптических схем, выполняющих одномерную гильберт-фильтрацию двумерных сигналов. В схеме оптического гильберт-процессора (рис. 2.9) освещение входной плоскости, в которой локализуется входной сигнал (транспарант) $s(x, y)$, осуществляется световой волной, формируемой в сходящемся пучке. Входная плоскость (x, y) расположена непосредственно за объективом 1, а частотная плоскость – перед объективом 2.

Рис. 2.8

Рис. 2.9

Такая конфигурация оптического процессора аналогична показанной на рис. 1.40. Она снижает влияние конечной апертуры фурие-объективов 1 и 2 на выполнение прямого и обратного фурие-преобразований.

Двумерное преобразование Гильберта. Оптический сигнал $s(x, y)$, заданный в ортогональном координатном базисе, может быть подвергнут двумерному преобразованию Гильберта:

$$\hat{s}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\xi, \eta)}{(x - \xi)(y - \eta)} d\xi d\eta.$$

Это – двумерная свертка сигнала $s(x, y)$ с функциями $1/x$ и $1/y$. В частотной плоскости когерентная передаточная функция двумерного гильберт-фильтра имеет вид

$$G(K_x, K_y) = (-j \operatorname{sgn} K_x)(-j \operatorname{sgn} K_y) = -\operatorname{sgn} K_x \operatorname{sgn} K_y \quad (2.27)$$

или

$$G(K_x, K_y) = \begin{cases} -1, & K_x > 0; K_y > 0, \\ -1, & K_x < 0; K_y < 0; \\ 1, & K_x > 0; K_y < 0, \\ 1, & K_x < 0; K_y > 0. \end{cases}$$

Рис. 2.10

Из рис. 2.10 видно, что двумерный фильтр является фазовым, в котором сегмент, содержащий первый и третий квадрант, вносит фазовый сдвиг π относительно сегмента, содержащего второй и четвертый квадранты.

Преобразование Фуко–Гильберта. Ортогональность сигнала и его гильберт-образа указывает на возможность использования в частотном

пространстве амплитудного фильтра с когерентной передаточной функцией вида

$$H(\omega) = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{sgn} \omega] = \frac{1}{2}[1 + j(-j \operatorname{sgn} \omega)] = \frac{1}{2}[1 + jg(\omega)]. \quad (2.28)$$

Действительно, такой фильтр, получивший название фильтра Фуко–Гильберта, преобразует фурье-спектр сигнала следующим образом:

$$s(\omega)H(\omega) = \frac{1}{2}s(\omega)[1 + j(-j \operatorname{sgn} \omega)] = \frac{1}{2}s(\omega) + \frac{1}{2}j\hat{s}(\omega) = \frac{1}{2}z_s(\omega). \quad (2.29)$$

Как видно из (2.29), в результате фильтрации Фуко–Гильберта фурье-спектр исходного сигнала трансформируется в фурье-спектр аналитического сигнала.

Запишем выражение для когерентно-передаточной функции фильтра, выполняющего комплементарное одномерное преобразование Фуко–Гильберта

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{1}{2}[1 - \operatorname{sgn}(\omega)] = \frac{1}{2}[1 - j(-j \operatorname{sgn} \omega)] = \frac{1}{2}[1 - jg(\omega)]. \quad (2.30)$$

В результате фильтрации фурье-спектр исходного сигнала трансформируется в фурье-спектр комплексно-сопряженного аналитического сигнала:

$$s(\omega) \tilde{H}(\omega) = \frac{1}{2}[1 - jg(\omega)] = \frac{1}{2}s(\omega) - \frac{1}{2}j\hat{s}(\omega) = \frac{1}{2}z_s^*(\omega). \quad (3.31)$$

Вычитание комплементарных преобразований Фуко–Гильберта (2.29) и (2.31) дает с точностью до фазового множителя, фурье-спектр одномерного гильберт-сопряженного сигнала

$$s(\omega) H(\omega) - s(\omega) \tilde{H}(\omega) = j\hat{s}(\omega). \quad (2.32)$$

Двумерное преобразование Фуко–Гильберта. Когерентная передаточная функция двумерного фильтра Фуко–Гильберта (рис. 2.11) может быть представлена как

$$H(K_x, K_y) = \frac{1}{4}(1 + \operatorname{sgn} K_x)(1 + \operatorname{sgn} K_y), \quad (2.33)$$

или

$$H(K_x, K_y) = \begin{cases} 1, & K_x > 0, K_y > 0; \\ 0, & K_x < 0, K_y < 0, \\ 0, & K_x > 0, K_y < 0, \\ 0, & K_x < 0, K_y > 0. \end{cases}$$

Рис. 2.11

Оптический сигнал в результате фильтрации Фуко–Гильберта трансформируется в однополосный по пространственным частотам

K_x и K_y . Когерентная передаточная функция комплементарного двумерного фильтра Фуко–Гильберта имеет вид (рис. 2.12)

$$\tilde{H}(K_x, K_y) = \frac{1}{4}(1 - \operatorname{sgn} K_x)(1 - \operatorname{sgn} K_y), \quad (2.34)$$

Рис. 2.12

или

$$\tilde{H}(K_x, K_y) = \begin{cases} 1, & K_x < 0, K_y < 0; \\ 0, & K_x > 0, K_y > 0, \\ & K_x > 0, K_y < 0, \\ & K_x < 0, K_y > 0. \end{cases}$$

Вычитая (2.34) из (2.33), получаем

$$\begin{aligned} H(K_x, K_y) - \tilde{H}(K_x, K_y) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sgn} K_x + \operatorname{sgn} K_y) = \\ &= \frac{j}{2}[(j \operatorname{sgn} K_x) + (-j \operatorname{sgn} K_y)]. \end{aligned}$$

Следовательно, разность комплементарных двумерных преобразований Фуко–Гильберта дает, с точностью до постоянного коэффициента, сумму одномерных преобразований Гильберта по осям x и y .

Найдем сумму КПФ комплементарных фильтров Фуко–Гильберта (2.33) и (2.34):

$$\begin{aligned} H_q(K_x, K_y) &= H(K_x, K_y) + \tilde{H}(K_x, K_y) = \frac{1}{4}(1 + \operatorname{sgn} K_x)(1 + \operatorname{sgn} K_y) + \\ &+ \frac{1}{4}(1 - \operatorname{sgn} K_x)(1 - \operatorname{sgn} K_y) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} K_x \operatorname{sgn} K_y). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Фильтр с такой когерентной передаточной функцией получил название квадрантного фильтра Фуко–Гильберта (рис. 2.13):

$$H_q(K_x, K_y) = \begin{cases} 1, & K_x > 0, K_y > 0, \\ & K_x < 0, K_y < 0; \\ 0, & K_x > 0, K_y < 0, \\ & K_x < 0, K_y > 0. \end{cases}$$

Рис. 2.13

Рис. 2.14

Комплементарный квадрантный фильтр Фуко–Гильберта имеет когерентную передаточную функцию (рис. 2.14):

$$\tilde{H}_q(K_x, K_y) = \frac{1}{2} (1 - \operatorname{sgn} K_x \operatorname{sgn} K_y) \begin{cases} 1, & K_x > 0, K_y < 0, \\ & K_x < 0, K_y > 0; \\ 0, & K_x > 0, K_y > 0, \\ & K_x < 0, K_y < 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Разность когерентных передаточных функций (3.35) и (3.36) дает КПФ фильтра, выполняющего двумерное преобразование Гильберта (3.27):

$$G(K_x, K_y) = \tilde{H}_q(K_x, K_y) + H_q(K_x, K_y) = -\operatorname{sgn} K_x \operatorname{sgn} K_y.$$

Отсюда следует, что, выполняя комплементарные квадратурные преобразования Фуко–Гильберта и вычитая фильтрованные поля, получаем двумерный гильберт-образ исходного оптического сигнала без применения фазовых фильтров.

2.4. ИЗОТРОПНОЕ КОГЕРЕНТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА

Преобразование Гильберта сигналов с осевой симметрией. Рассмотрим оптический фильтр, когерентная передаточная функция которого в системе с осевой симметрией описывается выражением

$$H_g(w, \varphi) = e^{-j\varphi}, \quad (2.37)$$

где φ – полярный угол.

Импульсный отклик такого фильтра определяем через обратное фурье-преобразование когерентной передаточной функции (2.37):

$$h_g(r, \theta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi e^{-j\varphi} e^{jwr \sin(\varphi+\theta)} w dw d\varphi.$$

Выполняя замену переменной $\varphi + \theta = \alpha$, получаем

$$h_g(r, \theta) = \frac{1}{4\pi^2} e^{j\theta} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi e^{-j[\alpha - wr \sin \alpha]} w dw d\varphi = \frac{1}{2\pi} e^{j\theta} \int_0^\infty w J_1(rw) dw,$$

где $J_1(rw)$ – функция Бесселя первого порядка. Воспользовавшись свойствами функций Бесселя, сделаем подстановку

$$J_1(rw) = -\frac{dJ_0(rw)}{d(rw)},$$

$$h_g(r, \theta) = -\frac{1}{2\pi} e^{j\theta} \int_0^\infty w \frac{dJ_0(rw)}{d(rw)} dw =$$

$$\left[rw = u; \quad w = \frac{u}{r}; \quad dw = \frac{du}{r} \right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi} e^{j\theta} \frac{1}{r^2} \int_0^\infty u \frac{dJ_0(u)}{du} du = -\frac{1}{2\pi r^2} e^{j\theta} \left\{ uJ_0(u) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty J_0(u) du \right\}.$$

Здесь мы воспользовались интегрированием по частям. Поскольку $uJ_0(u) \Big|_0^\infty = 0$, а $\int_0^\infty J_0(u) du = 1$, окончательно получаем импульсный отклик

$$h_g(r, \theta) = \frac{e^{j\theta}}{2\pi r^2}. \quad (2.38)$$

Выполним фурье-преобразование импульсного отклика $h(r, \theta)$:

$$H(w, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \frac{e^{j\theta}}{r^2} e^{-jwr \sin(\theta+\varphi)} r dr d\theta =$$

$$[\theta + \varphi = \alpha]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^{-j\varphi}}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \frac{1}{r} e^{j(\alpha - wr \sin \alpha)} dr d\alpha = e^{-j\varphi} \int_0^\infty \frac{J_1(wr)}{r} dr = e^{-j\varphi} \int_0^\infty \frac{J_1(u)}{u} du = \\
 &= e^{-j\varphi} \int_0^\infty \left\{ J_0(u) - \frac{dJ_1(u)}{du} \right\} du = e^{-j\varphi} \left\{ \int_0^\infty J_0(u) du - \int_0^\infty dJ_1(u) \right\} = e^{-j\varphi}.
 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались рекуррентной формулой $\frac{n}{u} J_n(u) = J_{n-1}(u) - J'_n(u)$. Таким образом, КПФ фильтра (2.37) и импульсный отклик (2.38) образуют фурие-сопряженную пару

$$\frac{e^{j\theta}}{2\pi r^2} \leftrightarrow e^{-j\varphi}. \quad (2.39)$$

В координатной плоскости преобразование, выполняемое фильтром (2.39), сводится к свертке сигнала с квадратичной гиперболой. Такой фильтр может применяться для оконтуривания как осесимметричных, так и произвольных двумерных оптических сигналов.

Действие фильтра с когерентной передаточной функцией (2.37) можно представить как изотропное преобразование Гильберта. Обратимся к рис. 2.15. Противоположно направленные полярные радиусы, соответствующие полярным углам φ и $\varphi + \pi$, выполняют роль нормали к прямой p , проходящей через центр системы координат под углом $\varphi + \pi/2$ к полярной оси. Эта прямая выполняет роль локальной границы раздела между положительными и отрицательными пространственными частотами. Когерентная передаточная функция $e^{-j\varphi}$ оказывается эквивалентной когерентно-передаточной функции гильберт-фильтра $-j \operatorname{sgn}(\alpha + \varphi - \psi)$. Можно сказать, что изотропность здесь достигается усреднением по углу одномерных преобразований Гильберта [8]. В области низких пространственных частот частотный фильтр с КПФ $e^{-j\varphi}$ работает плохо. В координатном пространстве действие этого фильтра сводится к свертке фильтруемого сигнала с импульсным откликом вида (2.38). При этом цель фильтрации, состоящая в изотропном оконтуривании

Рис. 2.15

сигнала, достигается. Чистое изотропное преобразование Гильберта, как будет показано далее, реализуется при смещении границы раздела знакопеременных пространственных частот относительно нуля в направлении нормали к этой границе, заданной полярным радиусом w .

Гильберт-фильтрация осесимметричных сигналов. Пусть $s(r) \leftrightarrow s(w)$. Тогда для фурье-спектра гильберт-сопряженного сигнала имеем

$$\hat{s}(w) = s(w)e^{-j\varphi}.$$

Выполняя обратное фурье-преобразование, получаем

$$\begin{aligned}\hat{s}(r) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \hat{s}(w) e^{jwr \sin(\varphi+\theta)} w dw d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi s(w) e^{-j\varphi} e^{jwr \sin(\varphi+\theta)} w dw d\varphi = \\ &\quad [\varphi + \theta = \alpha] \\ &= \frac{1}{4\pi^2} e^{j\theta} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi s(w) e^{-j[\alpha - wr \sin \alpha]} w dw d\alpha = \frac{e^{j\theta}}{2\pi} \int_0^\infty s(w) J_1(wr) w dw.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что гильберт-образ осесимметричного сигнала определяется через преобразование Ганкеля первого порядка в частотной плоскости:

$$\hat{s}(r) = \frac{e^{j\theta}}{2\pi} \int_0^\infty s(w) J_1(wr) w dw. \quad (2.40)$$

Найдем скалярное произведение сигналов $s(r)$ и $\hat{s}(r)$. Для этого воспользуемся обобщенной формулой Рэлея:

$$\begin{aligned}(s(r), \hat{s}(r)) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi s(w) \hat{s}^*(w) w dw d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi s(w) s^*(w) e^{j\varphi} w dw d\varphi =\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty |s(w)|^2 w dw \int_{-\pi}^\pi e^{j\varphi} d\varphi = 0.$$

Как и следовало ожидать, исходный $s(r)$ и гильберт-сопряженный $\hat{s}(r)$ сигналы ортогональны.

Пусть $s(r, \theta) = \text{const}$. Тогда, по свойствам фурье-преобразования, $s(w, \varphi) = 4\pi^2 \delta(w)$. Фурье-спектр гильберт-сопряженного сигнала равен

$$\hat{s}(w, \varphi) = 4\pi^2 \delta(w) e^{-j\varphi}.$$

Выполняя обратное фурье-преобразование, находим гильберт-сопряженный сигнал

$$\hat{s}(r, \theta) = 2\pi e^{j\theta} \int_0^\infty w \delta(w) J_1(rw) dw = 0.$$

Таким образом, когерентное изотропное преобразование постоянного двумерного сигнала равно нулю. Как следствие, гильберт-сопряженный двумерный сигнал обращается в нуль и при значениях аргументов, соответствующих экстремумам исходного сигнала.

Для когерентного изотропного преобразования Гильберта остается справедливым равенство Парсеваля:

$$\int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi |s(w, \varphi)|^2 w dw d\varphi = \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi |\hat{s}(w, \varphi)|^2 w dw d\varphi.$$

В самом деле, для энергии сигнала, разложенного в ряд Фурье, имеем

$$\sum_{m=-\infty}^\infty |c_n|^2 = \sum_{m=-\infty}^\infty |\hat{c}_n|^2,$$

т.е. энергия исходного и гильберт-сопряженного сигналов равны.

Гильберт-преобразование осесимметричного сигнала $s(r) =$

$$= J_0(ar). \text{ Из } \delta(r-a) \overset{h}{\leftrightarrow} \int_0^\infty r \delta(r-a) J_0(wr) dr \text{ следует } \delta(r-a) \overset{h}{\leftrightarrow} \int_0^\infty a J_0(aw)$$

или, поскольку преобразование Ганкеля симметрично,

$$J_0(ar) \overset{h}{\leftrightarrow} \frac{1}{a} \delta(w-a).$$

Для фурье-спектра гильберт-сопряженного сигнала имеем

$$\hat{s}(w) = \frac{2\pi}{a} \delta(w-a) e^{j\varphi}.$$

Отсюда с учётом (2.40) находим гильберт-сопряженный сигнал

$$\hat{s}(r) = \frac{e^{j\theta}}{2\pi} \int_0^\infty w s(w) J_1(rw) dw = J_1(ar) e^{j\theta} = \frac{e^{j\theta}}{a} \frac{dJ_0(ar)}{dr}.$$

Изотропное когерентное преобразование Гильберта произвольных сигналов. Воспользуемся разложением произвольного $s(r, \theta)$ в ряд Фурье по полярным гармоникам:

$$s(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\theta}.$$

Для фурье-спектра сигнала, согласно (1.105), имеем

$$s(w, \varphi) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn}(w) e^{-jn\varphi},$$

где $\bar{c}_{nn}(w) \overset{h_n}{\leftrightarrow} c_n(r)$.

Определим фурье-спектр гильберт-сопряженного сигнала:

$$\hat{s}(w, \varphi) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn}(w) e^{-j(n+1)\varphi}.$$

Выполним обратное фурье-преобразование:

$$\begin{aligned} \hat{s}(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} \bar{c}_{nn}(w) e^{-j(n+1)\varphi} e^{jrw \sin(\varphi+\theta)} w dw d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(n+1)\theta} \int_0^\infty \bar{c}_{nn}(w) w dw \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j[(n+1)\alpha - rw \sin \alpha]} d\alpha = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(n+1)\theta} \int_0^\infty w \bar{c}_{nn}(w) J_{n+1}(wr) dw = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_n(r) e^{j(n+1)\theta}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что гильберт-сопряженный сигнал в произвольном случае может быть представлен рядом Фурье, коэффициенты разложе-

ния в котором являются гильберт-сопряженными коэффициентам разложения исходного сигнала:

$$\hat{s}(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_n(r) e^{j(n+1)\theta}, \quad (2.41)$$

где

$$\hat{c}_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} w \bar{c}_{nn}(w) J_{n+1}(wr) dw. \quad (2.42)$$

Выражение (2.42) определяет правило нахождения $\hat{c}_n$: коэффициент разложения в ряд Фурье гильберт-сопряженного сигнала находится как преобразование Ганкеля порядка $n+1$ коэффициента разложения фурье-спектра исходного сигнала в ряд Фурье.

Определим скалярное произведение исходного и гильберт-сопряженного сигналов. Воспользуемся для этого обобщенной формулой Рэлея:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} s(w, \varphi) \hat{s}^*(w, \varphi) w dw d\varphi = \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn} e^{-jn\varphi} \right] \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{mm} e^{-j(m+1)\varphi} \right]^* w dw d\varphi = \\ &= \sum_{n,m} \int_0^{\infty} (\bar{c}_{nn} \bar{c}_{mm}^*) \delta_{nm} w dw \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j(n-m-1)\varphi} d\varphi = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |\bar{c}_{nn}|^2 w dw \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\varphi} d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, подтверждается ортогональность исходного и гильберт-сопряженного сигналов.

Гильберт-фильтр с высокочастотной полярной несущей. Когерентное изотропное преобразование Гильберта может быть выполнено в частотном пространстве с помощью фильтра, когерентная передаточная функция которого описывается выражением

$$H_g(w, \varphi) = e^{-j(2m+1)\varphi}. \quad (2.43)$$

Нормаль к полярному радиусу, соответствующему полярному углу $(2m+1)\varphi$, является локальной границей раздела между положительными и отрицательными частотами. Эта нормаль направлена под углом $(2m+1)\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ к полярной оси.

Импульсный отклик этого фильтра определяется через обратное преобразование когерентной передаточной функции (2.43):

$$\begin{aligned}
 h_g(r, \theta) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi e^{-j(2m+1)\varphi} e^{jwr \sin(\varphi+\theta)} w dw d\varphi = \\
 &\quad [\varphi + \theta = \alpha] \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} e^{j(2m+1)\theta} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi e^{-j[(2m+1)\alpha - wr \sin \alpha]} w dw d\alpha = \\
 &= \frac{1}{2\pi} e^{j(2m+1)\theta} \int_0^\infty w J_{2m+1}(wr) dw. \tag{2.44}
 \end{aligned}$$

Сделаем в (2.44) подстановку $J_{2m+1}(wr) = \frac{2m}{wr} J_{2m}(wr) - \frac{dJ_{2m}(wr)}{d(wr)}$:

$$\begin{aligned}
 h_g(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} e^{j(2m+1)\theta} \int_0^\infty w \left[\frac{2m}{wr} J_{2m}(wr) - \frac{dJ_{2m}(wr)}{d(wr)} \right] dw = \\
 &\quad [u = wr; w = u/r] \\
 &= \frac{1}{2\pi} e^{j(2m+1)\theta} \left\{ \frac{2m}{r^2} \int_0^\infty J_{2m}(u) du - \frac{1}{r^2} \int_0^\infty u \frac{dJ_{2m}(u)}{du} du \right\} = \\
 &= \frac{1}{2\pi r^2} e^{j(2m+1)\theta} \left\{ 2m \int_0^\infty J_{2m}(u) du - u J_{2m}(u) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty J_{2m}(u) du \right\} = \\
 &= \frac{1}{2\pi r^2} e^{j(2m+1)\theta} (2m+1) \int_0^\infty J_{2m}(u) du = (2m+1) \frac{e^{j(2m+1)\theta}}{2\pi r^2}. \tag{2.45}
 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались интегрированием по частям. Импульсный отклик (2.45) при $m = 0$ совпадает с (2.38).

Выполним фурье-преобразование импульсного отклика (2.45), чтобы получить КПФ фильтра:

$$\begin{aligned}
 H_g(w, \varphi) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} h_g(r, \theta) e^{-jwr \sin(\theta + \varphi)} r dr d\theta = \\
 &= \frac{(2m+1)}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{r} e^{j(2m+1)\theta} e^{-jwr \sin(\theta + \varphi)} dr d\theta = \\
 &\quad [\theta + \varphi = \alpha] \\
 &= \frac{(2m+1)}{2\pi} e^{-j(2m+1)\varphi} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r} e^{j[(2m+1)\alpha - wr \sin \alpha]} dr d\alpha = \\
 &= e^{-j(2m+1)\varphi} \int_0^{\infty} \frac{(2m+1)}{r} J_{2m+1}(wr) dr = \\
 &\quad [wr = u] \\
 &= e^{-j(2m+1)\varphi} \int_0^{\infty} \frac{(2m+1)}{u} J_{2m+1}(u) du = e^{-j(2m+1)\varphi} \int_0^{\infty} \left[J_{2m}(u) - \frac{dJ_{2m+1}(u)}{du} \right] du = \\
 &= e^{-j(2m+1)\varphi} \int_0^{\infty} J_{2m}(u) du = e^{-j(2m+1)\varphi}.
 \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\int_0^{\infty} \frac{dJ_{2m+1}(u)}{du} du = 0$. Таким образом, импульсный отклик (2.45) и когерентная передаточная функция фильтра (2.43) образуют фурье-сопряженную пару

$$e^{-j(2m+1)\varphi} \leftrightarrow \frac{(2m+1)}{2\pi r^2} e^{j(2m+1)\theta}. \quad (2.46)$$

При $m = 0$ выражение (2.46) трансформируется в (2.39).

Пусть имеется двумерный осесимметричный сигнал $s(r) \leftrightarrow s(w)$. Воздействуем на фурье-спектр этого сигнала фильтром с когерентно-передаточной функцией (2.43),

$$\hat{s}(w) = s(w) e^{-j(2m+1)\varphi}. \quad (3.47)$$

Выполним обратное преобразование Фурье фильтрованного пространственно-частотного спектра (2.47):

$$\begin{aligned} \hat{s}(r) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi s(w) e^{-j(2m+1)\varphi} e^{jwr \sin(\varphi+\theta)} w dw d\varphi = \\ &\quad [\varphi + \theta = \alpha] \\ &= \frac{1}{4\pi^2} e^{j(2m+1)\theta} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi s(w) e^{-j[(2m+1)\alpha - wr \sin \alpha]} w dw d\alpha = \\ &= e^{j(2m+1)\theta} \int_0^\infty \bar{s}(w) J_{2m+1}(rw) w dw = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{j(2m+1)\theta} \int_0^\infty s(w) J_{2m+1}(wr) w dw. \end{aligned} \quad (2.48)$$

При $m = 0$ выражение (2.48) совпадает с (2.40). Согласно (2.48) результатом фильтрации является ганкель-преобразование $(2m + 1)$ -го порядка фурье-спектра сигнала.

Найдем скалярное произведение исходного $s(r)$ и фильтрованного $\hat{s}(r)$ сигналов. Для этого воспользуемся обобщенной формулой Рэлея:

$$\begin{aligned} (s(r), \hat{s}(r)) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi w s(w) \bar{s}^*(w) dw d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi s(w) s^*(w) e^{j(2m+1)\varphi} w dw d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty |s(w)|^2 w dw \int_{-\pi}^\pi e^{j(2m+1)\varphi} d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что исходный $s(r)$ и фильтрованный (2.48) сигналы ортогональны.

Пусть фильтруемый сигнал является постоянным. Тогда $s(w) \leftrightarrow 4\pi^2 \delta(w)$. Для фурье-спектра фильтрованного сигнала имеем

$$\hat{s}(w, \varphi) = 4\pi^2 \delta(w) e^{-j(2m+1)\varphi}.$$

Выполняя обратное фурье-преобразование $\hat{s}(w, \varphi)$, получаем

$$\begin{aligned} \hat{s}(r, \theta) &= \int_0^\infty w \delta(w) e^{-j(2m+1)\varphi} e^{jwr \sin(\varphi+\theta)} dw d\varphi = \\ &= 2\pi e^{j(2m+1)\theta} \int_0^\infty w \delta(w) J_{2m+1}(wr) dw = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для осесимметричного сигнала, преобразованного фильтром с КПФ $H_g(w, \varphi) = e^{-j(2m+1)\varphi}$, подтверждаются свойства гильберт-сопряженного сигнала. Отсюда следует, что результатом такой фильтрации является гильберт-сопряженный сигнал (2.48) на фазовой несущей $e^{-j(2m+1)\varphi}$.

Рассмотрим преобразование двумерного оптического сигнала фильтром с когерентной передаточной функцией

$$H_g(w, \varphi) = e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = 2 \cos \varphi. \quad (2.49)$$

Найдем импульсный отклик этого фильтра:

$$\begin{aligned} h_g(r, \theta) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) e^{jwr \sin(\varphi+\theta)} w dw d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi r^2} e^{j\theta} + \frac{1}{2\pi r^2} e^{-j\theta} = \frac{1}{\pi r^2} \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Здесь мы учли ранее полученный результат (2.39).

Пусть сигнал имеет осевую симметрию $s(r) \leftrightarrow s(w)$. Фурье-спектр фильтрованного сигнала с учетом (2.49) имеет вид

$$\hat{s}(w) = s(w) (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}).$$

Выполним обратное фурье-преобразование:

$$\begin{aligned}
 \hat{s}(r) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi s(w) (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) e^{jwr \sin(\varphi+\theta)} w dw d\varphi = \\
 &\quad [\theta + \varphi = \alpha] \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ e^{-j\theta} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi s(w) e^{j(\alpha+wr \sin \alpha)} w dw d\alpha + \right. \\
 &\quad \left. + e^{j\theta} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi s(w) e^{-j(\alpha-wr \sin \alpha)} w dw d\alpha \right\} = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ e^{-j\theta} \int_0^\infty ws(w) J_{-1}(wr) dw + e^{j\theta} \int_0^\infty ws(w) J_1(wr) dw \right\} = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ (e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \int_0^\infty w \bar{s}(w) J_1(wr) dw \right\} = \\
 &= \frac{j}{\pi} \sin \theta \int_0^\infty ws(w) J_1(wr) dw. \tag{2.51}
 \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $J_{-1}(wr) = -J_1(wr)$. Из сравнения (2.51) и (2.40) следует, что применение фазового фильтра с когерентно-передаточной функцией (2.49) приводит к гильберт-образу исходного сигнала на полярной несущей $\sin \theta$.

Аналогично можно показать, что применение фильтра с квадратурной по отношению к (2.49) когерентно-передаточной функцией

$$H_g(w, \varphi) = e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = 2j \sin \varphi \tag{2.52}$$

для фильтрации осесимметричного сигнала $s(r)$ приводит к фурье-спектру вида

$$\hat{s}(w, \varphi) = s(w) (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}).$$

Выполняя обратное фурье-преобразование, получаем

$$\hat{s}(r) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi s(w) (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}) e^{jwr \sin(\varphi+\theta)} w dw d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(e^{-j\theta} + e^{-j\theta} \right) \int_0^{\infty} w s(w) J_1(wr) dw = \frac{1}{\pi} \cos \theta \int_0^{\infty} w s(w) J_1(wr) dw. \quad (2.53)$$

Отсюда следует, что использование квадратурных фазовых фильтров с КПФ (2.49) и (2.52) для фильтрации осесимметричного сигнала $s(r)$ дает соответствующие гильберт-сопряженные сигналы (2.51) и (2.53) на квадратурных полярных несущих $\sin \theta$ и $\cos \theta$.

Рассмотрим преобразование произвольных сигналов фильтром с когерентной передаточной функцией (2.49). Воспользуемся разложением произвольного сигнала в ряд Фурье

$$s(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\theta}.$$

Выполним фурье-преобразование сигнала,

$$s(w, \varphi) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn}(w) e^{-jn\varphi}. \quad (2.54)$$

Фурье-спектр фильтрованного сигнала (2.54) с учетом (2.49) имеет вид

$$\hat{s}(w, \varphi) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn}(w) e^{jn\varphi} \left(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} \right).$$

Выполняя обратное фурье-преобразование, получаем

$$\begin{aligned} \hat{s}(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn}(w) e^{-jn\varphi} \left(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} \right) e^{jwr \sin(\varphi+\theta)} w dw d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn}(w) \left(e^{-j(n-1)\varphi} + e^{-j(n+1)\varphi} \right) e^{jwr \sin(\varphi+\theta)} w dw d\varphi = \end{aligned}$$

$$[\varphi + \theta = \alpha]$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ e^{j(n-1)\theta} \int_0^{\infty} w \bar{c}_{nn}(w) J_{n-1}(wr) dw + \right. \\ &\quad \left. + e^{j(n+1)\theta} \int_0^{\infty} w \bar{c}_{nn}(w) J_{n+1}(wr) dw \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\theta}, \end{aligned}$$

$$\text{где } c_m = \int_0^{\infty} w \left[\bar{c}_{m+1, m+1}(w) + \bar{c}_{m-1, m-1}(w) \right] J_m(wr) dw.$$

Применим для осесимметричного сигнала $s(r)$ оптический фильтр с когерентной передаточной функцией

$$H_g(w, \varphi) = e^{j(2m+1)\varphi} + e^{-j(2m+1)\varphi}. \quad (2.55)$$

Фурье-спектр фильтрованного сигнала

$$\hat{s}(w, \varphi) = s(w) \left[e^{j(2m+1)\varphi} + e^{-j(2m+1)\varphi} \right].$$

Выполняя обратное фурье-преобразование, получаем

$$\begin{aligned} \hat{s}(r, \theta) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi s(w) \left[e^{j(2m+1)\varphi} + e^{-j(2m+1)\varphi} \right] e^{jwr \sin(\varphi - \theta)} w dw d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-j(2m+1)\theta} \int_0^\infty w s(w) J_{-(2m+1)}(wr) dw + \\ &+ \frac{1}{2\pi} e^{j(2m+1)\theta} \int_0^\infty w s(w) J_{2m+1}(wr) dw = \\ &= -\frac{1}{2\pi} e^{-j(2m+1)\theta} \int_0^\infty w s(w) J_{2m+1}(wr) dw + \\ &+ e^{j(2m+1)\theta} \int_0^\infty w s(w) J_{2m+1}(wr) dw = \\ &= \frac{j}{2\pi} \left[e^{j(2m+1)\theta} - e^{-j(2m+1)\theta} \right] \int_0^\infty w s(w) J_{2m+1}(wr) dw = \\ &= \frac{j}{\pi} \sin[(2m+1)\theta] \int_0^\infty w s(w) J_{2m+1}(wr) dw. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Как следует из (2.56), гильберт-сопряженный сигнал при использовании фильтра (2.55) получается с точностью до фазового множителя как произведение функции $\sin[(2m+1)\theta]$ на преобразование Ганкеля порядка $2m+1$ фурье-спектра исходного сигнала. Таким образом, в структуру гильберт-сопряженного осесимметричного сигнала введена гар-

моническая несущая, являющаяся функцией полярного угла, $\sin[(2m+1)\theta]$.

Применение фильтра с когерентной передаточной функцией вида

$$H_g(w, \varphi) = e^{j(2m+1)\varphi} - e^{-j(2m+1)\varphi}$$

позволяет получить гильберт-сопряженный сигнал с квадратурной по фазе несущей в сравнении с (2.56):

$$\hat{s}_q(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \cos[(2m+1)\theta] \int_0^\infty w s(w) J_{2m+1}(wr) dw. \quad (2.57)$$

Выражения (2.56) и (2.57) описывают квадратурную пару изотропных гильберт-сопряженных образов исходного осесимметричного сигнала. При $m = 0$ выражения (2.56) и (2.57) совпадают, как и следовало ожидать, соответственно с (2.51) и (2.53).

Преобразование произвольного сигнала оптическим фильтром с когерентной передаточной функцией (2.43). Фурье-спектр фильтрованного сигнала с учетом (2.54) имеет вид

$$\hat{s}(w, \varphi) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nm}(w) e^{-jn\varphi} e^{j(2m+1)\varphi}. \quad (2.58)$$

Выполняя обратное фурье-преобразование, получаем

$$\begin{aligned} \hat{c}_n(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} \bar{c}_{nm}(w) e^{j(2m-n+1)\varphi} e^{jrw \sin(\varphi+\theta)} w dw d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(2m-n+1)\theta} \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} \bar{c}_{nm}(w) e^{j[(2m-n+1)\alpha - rw \sin \alpha]} w dw d\alpha = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(2m-n+1)\theta} \int_0^\infty \bar{c}_{nm}(w) J_{2m-n+1}(rw) w dw = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n(r) e^{j(2m-n+1)\theta}, \end{aligned}$$

где
$$\beta_n(r) = \int_0^\infty c_{nm}(w) J_{2m+n+1}(rw) w dw. \quad (2.59)$$

Из (2.59) видно, что гильберт-сопряженный сигнал получается как разложение в ряд по гармонике полярного угла $e^{j(2m-n+1)\theta}$, а коэффи-

циенты разложения находятся через обобщенное преобразование Ганкеля порядка $2m - n + 1$ от соответствующих коэффициентов разложения фурье-спектра исходного сигнала.

Рассмотрим возможность гильберт-преобразования произвольного сигнала с применением амплитудно-фазового фильтра, когерентная передаточная функция которого

$$H(w, \varphi) = 2 \cos[(2m + 1)\varphi] = e^{j(2m+1)\varphi} + e^{-j(2m+1)\varphi}. \quad (2.60)$$

Для фурье-спектра фильтрованного сигнала с учетом (2.54) имеем

$$\hat{s}(w, \varphi) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn}(w) e^{-jn\varphi} \left[e^{j(2m+1)\varphi} + e^{-j(2m+1)\varphi} \right]. \quad (2.61)$$

Выполним обратное фурье-преобразование фурье-спектра (2.61)

$$\begin{aligned} \hat{s}(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{c}_{nn}(w) e^{-jn\varphi} \left[e^{j(2m+1)\varphi} + e^{-j(2m+1)\varphi} \right] \times \\ &\quad \times e^{jwr \sin(\varphi+\theta)} w dw d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{c}_{nn}(w) \left\{ e^{j(2m-n+1)\varphi} + e^{-j(2m+n+1)\varphi} \right\} e^{jwr \sin(\varphi+\theta)} w dw d\varphi = \\ &\quad [\varphi + \theta = \alpha] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-j(2m-n+1)\theta} \int_0^{\infty} w \bar{c}_{nn}(w) J_{-(2m-n+1)}(wr) dw + \right. \\ &\quad \left. + e^{j(2m-n+1)\theta} \int_0^{\infty} w \bar{c}_{nn}(w) J_{2m-n+1}(rw) dw \right\} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -e^{j(2m-n+1)\theta} \int_0^{\infty} w \bar{c}_{nn}(w) J_{2m-n+1}(wr) dw + \right. \\ &\quad \left. + e^{-j(2m+n+1)\theta} \int_0^{\infty} w \bar{c}_{nn}(w) J_{2m+n+1}(wr) dw \right\} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \beta_q e^{jq\theta}, \end{aligned}$$

где $\beta_q = \left\{ \int_0^{\infty} w \left[\bar{c}_{q-2m-1, q-2m-1}(w) - \bar{c}_{2m-q+1, 2m-q+1}(w) \right] J_q(wr) dw \right\}. \quad (2.62)$

Как следует из (2.62), в случае применения фазового фильтра с КПФ (2.60) результатом фильтрации произвольного сигнала является гильберт-сопряженный сигнал, разложенный в ряд по гармоническим функциям полярного угла, коэффициенты разложения которого определяются посредством гильберт-преобразования порядка $2m \pm n + 1$ коэффициентов разложения $\bar{c}_{nn}(w)$ фурье-спектра исходного сигнала.

2.5. ИЗОТРОПНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА С КОЛЬЦЕВЫМ ИСТОЧНИКОМ

Применение кольцевого источника в оптическом фурье-процессоре, рассмотренном в разделе 1.10, может служить основой для реализации изотропного когерентного преобразования Гильберта. Обратимся к схеме, показанной на рис. 2.16. Оптическая схема содержит три последовательно и конфокально расположенных объектива 1, 2 и 3. В передней фокальной плоскости (r, α) объектива 1, который выполняет функции конденсора, помещен кольцевой источник s_0 , описываемый структурной функцией

$$s_0(\rho) = \delta(\rho - a). \quad (2.63)$$

В плоскости (r, θ) размещается транспарант с функцией пропускания $s(r, \theta)$. Объектив 2 с фокусным расстоянием f_2 выполняет фурье-преобразование сигнала $s(r, \theta)$. Как показано в разделе 1.10, в случае осесимметричного сигнала $s(r, \theta) = s(r)$ в задней фурье-плоскости объектива 2 формируется световое поле, которое представляет собой

Рис. 2.16

смещенный фурье-спектр сигнала $s(r)$, $s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)$, где Γ – линейный коэффициент передачи фрагмента оптической схемы, состоящего из объективов 1 и 2, фокусное расстояние которых соответственно равно f_1 и f_2 , а линейные апертуры принимаются неограниченными.

Рассмотрим фильтрацию осесимметричного сигнала $s(r)$. Поместим в фурье-плоскость (w, φ) оптический фильтр с когерентной передаточной функцией

$$H_g(w) = -j \operatorname{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right). \quad (2.64)$$

Для светового поля непосредственно за фильтром имеем с учетом (1.117) и (2.64)

$$E_f(w) = \left|w - \frac{a}{\Gamma}\right| s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) H_g(w) = \left|w - \frac{a}{\Gamma}\right| s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \left[-j \operatorname{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\right]. \quad (2.65)$$

Выражение (2.65) описывает фурье-спектр фильтрованного сигнала.

Объектив 3, выполняя обратное фурье-преобразование, восстанавливает в плоскости (r', θ) фильтрованный сигнал

$$E(r', \theta) = \int_0^\infty w \left|w - \frac{a}{\Gamma}\right| s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \left[-j \operatorname{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\right] J_0(wr') dw. \quad (2.66)$$

Как видно из (2.66), восстановленный сигнал в плоскости (r', θ) определяется как ганкель-преобразование произведения двух функций

$$\left|w - \frac{a}{\Gamma}\right| s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \left[-j \operatorname{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\right].$$

Поскольку ганкель-преобразование

произведения двух функций равно свертке фурье-спектров этих функций, с учетом

$$\left|w - \frac{a}{\Gamma}\right| s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \leftrightarrow \frac{a}{\Gamma} s(r') J_0\left(\frac{a}{\Gamma} r'\right); \quad -j \operatorname{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \leftrightarrow \frac{ja}{\pi r' \Gamma} J_1\left(\frac{a}{\Gamma} r'\right)$$

получаем

$$\left|w - \frac{a}{\Gamma}\right| s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \left[-j \operatorname{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\right] \leftrightarrow \frac{a}{\Gamma} s(r') J_0\left(\frac{a}{\Gamma} r'\right) \otimes \frac{ja}{\pi r' \Gamma} J_1\left(\frac{a}{\Gamma} r'\right). \quad (2.67)$$

Выполним сверточное преобразование в (2.67) в приближении $\frac{a}{\Gamma} r' \ll 1$,

$$\frac{a}{\Gamma} s(r') \otimes \frac{ja}{\pi r' \Gamma} J_1\left(\frac{a}{\Gamma} r'\right) = \frac{a}{\Gamma} \hat{s}(r'). \quad (2.68)$$

Здесь мы ограничились первым членом разложения в ряд $J_0\left(\frac{a}{\Gamma} r'\right) \approx 1 - \left(\frac{ar'}{2\Gamma}\right)^2 + \dots$. Как следует из (2.68), в выходной плоскости (r', θ) восстанавливается с точностью до множителя $\frac{a}{\Gamma}$ гильберт-сопряженный сигнал $\hat{s}(r')$. Таким образом, в схеме с кольцевым источником можно реализовать когерентное изотропное гильберт-преобразование осесимметричного сигнала.

Рассмотрим возможность изотропного преобразования произвольного сигнала в схеме с кольцевым источником. Разложим сигнал $s(r, \theta)$ в ряд по гармоническим функциям полярного угла:

$$s(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r) e^{jn\theta}.$$

В частотной плоскости (w, φ) световое поле описывается согласно (1.117) выражением

$$E(w, \varphi) = 2\pi \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) e^{-jn\varphi}. \quad (2.69)$$

Как видно из (2.69), поле в плоскости (w, φ) представляет собой смещенный фурье-спектр исходного сигнала, разложенный в ряд Фурье по полярным гармоникам. Поместим в частотную плоскость (w, φ) оптический фильтр с КПФ, описываемый выражением (2.64). Для фурье-спектра фильтрованного сигнала имеем

$$E_f(w, \varphi) = 2\pi \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \left[-j \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right] e^{-jn\varphi}. \quad (2.70)$$

Объектив 3 выполняет обратное фурье-преобразование, восстанавливая в плоскости (r', θ) фильтрованный сигнал (2.70). С учетом (2.68) получаем

$$E(r', \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \left[-j \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right] \times$$

$$\begin{aligned}
& \times e^{-jn\varphi} e^{jwr' \sin(\varphi+\theta)} w dw d\varphi = \\
& = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\theta} \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \int_0^{\infty} \bar{c}_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \left[-j \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right] J_n(wr') w dw = \\
& = \frac{a}{\Gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn}(r') e^{jn\theta} = \frac{a}{\Gamma} \hat{s}(r', \theta). \quad (2.71)
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались теоремой о свертке для преобразования Ганкеля произведения двух функций. Как следует из (2.71), в случае произвольного сигнала в выходной плоскости схемы с кольцевым источником реализуется с точностью до множителя $\frac{a}{\Gamma}$ гильберт-сопряженный сигнал.

Рассмотрим преобразование осесимметричного сигнала $s(r)$ фильтром с когерентной передаточной функцией

$$H_g(w, \varphi) = e^{-j\varphi} \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right). \quad (2.72)$$

Фурье-спектр фильтрованного сигнала в плоскости (w, φ)

$$E_f(w, \varphi) = \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| s \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) e^{-j\varphi} \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right). \quad (2.73)$$

Обратное фурье-преобразование (2.73) с учетом (2.40) и (2.71) дает

$$\begin{aligned}
E(r', \theta) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| s \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) e^{-j\varphi} e^{jwr' \sin(\varphi+\theta)} w dw d\varphi = \\
&= e^{j\theta} \int_0^{\infty} \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \bar{s} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \left[-j \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right] J_1(wr') w dw = e^{j\theta} \frac{a}{\Gamma} \hat{s}(r'). \quad (2.74)
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались свойствами обобщенного преобразования Ганкеля и теоремой о ганкель-преобразовании произведения функций. Из (2.74) следует, что в случае применения фильтра с КПФ вида (2.72) реализуется с точностью до комплексного множителя гильберт-преобразование осесимметричного сигнала.

Рассмотрим случай произвольного сигнала. В фурье-плоскости световое поле описывается выражением (2.69), которое представляет собой разложение фурье-спектра оптического сигнала по полярным гармоникам. Поместим в плоскость фильтр с КПФ, представленной выражением (2.72). Для фурье-спектра фильтрованного сигнала имеем

$$E_f(w, \varphi) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \bar{c}_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) e^{-j(n+1)\varphi} \left[-j \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right]. \quad (2.75)$$

Выполняя обратное фурье-преобразование, получаем в плоскости (r', θ) световое поле

$$E(r', \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \bar{c}_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \left[-j \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right] \times \\ \times e^{j(n+1)\theta} J_{n+1}(w, r') w dw = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_n(r') e^{j(n+1)\theta} = e^{j\theta} \hat{s}(r', \theta). \quad (2.76)$$

Этот результат получен с учетом свойств обобщенного преобразования Ганкеля и теоремы о свертке. Согласно (2.76) в случае произвольного сигнала в схеме с кольцевым источником при использовании фильтра КПФ вида (2.69) выполняется когерентное изотропное преобразование Гильберта с точностью до экспоненциального множителя.

Регистрация изображения фильтрованного поля даёт распределение гильберт-сопряженного сигнала выходной плоскости.

2.6. ИЗОТРОПНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУКО–ГИЛЬБЕРТА С КОЛЬЦЕВЫМ ИСТОЧНИКОМ

На примере оптического процессора, представленного на рис. 2.16, покажем возможность реализации когерентного изотропного преобразования Фуко–Гильберта. Для этого поместим в частотную плоскость оптический фильтр с когерентной передаточной функцией

$$H_{fg} = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right]. \quad (2.77)$$

Фурье-спектр фильтрованного осесимметричного сигнала с учетом (2.77) и (2.65) имеет вид

$$\begin{aligned} E_f(w) &= \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| s \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) H_{fg} = \\ &= \frac{1}{2} \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| s \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \left[1 + \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Объектив 3 выполняет обратное фурье-преобразование:

$$\begin{aligned} E(r', \theta) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty w \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| s \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \left[1 + \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right] J_0(wr') dw = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty w \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| s \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) J_0(wr') dw + \\ &+ \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty w \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| s \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \left[-j \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right] J_0(wr') dw = \\ &= \frac{1}{2} s(r') + \frac{j}{2} \hat{s}(r'). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Здесь учтены выражения (2.66) – (2.68). Как следует из (2.79), в схеме с кольцевым источником при использовании фильтра с когерентно-передаточной функцией (2.77) выполняется преобразование Фуко–Гильберта осесимметричного сигнала. Результатом когерентного изотропного преобразования Фуко–Гильберта осесимметричного поля с точностью до постоянного множителя является аналитический сигнал

$$z_s(r') = \frac{1}{2} [s(r') + j\hat{s}(r')]. \quad (2.80)$$

В силу свойств гильберт-преобразования действительному (физическому) сигналу соответствует действительный гильберт-сопряженный сигнал.

Поэтому, переходя к интенсивности в (2.80), получаем

$$|z_s(r')|^2 = \frac{1}{4} [s(r')^2 + \hat{s}(r')^2]. \quad (2.81)$$

В случае произвольного сигнала $s(r, \theta)$ воспользуемся разложением его пространственно-частотного спектра в ряд по полярным гармо-

никам (2.69). Тогда для фурье-спектра фильтрованного сигнала с учетом (2.77) получаем

$$E_f(w, \varphi) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \bar{c}_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) e^{-jn\varphi} \left[1 + \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right]. \quad (2.82)$$

Выполним обратное преобразование Фурье пространственно-частотного спектра фильтрованного сигнала (2.82):

$$\begin{aligned} E(r, \theta) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} w \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \bar{c}_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \left[1 + \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right] \times \\ &\quad \times e^{-jn\varphi} e^{jwr \sin(\varphi + \theta)} dw d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\theta} \int_0^{\infty} w \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \bar{c}_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \left[1 + \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right] J_n(wr) dw = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\theta} \int_0^{\infty} w \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \bar{c}_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) J_n(wr) dw + \\ &+ \frac{j}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\theta} \int_0^{\infty} w \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \bar{c}_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \left[-j \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right] J_n(wr) dw = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{nn}(r') e^{jn\theta} + \frac{j}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn}(r') e^{jn\theta} = \\ &= \frac{1}{2} [s(r', \theta) + j\bar{s}(r', \theta)]. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Выражение для восстановленного сигнала (2.83) получено с учетом (2.68) и (2.71). Отсюда следует, что результатом когерентного изотропного преобразования Фуко–Гильберта произвольного сигнала в схеме оптического процессора с кольцевым источником является аналитический сигнал (2.83). В случае физического сигнала $s(r, \theta)$ для интенсивности полученного аналитического сигнала имеем

$$|z_s(r', \theta)|^2 = \frac{1}{4} [s(r', \theta)^2 + \bar{s}(r', \theta)^2]. \quad (2.84)$$

Рассмотрим преобразование осесимметричного сигнала фильтром, когерентная передаточная функция которого

$$H_{fg}(w, \varphi) = \frac{1}{2} e^{j\varphi} \left[1 + \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right]. \quad (2.85)$$

Для пространственно-частотного спектра фильтрованного сигнала имеем

$$E_f(w, \varphi) = \frac{1}{2} \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| s \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) e^{j\varphi} \left[1 + \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right]. \quad (2.86)$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, получаем с учетом (2.68):

$$\begin{aligned} E(r', \theta) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| s \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \left[1 + \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right] \times \\ &\times e^{-j\varphi} e^{jwr' \sin(\varphi + \theta)} w dw d\varphi = \frac{1}{2} e^{j\theta} \int_0^\infty \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \bar{s} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) J_1(wr') w dw + \\ &+ \frac{1}{2} e^{j\theta} \int_0^\infty \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \bar{s} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \left[-j \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right] J_1(wr') w dw = \\ &= e^{j\theta} s(r') + j e^{j\theta} \hat{s}(r'). \end{aligned} \quad (2.87)$$

Как следует из (2.87), результатом фильтрации является с точностью до комплексного множителя аналитический сигнал

$$z_g(r', \theta) = e^{j\theta} [s(r') + j\hat{s}(r')]. \quad (2.88)$$

Переходя к интенсивности в (3.88), получаем в случае физического сигнала $s(r')$

$$|z_g(r')|^2 = [s(r')^2 + \hat{s}(r')^2]. \quad (2.89)$$

Следовательно, применение фильтра (2.85) в схеме с кольцевым источником обеспечивает выполнение преобразования Фуко–Гильберта осесимметричного сигнала. Результатом такого преобразования является аналитический сигнал (2.88) с фазовой полярной несущей $e^{j\theta}$.

Рассмотрим применение фильтра Фуко–Гильберта с когерентно-передаточной функцией (2.85) для преобразования произвольного сигнала. Пространственно-частотный спектр такого сигнала представим разложением в ряд по полярным гармоникам (2.69). Запишем выражение для фурье-спектра фильтрованного сигнала:

$$E(w, \varphi) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \bar{c}_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \left[1 + \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right] e^{-j(n+1)\varphi}.$$

Выполняя посредством объектива 3 обратное фурье-преобразование пространственно-частотного спектра $E(w, \varphi)$, с учетом (2.68) получаем

$$\begin{aligned} E(r', \theta) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \bar{c}_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \left[1 + \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right] \times \\ &\quad \times e^{-j(n+1)\varphi} e^{jwr' \sin(\varphi+\theta)} w dw d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(n+1)\theta} \int_0^{\infty} \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \bar{c}_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \left[1 + \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right] J_{n+1}(wr') w dw = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(n+1)\theta} \int_0^{\infty} \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \bar{c}_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) J_{n+1}(wr') w dw + \\ &+ \frac{j}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(n+1)\theta} \int_0^{\infty} \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \bar{c}_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \left[-j \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \right] J_{n+1}(wr') w dw = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn}(r') e^{j(n+1)\theta} + j \bar{c}_{nn}(r') e^{j(n+1)\theta} \right\} \approx \\ &= \frac{1}{2} e^{j\theta} \{ s(r') + j\hat{s}(r') \}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Из (2.90) видно, что результатом преобразования Фуко–Гильберта произвольного сигнала в схеме с кольцевым источником является с точностью до комплексного множителя аналитический сигнал

$$z_s(r', \theta) \approx \frac{1}{2} e^{j\theta} [s(r') + j\hat{s}(r')]. \quad (2.91)$$

Выражение для интенсивности этого аналитического сигнала совпадает с (2.89).

Таким образом, в схеме с кольцевым источником реализуется когерентное изотропное преобразование Фуко–Гильберта для произвольных сигналов. Очевидно, комбинируя комплементарные преобразования Фуко–Гильберта, можно получать гильберт-преобразования как осесимметричных, так и произвольных сигналов.

2.7. ГИЛЬБЕРТ-ФИЛЬТРАЦИЯ НА ОСНОВЕ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКИ

Впервые на возможность применения в гильберт-оптике дифракционной решетки со сбоем для диагностики полей оптической фазовой плотности было указано в работах [6–8, 21]. Дифракционная решетка со сбоем отличается от классической тем, что в её центре две смежные бороздки разнесены на расстояние, равное $l = \frac{2n-1}{2}d$, где d – шаг решетки, n – целое число (рис. 2.17). Обычно n выбирается равным 1 или 2. Для гильберт-фильтрации дифракционную решетку помещают в плоскость пространственных частот (K_x, K_y) , рис. 2.18. На этом рисунке линзы 1 и 2 выполняют соответственно прямое и обратное преобразования Фурье. В плоскости (x_0, y_0) формируется исследуемый оптический сигнал. В плоскости (x, y) регистрируется восстановленный фильтрованный сигнал.

Рассмотрим случай одномерной фильтрации. Пусть решетка со сбоем формирует периодическую структуру вдоль оси K_x в плоскости (x, y) , где $K_x = \frac{k}{d}x_1$. Когерентно-передаточная функция решетки

$$H_g(K_x, K_y) = [1 + \operatorname{sgn} K_x \cos(K_x \xi)]. \quad (2.92)$$

В частотной плоскости (K_x, K_y) формируется фурье-спектр входного сигнала $s(K_x, K_y)$. Непосредственно за дифракционной решеткой фурье-спектр фильтрованного сигнала описывается выражением

$$s(K_x, K_y) H_g(K_x, K_y) = s(K_x, K_y) [1 + \operatorname{sgn} K_x \cos(K_x \xi)].$$

Рис. 2.17

Рис. 2.18

Линза 2 выполняет обратное фурье-преобразование фильтрованного сигнала. В плоскости регистрации (x, y) восстанавливается фильтрованный сигнал. Пренебрегая конечным размером апертуры линзы 3 можно записать:

$$s(K_x, K_y) H_g(K_x, K_y) \leftrightarrow \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [s(K_x, K_y) [1 + \operatorname{sgn} K_x \cos(K_x \xi)]] \times \\ \times e^{-j(K_x x + K_y y)} dK_x dK_y =$$

$$\begin{aligned}
 &= s(-x, -y) + \frac{j}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} s(K_x, K_y) (-j \operatorname{sgn} K_x) (e^{jK_x \xi} + e^{-jK_x \xi}) \times \\
 &\quad \times e^{-j(K_x x + K_y y)} dK_x dK_y = \\
 &= s(-x, -y) + j \frac{1}{2} \hat{s}_x(x - \xi, y) + j \frac{1}{2} \hat{s}_x(x + \xi, y). \quad (2.93)
 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались теоремой смещения. Как следует из (2.93), в выходной плоскости восстанавливается в инвертированных осях исходный сигнал, центрированный относительно начала координат, и пара одномерных по оси x гильберт-сопряженных сигналов, которые центрированы относительно точек $(\xi, 0)$ и $(-\xi, 0)$. Одномерные гильберт-образы сигнала $\hat{s}(x - \xi, y)$ и $\hat{s}(x + \xi, y)$ формируются в $\pm$ первых порядках дифракции, восстановленный исходный сигнал $s(-x, -y)$ – в нулевом порядке. Оценка смещений центрированных одномерных гильберт-образов легко получается из рис. 2.18:

$$\xi = \frac{\lambda}{d} l, \quad (2.94)$$

где $l = d_1 + (d_0 - l_1)$; d_1 – расстояние от главной плоскости линзы 3 до плоскости регистрации (x, y) , которая является изображением плоскости локализации входного сигнала (x_0, y_0) ; d_0 – расстояние между плоскостью (x_0, y_0) и второй линзой; l_1 – расстояние между входной плоскостью (x_0, y_0) и частотной плоскостью (K_x, K_y) . Расстояния d_0 и d_1

удовлетворяют условию $\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_2} = 0$, где f_2 – фокусное расстояние второй линзы. Как следует из (2.94), сдвиг первого порядка дифракции линейно зависит от длины волны λ . Поэтому, если используется двухволновое излучение, то можно реализовать гильберт-образы сигнала одновременно на двух различных длинах волн, что составляет одно из достоинств этого метода гильберт-фильтрации. Дифракционная решетка со сбоем в качестве фильтра не требует особых юстировок по фазе. При использовании дифракционной решетки со сбоем практически исключаются пограничные эффекты, которые обычно имеются в случае при-

менения фазовых или амплитудных ножей. К недостаткам гильберт-фильтрации на основе дифракционной решетки со сбоем следует отнести большие энергетические потери и ограниченность полосы углового спектра исследуемых световых полей. Применение двух последовательно расположенных решеток с преобразованием оптического сигнала последовательно в дифракционных порядках разного знака позволяет выполнять гильберт-преобразование в белом свете.

Использование двух ортогонально ориентированных совмещенных дифракционных решеток со сбоем расширяет функциональные возможности гильберт-фильтрации [1] на одновременное получение пространственно разнесенных двух одномерных гильберт-образов сигналов по осям x и y , $\hat{s}(x - \xi, y)$ и $\hat{s}(x + \xi, y)$, двумерного гильберт-образа $\hat{s}(x + \xi, y + \eta)$ и восстановленного сигнала $s(-x, -y)$ (рис. 2.19).

Одномерные гильберт-образы $\hat{s}(x - \xi, y)$ и $\hat{s}(x + \xi, y)$ реализуются в первых порядках дифракции ортогонально ориентированных решеток, двумерный гильберт-образ $\hat{s}(x + \xi, y + \eta)$ получается в перекрестном совмещенном порядке, а восстановленный сигнал $s(-x, -y)$ – в нулевом порядке дифракции.

Рис. 2.19

2.8. ГИЛЬБЕРТ-ФИЛЬТРАЦИЯ НА ОСНОВЕ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКИ СО СБОЕМ В СХЕМЕ С КОЛЬЦЕВЫМ ИСТОЧНИКОМ

Обратимся к схеме с кольцевым источником на рис. 2.16. Пусть входной сигнал $s(r)$ имеет осевую симметрию. В частотной плоскости согласно (1.115) формируется фурье-спектр сигнала $s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)$. Поместим в фурье-плоскость фильтр в виде концентрической решетки со сбоем. Когерентная передаточная функция такого фильтра

$$H_g(w) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \cos(r_0 w) \right]. \quad (2.95)$$

Фурье-спектр фильтрованного сигнала

$$E_+(w, \varphi) = \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \left[1 + \operatorname{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \cos(r_0 w) \right]. \quad (2.96)$$

В выходной плоскости, после выполнения обратного преобразования Фурье, имеем

$$\begin{aligned} E(r', \theta) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \left[1 + \operatorname{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \cos(r_0 w) \right] \times \\ &\quad \times e^{jwr \cos(\varphi - \theta)} w dw d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \left[1 + \operatorname{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \cos(r_0 w) \right] J_0(wr) w dw = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \bar{s}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \left\{ \left[1 + \operatorname{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \cos(r_0 w) \right] \right\} J_0(wr) w dw \approx \\ &\approx \frac{1}{2} s(r) + \frac{j}{4} \hat{s}(r - r_0) + \frac{j}{4} \hat{s}(r + r_0). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Здесь мы воспользовались свойствами преобразования Ганкеля и (2.68). Как следует из (2.97), в выходной плоскости восстанавливается в $\pm$ первом порядках дифракции гильберт-сопряженный сигнал. В слу-

чае осесимметричного сигнала применение в качестве частотного фильтра concentрической дифракционной решетки со сбоем обеспечивает в схеме с кольцевым источником выполнение изотропного когерентного преобразования Гильберта. Впервые на возможность такого способа гильберт-фильтрации было указано в [8].

Рассмотрим фильтрацию произвольного сигнала в этой схеме. Разложим фурье-спектр сигнала $s(r, \theta)$ в ряд по гармоническим функциям полярного угла φ :

$$s(w, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) e^{-jn\varphi}.$$

Поместим в частотную плоскость фильтр в виде concentрической дифракционной решетки со сбоем, когерентная передаточная функция которой описывается выражением (2.95). Для фурье-спектра фильтрованного сигнала имеем

$$\begin{aligned} E_+(w, \varphi) &= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \bar{c}_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \times \\ &\times e^{-jn\varphi} \left[1 + \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \cos(r_0 w) \right]. \end{aligned} \quad (2.98)$$

После выполнения обратного фурье-преобразования получаем для поля в выходной плоскости (r, θ)

$$\begin{aligned} E(r', \theta) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| \bar{c}_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \left[1 + \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \cos(r_0 w) \right] \times \\ &\times e^{jn\varphi} e^{jwr' \sin(\varphi + \theta)} w dw d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\theta} \int_0^{\infty} \left| w - \frac{a}{\Gamma} \right| c_{nn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \left[1 + \operatorname{sgn} \left(w - \frac{a}{\Gamma} \right) \cos(r_0 w) \right] J_n(wr') w dw = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r) e^{jn\theta} + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_n(r - r_0) e^{jn\theta} + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_n(r + r_0) e^{jn\theta} = \\ &= \frac{1}{2} s(r', \theta) + \frac{1}{4} \hat{s}(r' - r_0, \theta) + \frac{1}{4} \hat{s}(r' + r_0, \theta). \end{aligned} \quad (2.99)$$

Как видно из (2.99), в выходной плоскости в нулевом порядке дифракции восстанавливается в соответствующем масштабе исходный сигнал $s(r', \theta)$. В $\pm$ первом порядках дифракции формируется гильберт-сопряженный сигнал $\hat{s}(r' - r_0, \theta)$ и $\hat{s}(r' + r_0, \theta)$. Таким образом, и в случае произвольного сигнала в схеме с кольцевым источником и частотным фильтром в виде концентрической дифракционной решетки со сбоем выполняется изотропное когерентное преобразование Гильберта.

2.9. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ФАЗОВЫХ ПОЛЕЙ ОПТИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ ПРИ ДЕФОКУСИРОВКЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Обратимся к рис. 2.20, где приведена схема с двумя конфокально расположенными фурье-объективами 1 и 2. Плоскости (x_0, y_0) , (K_x, K_y) , (x, y) являются фурье-сопряженными и соответственно плоскости (x_0, y_0) и (x_1, y_1) – оптически сопряженными. Пусть в плоскости (x_0, y_0) помещен транспарант $s(x_0, y_0)$. Объектив 1 выполняет фурье-преобразование сигнала $s(x_0, y_0)$, формируя его фурье-спектр

$$s(x_f, y_f) = \frac{1}{j\lambda f} s(K_x, K_y),$$

Рис. 2.20

где $K_x = \frac{kx_f}{f}$; $K_y = \frac{ky_f}{f}$. Объектив 2 выполняет обратное преобразование Фурье, в результате которого в плоскости (x_1, y_1) восстанавливается исходный сигнал $s(x_1, y_1)$ в инвертированных осях.

Рассмотрим ситуацию, когда выходной сигнал регистрируется в плоскости (x, y) , параллельной плоскости (x_1, y_1) и смещенной относительно нее на малое расстояние l , $l/f \ll 1$. Импульсный отклик этого объектива описывается выражением (1.64), в котором следует поменять обозначения x_0, y_0 на x_f, y_f ; x_1, y_1 на x, y :

$$h(x, y; x_f y_f) = \frac{D_0 D_1}{j\lambda Q} \exp \left\{ j \frac{k}{2} D_0 \left(1 - \frac{D_0}{Q} \right) (x_f^2 + y_f^2) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ j \frac{k}{2} D_1 \left(1 - \frac{D_1}{Q} \right) (x^2 + y^2) \right\} \exp \left\{ -jk \frac{D_0 D_1}{Q} (x_f x + y_f y) \right\}, \quad (2.100)$$

где $D_0 = \frac{1}{f} = \Phi$; $D_1 = \frac{1}{d_1} = \frac{1}{f-l} = \frac{\Phi}{1-l/f} \approx \Phi(1+l\Phi)$; $Q = D_0 + D_1 - \Phi = D_1$;

$$D_1 \left(1 - \frac{D_1}{Q} \right) = 0; \quad D_0 \left(1 - \frac{D_0}{Q} \right) = l\Phi^2; \quad \frac{D_0 D_1}{Q} = \Phi.$$

После подстановки этих значений в (2.100) получаем

$$h(x, y; x_f y_f) = \frac{1}{j\lambda f} \exp \left\{ j \frac{k}{2} l\Phi^2 (x_f^2 + y_f^2) \right\} \exp \left\{ -jk\Phi (x_f x + y_f y) \right\} = \\ = \frac{1}{j\lambda f} \exp \left\{ j \frac{l}{2k} (K_x^2 + K_y^2) \right\} \exp \left\{ -j(K_x x + K_y y) \right\}. \quad (2.101)$$

Выходной сигнал $\tilde{s}(x, y)$ определяется с учетом (2.101) и в пренебрежении конечной апертурой выражением

$$\tilde{s}(x, y) = \frac{1}{(j\lambda f)^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} s(K_x, K_y) \exp \left\{ j \frac{l}{2k} (K_x^2 + K_y^2) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -j(K_x x + K_y y) \right\} dx_f dy_f =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f^2}{(j\lambda f)^2 k^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} s(K_x, K_y) \exp \left\{ j \frac{l}{2k} (K_x^2 + K_y^2) \right\} \times \\
&\quad \times \exp \left\{ -j (K_x x + K_y y) \right\} dK_x dK_y = \\
&= -\frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} s(K_x, K_y) \exp \left\{ j \frac{l}{2k} (K_x^2 + K_y^2) \right\} \times \\
&\quad \times \exp \left\{ -j (K_x x + K_y y) \right\} dK_x dK_y, \quad (2.102)
\end{aligned}$$

Из (2.102) видно, что объектив 2 выполняет преобразование Френеля.

Разложим экспоненциальный множитель $\exp \left\{ j \frac{l}{2k} (K_x^2 + K_y^2) \right\}$ в ряд, воспользовавшись малостью параметра l и соответственно показателя экспоненты в пределах, заданных максимальной частотой фурье-спектра сигнала. Ограничиваясь в ряде членом первого порядка малости, получаем

$$\exp \left\{ j \frac{l}{2k} (K_x^2 + K_y^2) \right\} \approx 1 + \frac{l}{2k} (K_x^2 + K_y^2). \quad (2.103)$$

Подставив (2.103) в (2.102) и выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\begin{aligned}
\tilde{s}(x, y) &= -\frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + j \frac{l}{2k} (K_x^2 + K_y^2) \right] s(K_x, K_y) \times \\
&\quad \times \exp \left\{ -j (K_x x + K_y y) \right\} dK_x dK_y = \\
&= -s(-x, -y) + j \frac{l}{2k} \int \int_{-\infty}^{\infty} (K_x^2 + K_y^2) s(K_x, K_y) \times \\
&\quad \times \exp \left\{ -j (K_x x + K_y y) \right\} dK_x dK_y = \\
&= -s(-x, -y) - j \frac{l}{2k} \nabla_{x,y}^2 s(-x, -y). \quad (2.104)
\end{aligned}$$

Как следует из (2.104), в плоскости (x, y) восстанавливается в инвертированных осях суперпозиция исходного сигнала $-s(-x, -y)$ и с точ-

ностью до комплексного множителя $j \frac{l}{2k}$ его второй производной по пространственным координатам (лапласиан) $\nabla_{x,y}^2 s(-x, -y)$. Здесь мы воспользовались теоремой о фурье-преобразовании производной сигнала.

В случае фазового объекта

$$s(x, y) = \exp\{j\varphi(x, y)\}. \quad (2.105)$$

Действие оператора Лапласа на $s(x, y)$ дает

$$\begin{aligned} \nabla_{x,y}^2 s(x, y) &= \nabla_{x,y}^2 \exp\{j\varphi(x, y)\} = \frac{\partial}{\partial x} \left[j \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} s(x, y) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[j \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} s(x, y) \right] = j \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} s(x, y) - \left[\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right]^2 s(x, y) + \\ &+ j \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} s(x, y) - \left[\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right]^2 s(x, y). \end{aligned} \quad (2.106)$$

С учетом (2.106) выражение (2.104) для светового поля, регистрируемого в плоскости $(-x, -y)$, принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{s}(x, y) &= -s(-x, -y) - j \frac{l}{2k} \nabla_{x,y}^2 s(-x, -y) = \\ &= -s(-x, -y) \left\{ 1 - \frac{l}{2k} \left[\nabla_{x,y}^2 \varphi(-x, -y) + j \left(\nabla_{x,y} \varphi(-x, -y) \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.107)$$

В случае, когда входной сигнал (2.105) описывает слабую фазовую неоднородность,

$$s(x, y) = \exp[j\varphi(x, y)] \approx 1 + j\varphi(x, y), \quad (2.108)$$

для выходного светового поля (2.107) имеем

$$\tilde{s}(x, y) = -1 - j\varphi(-x, -y) + \frac{l}{2k} \nabla_{x,y}^2 \varphi(x, y). \quad (2.109)$$

Переходя к интенсивности, получаем

$$\tilde{I}(x, y) = |\tilde{s}(x, y)|^2 = 1 + \varphi^2(-x, -y) - \frac{l}{k} \nabla_{x,y}^2 \varphi(-x, -y). \quad (2.110)$$

Из (2.107), (2.109) и (2.110) следует, что при регистрации фазового объекта на небольшом расстоянии от плоскости изображения визуализируется лапласиан фазовой функции сигнала. При этом величина и знак контраста изображения (2.107) определяются коэффициентом

$\frac{l}{2k}$. Для дефокусированного изображения в плоскости, находящейся

ближе к линзе относительно плоскости изображения, наблюдается «темный» контраст. Если плоскость регистрации дефокусированного изображения находится за плоскостью изображения, наблюдаемый контраст «светлый». В разделе 2.1 показано, что фурье-спектр производной n -го порядка определяется произведением фурье-спектра n -кратного гильберт-сопряженного сигнала на частоту в n -й степени. Этот вывод полностью соответствует полученному результату при $n = 2$.

2.10. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ОПТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПРИ СМЕЩЕНИИ ФИЛЬТРА ОТНОСИТЕЛЬНО ФУРЬЕ-ПЛОСКОСТИ (РАСФОКУСИРОВАННАЯ ДИАФРАГМА)

Из рассмотренных выше свойств преобразования Гильберта следует, что для оптического сигнала, описываемого четной функцией, гильберт-сопряженный сигнал является нечетной функцией. В частности, для сигнала $s(x)$, имеющего экстремум фазового рельефа в точке $x = 0$, гильберт-сопряженный сигнал содержит темную полосу, соответствующую экстремуму фазового рельефа.

Рассмотрим ситуацию, когда пространственно-частотный фильтр расположен в плоскости, смещенной относительно фурье-плоскости. На рис. 2.21 показан пример такой схемы, которая представляет собой два конфокально расположенных объектива 1 и 2. Плоскость K_x, K_y

(x_f, y_f) является пространственно-частотной плоскостью. В плоскости (x_0, y_0) задается оптический сигнал, плоскость (x_1, y_1) является

Рис. 2.21

плоскостью регистрации. Пусть пространственно-частотный фильтр помещается в плоскости (x, y) , параллельной фурье-плоскости (x_f, y_f) и отстоящей от нее на расстоянии l . Запишем импульсный отклик объектива 1, воспользовавшись (1.64) и учитывая, что

$$D_0 = \frac{1}{f} = \Phi; \quad D_1 = \frac{1}{f-l}; \quad Q = D_1:$$

$$\begin{aligned} h(x, y; x_0, y_0) &= \frac{k\Phi}{2\pi j} \exp \left\{ j \frac{k}{2} \Phi \left(1 - \frac{\Phi}{D_1} \right) (x_0^2 + y_0^2) \right\} \times \\ &\times \exp \{ -jk\Phi(x_0 x + y_0 y) \} = \\ &= \frac{k\Phi}{2\pi j} \exp \left\{ j \frac{kl}{2f^2} (x_0^2 + y_0^2) \right\} \exp \{ -j(K_x x_0 + K_y y_0) \}. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Здесь $K_x = \frac{k}{f} x$; $K_y = \frac{k}{f} y$.

Объектив 2 выполняет обратное фурье-преобразование светового поля, локализованного в плоскости x, y . Его импульсный отклик согласно (1.70)

$$h(x_1, y_1; x, y) = \frac{k\Phi}{2\pi j} \exp \{ -j(K_x x_1 + K_y y_1) \}. \quad (2.112)$$

Пусть в плоскости (x, y) помещен фильтр с когерентной передаточной функцией $H_f(K_x, K_y)$. Тогда, учитывая (2.111) и (2.112), для результирующего импульсного отклика можно записать:

$$\begin{aligned}
 h(x_1, y_1; x_0, y_0) &= \int \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y; x_0, y_0) H_f(K_x, K_y) h(x_1, y_1; x, y) dx dy = \\
 &= -\frac{k^2 \Phi^2}{4\pi^2} \exp \left\{ j \frac{kl}{2f^2} (x_0^2 + y_0^2) \right\} \int \int_{-\infty}^{\infty} H_f(K_x, K_y) \times \\
 &\quad \times \exp \left\{ -j [K_x (x_0 + x_1) + K_y (y_0 + y_1)] \right\} dx dy = \\
 &= -\frac{1}{4\pi^2} \exp \left\{ j \frac{kl}{2f^2} (x_0^2 + y_0^2) \right\} \int \int_{-\infty}^{\infty} H_f(K_x, K_y) \times \\
 &\quad \times \exp \left\{ -j [K_x (x_0 + x_1) + K_y (y_0 + y_1)] \right\} dK_x dK_y. \quad (2.113)
 \end{aligned}$$

Здесь учтено: $K\Phi x = K_x$, $K\Phi y = K_y$.

Исследуем импульсный отклик (2.113) оптической схемы с «расфокусированной диафрагмой» для различных фильтров, помещенных в плоскость (x, y) .

1. Пусть в плоскости (x, y) установлен гильберт-фильтр с когерентной передаточной функцией $H_f(K_x, K_y) = -j \operatorname{sgn} K_x$. Подставив когерентную передаточную функцию гильберт-фильтра в (2.113), получим

$$\begin{aligned}
 h(x_1, y_1; x_0, y_0) &= -\frac{1}{4\pi^2} \exp \left\{ j \frac{kl}{2f^2} (x_0^2 + y_0^2) \right\} \int \int_{-\infty}^{\infty} (-j \operatorname{sgn} K_x) \times \\
 &\quad \times \exp \left\{ -j [K_x (x_0 + x_1) + K_y (y_0 + y_1)] \right\} dK_x dK_y = \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \exp \left\{ j \frac{kl}{2f^2} (x_0^2 + y_0^2) \right\} \delta(y_0 + y_1) \times \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} (-j \operatorname{sgn} K_x) \exp \left\{ -j [K_x (x_0 + x_1)] \right\} dK_x. \quad (2.114)
 \end{aligned}$$

В (2.114) мы учли, что $\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-jK_y(y_0 + y_1)] dK_y = 2\pi\delta(y_0 + y_1)$. Поскольку

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-j \operatorname{sgn} K_x) \exp\{-j[K_x(x_0 + x_1)]\} dK_x = \frac{1}{\pi(x_0 + x_1)},$$

подставляя этот результат в (2.114), получаем для импульсного отклика

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = -\frac{1}{\pi(x_0 + x_1)} \exp\left\{j \frac{kl}{2f^2}(x_0^2 + y_0^2)\right\} \delta(y_0 + y_1). \quad (2.115)$$

Пусть в плоскости (x_0, y_0) задан оптический сигнал $s(x_0, y_0)$. Для выходной реакции системы в плоскости (x_1, y_1) , учитывая (2.115), имеем

$$\begin{aligned} E(x_1, y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x_0, y_0) h(x_1, y_1; x_0, y_0) dx_0 dy_0 = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x_0, y_0) \exp\left\{j \frac{kl}{2f^2}(x_0^2 + y_0^2)\right\} \frac{\delta(y_0 + y_1)}{x_0 + x_1} dx_0 dy_0 = \\ &= -\frac{1}{\pi} \exp\left(j \frac{kl}{2f^2} y_1^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(x_0, -y_1)}{x_0 + x_1} \exp\left\{j \frac{kl}{2f^2} x_0^2\right\} dx_0. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Здесь при интегрировании по y_0 мы воспользовались фильтрующим свойством дельта-функции $\delta(y_0 + y_1)$. Как следует из (2.116), распределение поля в плоскости изображения (x_1, y_1) с точностью до квадратичного фазового множителя $\exp\left\{j \frac{kl}{2f^2} y_1^2\right\}$ определяется одномерным гильберт-преобразованием от произведения сигнала $s(x_0, y_0)$ на функцию $\exp\left\{j \frac{kl}{2f^2} x_0^2\right\}$:

$$E(x_1, y_1) = -\frac{1}{\pi} \exp\left(j \frac{kl}{2f^2} y_1^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(x_0, -y_1)}{x_0 + x_1} \exp\left(j \frac{kl}{2f^2} x_0^2\right) dx_0. \quad (2.117)$$

При малой расфокусировке $\left(\frac{kl}{2f^2} y_1^2 \ll 1, \frac{kl}{2f^2} x_0^2 \ll 1 \right)$ экспоненты в (2.117) можно заменить разложением в ряд

$$\exp\left(\frac{kl}{2f^2} x_0^2\right) \approx 1 + \frac{kl}{2f^2} x_0^2; \quad \exp\left(\frac{kl}{2f^2} y_1^2\right) \approx 1 + \frac{kl}{2f^2} y_1^2.$$

Тогда световое поле в плоскости изображения (x_1, y_1) с точностью до первого порядка малости представляется в виде

$$E(x_1, y_1) = -\hat{s}_x(-x_1, -y_1) - j \frac{kl}{2f^2} G_x[s(-x_1, -y_1) x_0^2], \quad (2.118)$$

$$\text{где} \quad \hat{s}_x(-x_1, -y_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(x_0, -y_1)}{x_0 + x_1} dx_0; \quad G_x[s(x_1 - y_1) x_0^2] = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_0(x_0, -y_1)}{x_0 + x_1} x_0^2 dx_0.$$

Согласно (2.118) в оптической схеме с расфокусированной диафрагмой при использовании гильберт-фильтрации по одной из осей в плоскости изображения в инвертированных осях формируется суперпозиция одномерного по оси x_1 гильберт-преобразования сигнала и с точностью до коэффициента, пропорционального расфокусировке, гильберт-сопряженного произведения сигнала на параболу x_0^2 , что соответствует гильберт-образу второй производной фурье-спектра сигнала по пространственной частоте K_x .

Переходя в (2.118) к интенсивности, получаем изображение фильтрованного сигнала:

$$I(x_1, y_1) = |\hat{s}_x(-x_1, -y_1)|^2 + \frac{k^2 l^2}{4 f^4} \left| G_x[s(x_0, -y_1) x_0^2] \right|^2.$$

2. Рассмотрим ситуацию, когда в плоскости (x, y) помещен фильтр Фуко–Гильберта с когерентной передаточной функцией

$$H_f(K_x, K_y) = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{sgn} K_x). \quad (2.119)$$

В этом случае для импульсного отклика оптической системы с учетом (2.113), (2.115) и (2.119), получаем

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = -\frac{1}{8\pi^2} \left\{ j \frac{kl}{2f^2} (x_0^2 + y_0^2) \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \operatorname{sgn} K_x) \times$$

a

б

в

Рис. I

a

б

в

г

д

Рис. II

Рис. III

Рис. IV

Рис. V

a

b

c

Рис. VI

a

b

c

Рис. VII

$t = 14 \text{ мин;}$
 $T_{\text{дна}} = 56,1^{\circ}\text{C}$
 $T_{\text{пов.}} = 42,68^{\circ}\text{C}$

$t = 15 \text{ мин;}$
 $T_{\text{дна}} = 57,81^{\circ}\text{C}$
 $T_{\text{пов.}} = 43,42^{\circ}\text{C}$

$t = 16 \text{ мин;}$
 $T_{\text{дна}} = 59,51^{\circ}\text{C}$
 $T_{\text{пов.}} = 43,49^{\circ}\text{C}$

$t = 19 \text{ мин;}$
 $T_{\text{дна}} = 61,59^{\circ}\text{C}$
 $T_{\text{пов.}} = 46,34^{\circ}\text{C}$

$t = 25 \text{ мин;}$
 $T_{\text{дна}} = 61,9^{\circ}\text{C}$
 $T_{\text{пов.}} = 44,15^{\circ}\text{C}$

$t = 29 \text{ мин;}$
 $T_{\text{дна}} = 61,95^{\circ}\text{C}$
 $T_{\text{пов.}} = 49,27^{\circ}\text{C}$

Рис. X, а

a

б

Рис. VII

a

б

Рис. IX

$t = 30 \text{ мин;}$
 $T_{\text{дна}} = 58,54 \text{ }^{\circ}\text{C}$
 $T_{\text{пов.}} = 43,9 \text{ }^{\circ}\text{C}$

$t = 35 \text{ мин;}$
 $T_{\text{дна}} = 55,24 \text{ }^{\circ}\text{C}$
 $T_{\text{пов.}} = 43,9 \text{ }^{\circ}\text{C}$

$t = 40 \text{ мин;}$
 $T_{\text{дна}} = 51,68 \text{ }^{\circ}\text{C}$
 $T_{\text{пов.}} = 42,22 \text{ }^{\circ}\text{C}$

$t = 45 \text{ мин;}$
 $T_{\text{дна}} = 48,49 \text{ }^{\circ}\text{C}$
 $T_{\text{пов.}} = 42,2 \text{ }^{\circ}\text{C}$

$t = 59 \text{ мин;}$
 $T_{\text{дна}} = 44,88 \text{ }^{\circ}\text{C}$
 $T_{\text{пов.}} = 39,32 \text{ }^{\circ}\text{C}$

$t = 55 \text{ мин;}$
 $T_{\text{дна}} = 43 \text{ }^{\circ}\text{C}$
 $T_{\text{пов.}} = 38,54 \text{ }^{\circ}\text{C}$

Рис. X, б

Рис. XII

Рис. XI

$$\begin{aligned}
& \times \exp\left\{-j\left[K_x(x_0+x_1)+K_y(y_0+y_1)\right]\right\}dK_xdK_y = -\frac{1}{8\pi^2}\left\{j\frac{kl}{2f^2}(x_0^2+y_0^2)\right\} \times \\
& \times \left\{\int\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-j\left[K_x(x_0+x_1)+K_y(y_0+y_1)\right]\right\}dK_xdK_y + \right. \\
& \left. + j\int\int_{-\infty}^{\infty}(-j\operatorname{sgn} K_x)\exp\left\{-j\left[K_x(x_0+x_1)+K_y(y_0+y_1)\right]\right\}dK_xdK_y\right\} = \\
& = -\frac{1}{2}\exp\left\{j\frac{kl}{2f^2}(x_0^2+y_0^2)\right\}\left\{\delta(x_0+x_1)+\frac{j}{\pi(x_0+x_1)}\right\}\delta(y_0+y_1). \quad (2.120)
\end{aligned}$$

Пусть входной оптический сигнал задан функцией $s(x_0, y_0)$. Тогда, воспользовавшись (2.120), (2.116) и (2.117), для светового поля в плоскости изображения получаем

$$\begin{aligned}
E(x_1, y_1) &= -\frac{1}{2}\int\int_{-\infty}^{\infty}s(x_0, y_0)\exp\left\{j\frac{kl}{2f^2}(x_0^2+y_0^2)\right\} \times \\
& \times \left\{\delta(x_0+x_1)\delta(y_0+y_1)+\frac{j}{2\pi}\frac{\delta(y_0+y_1)}{(x_0+x_1)}\right\}dx_0dy_0 = -\frac{1}{2}s(-x_1, -y_1) - \\
& - \frac{j}{2\pi}\exp\left(-j\frac{kl}{2f^2}y_1^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(x_0, -y_1)}{x_0+x_1}\exp\left(j\frac{kl}{2f^2}x_0^2\right)dx_0. \quad (2.121)
\end{aligned}$$

Как следует из (2.121), в плоскости изображения в инвертированных осях формируется суперпозиция исходного сигнала и, с точностью до комплексного множителя $j\exp\left(-j\frac{kl}{2f^2}y_1^2\right)$, гильберт-преобразования произведения исходного сигнала на функцию $\exp\left\{j\frac{kl}{2f^2}x_0^2\right\}$. В при-

ближении малой расфокусировки $\left(\frac{kl}{2f^2} y_1^2 \ll 1, \frac{kl}{2f^2} x_0^2 \ll 1 \right)$ выражение (2.121) трансформируется в

$$E(x_1, y_1) = -\frac{1}{2} s(-x_1, -y_1) - \frac{j}{2} \hat{s}_x(-x_1, -y_1) + \frac{kl}{4f^2} G_x \left[s(-x_0, -y_1) x_0^2 \right]. \quad (2.122)$$

Отсюда видно, что восстановленное фильтрованное поле при малой дефокусировке представляет собой в инвертированных осях суперпозицию восстановленного сигнала, гильберт-сопряженного по оси x_1 сигнала и с точностью до коэффициента, пропорционального дефокусировке, гильберт-преобразования по оси x_1 произведения сигнала на x_0^2 , что соответствует гильберт-преобразованию второй производной фурье-спектра сигнала по пространственной частоте K_x .

3. Пусть в схеме с расфокусированной диафрагмой используется фильтр с когерентной передаточной функцией

$$H_f(K_x, K_y) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\operatorname{sgn}(K_x + \varepsilon) - \operatorname{sgn}(K_x - \varepsilon)] \right\}. \quad (2.123)$$

Эта КПФ соответствует нити, ориентированной вдоль оси x . Нить имеет толщину $b = \frac{\varepsilon}{K\Phi}$. Определим импульсный отклик $h(x_1, y_1; x_0, y_0)$ оптической системы с учетом (2.113) и КПФ фильтра (2.123):

$$\begin{aligned} h(x_1, y_1; x_0, y_0) &= -\frac{1}{8\pi^2} \exp \left\{ j \frac{kl}{2f^2} (x_0^2 + y_0^2) \right\} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\operatorname{sgn}(K_x + \varepsilon) - \operatorname{sgn}(K_x - \varepsilon)] \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -j [K_x(x_0 + x_1) + K_y(y_0 + y_1)] \right\} dK_x dK_y. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Преобразуем (2.124), воспользовавшись (2.120):

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = -\frac{1}{2} \exp \left\{ j \frac{kl}{2f^2} (x_0^2 + y_0^2) \right\} \left\{ \delta(x_0 + x_1) \delta(y_0 + y_1) - \right.$$

$$-\frac{\delta(y_0 + y_1)}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{sgn}(K_x + \varepsilon) - \operatorname{sgn}(K_x - \varepsilon)] \times \\ \times \exp[-jK_x(x_0 + x_1)] dK_x. \quad (2.125)$$

Выполним в (2.125) интегрирование

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{sgn}(K_x + \varepsilon) - \operatorname{sgn}(K_x - \varepsilon)] \exp[-jK_x(x_0 + x_1)] dK_x = \\ = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-jK_x(x_0 + x_1)] \operatorname{sgn}(K_x + \varepsilon) dK_x - \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-jK_x(x_0 + x_1)] \operatorname{sgn}(K_x - \varepsilon) dK_x \right\} =$$

[выполним замену переменных в первом интеграле $K_x + \varepsilon = \xi$,

во втором $K_x - \varepsilon = \xi$]

$$= \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j(\xi - \varepsilon)(x_0 + x_1)] \operatorname{sgn} \xi d\xi - \right. \\ \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j(\xi + \varepsilon)(x_0 + x_1)] \operatorname{sgn} \xi d\xi \right\} = \\ = \frac{1}{4\pi} \left\{ \exp[j\varepsilon(x_0 + x_1)] - \exp[-j\varepsilon(x_0 + x_1)] \right\} \exp \int_{-\infty}^{\infty} [-j\xi(x_0 + x_1)] \operatorname{sgn} \xi d\xi = \\ = \frac{j}{2\pi} \sin[\varepsilon(x_0 + x_1)] \int_{-\infty}^{\infty} (-j \operatorname{sgn} \xi) \exp[-j\xi(x_0 + x_1)] d\xi = \\ = j \frac{\sin[\varepsilon(x_0 + x_1)]}{2\pi(x_0 + x_1)}. \quad (2.126)$$

Здесь мы воспользовались фурье-преобразованием функции гильберт-фильтра. Полученный результат интегрирования (2.126) подставляем в выражение (2.125) для импульсного отклика оптической системы:

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = -\frac{1}{2} \exp \left\{ j \frac{kl}{2f^2} (x_0^2 + y_0^2) \right\} \times \\ \times \left\{ \delta(x_0 + x_1) \delta(y_0 + y_1) - \frac{j}{2\pi} \delta(y_0 + y_1) \frac{\sin[\varepsilon(x_0 + x_1)]}{x_0 + x_1} \right\}. \quad (2.127)$$

В случае малой расфокусировки

$$\exp \left\{ j \frac{kl}{2f^2} (x_0^2 + y_0^2) \right\} \approx 1 + j \frac{kl}{2f^2} (x_0^2 + y_0^2).$$

В этом приближении импульсный отклик (2.127) оптической системы с расфокусированной нитью принимает следующий вид:

$$h(x_1, y_1; x_1, y_1) = -\frac{1}{2} \left[1 + j \frac{kl}{2f^2} (x_0^2 + y_0^2) \right] \times \\ \times \left\{ \delta(x_0 + x_1) - \frac{j\varepsilon}{2\pi} \frac{\sin[\varepsilon(x_0 + x_1)]}{\varepsilon(x_0 + x_1)} \right\} \delta(y_0 + y_1). \quad (2.128)$$

Полагая величину ε достаточно малой, из (2.128) получаем

$$h(x_1, y_1; x_1, y_1) = \\ = -\frac{1}{2} \left[1 + j \frac{kl}{2f^2} (x_0^2 + y_0^2) \right] \left\{ \delta(x_0 + x_1) - \frac{j\varepsilon}{2\pi} \right\} \delta(y_0 + y_1). \quad (2.129)$$

Рассмотрим ситуацию, когда в плоскости (x_0, y_0) сформирован фазовый оптический сигнал, соответствующий слабой фазовой оптической неоднородности

$$s(x_0, y_0) = \exp[j\phi(x_0, y_0)] \approx 1 + j\phi(x_0, y_0). \quad (2.130)$$

Определим выходную реакцию оптической системы с импульсным откликом (2.129) на этот сигнал:

$$E(x_1, y_1) = -\frac{1}{2} \int \int_{-\infty}^{\infty} [1 + j\varphi(x_0, y_0)] \left[1 + j \frac{kl}{2f^2} (x_0^2 + y_0^2) \right] \times \\ \times \left[\delta(x_0 + x_1) - j \frac{\varepsilon}{2\pi} \right] \delta(y_0 + y_1) dx_0 dy_0. \quad (2.131)$$

Выполняя интегрирование в (2.131) с точностью до членов первого порядка малости и постоянного фона, получаем

$$E(x_1, y_1) \approx -j \frac{1}{2} \left\{ \varphi(-x_1, -y_1) + \frac{\varepsilon kl}{4\pi f^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_0, -y_1) (x_0^2 + y_1^2) dx_0 \right\} - \\ - \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_0, -y_1) dx_0. \quad (2.132)$$

Переходя к интенсивности, преобразуем (2.132) к следующему виду:

$$I(x_1, y_1) \approx \varphi^2(-x_1, -y_1) + \frac{\varepsilon kl}{4\pi f^2} \varphi(-x_1, -y_1) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_0, -y_1) (x_0^2 + y_1^2) dx_0. \quad (2.133)$$

Следовательно, интенсивность восстановленного фильтрованного поля в схеме с расфокусированной нитью представляет собой сумму изображений фазовой неоднородности и произведения изображения тени от нити на моментную функцию фазового сигнала, которая несет информацию о градиенте фазовой оптической плотности в направлении, ортогональном нити.

Поворачивая и перемещая нить в плоскости (x, y) , можно исследовать проекции градиента оптической плотности в различных направлениях и с различной локализацией исследуемой области в пространственном распределении оптических неоднородностей. В случае произвольной ориентации нити ее КПФ (2.123) задается в виде

$$\frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\operatorname{sgn}(p + \varepsilon) - \operatorname{sgn}(p - \varepsilon)] \right\}, \quad (2.134)$$

где $p = K_x \cos \alpha + K_y \sin \alpha$, p – полярное расстояние, α – полярный угол. В плоскости регистрации $p(K_x, K_y, \alpha)$ трансформируется в нормальное уравнение прямой

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha = p.$$

Полярное расстояние в этом уравнении задает пространственную ось, в направлении которой исследуются визуализированные возмущения (2.129) поля оптической плотности. В [22] описана реализация гильберт-фильтрации методом расфокусированной диафрагмы, в котором смещение l и положение фильтра относительно фурье-спектра исследуемой неоднородности задается за счет использования двулучепреломляющей бифокальной линзы (рис. 2.22). Устройство, оптическая схема которого изображена на этом рисунке, работает следующим образом. Световой поток от источника монохроматического света 1 через конденсорный объектив 2 поступает на диафрагму 3 . Далее световой поток коллимируется объективом 4 и просвечивает исследуемую оптическую неоднородность, помещаемую между объективами 4 и 5 . Последовательно с основным объективом 5 установлена бифокальная кристаллооптическая линза 6 . Линза устроена таким образом, что при помещении ее в световой поток на выходе образуется два ортогонально-поляризованных световых потока. Для одной из этих компонент линза представляет собой плоскопараллельную пластинку, не меняющую ход лучей, а для другой – линза имеет оптическую силу, положительную или отрицательную, в зависимости от конструкции. Фокусное расстояние линзы 6 определяется по формуле

$$f_0 = \frac{(f_3 - \Delta)(f_3 - b)}{\Delta},$$

где f_3 – фокусное расстояние объектива 5 ; b – расстояние между объективом 5 и линзой 6 ; Δ – величина расфокусировки фазовой пластинки.

Радиус сферической поверхности кристаллооптической линзы равен $R = f_6(n_0 - n_e)$, а ее диаметр соответственно $D_6 = \frac{D_5(f_5 - b)}{f_5}$. На-

пример, при $n_0 - n_e = 0,176$; $f_5 = 1,5$ м; $\Delta = 0,02$ м; $b = 1$ м; $D_5 = 15$ см получается, что $f_6 = 37$ м; $R = 6,51$ м и $D_6 = 15$ см.

Рис. 2.22

Совокупность последовательно расположенных объектива 5 и линзы 6 образует оптическую систему, имеющую две фокальные плоскости. Световые потоки в соответствующих плоскостях поляризованы ортогонально друг другу. Местоположение первой фокальной плоскости обусловлено только оптической силой объектива 5 (так как линза 6 представляет собой для нее плоскопараллельную пластинку), а второй — совокупностью оптических сил объектива 5, линзы 6 и расстояния между ними. Восстанавливающий объектив 8 переносит изображение исследуемой неоднородности в плоскость фоторегистрирующего устройства 9. В плоскости регистрирующего устройства образуется восстанавливаемый гильберт-сопряженный сигнал (2.116). Обычно такой метод визуализации, кроме очевидных преимуществ (высокая чувствительность, отсутствие перекосов при визуализации симметричных фазовых объективов и т. д.), имеет ряд недостатков: при визуализации теряется знак угла отклонения световых лучей, прошедших через оптическую неоднородность, и сложно определяется по тениграмме величина этого угла. В устройстве с бифокальной кристаллооптической линзой используется наложение двух тениграмм, получаемых соответственно методами преобразования Гильберта и расфокусированной «нити». Преимущество метода расфокусированной «нити» заключается в простоте расшифровки распределения углов отклонения световых лучей, прошедших неоднородность. Информация о знаке угла отклонения при этом не теряется. Аналогичный результат получается при расфокусировке фильтра пространственных частот 7. При перемещении линзы 6 в плоскости, перпендикулярной оптической оси прибора, тениграмма расфокусированной «нити» будет перемещаться в поле зрения. Таким образом можно исследовать интересные участки оптической неоднородности. Поскольку плоскости поляризации световых потоков, формирующих налагаемые друг на друга тениграммы, ортогональны, интерференция между ними отсутствует.

ГИЛЬБЕРТ-МЕТОДЫ В ОПТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКЕ

3.1. ИЗОТРОПНОЕ НЕКОГЕРЕНТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА

Некогерентному изотропному гильберт-преобразованию может быть поставлена в соответствие операция вычисления квадрата модуля градиента двумерной функции $s(x, y)$, описываемая как

$$|\nabla s(x, y)|^2 = |s'_x(x, y)|^2 + |s'_y(x, y)|^2.$$

Это соотношение, как и оператор Лапласа, обладает высокой степенью симметрии (изотропностью) [23, 24].

Если вычисление квадратов модуля частных производных заменить вычислением их «фазовых аналогов», т.е. вычислением соответствующих им квадратов вещественной части одномерных гильберт-образов функции $s(x, y)$, то получится следующее выражение для некогерентного изотропного преобразования Гильберта [9, 25–27]:

$$|G_{\nabla}(x, y)|^2 = |G_x(x, y)|^2 + |G_y(x, y)|^2, \quad (3.1)$$

где

$$G_x(x, y) = G_x[s(x, y)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(x', y)}{x' - x} dx',$$

$$G_y(x, y) = G_y[s(x, y)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(x, y')}{y' - y} dy'$$

— одномерные преобразования Гильберта функции $s(x, y)$ вдоль ортогональных осей x и y .

Согласно (3.1) для получения некогерентного изотропного преобразования Гильберта (ИПГ) необходимо выполнить когерентные од-

номерные преобразования Гильберта в ортогональном координатном базисе и найти сумму их интенсивностей. Пример оптической схемы, реализующей некогерентное ИПГ, показан на рис. 3.1. Это – двухканальное оптическое устройство, содержащее лазер *1*; микрообъектив *2*; точечную диафрагму *3*; коллимирующий объектив *4*; входной транспарант с амплитудным коэффициентом пропускания $s(x', y')$ *5*; объектив прямого фурье-преобразования *6*; светоделительный кубик *7*; полуволновые фазовые ножи *9* и *10*, когерентные передаточные функции которых $H_1(K_x, K_y) = -j \operatorname{sgn}(K_x)$ и $H_2(K_x, K_y) = -j \operatorname{sgn}(K_y)$; отражающие зеркала *8*, *11*, выравнивающие оптическую длину пути обоих каналов; полуволновую поляризационную фазовую пластинку *12*; поляризационный светоделительный кубик *13*; объектив обратного преобразования Фурье *14*; регистратор интенсивности (квадратичный преобразователь) оптического поля *15*.

Рис. 3.1

Лазерный пучок, ограниченный диафрагмой *3*, формирует точечный источник монохроматического линейно поляризованного света. Излучение точечного источника, преобразованное объективом *4* в плоскую световую волну, освещает транспарант *5*, амплитудно-фазовое пропускание которого моделирует оптические свойства исследуемого объекта. Объектив *6*, кубик *7* и зеркало *8* формируют в пространственно-разнесенных оптических каналах линейно-поляризованные фурье-спектры сигнала $s(K_x, K_y)$.

В частотной плоскости каждого канала размещены ортогонально ориентированные гильберт-фильтры 9 и 10, когерентные передаточные функции которых $H_x(K_x, K_y) = -j \operatorname{sgn} K_x$ и $H_y(K_x, K_y) = -j \operatorname{sgn} K_y$ соответственно.

Во втором канале полуволновая поляризационная фазовая пластинка 12 выполняет поворот плоскости поляризации на 90° . С помощью зеркала 11 и поляризационного кубика 13 осуществляется рекомбинация ортогонально поляризованных световых сигналов, сформированных в первом и во втором оптических каналах. Объектив 14 выполняет обратное фурье-преобразование сигналов, подвергнутых одномерной гильберт-фильтрации соответственно по осям x и y .

Амплитудное распределение выходного сигнала в фурье-плоскости объектива 14 оптической системы пропорционально сумме ортогонально поляризованных одномерных гильберт-образов входного сигнала $s(x, y)$, вычисленных соответственно вдоль ортогональных направлений x и y . Одномерные гильберт-образы двумерного сигнала сформированы в инвертированных осях в масштабе, соответствующем линейному коэффициенту передачи оптической системы, образованной фурье-объективами 6 и 14. Интенсивность сигнала в выходной плоскости $(\tilde{x}, \tilde{y})$ оказывается пропорциональной сумме интенсивностей одномерных гильберт-образов:

$$I(x, y) = \frac{\Gamma^2 E_0^2}{2} |G_x(-\Gamma x, -\Gamma y)|^2 + \frac{\Gamma^2 E_0^2}{2} |G_y(-\Gamma x, -\Gamma y)|^2,$$

где Γ – коэффициент линейного увеличения.

Интерференционный член в силу ортогональной поляризации G_x и G_y равен нулю. Таким образом, распределение интенсивности света выходного сигнала с точностью до постоянного множителя представляет собой некогерентный изотропный гильберт-образ входного сигнала:

$$I(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\Gamma^2 E_0^2}{2} |G_V(\tilde{x}, \tilde{y})|^2 = \tilde{E}^2 |G_V(\tilde{x}, \tilde{y})|^2.$$

Недостатком рассмотренной схемы с точечным монохроматическим источником являются высокие требования к качеству кромок фазовых

ножей. Как показано на рис. 3.1, точечный источник света может быть заменен на крестовидный, составленный из двух пересекающихся под прямым углом ортогонально поляризованных щелевых источников (например, горизонтальная щель излучает свет, поляризованный в горизонтальной плоскости, а вертикальная щель – в вертикальной плоскости). В таких устройствах в качестве коллимирующего и фурье-объектива используются объективы с одинаковыми параметрами.

Световое поле, возмущенное транспарантом 5, воспринимается фурье-объективом 6 и расщепляется кубиком 7 на два ортогонально поляризованных пучка. Вертикально поляризованный пучок в частотной плоскости первого канала формирует согласно теореме смещения непрерывную последовательность двумерных фурье-образов входного сигнала, сдвинутых относительно друг друга вдоль кромки фазового ножа 9, параллельной изображению вертикального щелевого источника. Горизонтально поляризованный пучок в частотной плоскости второго канала формирует непрерывную последовательность двумерных фурье-образов входного сигнала, сдвинутых относительно друг друга вдоль кромки горизонтально расположенного фазового ножа, параллельной изображению горизонтального щелевого источника.

Полуволновые фазовые пластинки 12 и 12' выполняют поворот плоскостей поляризации на 90° . Ортогонально поляризованные световые поля поляризационным кубиком 13, выполняющим функции рекомбинационного элемента, совмещаются и фурье-объективом 14 трансформируются в суперпозицию ортогонально поляризованных одномерных гильберт-образов сигнала $G_x(x, y)$ и $G_y(x, y)$.

Интерференционный член, как и в случае применения точечного источника света, обращается в нуль из-за ортогональной поляризации интерферирующих световых оптических полей, формирующих $G_x(x, y)$ и $G_y(x, y)$. Изотропный гильберт-образ входного сигнала реализуется при условии равенства интенсивностей излучения горизонтального и вертикального щелевых источников.

В случае пространственно когерентного крестовидного источника света изотропное преобразование Гильберта входного сигнала имеет спекловую структуру. Использование некогерентного крестовидного источника света позволяет устранить этот недостаток. Такой источник формируется посредством проецирования в центральный участок ще-

левых диафрагм изображений самосветящихся протяженных объектов. Пространственную когерентность лазерного источника можно разрушать динамической фазовой модуляцией, с помощью, например, вращающегося (колеблющегося) матового стекла или акусто-оптической модуляции.

Как уже отмечалось выше, «квазидифференцирующие» функциональные преобразователи, осуществляющие вычисление пространственных производных, а также выполняющие аналогичные им операции, могут использоваться для выделения контуров оптических изображений и для повышения контраста изображений. Такого рода операция основана на вычислении суммы двух изображений, представленных каждый в виде квадратов модулей исходной функции (входного сигнала) и ее изотропного гильберт-образа, т.е.

$$|\Phi_{\nabla}(\tilde{x}, \tilde{y}, \alpha, \beta)|^2 = \alpha |s(\tilde{x}, \tilde{y})|^2 + \beta |G_{\nabla}(\tilde{x}, \tilde{y})|^2, \quad (3.2)$$

где α, β – коэффициенты пропорциональности, показывающие соответственно доли исходного изображения и его «производной» в результирующем изображении. В дальнейшем функциональное преобразование, описываемое выражением (3.2), определим как изотропное преобразование Фуко–Гильберта [28]. Из этого соотношения видно, что, регулируя параметры α и β , можно достичь желаемого эффекта наилучшего «подчеркивания» контуров.

По аналогии с (3.2) вводится понятие одномерного преобразования Фуко–Гильберта двумерных сигналов $s(x, y)$, представляющее собой линейную комбинацию

$$\Phi_x(x, y) = \frac{1}{2} [\sqrt{\alpha} \cdot s(x, y) - j\sqrt{\beta} \cdot G_x(x, y)], \quad (3.3)$$

где $\sqrt{\alpha}$ и $\sqrt{\beta}$ – вещественные весовые коэффициенты сигнала и его одномерного гильберт-образа. Для чистого преобразования Фуко $\alpha = \beta = 1$ и (3.3) принимает вид

$$\Phi_x^0(x, y) = \frac{1}{2} [s(x, y) - jG_x(x, y)].$$

Отсюда видно, что результатом когерентного преобразования Фуко–Гильберта является аналитический сигнал.

Квадраты модулей абсолютных значений функций $\Phi_x^0(x, y)$ и $\Phi_x(x, y)$ равны

$$\begin{aligned} \left| \Phi_x^0(x, y) \right|^2 &= \frac{1}{4} \left[|s(x, y)|^2 + |G_x(x, y)|^2 \right], \\ \left| \Phi_x(x, y) \right|^2 &= \frac{1}{4} \left[\alpha |s(x, y)|^2 + \beta |G_x(x, y)|^2 \right]. \end{aligned}$$

Некогерентное изотропное преобразование Фуко–Гильберта сравнительно просто реализуется, если ввести в частотные плоскости обоих каналов (рис. 3.1) вместо полуволновых фазовых ножей 9 и 10 амплитудные фильтры или амплитудно-фазовые фильтры с коэффициентом пропускания T .

Если амплитудно-фазовый нож обеспечивает фазовый сдвиг $\theta = (2n - 1)\pi$ между компонентами фурье-спектра, соответствующими положительным или отрицательным пространственным частотам, то для когерентных передаточных функций $H_i(K)$ в первом и во втором каналах имеем

$$H_1(K_x) = \frac{1}{2} \left[(1 - T) + (1 + T) \operatorname{sgn}(K_x) \right] = \begin{cases} 1, & K_x \geq 0; \\ -T, & K_x < 0; \end{cases} \quad (3.4)$$

$$H_2(K_y) = \frac{1}{2} \left[(1 - T) + (1 + T) \operatorname{sgn}(K_y) \right] = \begin{cases} 1, & K_y \geq 0; \\ -T, & K_y < 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

При отсутствии фазового сдвига

$$H_1(K_x) = \frac{1}{2} \left[(1 + T) + (1 - T) \operatorname{sgn}(K_x) \right] = \begin{cases} 1, & K_x \geq 0; \\ T, & K_x < 0; \end{cases} \quad (3.6)$$

$$H_2(K_y) = \frac{1}{2} \left[(1 + T) + (1 - T) \operatorname{sgn}(K_y) \right] = \begin{cases} 1, & K_y \geq 0; \\ T, & K_y < 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Интенсивность $I(\tilde{x}, \tilde{y})$ фильтрованного оптического поля в выходной плоскости рассматриваемого устройства:

$$I(\tilde{x}, \tilde{y}) = \Gamma^2 A \left\{ \left| 0,5 \left[(1 \mp T) s(\tilde{x}, \tilde{y}) - j(1 \pm T) G_x(\tilde{x}, \tilde{y}) \right] \right|^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left| 0,5 \left[(1 \mp T) s(\tilde{x}, \tilde{y}) - j(1 \pm T) G_y(\tilde{x}, \tilde{y}) \right] \right|^2 \Bigg\} = \\
& = 0,25 \Gamma^2 A \left\{ 2(1 \mp T)^2 |s(\tilde{x}, \tilde{y})|^2 + (1 \pm T)^2 \left[|G_x(\tilde{x}, \tilde{y})|^2 + |G_y(\tilde{x}, \tilde{y})|^2 \right] - \right. \\
& \quad \left. - 2(1 - T^2) \left(\operatorname{Im} [s(\tilde{x}, \tilde{y}) G_x^*(\tilde{x}, \tilde{y})] + \operatorname{Im} [s(\tilde{x}, \tilde{y}) G_y^*(\tilde{x}, \tilde{y})] \right) \right\},
\end{aligned}$$

где верхний знак соответствует фазовому сдвигу π , а нижний – его отсутствию. Это выражение, как и следовало ожидать, с точностью до постоянного множителя совпадает с (3.2). Весовые коэффициенты α и β определяют парциальные составляющие интенсивностей сигнала и его гильберт-образа в результирующем изображении:

$$\alpha = \begin{cases} \frac{(1-T)^2}{2}, & \theta = (2n-1)\pi; \\ \frac{(1+T)^2}{2}, & \theta = 2n\pi, \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} \frac{(1+T)^2}{4}, & \theta = (2n-1)\pi; \\ \frac{(1-T)^2}{4}, & \theta = 2n\pi. \end{cases}$$

Динамический диапазон коэффициента α в (3.2) составляет $[0, 2]$, тогда как доля его «контурного» изображения β изменяется в пределах от 1 до 0.

Один из возможных вариантов технической реализации таких амплитудно-фазовых (силуэтных) фильтров с регулируемой прозрачностью основан на использовании фазовых пластинок Кастлера [4, 5]. Каждый из этих фильтров содержит линейные взаимно ортогональные поляризатор $P(P')$ и анализатор $A(A')$ и составную фазовую пластину L , расположенную между ними в плоскости изображения одного из щелевых источников света (рис. 3.2, а).

Составная пластина L , в свою очередь, состоит из двух двулучепреломляющих пластинок 1 и 2, идентичных по толщине, каждая из которых перекрывает соответственно отрицательную и положительную частотную полуплоскость оптической системы. Ось пропускания поляризатора $P(P')$ (см. рис. 3.2, б) ориентирована относительно осей наибольшей скорости $F_1 F_1'$ и $F_2 F_2'$ поляризационных фазовых пластинок 1 и 2 соответственно под углами $\psi_1 = \psi$ и $\psi_2 = \gamma - \psi_1 = \gamma - \psi$, где γ – угол между одноименными осями наибольшей и наименьшей скорости

Рис. 3.2

$(S_1S'_1$ и $S_2S'_2$) пластинок 1 и 2 (равный в данном случае 45°). Пусть вектор $\mathbf{OP}$ соответствует вектору электрического поля $\mathbf{E}$ линейно поляризованной световой волны. Тогда проекции вектора $\mathbf{OP}$ на оси наибольшей и наименьшей скорости пластинок 1 и 2 определяются соответственно как

$$\begin{aligned} OU_1 &= E \cos \psi_1; & OU_2 &= E \cos \psi_2; \\ OV_1 &= E \sin \psi_1; & OV_2 &= E \sin \psi_2. \end{aligned}$$

Для простоты будем считать, что компоненты OU в обеих пластинках распространяются без фазового сдвига. Фаза компоненты вектора $\mathbf{E}$ по оси наименьшей скорости на выходе таких поляризационных пластинок сдвигается на величину

$$\delta = k(n_0 d_0 - n_e d_e),$$

где n_0 , n_e — коэффициенты преломления обыкновенного (быстрого) и необыкновенного (медленного) лучей; d_0 , d_e — длины путей обыкновенного и необыкновенного лучей, равные в параксиальном приближении толщине пластинок — d . Отсюда для компонент электрического поля на выходе эллиптически поляризованных световых волн имеем

$$\begin{aligned} OU'_1 &= OU_1 = E \cos \psi_1; \\ OV'_1 &= OV_1 \cos(\pi - \delta) = -E \sin \psi_1 \cos \delta; \\ OU'_2 &= OU_2 = E \cos \psi_2; \\ OV'_2 &= OV_2 \cos(\pi - \delta) = -E \sin \psi_2 \cos \delta. \end{aligned}$$

Далее, вычисляя проекции компонент OV'_1 , OV'_2 , OU'_1 и OU'_2 на ось пропускания AA' анализатора A с учетом $\psi_1 = \psi$ и $\psi_2 = \gamma - \psi$, находим аналитические выражения для амплитуды колебаний линейно поляризованной световой волны на выходе амплитудно-фазовых фильтров Кастлера:

$$OA_1 = -(OU'_1 \sin \psi_1 + OV'_1 \cos \psi_1) = -E \sin 2\psi \sin^2 \frac{\delta}{2};$$

$$OA_2 = OU'_2 \sin \psi_2 + OV'_2 \cos \psi_2 = E \cos 2\psi \sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

Определяя функцию прозрачности фильтров Кастлера как отношение амплитуды OA прошедшей световой волны к амплитуде E падающей на него волны, находим, что

$$H(K_{x,y}) = \frac{1}{2} \cos 2\psi_1 \sin^2 \frac{\delta}{2} [(1 - \operatorname{tg} 2\psi_1) + (1 + \operatorname{tg} 2\psi_1) \operatorname{sgn}(K_{x,y})] =$$

$$= \begin{cases} \cos 2\psi \sin^2 \frac{\delta}{2}, & K_{x,y} \geq 0; \\ -\sin 2\psi \sin^2 \frac{\delta}{2}, & K_{x,y} < 0; \end{cases} = \cos 2\psi \sin^2 \frac{\delta}{2} \begin{cases} 1, & K_{x,y} \geq 0; \\ -\operatorname{tg} 2\psi, & K_{x,y} < 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

для случая, когда $|\psi_1| = |\psi| \leq \frac{\pi}{8}$, и

$$H(K_{x,y}) = \frac{1}{2} \cos 2\psi_2 \sin^2 \frac{\delta}{2} [(1 - \operatorname{tg} 2\psi_2) + (1 + \operatorname{tg} 2\psi_1) \operatorname{sgn}(K_{x,y})] =$$

$$= \begin{cases} \cos 2\psi_2 \sin^2 \frac{\delta}{2}, & K_{x,y} \geq 0; \\ -\sin 2\psi_2 \sin^2 \frac{\delta}{2}, & K_{x,y} < 0; \end{cases} = -\sin 2\psi \sin^2 \frac{\delta}{2} \begin{cases} -\operatorname{ctg} 2\psi, & K_{x,y} \geq 0; \\ 1, & K_{x,y} < 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

в ситуации, когда $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{8} \leq \psi \leq \frac{3\pi}{8}$, т.е. $|\psi_2| \leq \frac{\pi}{8}$.

Нетрудно заметить, что полученные выражения (3.8) и (3.9) с точностью до множителя $\frac{1}{2} \cos 2\psi_i \sin^2 \frac{\delta}{2}$ совпадают с выражениями (3.4)–(3.7) для функции прозрачности амплитудно-фазовых ножей,

коэффициенты пропускания T_i и фазовые сдвиги θ_i которых соответственно равны ($i = 1, 2$):

$$T_i = |\operatorname{tg} 2\psi_i|, \quad |\psi_i| \leq \frac{\pi}{8};$$

$$\theta_1 = \begin{cases} 0, & -\frac{\pi}{8} \leq \psi \leq 0, & 0 \leq \psi_1 \leq \frac{\pi}{8}; \\ \pi, & 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{8}, & 0 \leq \psi_1 \leq \frac{\pi}{8}; \end{cases}$$

$$\theta_2 = \begin{cases} \pi, & \frac{\pi}{8} \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}, & -\frac{\pi}{8} \leq \psi_2 \leq 0; \\ 0, & \frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{3\pi}{8}, & 0 \leq \psi_2 \leq \frac{\pi}{8}. \end{cases}$$

В первом случае, т.е. в случае изменения угла ψ между осью пропускания PP' поляроида и оптической осью F_1F_1' двулучепреломляющей пластинки 1 (либо 2) в пределах от $-\pi/8$ до $\pi/8$, такой амплитудно-фазовый фильтр расположен в отрицательной частотной полуплоскости, а в случае изменения далее в пределах от $\pi/8$ до $3\pi/8$, наоборот, — в положительной частотной полуплоскости. При этом коэффициенты пропускания этих фильтров по мере увеличения угла ψ в указанных выше пределах варьируются от 1 до 0 по «модульному» закону.

Таким образом, проведенный анализ принципа действия поляризационных амплитудно-фазовых фильтров Кастлера показывает, что применение их в качестве фильтрующих масок 9 и 10 в оптическом функциональном преобразователе позволяет в конечном итоге сравнительно просто регулировать весовые коэффициенты α и β в пределах ($0 < \alpha < 2$) и ($1 > \beta > 0$), т.е. позволяет выполнять изотропное преобразование Фуко–Гильберта с регулируемыми параметрами α и β .

При использовании полуволновых амплитудно-фазовых ножей, а также чисто амплитудных «ножей Фуко» появляется возможность реализации некогерентного изотропного преобразования Фуко–Гильберта. Однако это достигается только при обработке амплитудных изображений, что является существенным ограничивающим обстоятельством. При прохождении света через среду с изменяющейся фазовой оптической плотностью возникают фазовые искажения световой волны, которые могут рассматриваться как фазовый шум.

Представим функцию исследуемой среды в виде

$$s(x, y) = T(x, y) \exp[j\mu\phi(x, y)] \approx T(x, y) + j\mu\phi(x, y),$$

где $T(x, y)$ – распределение амплитудного коэффициента пропускания; $\mu\phi(x, y)$ – распределение случайных фазовых искажений прошедшей световой волны с малым индексом модуляции, $\mu \ll 1$.

В этом случае результирующий выходной сигнал оптической системы (см. рис. 3.1) можно представить с точностью до первого порядка малости в следующем виде:

$$I(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0,25 \cdot \Gamma^2 A \left\{ \alpha T^2(\tilde{x}, \tilde{y}) + \beta G_V^2 [T(\tilde{x}, \tilde{y})] \pm \right. \\ \left. \pm \mu \sqrt{\alpha \beta} T(\tilde{x}, \tilde{y}) [G_x[\phi(\tilde{x}, \tilde{y})] + G_y[\phi(\tilde{x}, \tilde{y})]] \right\}.$$

Таким образом, наличие даже незначительного фазового шума в рассмотренных функциональных преобразователях при обработке чисто амплитудных изображений приводит к появлению в выходном изображении аддитивных помех.

Аналогично можно оценить влияние фазового дефекта полуволновых фазовых фильтров при применении их в качестве основных элементов *10* и *11* в рассмотренной оптической системе (см. рис. 3.1). Эти недостатки устраняются в рассматриваемых ниже одноканальных схемах.

Первая из них приведена на рис. 3.3. Устройство содержит: лазер *1*; микрообъектив *2*; поляризационный светоделительный кубик *3*; поляризационные четвертьволновые фазовые пластинки *4*, *5*; цилиндрические зеркала *6*, *7*; коллективные линзы *8*, *8'*; движущееся матовое стекло *9*; проекционный объектив *10*; крестовидную диафрагму *11*; коллимирующий объектив *12*; объектив прямого фурье-преобразования *13*; квадрантный амплитудно-фазовый фильтр *14*; объектив обратного фурье-преобразования *15*. Совокупность элементов *1–11* в оптической системе в целом образует монохроматический пространственно некогерентный крестовидный источник, который работает следующим образом. Лазерный луч, плоскость поляризации которого ориентирована под углом в 45° к осям x и y , микрообъективом *2* направляется на поляризационный светоделительный кубик *3*, где расщепляется на два ортогонально поляризованных пучка света. Отраженная и прошедшая части светового потока, равные по мощности

и выходящие из смежных граней кубика 3, попадают на четвертьволновые поляризационные фазовые пластины 4 и 5, после прохождения которых превращаются в световые пучки с «правой» и «левой» круговой поляризацией. Идентичные по своим характеристикам ортогонально ориентированные цилиндрические зеркала 6 и 7 расположены за соответствующими поляризационными фазовыми пластинами 4 и 5 так, что радиус кривизны отражающей поверхности совпадает с радиусом кривизны волнового фронта светового пучка. Отраженные поля проходят снова четвертьволновые поляризационные фазовые пластинки 4, 5 и становятся линейно поляризованными. Заметим, что отраженное от зеркала 6 и прошедшее через фазовую пластинку 4 световое поле линейно поляризуется в вертикальной плоскости, проходит полностью (без расщепления) светоделительный кубик и на расстоянии, равном радиусу кривизны зеркала 6, вырождается в тонкую вертикальную светящуюся линию, сохраняя при этом вертикальную расходимость. Аналогично преобразуется световой поток, отраженный от цилиндрического зеркала 7, который, пройдя через фазовую пластинку 5, линейно поляризуется в горизонтальной плоскости, полностью отражается светоделительным кубиком 3 и на той же плоскости вырождается в тонкую горизонтальную светящуюся линию (сохраняя при этом горизонтальную расходимость). Движущееся матовое стекло 9, которое находится в данной плоскости крестовидного «изображения» точечного источника, изменяет случайным образом во времени фазовое соотношение волн. Пространственную когерентность такого протяженного источника, определяемую, например, за время экспозиции выходного изображения на фотоматериале, можно при этом считать равной нулю.

Получается полный аналог узкого монохроматического пространственно некогерентного источника света. Затем с помощью проекционного объектива 10 изображение креста, формируемое на матовом стекле 9, с коэффициентом увеличения, равным -1 , проецируется на крестовидную диафрагму 11, выполненную в виде скрещенных под прямым углом двух узких щелей. Заметим, что ширина светящихся линий креста и, следовательно, ширина щелей диафрагмы определяется в основном диском Эйри в фокальной плоскости микрообъектива 2. С целью увеличения КПД такого осветителя в нем используются дополнительные оптические элементы – коллективные линзы 8 и 8'. Пер-

вая из них, расположенная рядом с мелкозернистым матовым стеклом 9 и с фокусом, приблизительно равным радиусу кривизны цилиндрических зеркал 6 и 7, превращает расходящиеся в горизонтальной (вертикальной) плоскости световые потоки в пучки, сходящиеся на поверхности проекционного объектива. Аналогичную задачу выполняет и вторая коллективная линза 8', которая центральные лучи каждого элементарного точечного источника крестовидного осветителя направляет в центр коллимирующего объектива 12.

Рис. 3.3

Коллиматорная часть оптической системы, состоящая из рассмотренного осветителя и коллимирующего объектива 12, формирует пучок параллельных лучей от каждого элементарного точечного источника, на пути которых помещается входной транспарант с обрабатываемым изображением. Далее световой поток основным объективом 13 собирается в фокальной плоскости и создает дифракционную картину, являющуюся суперпозицией сдвинутых относительно друг друга пространственно частотных спектров входного сигнала, нулевые частоты которых соответствуют местам проектирования элементарных точечных источников крестовидного осветителя. Из этой дифракционной картины можно выбрать четыре основные составляющие, каждая из которых соответствует группе точечных источников, образующих «щелевой лепесток» крестовидного излучателя. Квадрантный фильтр 14 устанавливается в частотной плоскости рассматриваемой оптической системы так, что изображение щелей крестовидного излучателя совмещается с соответствующими краями квадрантов (т.е. изображение прямоугольного креста совмещается с осями, обра-

зующими эти квадранты). Использование такого квадрантного амплитудно-фазового фильтра в сочетании с крестовидным источником света удобно тем, что каждый из нечетных квадрантов фильтра с комплексным коэффициентом пропускания по амплитуде $-T \exp(j\theta)$ одновременно выполняет роль двух одномерных амплитудно-фазовых ножей, перекрывающих соответственно левую (правую) полуплоскость для одной половины вертикально расположенной щели и верхнюю (нижнюю) полуплоскость для половины горизонтально расположенной щели. Следовательно, верхняя, левая, нижняя и правая группы пространственно-частотных спектров входного сигнала на выходе такого квадрантного фильтра будут промодулированы функциями вида

$$\begin{aligned} H_1(K_x, K_y) &= \frac{1}{2} \{ [1 + T \exp(j\theta)] - [1 - T \exp(j\theta)] \operatorname{sgn} K_x \}; \\ H_2(K_x, K_y) &= \frac{1}{2} \{ [1 + T \exp(j\theta)] + [1 - T \exp(j\theta)] \operatorname{sgn} K_y \}; \\ H_3(K_x, K_y) &= \frac{1}{2} \{ [1 + T \exp(j\theta)] + [1 - T \exp(j\theta)] \operatorname{sgn} K_x \}; \\ H_4(K_x, K_y) &= \frac{1}{2} \{ [1 + T \exp(j\theta)] - [1 - T \exp(j\theta)] \operatorname{sgn} K_y \}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где T – амплитудный коэффициент пропускания нечетных квадрантов фильтра 14; θ – относительный фазовый сдвиг лучей, прошедших нечетные и четные квадранты фильтра 14 соответственно. Распределение интенсивности света, формируемое восстанавливающим фурье-объективом 15 в выходной плоскости системы, в силу пространственной некогерентности крестовидного источника света можно представить с учетом (3.10) в виде

$$\begin{aligned} I(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \Gamma^2 A \left\{ \left(\frac{1+T^2}{2} + T \cos \theta \right) |s(\tilde{x}, \tilde{y})|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1+T^2}{2} - T \cos \theta \right) |G_{\nabla}(\tilde{x}, \tilde{y})|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Результирующий выходной сигнал функционального преобразователя с точностью до постоянного множителя $\Gamma^2 A$ представляет собой некогерентное изотропное преобразование Фуко–Гильберта функции $s(\tilde{x}, \tilde{y})$ с весовыми коэффициентами

$$\alpha = \frac{1+T^2}{2} + T \cos \theta, \quad \beta = \frac{1+T^2}{4} - \frac{T}{2} \cos \theta. \quad (3.11)$$

Добавочные члены первого порядка отсутствуют, и тем самым обеспечивается более высокая точность реализации некогерентного изотропного преобразования Фуко–Гильберта даже при наличии фазовых шумов в оптической системе. Следовательно, в таком одноканальном функциональном преобразователе полностью устраняются указанные выше принципиальные недостатки двухканальных оптических систем. Следует отметить, что в случае применения «чистой» полуволновой квадрантной фазовой пластинки (применяемой, например, в качестве пространственно-частотного фильтра при реализации двумерного преобразования Гильберта с точечным источником света [1,29]) выходной сигнал представляет собой «чисто» изотропный гильберт-образ входного сигнала

$$\begin{aligned} I(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \Gamma^2 A \left\{ \left(\frac{1+1}{2} + \cos \pi \right) |s(\tilde{x}, \tilde{y})|^2 + \left(\frac{1+1}{4} - \frac{\cos \pi}{2} \right) |G_V(\tilde{x}, \tilde{y})|^2 \right\} = \\ &= \Gamma^2 A |G_V(\tilde{x}, \tilde{y})|^2. \end{aligned}$$

В случае, когда фазовый сдвиг θ квадрантного ножа кратен π , наличие поглощения приводит к изотропному преобразованию Фуко–Гильберта с коэффициентами α и β , равными

$$\alpha = \frac{1+T^2}{2} + T = \frac{(1+T)^2}{2}; \quad \beta = \frac{1+T^2}{4} - \frac{T}{2} = \frac{(1-T)^2}{4} \quad \text{для } \theta = 0,$$

$$\alpha = \frac{1+T^2}{2} - T = \frac{(1-T)^2}{2}; \quad \beta = \frac{1+T^2}{4} + \frac{T}{2} = \frac{(1+T)^2}{4} \quad \text{для } \theta = \pi.$$

Меняя коэффициент пропускания T квадрантных ножей в пределах от 1 до 0, можно регулировать коэффициенты α и β . Применение для этих целей поляризационной фазовой пластинки Кастлера в квадрант-

ной конфигурации связано с трудностями ее изготовления. Поэтому рассмотрим более простой способ регулирования коэффициентов α и β . Пусть поглощение в квадрантном фильтре отсутствует, т.е. $T = 1$, а фазовый θ сдвиг принимает произвольные значения. Подставляя эти значения в (3.11), получаем для коэффициентов α и β

$$\alpha = 1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) = \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Таким образом, меняя фазовый сдвиг θ квадрантного фильтра 16, например, в пределах от $2n\pi$ до $(2n+1)\pi$, весовые коэффициенты α и β можно варьировать в интервалах $\{2,0\}$ и $\{0,1\}$ соответственно. Такая регулировка фазового сдвига θ сравнительно просто реализуется при применении в данной схеме лазера 1 с перестраиваемой длиной. Действительно, подбирая разность оптических толщин нечетных и четных квадрантов такой фазовой пластинки, кратную длине волны «красного» света, например, $\lambda_r = 0,6328$ мкм, и уменьшая рабочую длину волны излучения лазера от λ_r до $\lambda_b = 0,422$ мкм, можно изменять фазовый сдвиг θ в указанном выше интервале (т.е. $2\pi \leq \theta \leq 3\pi$):

$$\theta = \frac{2\pi n_{\text{ср}}(d_n - d_e)}{\lambda} = 2\pi \frac{\lambda_r}{\lambda},$$

где d_n – толщина пластинки в нечетных квадрантах фазового фильтра; d_e – толщина пластинки в четных квадрантах; $n_{\text{ср}}$ – средний коэффициент преломления диэлектрической пластинки, равный без учета ее дисперсионной характеристики приблизительно n_λ .

С целью устранения помех, возникающих вследствие воздействия квадрантного фильтра на фурье-спектр сигнала в малой окрестности нулевой пространственной частоты, центральная зона крестовидного источника перекрывается непрозрачным экраном.

В одноканальной схеме, приведенной на рис. 3.4, в качестве протяженного некогерентного излучателя используется кольцевой источник, а пространственно-частотный фильтр выполнен в виде коаксиальной составной амплитудно-фазовой пластинки, у которой центральный (дисковый) участок по отношению к внешнему (кольцевому) участку имеет относительный коэффициент пропускания (по амплитуде), равный $T_{\text{exp}}(j\theta)$. Одноканальная схема с кольцевым

источником света в сочетании с коаксиальным составным амплитудно-фазовым фильтром (как и схема с крестовидным источником в сочетании с квадрантным фильтром) реализует изотропное преобразование Фуко–Гильберта над входной функцией более общего вида с полной компенсацией аддитивных помех и весовыми коэффициентами α и β , связанными с параметрами фильтра T и θ соотношениями (3.11).

Рис. 3.4

Принципиальное отличие между этими схемами состоит в том, что при вычислении второго слагаемого изотропного преобразования Фуко–Гильберта в случае применения кольцевого источника осуществляется дополнительная обработка – усреднение изотропного гильберт-образа входного сигнала по углу в пределах $(0 \leq \varphi \leq \pi/2)$ и тем самым обеспечивается еще большая изотропность в целом. Кроме того, данная схема выгодно отличается от первой тем, что в ней на базе поляризационной фазовой пластинки Кастлера конструктивно просто реализуется амплитудно-фазовый фильтр с управляемым коэффициентом пропускания T , сопряженный с кольцевым источником света. Составная пластина L в таком фильтре состоит из центральной двулучепреломляющей пластины круглой формы, вокруг которой расположена вторая, идентичная по толщине двулучепреломляющая пластина; одноименные оси (наибольшей или наименьшей скорости) пластинок ориентированы под углом γ относительно друг друга (см. рис. 3.2, б). В случае, когда угол между одноименными осями равен 45° , меняя ори-

ентацию осей пропускания поляризатора P и анализатора A на одинаковый угол ψ , можно регулировать коэффициент пропускания T и фазовый сдвиг θ центрального участка фильтра:

$$T = |\operatorname{tg}(2\psi)|; \quad \theta = \begin{cases} 0, & -\gamma/2 = -\pi/8 \leq \psi \leq 0; \\ \pi, & 0 \leq \psi \leq \pi/8 = \gamma/2, \end{cases} \quad (3.12)$$

где ψ – угол между осью пропускания поляроида P и осью наибольшей скорости двулучепреломляющей пластины, перекрывающей центральный участок составной пластины L . Из выражений (3.11), (3.12) видно, что при изменении ψ в интервале от $-\pi/8$ до $+\pi/8$ весовые коэффициенты α и β меняются в противоположных направлениях в пределах ($2 \geq \alpha \geq 0$) и ($0 \leq \beta \leq 1$) соответственно.

Оба параметра поляризационного амплитудно-фазового фильтра – относительный коэффициент пропускания T и относительный фазовый сдвиг θ – не зависят от длины волны источника света. Следовательно, данный фильтр – ахроматический. В результате появляется возможность сочетания этих фильтров с источниками белого света соответствующей формы в устройствах изотропного преобразования Гильберта и Фуко–Гильберта. Полихроматичность источника света сказывается только на общем амплитудном коэффициенте пропускания T_Σ такого фильтра, поскольку

$$T_\Sigma = \sin^2 \frac{\delta}{2} \sin(2\gamma - 2\psi) = \sin^2 \frac{\delta}{2} \cos 2\psi,$$

где $\delta = k_i(n_o - n_e)d$ – разность фаз обыкновенного и необыкновенного лучей света, получаемая на выходе двулучепреломляющей составной пластинки L .

Более рациональное использование мощности излучения источника белого света достигается в случае, когда пластина L по оптической толщине согласована со средней длиной волны $\lambda_{\text{ср}}$ видимого участка спектра излучения так, что разность фаз $\delta_{\text{ср}}$ при этом равнялась бы π . Тогда общий коэффициент пропускания поляризационной пластины Кастлера для граничных участков и среднего участка видимой области спектра соответственно принимает следующие значения:

$$T_b = \sin^2 \frac{\delta_b}{2} \cos 2\psi = \sin^2 \frac{1,3\pi}{2} \cos 2\psi = 0,8 \cos 2\psi, \quad \lambda_b = 0,4 \text{ мкм};$$

$$T_g = \sin^2 \frac{\delta_g}{2} \cos 2\psi = \sin^2 \frac{\pi}{2} \cos 2\psi = \cos 2\psi, \quad \lambda_g = 0,52 \text{ мкм};$$

$$T_r = \sin^2 \frac{\delta_r}{2} \cos 2\psi = \sin^2 \frac{0,748\pi}{2} \cos 2\psi = 0,84 \cos 2\psi, \quad \lambda_r = 0,7 \text{ мкм}.$$

Пусть в составной пластине L одноименные оси двулучепреломляющих компонент развернуты на угол $\gamma = 90^\circ$. Поскольку ось пропускания поляризатора P ориентирована вдоль направления биссектрисы угла, $\psi = \gamma/2 = 45^\circ$, получаем, что общий коэффициент T_Σ для средней длины волны $\lambda_{\text{ср}}$ источника света равен

$$T_\Sigma = \sin(2\gamma - 2\psi) = \sin 2\gamma = \sin \pi/2 = 1.$$

Таким образом, реализуется чистое преобразование Гильберта с повышенным коэффициентом пропускания фазового фильтра Кастлера.

3.2. РЕАЛИЗАЦИЯ ОПТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОРОВ, ВЫПОЛНЯЮЩИХ ИЗОТРОПНОЕ И ОДНОМЕРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА И ФУКО–ГИЛЬБЕРТА С КРЕСТОВИДНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ СВЕТА

Двухканальная схема рассмотренного в разделе 3.1 оптического функционального преобразователя, «вычисляющего» изотропные преобразования Гильберта и Фуко–Гильберта, реализована с использованием крестовидного источника белого света и ахроматических амплитудно-фазовых ножей Кастлера. Принципиальная схема устройства приведена на рис. 3.5.

Крестовидный источник поляризованного света выполнен по двухканальной схеме и состоит из двух ламп накаливания I и I' с нитевидной спиралью 50 Вт; конденсорных объективов 2 и $2'$, собранных на базе включенных встречно двух фотообъективов «Индустар - 50», проектирующих соответствующие изображения нитевидных спиралей на плоскость щелевых диафрагм 4 и $4'$; поляризационных фильтров 3 и $3'$ и светоделительного кубика 5 . В качестве диафрагм 4 и $4'$ использовались спектральные щели с регулируемой шириной щели от 0 до 0,4 мм;

Рис. 3.5

Световые потоки, идущие через вертикально и горизонтально расположенные щелевые диафрагмы 4 и 4', линейно поляризованы в ортогональных плоскостях, согласованных со щелями. Светоделительный кубик 5 эти потоки рекомбинирует в направлении коллимирующего объектива 6.

Двухканальный поляризационный пространственно-частотный фильтр выполнен на основе фазовой пластины Кастлера. В режиме чистого преобразования Гильберта оси пропускания поляроидов P и P' ориентированы вдоль осей пропускания и «отражения» поляризационного светоделительного кубика 9, а оси пропускания анализаторов A и A' ориентированы вдоль осей «отражения» и пропускания поляризационного кубика 9'. Поэтому автоматически отпадает необходимость использовать полуволновые поляризационные фазовые пластинки 12 и 12' в первом и во втором каналах такого двухканального пространственно-частотного фильтра. С другой стороны, когда реализуются общие преобразования Фуко–Гильберта с регулируемыми коэффициентами α и β , оси пропускания поляроидов P , P' и анализаторов A , A' ориентируются относительно осей пропускания и «отражения» поляризационных кубиков 9 и 11 под определенным углом ψ (см. рис. 3.1). При этом в общем коэффициенте пропускания амплитудно-фазовых ножей Кастлера появляются дополнительные множители, пропорциональные $\cos^2 \psi$. Чтобы исключить влияние этих явлений на общий коэффициент пропускания ножей, в оба канала двухканального узла пространственно-частотного фильтра можно ввести по два компенсатора угла поворота осей пропускания и отражения светоделительных кубиков 9 и 9', выполненных в виде полуволновой поляризационной

фазовой пластинки 12, 13 и 12', 13'. Пластинки 12 и 12' помещаются между светоделительным кубиком 9 и поляроидами P и P' в первом и во втором каналах соответственно, а пластинки 13 и 13' – между соответствующими анализаторами A , A' и светоделительным кубиком 9'. В случае, когда оптические оси (главные сечения) пластинок 12 и 12' ориентированы под углом $(+\psi/2)$ относительно осей пропускания поляризаторов P и P' соответственно, а оптические оси пластинок 13 и 13' – под углом $(-\psi/2)$ относительно осей пропускания анализаторов A и A' , плоскости поляризации световых потоков в первом и во втором каналах дополнительно поворачиваются на угол ψ .

Примеры выполнения операции «выделения контуров» силуэтных объектов с помощью такого двухканального устройства при настройке его на моделирование чистого преобразования Гильберта показаны на рис. 3.6. Здесь a и b – результаты одномерного преобразования Гильберта вдоль горизонтальной и вертикальной осей x и y , получаемых при перекрытии одной ветви в двухканальном крестовидном осветителе, $в$ – результат изотропного преобразования Гильберта силуэтного объекта. Следует отметить, что операция «выделения контуров» осуществляется одиночными контурными линиями. При изотропном преобразовании исчезают «слепые участки». Наличие некоторого фона, в особенности на периферийных участках «поля зрения» данного устройства, обусловлено, во-первых, хроматической аберрацией основного объектива, приводящей к различным расфокусировкам частотных

Рис. 3.6

плоскостей системы для разных длин волн полихроматического источника света, во-вторых, фазовыми шумами оптических элементов системы, в особенности светоделительных кубиков 9 и 9'.

Двухканальное устройство было апробировано в качестве теневого прибора при визуализации фазовых неоднородностей. Так на рис. 1, *а* (цветная вклейка) и *б* приведены слайды цветных тенеграмм оптической неоднородности стеклянной подложки, полученные при настройке устройства на одномерное преобразование Фуко-Гильберта и при настройке в режим изотропного преобразования Гильберта.

Тенеграмма теплого восходящего потока от нагреваемой спирали, полученная также при изотропном преобразовании Гильберта, показана на рис. 1, *в*.

Одноканальный вариант оптического функционального преобразователя, моделирующего изотропные преобразования Гильберта и Фуко-Гильберта, реализован по схеме, показанной на рис. 3.3. Он основан на сочетании крестовидного монохроматического источника и квадрантного пространственно-частотного фильтра. Несмотря на ограничения, присущие данной схеме, она была выбрана из-за простоты и универсальности, позволяющей при необходимости выполнять одномерные преобразования Гильберта, Фуко-Гильберта. Принималось во внимание и то, что такая схема при определенных модификациях позволяет одновременно получать на регистрирующем элементе (экране) два изображения, каждое из которых является результатом одномерного «преобразования Фуко-Гильберта» при положении ножа Фуко в отрицательной и положительной частотной полуплоскости соответственно.

Такая операция бывает необходима при обработке амплитудно-фазовых, а также чисто фазовых объектов с целью получения достоверной информации о фазовом распределении исследуемой оптической неоднородности.

На рис. 3.7 приведены экспериментальные результаты по оконтуриванию силуэтных объектов методами одномерного (*а, б, в, г*) и изотропного преобразования Гильберта (*д*), а также результат изотропного преобразования Фуко-Гильберта при использовании в устройстве квадрантного амплитудного ножа Фуко (*е*). На рис. 3.7, *а, б* показаны результаты одномерного преобразования Гильберта вдоль оси *y* на основе сочетания горизонтального щелевого монохроматического источника

Рис. 3.7

света и поляризационной фазовой пластинки Кастлера, полученные при разных временах экспозиции фотопленки: *а* – в режиме переэкспонирования и *б* – в нормальном режиме. На первой из этих фотографий отчетливо виден «логарифмический закон» изменения распределения освещенности на выходном экране, присущий системам, реализующим фильтрацию Гильберта. В частности, для четырех круглых силуэтных объектов с функцией прозрачности

$$s_i(x, y) = \text{rect}(y - y_i) / D'_i,$$

где $D'_i = 2\sqrt{D_{i0}^2/4 - (x - x_i)^2}$; D_{i0} – диаметр i -го круга, распределение освещенности на выходной плоскости устройства описывается в первом приближении как

$$I_y(x, y) = \left[\frac{\tilde{E}}{\pi} \int_{y-y_i-D_i/2}^{y-y_i+D_i/2} \frac{s(x, y')}{y-y'} dy' \right]^2 = \frac{\tilde{E}^2}{\pi^2} \ln^2 \left| \frac{y-y_i+D_i/2}{y-y_i-D_i/2} \right|.$$

Далее на рис. 3.7, в, г приведены результаты одномерных преобразований Гильберта вдоль осей x и y в случае применения в устройстве квадрантной полуволновой фазовой пластинки, выполненной из халькогенидных материалов.

На рис. 3.8 показаны теннеграммы, полученные при визуализации искажений сферической волны, обусловленных сферическими aberrациями объектива «Индустар-37» ($F = 300$ мм; $F/D = 4,5$) в режиме переноса изображения крестовидного источника света данным объективом на частотную плоскость оптической системы с коэффициентом увеличения $m = -1$.

Верхний ряд теннеграмм соответствует положению пространственных фильтров в плоскости пересечения периферийных (крайних) лучей, идущих от «выходного зрачка» объектива, а второй ряд – в плоскости

Рис. 3.8

пересечения параксиальных (центральных) лучей. Первые два снимка в верхнем ряду (рис. 3.8, *а*, *б*) получены при моделировании с помощью данного устройства одномерных преобразований Фуко и Фуко–Гильберта на основе сочетания щелевого источника света с обычным ножом Фуко, а также с квадрантным амплитудным ножом.

В отличие от рис. 3.8, *б* (в верхнем ряду) второй снимок во втором ряду (рис. 3.8, *б'*) соответствует уже результату изотропного преобразования Фуко–Гильберта, полученного в сочетании крестовидного источника света с квадрантным амплитудным ножом. Сопоставление этих фотоснимков показывает, что при преобразованиях Фуко–Гильберта видна более тонкая структура визуализируемой «производной» от функции выходного зрачка исследуемого объектива; тенеграмма симметричного фазового объектива симметрична (без «перекосов»). Положение центра темных полос соответствует положению участка исследуемого волнового фронта, в котором оптическая разность хода лучей равна целому числу волн, т.е. $\delta\varphi = 2n\pi$, ($n = 0, 1, 2, \dots$). Следующие две фотографии на рис. 3.8, *в*, *г* и 3.8, *в'*, *г'* получены в результате одномерного и изотропного преобразований Гильберта на основе сочетания в данном устройстве щелевого и крестовидного монохроматического источника света с квадрантной полуволновой пластинкой, выполненной на базе халькогенидных материалов. Эти тенеграммы выгодно отличаются от тенеграмм на предыдущих снимках более высоким контрастом из-за отсутствия постоянного фона в поле наблюдения фазового объекта. При изотропном преобразовании Гильберта исчезают «слепые» участки. Некоторые нарушения изотропности визуализируемых картин, полученных в области больших фазовых искажений (центральный участок тенеграммы, приведенной на рис. 3.8, *г*, а также периферийные участки тенеграммы (рис. 3.8, *г'*) объясняются следующим. В случае малых фазовых искажений функция пропускания исследуемой оптической неоднородности представлена в виде суммы только двух функций

$$s(x, y) = \exp[j\varphi(x, y)] \approx 1 + j\varphi(x, y).$$

В частности, на рис. 3.8, *а''* – 3.8, *г''* (нижний ряд тенеграмм) приведены результаты визуализации малых фазовых искажений (сферические аберрации объектива «Индустар-37» в центральной зоне $F/D = 8$), полученные при использовании упомянутых выше визуализирующих

пространственных фильтров и осветителей. Анализ приведенных выше тенеграм и выражений показывает, что при сравнительно больших искажениях волнового фронта, помещая визуализирующую маску в нескольких «расфокусированных» частотных плоскостях оптической системы, можно получить семейство гильберт-тенеграм, на каждой из которых относительные зоны малых фазовых искажений визуализируются изотропно и дополняют друг друга. С этой целью в работе [22] было предложено устройство, позволяющее одновременно получать две такие тенеграммы. В нем используется принцип поляризационного кодирования. От рассмотренной выше схемы (см. рис. 3.3) оно отличается тем, что в нем перед визуализирующей маской помещается поляризационная бифокальная линза, а результаты обработки с помощью поляризационного светоделительного кубика пространственно разделяются и регистрируются одновременно на разных участках фотопленки.

Трудности получения малых ошибок визуализации, возникающие при контроле фазовых объектов с большим индексом модуляции, автоматически устраняются при моделировании вычисления производных 1-го порядка (градиента). В этом случае результат обработки функции фазового объекта $s(x, y) = \exp [j \varphi(x, y)]$ определяется как

$$\begin{aligned} |\nabla s(x, y)|^2 &= \left| \frac{\partial}{\partial x} \exp [j \varphi(x, y)] \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial y} \exp [j \varphi(x, y)] \right|^2 = \\ &= |j \varphi'_x(x, y) \exp [j \varphi(x, y)]|^2 + |j \varphi'_y(x, y) \exp [j \varphi(x, y)]|^2 = \\ &= |\varphi'_x(x, y)|^2 + |\varphi'_y(x, y)|^2 = |\nabla \varphi(x, y)|^2. \end{aligned}$$

Техническая реализация таких устройств связана с определенными трудностями, возникающими при изготовлении амплитудных масок с большим динамическим диапазоном. Кроме того, операции вычисления градиента и преобразования Гильберта «неудобны» при обработке амплитудно-модулированных фазовых объектов, описываемых функцией вида $s(x, y) = T(x, y) \exp [j \varphi(x, y)]$, так как результаты преобразований при этом соответственно равны

$$|\nabla s(x, y)|^2 = |T'_x(x, y) \exp [j \varphi(x, y)] + j T(x, y) \varphi'_x(x, y) \exp [j \varphi(x, y)]|^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left| T'_y(x, y) \exp[j\varphi(x, y)] + jT(x, y) \varphi'_y(x, y) \exp[j\varphi(x, y)] \right|^2 = \\
& = [T'_x(x, y)]^2 + [T'_y(x, y)]^2 + T^2(x, y) \left\{ [\varphi'_x(x, y)]^2 + [\varphi'_y(x, y)]^2 \right\} = \\
& = [\nabla T(x, y)]^2 + T^2(x, y) [\nabla \varphi(x, y)]^2; \\
& |G_{x,y}[s(x, y)]|^2 = |G_{x,y}[T(x, y)] + jG_{x,y}[T(x, y)\varphi(x, y)] - \dots|^2.
\end{aligned}$$

При расшифровке таких тенеграмм требуется знание $T(x, y)$, а также $|\nabla T(x, y)|^2$ и $G_{x,y}[T(x, y)]$.

3.3. РЕКОНСТРУКЦИЯ ФУНКЦИИ ПРОЗРАЧНОСТИ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫХ ОБЪЕКТОВ ПО ДВУМ КОМПЛЕМЕНТАРНЫМ ТЕНЕГРАММАМ ФУКО–ГИЛЬБЕРТА

Предложенный в 1935 г. Цернике метод фазового контраста позволяет получать изображения объектов, имеющих высокую прозрачность, например живых клеток [30]. В работе [31] представлена итерационная процедура реконструкции фазы по изображениям, получаемым в оптическом микроскопе методом фазового контраста. Однако не все фазовые объекты, наблюдаемые в фазовый микроскоп, визуализируются без искажений. Изображения без искажений получают только для тех объектов, фурье-спектр которых локализуется в области высоких пространственных частот. Низкочастотная часть фурье-спектра является причиной появления «галов» на картине отфильтрованного изображения, а также других ложных структур, не существующих в реальном объекте [1].

В работах [32, 33] рассмотрена задача нахождения распределения амплитуды $T(x, y_0)$ и фазы $\varphi(x, y_0)$ функции прозрачности оптической неоднородности по двум тенеграммам, получаемым при использовании точечного когерентного источника света в сочетании с визуализирующим фильтром в виде полуплоскости с выемкой, пропускающей нулевые пространственные частоты спектра исследуемого амплитудно-фазового объекта. Итеративный алгоритм обработки тенеграмм, получаемых по этой схеме, сравнительно прост и сводится к решению систе-

мы линейных уравнений. Однако применение такой визуализирующей теневой схемы связано со снижением чувствительности теневого прибора и появлением в выходном сигнале «когерентного» шума.

С целью устранения этих недостатков развит метод реконструкции функции прозрачности амплитудно-фазовых объектов по тенеграммам, получаемым с использованием сочетания узкого щелевого источника света и однополосных пространственно-частотных фильтров, локализованных соответственно в отрицательной и положительной частотных полупространствах [34–37]. Амплитудное распределение $T(x, y_0)$ находится посредством измерения распределения освещенности в выходной плоскости теневого прибора при отсутствии визуализирующего ножа Фуко. Распределение интенсивности света на тенеграммах в данном случае соответствует одномерному преобразованию Фуко при положении ножа в отрицательной и положительной частотной полуплоскости и описывается соответственно выражениями

$$\begin{aligned} I_{>}(x, y_0) &= R_{>}^2(x, y_0) + J_{>}^2(x, y_0), \\ I_{<}(x, y_0) &= R_{<}^2(x, y_0) + J_{<}^2(x, y_0). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь $R_{>}(x, y_0)$, $R_{<}(x, y_0)$ – реальные части комплексной амплитуды волнового фронта

$$\begin{aligned} s(x, y_0) &= T(x, y_0) \exp[j\varphi(x, y_0)] = R(x, y_0) + jJ(x, y_0) = \\ &= T(x, y_0) [\cos \varphi(x, y_0) + j \sin \varphi(x, y_0)], \end{aligned} \quad (3.14)$$

в каждой из которых отсутствуют составляющие спектра Фурье в области отрицательных и положительных пространственных частот соответственно; $J_{>}(x, y_0)$, $J_{<}(x, y_0)$ – мнимые части комплексной амплитуды $s(x, y_0)$, которые связаны с $R_{>}(x, y_0)$, $R_{<}(x, y_0)$ одномерным преобразованием Гильберта

$$\begin{aligned} J_{>}(x, y_0) &= G_x[R_{>}(x, y_0)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_{>}(x', y_0)}{x - x'} dx', \\ J_{<}(x, y_0) &= -G_x[R_{<}(x, y_0)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_{<}(x', y_0)}{x - x'} dx'. \end{aligned}$$

Из (3.14) следует, что функция $\varphi(x, y_0)$ амплитудно-фазового объекта является аналитическим сигналом и может быть легко найдена, если известны гильберт-сопряженные $R(x, y_0)$ и $J(x, y_0)$:

$$\varphi(x, y_0) = \arctg \left[\frac{J(x, y_0)}{R(x, y_0)} \right] = \arctg \left[\frac{J_{>}(x, y_0) + J_{<}(x, y_0)}{R_{>}(x, y_0) + R_{<}(x, y_0)} \right]. \quad (3.15)$$

Задача определения $R_{>}(x, y_0)$, $R_{<}(x, y_0)$, $J_{>}(x, y_0)$ и $J_{<}(x, y_0)$ по двум тенеграммам вида (3.13) сводится к задаче минимизации целевых функций $W_{>}(x, y_0)$ и $W_{<}(x, y_0)$:

$$W_{>}(x, y_0) = \sum_{i=1}^N \left[I_{>}(x_i, y_0) - R_{>}^2(x_i, y_0) - J_{>}^2(x_i, y_0) \right]^2;$$

$$W_{<}(x, y_0) = \sum_{i=1}^N \left[I_{<}(x_i, y_0) - R_{<}^2(x_i, y_0) - J_{<}^2(x_i, y_0) \right]^2,$$

т.е. к нелинейной задаче нахождения $k + 1$ -й аппроксимации $R_{>}(x, y_0)$ и $J_{<}(x, y_0)$ по итерационному методу решения задач о наименьших квадратах [38]:

$$\begin{aligned} R_{>}^{(k+1)}(x, y_0) &= R_{>}^{(k)}(x, y_0) + \alpha^{(k)} M^{-1}(R_{>}) V_{R_{>}}(x, y_0); \\ J_{<}^{(k+1)}(x, y_0) &= J_{<}^{(k)}(x, y_0) + \beta^{(k)} M^{-1}(J_{<}) V_{J_{<}}(x, y_0); \\ J_{>}^{(k+1)}(x, y_0) &= G_x \left[R_{>}^{(k+1)}(x, y_0) \right]; \\ R_{<}^{(k+1)}(x, y_0) &= G_x \left[J_{<}^{(k+1)}(x, y_0) \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Здесь $M^{-1}(R_{>})$ и $M^{-1}(J_{<})$ – матрицы, представляющие собой k -ю аппроксимацию матриц, обратных матрицам вторых производных целевых функций $W_{>}(x, y_0)$ и $W_{<}(x, y_0)$, т.е. матрицам Гессе, где (i, j) элементы равны соответственно

$$\frac{\partial^2 W_{>}(x, y_0)}{\partial R_{>}(x_i, y_0) \partial R_{>}(x_j, y_0)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 W_{<}(x, y_0)}{\partial J_{<}(x_i, y_0) \partial J_{<}(x_j, y_0)};$$

$V_{R_>}(x, y_0)$ и $V_{J_<}(x, y_0)$ – k -е аппроксимации векторов первых производных от целевых функций:

$$V_{R_>}(x_i, y_0) = \frac{\partial W_>(x, y_0)}{\partial R_>(x_i, y_0)}, \quad V_{J_<}(x_i, y_0) = \frac{\partial W_<(x, y_0)}{\partial J_<(x_i, y_0)};$$

$\alpha^{(k)}$ и $\beta^{(k)}$ – числа, определяющие длину шага градиентного спуска.

Разработанный алгоритм определения фазового распределения искажений волнового фронта по измеренным распределениям интенсивности теневых изображений (3.13) содержит следующие операции.

Шаг 1. Начальное распределение фазы $\varphi^{(0)}(x, y_0)$ вычисляют как интеграл от нормированной разности двух интенсивностей $I_>(x, y_0)$ и $I_<(x, y_0)$, где нормировка осуществляется делением этой разности на распределение интенсивности $T^2(x, y_0)$ в изображении, получаемом без однополосной пространственно-частотной фильтрации.

Шаг 2. Определяют начальные аппроксимации

$$\begin{aligned} R_>^{(0)}(x, y_0) &= 0,5 \left\{ R^{(0)}(x, y_0) - G_x \left[J^{(0)}(x, y_0) \right] \right\}; \\ R_<^{(0)}(x, y_0) &= 0,5 \left\{ R^{(0)}(x, y_0) + G_x \left[J^{(0)}(x, y_0) \right] \right\}; \\ J_>^{(0)}(x, y_0) &= 0,5 \left\{ J^{(0)}(x, y_0) + G_x \left[R^{(0)}(x, y_0) \right] \right\}; \\ J_<^{(0)}(x, y_0) &= 0,5 \left\{ J^{(0)}(x, y_0) - G_x \left[R^{(0)}(x, y_0) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $R^{(0)}(x, y_0) = T(x, y_0) \cos \varphi^{(0)}(x, y_0)$; $J^{(0)}(x, y_0) = T(x, y_0) \sin \varphi^{(0)}(x, y_0)$.

При этом, изменяя коэффициент γ_m ($\tilde{\varphi}^{(0)}(x, y_0) = \gamma_m \varphi^{(0)}(x, y_0)$), минимизируют целевую функцию

$$\begin{aligned} \Xi(x, y_0) &= \sum_{i=1}^N \left\{ \left| I_>(x_i, y_0) - \left[R_>^{(0)}(x_i, y_0) \right]^2 - \left[J_>^{(0)}(x_i, y_0) \right]^2 \right| + \right. \\ &\quad \left. + \left| I_<(x_i, y_0) - \left[R_<^{(0)}(x_i, y_0) \right]^2 - \left[J_<^{(0)}(x_i, y_0) \right]^2 \right| \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Шаг 3. Посредством итерационной процедуры минимизируют целевые функции $W_>(x, y_0)$ и $W_<(x, y_0)$ и параметрам $R_>$, $R_<$, $J_>$ и $J_<$ согласно (3.16) приписывают новые значения.

Шаг 4. Вычисляют по (3.15) новое распределение фаз $\varphi^{(k+1)}(x, y_0)$ с масштабным коэффициентом γ_m , определяемым после минимизации функционала $\Xi(x, y_0)$.

Шаг 5. Проверяют сходимость итерационного процесса; если итерационный процесс сходится, то вычисления заканчивают, если нет, то переходят к следующей итерации в соответствии с шагом 2.

Данный алгоритм реконструкции фазового распределения оптической неоднородности апробирован посредством вычислительных экспериментов на ЭВМ. В этих экспериментах задавались несколько видов комплексной функции прозрачности $s(x, y_0)$ с максимальным отклонением волнового фронта $\varphi(x, y_0)$ в интервале $0,15\lambda \dots 0,7\lambda$ и амплитудным распределением $T(x, y_0)$ в виде гауссовой функции. С использованием формул (3.13), (3.17) вычислены значения функций $I_>(x, y_0)$ и $I_<(x, y_0)$. Затем по ним определялись распределения фазы $\varphi^{(k)}(x, y_0)$.

На рис. 3.9 приведены результаты тестирования разработанного алгоритма реконструкции распределения фазы по комплементарным тенеграммам Фуко–Гильберта $I_>(x, y_0)$ и $I_<(x, y_0)$ (кривые 1 и 2 на рис. 3.9, а) амплитудно-фазового объекта с распределениями амплитуды $T(x, y_0)$ (кривая 3) и фазы $\varphi(x, y_0)$ (кривая u на рис. 3.9, б). Результаты получены на примере сравнения восстановленного после конечной итерационной процедуры распределения фаз $\varphi^{(k)}(x, y_0)$ и модельной функции $\varphi(x, y_0)$. Графики функций $\varphi^{(0)}(x, y_0)$ – после нулевого приближения, $\varphi^{(1)}(x, y_0)$ – после первой и $\varphi^{(k)}(x, y_0)$ – после конечной итерационных процедур представлены на рис. 3.9, б соответственно кривыми 0, 1 и k . Для сравнения результатов восстановления введены меры различия между восстановленным $\varphi^{(k)}(x, y_0)$ и модельным $\varphi(x, y_0)$ распределением фазы в виде нормированной среднеквадратической ошибки восстановления δ_Σ и максимальной ошибки δ_m :

$$\delta_{\Sigma}^{(k)} = \sqrt{\frac{\|\varphi^{(k)}(x, y_0) - \varphi(x, y_0)\|_2}{\|\varphi(x, y_0)\|_2}}; \delta_m^{(k)} = \frac{\|\varphi^{(k)}(x, y_0) - \varphi(x, y_0)\|_{\infty}}{\|\varphi(x, y_0)\|_{\infty}}, \quad (3.19)$$

где $\|z_n\|_2 = \sum_{n=1}^N |z_n|^2$; $\|z_n\|_{\infty} = \sup |z_n|$.

Рис. 3.10 и 3.11 иллюстрируют влияние шумов на реконструкцию функции прозрачности. На рис. 3.10, кривые $1n$ и $2n$, показаны графики функций, соответствующих распределению интенсивности света на зашумленных комплементарных тенеграммах Фуко–Гильберта $I_>(x, y_0)$ и $I_<(x, y_0)$ (шум, например, с постоянной дисперсией $\sigma^2 = 0,04$, вводился в значения вычисляемых тенеграмм с помощью генератора случайных чисел). На рис. 3.11, кривые 0 и 1 , – графики восстановленных функций фазы $\varphi^{(0)}(x, y_0)$ нулевого итерационного цикла и $\varphi^{(1)}(x, y_0)$ – первого итерационного цикла; кривая k – график функции $\varphi^{(k)}(x, y_0)$, вычисленной после заключительной итерации.

Рис. 3.9

Рис. 3.10

Рис. 3.11

В табл. 3.1 приведены погрешности реконструкции фазы соответственно при уровне шумов с дисперсией $\sigma^2 = 0,0; 0,01; 0,02$ и $0,04$ для данного численного эксперимента $\delta_{\Sigma}^{(i)}, \delta_m^{(i)}$ (3.19), а также нормы целевой функции $\|\Xi^{(i)}(x, y_0)\|$ (3.18). Из табл. 3.1 следует, что обсуждаемый алгоритм в диапазоне отклонений волнового фронта в пределах $\frac{2\pi}{\lambda} 0,42\lambda \approx 2,64$ рад позволяет устойчиво определять фазовые искажения с нормированной среднеквадратической ошибкой δ_{Σ} : 1,2 % при отсутствии шума, 4,7% и 9,6 % соответственно при наличии шума с дисперсией $\sigma^2 = 0,02$ и $\sigma^2 = 0,04$.

Т а б л и ц а 3.1

$\ \Xi^{(i)}(x, y_0)\ $	$\sigma^2 = 0$	$\sigma^2 = 0,01$	$\sigma^2 = 0,02$	$\sigma^2 = 0,04$
$\ \Xi^{(0)}(x, y_0)\ $	0,1207	0,1225	0,1441	0,1494
$\ \Xi^{(2)}(x, y_0)\ $	0,0359	0,0372	0,0956	0,0997
$\ \Xi^{(k)}(x, y_0)\ $	0,0001	0,0086	0,0115	0,0726
$\delta_{\Sigma}^{(0)}, \%$	21,13	21,0	20,95	21,31
$\delta_{\Sigma}^{(2)}, \%$	7,69	6,3	17,03	15,98
$\delta_{\Sigma}^{(k)}, \%$	1,23	3,55	5,93	9,73
$\delta_m^{(0)}, \%$	54,0	54,7	55,7	58,5
$\delta_m^{(2)}, \%$	19,7	16,4	48,54	41,5
$\delta_m^{(k)}, \%$	3,28	8,56	13,6	23,3

На рис. 3.12 и 3.13 приведены графики функций $T(x, y_0)$, $I_>(x, y_0)$ и $I_<(x, y_0)$, измеренных экспериментально при аттестации фотографического объектива «Индустар-37» для двух значений параметра расфокусировки δZ . При этом апертура объектива равнялась $-1/8$, расстояние от объектива

до частотной плоскости – 600 ± 200 мкм. На рис. 3.14 и 3.15 приведены графики восстановленных функций зрачка объектива соответственно для расфокусировок 1 и 2: абберрационного фазового распределения $\Phi_{1,2}^{(0)}(x, y_0)$ (кривая 0), $\Phi_{1,2}^{(1)}(x, y_0)$ (кривая 1) и $\Phi_{1,2}^{(k)}(x, y_0)$ (кривая k). Нормы целевых функций $\Xi_{1,2}(x, y_0)$ при нулевом приближении, после первой и конечной итерационной процедуры приведены в табл. 3.2.

Рис. 3.12

Рис. 3.13

Рис. 3.14

Рис. 3.15

Таблица 3.2

$\ \Xi_i^{(n)}(x, y_0)\ $	1	2
$\ \Xi_i^{(0)}(x, y_0)\ $	0,310	0,28
$\ \Xi_i^{(1)}(x, y_0)\ $	0,285	0,11
$\ \Xi_i^{(k)}(x, y_0)\ $	0,152	0,09

На рис. 3.16 приведены графики восстановленных функций зрачка объектива, полученные после их симметризации компенсацией сдвига визуализирующего фильтра относительно оптической оси и последующим осреднением фазовых распределений в центральном сечении. Кривая 3 характеризует разность фазовых распределений $\varphi_1(x, y_0)$ и $\varphi_2(x, y_0)$, близкую к идеальной функции (кривая u) волновой aberrации расфокусировки объектива.

Рис. 3.16

В случае визуализации чисто фазовых объектов с малым индексом модуляции комплементарные тенеграммы можно обрабатывать сравнительно простым способом, реализовав нулевую аппроксимацию фазового распределения $\varphi^{(0)}(x, y_0)$ согласно пункту 1 разработанного алгоритма. Для этого, например, с помощью фотоэлектрического теневого прибора [39, 40] необходимо из тенеграммы $I_>(x, y_0)$ вычистить вторую тенеграмму $I_<(x, y_0)$ и для полученной разности выполнить обратное преобразование Гильберта. Если

$$s(x, y_0) = \exp[j\varphi(x, y_0)] = \cos\varphi(x, y_0) + j\sin\varphi(x, y_0);$$

$$\begin{aligned} I_{><}(x, y_0) &= \frac{1}{4} \{s(x, y_0) \pm jG_x[s(x, y_0)]\} \{s(x, y_0) \pm jG_x[s(x, y_0)]\}^* = \\ &= \frac{1}{4} [s(x, y_0)s^*(x, y_0) + \frac{1}{4}G_x[s(x, y_0)]G_x[s^*(x, y_0)]] \pm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pm \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ s(x, y_0) G_x \left[s^*(x, y_0) \right] \right\} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} G_x^2 [\cos \varphi(x, y_0)] + \\
+ \frac{1}{4} G_x^2 [\sin \varphi(x, y_0)] \pm \frac{1}{2} \cos \varphi(x, y_0) G_x [\sin \varphi(x, y_0)] \mp \\
\mp \frac{1}{2} \sin \varphi(x, y_0) G_x [\cos \varphi(x, y_0)], & \quad (3.20)
\end{aligned}$$

то их разность

$$\begin{aligned}
I_+(x, y_0) - I_-(x, y_0) &= \cos \varphi(x, y_0) G_x [\sin \varphi(x, y_0)] - \\
- \sin \varphi(x, y_0) G_x [\cos \varphi(x, y_0)] &\approx G_x [\sin \varphi(x, y_0)] - \\
- \sin \varphi(x, y_0) G_x [1(x, y_0)] &\approx G_x [\varphi(x, y_0)] \approx \varphi'_x(x, y_0). \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\varphi(x, y_0) \ll 1$.

Фотоэлектрический теневой прибор [39], реализующий такую операцию, схематически изображен на рис. 3.17. Последовательно с источником света 1 расположены конденсорный объектив 2 и диафрагма 3. Диафрагма 3 совмещена с передней фокальной плоскостью коллимирующего объектива 4, последовательно с ним расположены исследуемая неоднородность и объектив 5, в задней фокальной плоскости которого установлен фильтр 6, выполненный в виде полуволновой поляризационной фазовой пластинки, перекрывающей половину частотной плоскости. Последовательно с фильтром 6 установлены фурье-объектив 7 и поляризационный светоделительный кубик 8, у его смежных граней помещены фотоприемники 9 и 10, выходы которых подключены к входам электрического вычитающего устройства 11.

Устройство работает следующим образом. Световой поток от источника монохроматического линейно поляризованного света 1 через конденсорный объектив 2 поступает на диафрагму 3. Далее световой поток

Рис. 3.17

коллимируется объективом 4 и просвечивает исследуемую оптическую неоднородность, помещаемую между объективами 4 и 5. В задней фокальной плоскости основного объектива 5 формируется пространственно-частотный спектр неоднородности. Фильтр пространственных частот 6, перекрывающий одну частотную полуплоскость, выполнен в виде полуволновой поляризационной фазовой пластинки с кромкой, параллельной плоскости поляризации светового потока, формируемого источником. Оптическая ось фазовой пластинки ориентирована под углом 45° к кромке. Та часть светового потока, которая прошла через пластинку, изменяет плоскость поляризации на 90° . Оптическое поле в другой частотной полуплоскости поляризации не меняет. Таким образом, после фильтра структура светового потока состоит из двух ортогонально поляризованных компонент. Поляризационный светоделительный кубик 8 разделяет без потери энергии эти компоненты и направляет их на фотоприемники 9 и 10, в качестве которых могут быть использованы фотодиодные линейки или сканирующие фотоэлектронные умножители (ФЭУ). Фотоприемники 9 и 10, расположенные в плоскости изображения оптической неоднородности, воспринимают световые потоки, проходящие через соответствующие частотные полуплоскости основного объектива 5. Выходные сигналы фотоэлектрических преобразователей 9 и 10 с учетом положения фазового фильтра в правой или левой полуплоскости будут пропорциональны выражениям для $I_+(x, y_0)$ и $I_-(x, y_0)$ (3.20). На выходе вычитающего устройства 11, ко входам которого подключены выходы фотоприемников 9 и 10, формируется разностный сигнал, пропорциональный выражению (3.21). Из сравнения выражения (3.20), справедливого для обычного фотоэлектрического теневого прибора, с выражением (3.21) видно, что в нем отсутствуют квадратичные члены $G_x^2[\varphi(x, y_0)]$ и постоянная составляющая, а крутизна и линейный участок функции, показывающей зависимость амплитуды выходного электрического сигнала от градиента фазовой оптической плотности, увеличиваются в 2 раза.

Методы реконструкции фазовых распределений по комплементарным тенеграммам, полученным в результате преобразований Фуко–Гильберта, обеспечивают подавление спекл-шума за счет использования протяженного источника света. Итеративный алгоритм реконструкции с максимальным значением амплитуды фазы $0,4\lambda$ по незашумленным тенеграммам позволяет повысить точность вычисления фазового рас-

пределения по сравнению с общепринятым способом (с использованием нулевой аппроксимации) в 15 раз [25]; а при восстановлении по зашумленным тенеграммам (например, при $\sigma^2 = 0,02$) – в 3,5 раза.

3.4. ПОЛИХРОМАТИЧЕСКАЯ ГИЛЬБЕРТ-ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПОЛЕЙ ОПТИЧЕСКОЙ ФАЗОВОЙ ПЛОТНОСТИ

Цветная визуализация достигается обычно псевдораскрашиванием тенеграмм с применением вычислительной техники, а также хроматической фильтрацией [41, 42]. Цветная визуализация используется преимущественно для кодирования параметров, характеризующих оптические свойства исследуемой среды, или для селекции тенеграмм по хроматическому признаку. Цветовой контраст улучшает эстетическое восприятие и демонстрационные возможности получаемой в эксперименте информации. Техническая реализация известных систем цветной визуализации связана с усложнением конфигурации оптических фильтров и световых источников, а достижение нового качества сопровождается снижением чувствительности из-за дополнительных дифракционных потерь в сравнении с классическими теневыми методами. В [43–47] описан способ цветной визуализации полей оптической плотности, не уступающий по чувствительности эквивалентной черно-белой теплеровской системе.

Одна из реализаций цветного визуализатора полей оптической плотности содержит функциональный преобразователь Фуко–Гильберта [27, 28]. В выходной плоскости такого прибора формируются две кодированные в цвете комплементарные гильберт-тенеграммы. Их суммарное изображение далее регистрируется видеокамерой и воспроизводится на экране цветного монитора. Визуализируемые в реальном масштабе времени тенеграммы отображаются в цветном виде, удобном для зрительного восприятия благодаря большому диапазону цветового контраста. Результирующее распределение интенсивности на тенеграмме описывается как

$$I(x, y_0) = I_{\lambda_1}(x, y_0) + I_{\lambda_2}(x, y_0), \quad (3.22)$$

где $I_{\lambda_1}(x, y_0)$ и $I_{\lambda_2}(x, y_0)$ – распределения освещенности на комплементарных монохроматических составляющих. С целью получения мак-

симального цветового контраста λ_1 и λ_2 выбираются соответственно в зеленой и красной областях спектра светового излучения. Для фазового объекта, описываемого функцией $s(x, y_0) = \exp[j\varphi(x, y_0)]$, имеем

$$I_{\lambda_1}(x, y_0) = \frac{I_{\lambda_1}}{4} |s_1(x, y_0) - jG_x[s_1(x, y_0)]|^2 = \frac{I_{\lambda_1}}{4} \{1 + 2\cos\varphi_1(x, y_0) \times \\ \times G_x[\sin\varphi_1(x, y_0)] - 2\sin\varphi_1(x, y_0)G_x[\cos\varphi_1(x, y_0)] + \\ + (G_x[\cos\varphi_1(x, y_0)])^2 + (G_x[\sin\varphi_1(x, y_0)])^2\}; \\ I_{\lambda_2}(x, y_0) = \frac{I_{\lambda_2}}{4} |s(x, y_0) + jG_x[s(x, y_0)]|^2 = \frac{I_{\lambda_2}}{4} \{1 - 2\cos\varphi_2(x, y_0) \times \\ \times G_x[\sin\varphi_2(x, y_0)] + 2\sin\varphi_2(x, y_0)G_x[\cos\varphi_2(x, y_0)] + \\ + (G_x[\cos\varphi_2(x, y_0)])^2 + (G_x[\sin\varphi_2(x, y_0)])^2\}.$$

Здесь I_{λ_1} и I_{λ_2} – интенсивности зеленого и красного освещающих исследуемый объект коллимированных пучков света; $G_x[s(x, y_0)]$ – одномерный гильберт-образ $s(x, y_0)$; $s_1(x, y_0)$, $s_2(x, y_0)$ – оптические сигналы, сформированные световым полем с длиной волны λ_i ($i = 1, 2$). При взаимном вычитании комплементарных гильберт-тенеграм $I_{\lambda_1}(x, y_0)$ и $I_{\lambda_2}(x, y_0)$ и выполнении условия

$$I_{\lambda_1} = I_{\lambda_2} = I; \quad \varphi_1(x, y_0) \approx \varphi_2(x, y_0) = \varphi(x, y_0)$$

имеем

$$\Delta I(x, y_0) = I \{ \cos\varphi(x, y_0)G_x[\sin\varphi(x, y_0)] - \\ - \sin\varphi(x, y_0)G_x[\cos\varphi(x, y_0)] \} \approx \varepsilon_x(x, y_0),$$

где $\varepsilon_x(x, y_0)$ – проекция градиента ε на ось x , перпендикулярную кромке фильтра, разделяющей полуплоскости положительных и отрицательных пространственных частот.

При последующем интегрировании разностного видеосигнала выделяется распределение фазы $\varphi(x, y_0) = \varphi_x(x, y_0) + C(y_0)$ исследуемой оптической неоднородности, где $C(y_0)$ – постоянная величина, определяемая для данного сечения «изображения» фазового объекта ин-

терференционным методом или методом измерения углов отклонения сканирующего луча вдоль этого сечения.

На рис. 3.18 приведен один из вариантов оптической реализации цветного визуализатора на базе использования бихроматического щелевого источника света в сочетании с пространственным фильтром в виде квадрантного фильтра Фуко–Гильберта. Бихроматический некогерентный щелевой источник содержит элементы 1–6. Каждая половина диафрагмы 6 с вертикальной регулируемой щелью освещается соответственно световыми потоками в зеленой и красной областях спектра излучения от прямоугольного выходного торца гибких световолоконных преобразователей 4 и 4' с помощью конденсорной системы 5. На круглые входные торцы этих волоконных преобразователей соответственно через зеленый и красный светофильтры 3 и 3' конденсорными линзами 2 и 2' переносятся изображения излучающего элемента галогенной лампы 1. Коллиматорный объектив 7 направляет зондирующее световое поле в исследуемую среду 8. Приемный объектив 9 формирует фурье-спектр оптического сигнала в плоскости изображения источника. Изображения каждой половины бихроматического щелевого источника света проецируются на вертикальную линию раздела полуплоскостей положительных и отрицательных пространственных частот фильтра (10, 10'). Далее объектив видеокамеры 11 выполняет обратное фурье-преобразование и формирует в плоскости фотоматрицы гильберт-образ исследуемого объекта 8. Таким образом, на экране цветного монитора 12 отображается цветная гильберт-тенеграмма, описываемая выражением (3.22), где знак градиента оптической плотности кодируется соответствующим цветом, а его величина – градациями цветовой насыщенности.

Рис. 3.18

На рис. 3.19 показана схема цветного визуализатора двумерного распределения фазовых градиентов оптических полей, представляющая собой комбинацию бихроматического и монохроматического каналов, чувствительных соответственно к ортогональным проекциям градиента оптической плотности исследуемой среды [48]. На схеме показаны: 1 – галогенная лампа; 2 и 2' – оптические элементы, направляющие излучение в световоды 4 и 4', выходные концы которых формируют ортогонально ориентированные линейные источники излучения. Призма-куб 5 формирует пространственный крестообразный источник излучения, проецируемый оптической системой 6 на крестообразную диафрагму 9. Бихроматический вертикальный щелевой источник образуется с помощью цветных фильтров 7 и 8, пропускающих излучение на длинах волн λ_1 и λ_2 , выбранных в красной и зеленой спектральных областях. Горизонтальный щелевой источник с помощью цветного фильтра 3 формирует излучение на длине волны λ_3 в сине-голубом спектральном интервале. Фурье-сопряженные объективы 10 и 11 выполняют последовательно прямое и обратное фурье-преобразования функции источника. Между этими объективами помещается исследуемая среда. В задней фурье-плоскости объектива 11 формируется фурье-спектр исследуемого оптического сигнала, который селективируется двумерным фильтром Фуко–Гильберта 12. Результирующий оптический сигнал преобразуется в электрический видеокамерой 13

Рис. 3.19

и наблюдается на телевизионном мониторе 14. Параллельно сигнал обрабатывается на персональном компьютере.

Действие бихроматического канала цветного визуализатора аналогично действию устройства, схема которого приведена на рис. 3.18. Можно показать, что в бихроматическом канале полихроматического визуализатора интенсивность выходного сигнала является линейной функцией гильберт-образа поля оптической плотности в исследуемой среде.

Запишем выражение для передаточной функции фильтра:

$$H_i(K_x, K_y) = \frac{1}{4} \left[1 + (-1)^i \operatorname{sgn} K_x \right] \left[1 + (-1)^i \operatorname{sgn} K_y \right]. \quad (3.23)$$

Здесь $i = 1, 2$ – индекс длины волны зондирующего поля.

При $i = 1$

$$H_1(K_x, K_y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sgn} K_x), & K_y < 0; \\ 0, & K_y > 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

При $i = 2$

$$H_2(K_x, K_y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} K_x), & K_y > 0; \\ 0, & K_y < 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Или, учитывая $\operatorname{sgn} K_x = j(-j \operatorname{sgn} K_x) = jG(K_x)$, преобразуем (3.24) и (3.25) к следующему виду:

$$H_1(K_x, K_y) = \begin{cases} \frac{1}{2}[1 - jG(K_x)], & K_y < 0; \\ 0, & K_y > 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

$$H_2(K_x, K_y) = \begin{cases} \frac{1}{2}[1 + jG(K_x)], & K_y > 0; \\ 0, & K_y < 0. \end{cases}$$

Пусть исследуемая среда описывается сигналом $s(x, y) \leftrightarrow s(K_x, K_y)$. Для фурье-спектра фильтрованного сигнала с учётом (3.23) имеем

$$s_F(K_x, K_y) = \sum_{i=1}^2 s_i(K_x, K_y) H_i(K_x, K_y) = \\ = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 s_i(K_x, K_y) \left[1 + (-1)^i \operatorname{sgn} K_x \right] \left[1 + (-1)^i \operatorname{sgn} K_y \right]. \quad (3.27)$$

Подстановка (3.26) в (3.27) дает

$$s_F(K_x, K_y) = \frac{1}{2} \left\{ \left[1 + jG(K_x) \right] s_1(K_x, K_y) + \left[1 - jG(K_y) \right] s_2(K_x, K_y) \right\}. \quad (3.28)$$

Учитывая, что

$$\left[1 + jG(K_x) \right] s_1(K_x, K_y) \leftrightarrow s_1(x, y) + j\hat{s}_1(x, y) = Z_{s_1}(x, y)$$

$$\text{и} \quad \left[1 - jG(K_x) \right] s_2(K_x, K_y) \leftrightarrow s_2(x, y) - j\hat{s}_2(x, y) = Z_{s_2}^*(x, y),$$

выполняем обратное фурье-преобразование в (3.28):

$$s_F(K_x, K_y) \leftrightarrow s_F(x, y) = \frac{1}{2} \left[s_1(x, y) + j\hat{s}_1(x, y) \right] + \\ + \frac{1}{2} \left[s_2(x, y) - j\hat{s}_2(x, y) \right] = \frac{1}{2} \left[Z_{s_1}(x, y) + Z_{s_2}^*(x, y) \right]. \quad (3.29)$$

Как следует из (3.29), результатом преобразований в бихроматическом канале является полусумма сопряженных аналитических сигналов, соответственно сформированных в световых полях на длинах волн λ_1 и λ_2 .

Рассмотрим ситуацию, когда исследуемая среда — фазовая: $s(x, y) = \exp[j\varphi(x, y)]$. В случае малых фазовых неоднородностей в исследуемой среде, $\varphi(x, y) \ll 1$, воспользуемся разложением

$$s(x, y) = \exp[j\varphi(x, y)] = 1 + j\varphi(x, y).$$

Тогда селектируя в выходном сигнале (3.29) бихроматического канала составляющие на длинах волн λ_1 и λ_2 , получаем

$$\frac{1}{2} Z_{s_1}(x, y) = \frac{1}{2} [1 + j\varphi_1(x, y) - \widehat{\varphi}_{1x}(x, y)]; \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{2} Z_{s_2}^*(x, y) = \frac{1}{2} [1 + j\varphi_2(x, y) + \widehat{\varphi}_{2x}(x, y)]. \quad (3.31)$$

Для интенсивностей комплементарных хроматических компонент (3.30) и (3.31) фильтрованного фазового сигнала при раздельной регистрации имеем

$$\frac{1}{4} |Z_{s_1}(x, y)|^2 = \frac{1}{4} \{ [1 - \widehat{\varphi}_{1x}(x, y)]^2 + \varphi_1^2(x, y) \}; \quad (3.32)$$

$$\frac{1}{4} |Z_{s_2}(x, y)|^2 = \frac{1}{4} [1 + \widehat{\varphi}_{2x}(x, y)]^2 + \varphi_2^2(x, y). \quad (3.33)$$

Выравнивая в процессе регистрации хроматически селектированные сигналы $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y) = \varphi(x, y)$ и $\widehat{\varphi}_{1x}(x, y) = \widehat{\varphi}_{2x}(x, y) = \widehat{\varphi}_x(x, y)$, получаем для интенсивностей аналитических сигналов (3.32) и (3.33):

$$\frac{1}{4} |Z_{s_1}(x, y)|^2 = \frac{1}{4} \{ 1 - 2\widehat{\varphi}_x(x, y) + \widehat{\varphi}_x^2(x, y) + \varphi^2(x, y) \}; \quad (3.34)$$

$$\frac{1}{4} |Z_{s_2}(x, y)|^2 = \frac{1}{4} [1 + 2\widehat{\varphi}_x(x, y) + \widehat{\varphi}_x^2(x, y) + \varphi^2(x, y)]. \quad (3.35)$$

Вычитая выражение (3.34) из (3.35), находим разность интенсивностей хроматически селектированных аналитических сигналов:

$$\Delta I = \frac{1}{4} \left[|Z_{s_2}(x, y)|^2 - |Z_{s_1}(x, y)|^2 \right] = \widehat{\varphi}_x(x, y). \quad (3.36)$$

Выражение (3.36) описывает гильберт-сопряженный сигнал $\widehat{\varphi}(x, y)$ с хроматической кодировкой знака проекции градиента оптической фазовой плотности в направлении, ортогональном бихроматической щели крестовидного источника.

Операция гильберт-преобразования оптического сигнала имеет сходство с пространственным дифференцированием и приводит к оконтуриванию изображения. Поэтому гильберт-образ выходного оптического сигнала отображает градиентные свойства пространственного распределения коэффициента преломления в исследуемой среде.

Интенсивность выходного сигнала монохроматического канала определяется квадратичной функцией гильберт-образа поля оптической плотности по оси y :

$$I_y \cong D \left\{ |\varphi|^2 + |\hat{s}_y(\varphi)|^2 \right\}, \quad (3.37)$$

где $\hat{s}_y(\varphi)$ – гильберт-образ поля фазовой оптической плотности исследуемой среды по оси y .

Сравнение выражений (3.36) и (3.37) показывает, что в бихроматическом канале выполняется визуализация гильберт-сопряженного поля оптической плотности, тогда как в монохроматическом канале визуализируется квадрат гильберт-образа с потерей информации о знаке. Это качество бихроматических систем гильберт-визуализации позволяет повысить чувствительность при селекции, например, температурных градиентов.

На рис. 3.20 приведена схема прибора, выполняющего в реальном времени двумерную цветную гильберт-визуализацию полей фазовой оптической плотности в ортогональном координатном базисе [49]. Устройство содержит бихроматический крестообразный источник, в котором последовательно размещены световые излучатели 1 и 2, согласующие линзы 3 и 4, светопроводы 5 и 6, выходные каналы которых образуют ортогонально ориентированные в пространстве щелевые источники, рекомбинационный элемент 7 в виде, например, кубика с рекомбинирующей диагональной плоскостью, объектив 8, проецирующий изображения щелевых источников на крестообразную щелевую маску 11, размещенную в передней фокальной плоскости объектива 12. Приемный объектив 13 фурье-сопряжен с объективом 12. В задней фурье-плоскости приемного объектива 13 установлен биквадрантный фильтр Фуко–Гильберта 14, оптически сопряженный с бихроматическим крестообразным источником. Последовательно за биквадрантным фильтром Фуко–Гильберта установлена цветная видеокамера 15. Выход синхронизатора 16 подключен к управляющим входам коммутатора световых излучателей 17, системы обработки изображений 18 и видеорегистрирующего устройства 19, сигнальные входы которых подсоединены к выходу CCD-камеры.

В данном устройстве световой источник представляет собой суперпозицию двух ортогонально ориентированных и последовательно

Рис. 3.20

во времени коммутируемых щелевых источников. Один из них образован световым излучателем 1, согласующей линзой 3, световодом 5, рекомбинационным элементом 7, объективом 8, бихроматическими фильтрами 9 и 10, пропускающими излучение на длинах волн λ_1 и λ_2 и вертикальной щелевой компонентой в крестообразной маске 11. Другой щелевой источник образован элементами 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10 и второй (горизонтальной) щелевой компонентой в крестообразной маске. Цветовые компоненты каждого из бихроматических источников выбирают в разнесенных спектральных областях излучения (например, в красной и зеленой).

Устройство на рис. 3.20 представляет собой визуализатор с двумя коммутационными бихроматическими каналами, выполняющими одномерные преобразования Фуко–Гильберта соответственно по осям x и y . Каждый канал действует аналогично бихроматическому каналу устройства, показанного на рис. 3.19, и обеспечивает одномерное гильберт-преобразование с хроматической кодировкой знака градиента поля оптической фазовой плотности среды.

Коммутация источников 1 и 2 синхронизируется с коммутацией каналов системы обработки изображений 18 и видеорегистрирующего

устройства 19. Оптические неоднородности, присутствующие в исследуемой среде, вызывают фазовую модуляцию волнового фронта световой волны, описываемой фурье-трансформантой функции бихроматического щелевого источника. Приемный объектив 13 выполняет обратное фурье-преобразование оптического сигнала, представляющего произведение фурье-образа функции источника и функции, описывающей фазовые свойства исследуемой среды. Поэтому в пространственно-частотной плоскости объектива 13 оптическое поле определяется сверткой функции щелевого источника и фурье-образа фазовой функции среды. В фурье-плоскости объектива 13 помещен квадрантный фильтр Фуко–Гильберта с когерентной передаточной функцией, аналогичной КПФ фильтра (3.23) в бихроматическом канале устройства, показанного на рис. 3.19.

Поскольку световой источник сформирован в виде бихроматической щели, оптически сопряженной с фильтром, поле непосредственно за фильтром является суперпозицией двух хроматически окрашенных световых сигналов, возникающих из-за преломления световой волны на фазовых неоднородностях в среде. Для источника, ориентированного вдоль оси y_0 , сопряженной с осью пространственных частот K_y , световой сигнал на длине волны λ_1 соответствует положительным пространственным частотам K_x , а сигнал на длине волны λ_2 – отрицательным пространственным частотам $(-K_x)$. Соответственно для бихроматического щелевого источника, ориентированного по оси x_0 , оптически сопряженной с осью пространственных частот K_x , световой сигнал на длине волны λ_1 соответствует положительным пространственным частотам (K_y) , а сигнал на длине волны λ_2 – отрицательным пространственным частотам K_y . Оптическая система CCD-камеры выполняет обратное фурье-преобразование сигнала, сформированного на выходе фильтра Фуко–Гильберта.

Гильберт-образ выходного оптического сигнала отображает градиентные свойства пространственного распределения коэффициента преломления в исследуемой среде. Визуализируются оптические неоднородности, проекция градиента которых направлена ортогонально большей стороне щели щелевого источника.

Система позволяет визуализировать градиент двумерного распределения оптического поля плотности в исследуемой среде. При этом регистрируется динамика изменения двумерных полей плотности в спектральной полосе, верхняя граница которой $\nu_b = \frac{1}{2} \nu_k$, где ν_k – частота коммутирования каналов. Это соотношение удовлетворяет известной теореме отсчетов Котельникова, согласно которой частота регулярной выборки должна по крайней мере вдвое превышать наивысшую частоту в спектре исследуемого процесса. Например, при частоте коммутации $f = 100$ кГц осуществляется цветная визуализация двумерного поля оптической плотности в полосе частот 50 кГц.

3.5. 3D-ТЕХНОЛОГИИ В ИССЛЕДОВАНИИ ГИЛЬБЕРТ-ДИАГНОСТИКИ

Основной принцип восстановления изображения по ряду его «томографических» проекций впервые разработан в 1917 году известным математиком Й. Радоном [50], однако первые практические опыты восстановления формы объектов были осуществлены Брейсуэллом [51, 52] только в 1956 году. Дальнейшему развитию этого направления в вычислительной и оптической томографии посвящены работы [53–76].

Преобразование Радона трансформирует изображение в одномерный сигнал определенного вида, что позволяет вычислять свертку и корреляцию двух изображений [55–59], линейную и нелинейную пространственную фильтрацию, сжатие и кодирование информации [60–62] в устройствах, предназначенных для обработки одномерных сигналов.

Таким образом, преобразование Радона служит для уменьшения размерности задачи распознавания, что позволяет проводить двумерную свертку изображений средствами одномерной обработки сигналов и значительно упрощает аппаратную реализацию. В некоторых случаях, например при круговом сканировании изображений линейкой фотоприемников, оно является одним из эффективных способов корреляционной обработки изображений.

Упрощенная схема получения томографических проекций изображения в параллельном пучке приведена на рис. 3.21, а, где показано

соотношение между распределением яркости изображения $f(x, y)$ и его томографической проекцией $p_\theta(\tilde{x})$ в пространственной и частотной областях. Система координат (x, y) неподвижна, и ее центр связан с центром изображения. Проекция изображения вычисляются под разными углами «наблюдения». Обозначим угол поворота через θ .

Рис. 3.21

Координаты элементов проекции $\tilde{x}$ и расстояние вдоль луча $\tilde{y}$ задаются в повернутой системе координат $(\tilde{x}, \tilde{y})$, центр которой также совпадает с центром изображения. Любую точку на изображении можно представить как в системе (x, y) , так и в системе $(\tilde{x}, \tilde{y})$, координаты которых связаны известными преобразованиями

$$\tilde{x} = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad \tilde{y} = -x \sin \theta + y \cos \theta; \quad (3.38)$$

$$x = \tilde{x} \cos \theta - \tilde{y} \sin \theta, \quad y = \tilde{x} \sin \theta + \tilde{y} \cos \theta. \quad (3.39)$$

Распределение яркости в изображении, описываемое функцией $f(x, y)$, в повернутых координатах представляется как

$$\tilde{f}_\theta(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(x, y) = f(\tilde{x} \cos \theta - \tilde{y} \sin \theta, \tilde{x} \sin \theta + \tilde{y} \cos \theta).$$

Двумерные преобразования Фурье этих функций имеют вид

$$\Phi(K_x, K_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp \left[-j (K_x x + K_y y) \right] dx dy, \quad (3.40)$$

$$\tilde{\Phi}(\tilde{K}_x, \tilde{K}_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_\theta(\tilde{x}, \tilde{y}) \exp \left[-j (\tilde{K}_x \tilde{x} + \tilde{K}_y \tilde{y}) \right] d\tilde{x} d\tilde{y}. \quad (3.41)$$

Эти преобразования Фурье идентичны, $\Phi(K_x, K_y) = \tilde{\Phi}(\tilde{K}_x, \tilde{K}_y)$, поскольку для линейной оптической системы поворот осей в частотной плоскости эквивалентен повороту соответствующих осей в координатной плоскости (3.39):

$$\tilde{K}_x = K_x \cos \theta + K_y \sin \theta; \quad \tilde{K}_y = -K_x \sin \theta + K_y \cos \theta. \quad (3.42)$$

Томографическая проекция изображения под углом наблюдения θ описывается интегральным соотношением Радона [50, 63]

$$p_\theta(\tilde{x}) = \int_L \tilde{f}_\theta(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{y}, \quad (3.43)$$

где $\tilde{x}$ – координата элемента проекции, а $\tilde{y}$ отсчитывается в направлении вдоль луча. Подвергнув эту функцию одномерному преобразованию Фурье на пространственной частоте $\rho = \frac{\tilde{K}_x}{2\pi}$, получим

$$P_\theta(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\theta(\tilde{x}) \exp \left[-j 2\pi \rho \tilde{x} \right] d\tilde{x}. \quad (3.44)$$

Подстановка (3.43) в (3.44) дает

$$\begin{aligned} P_\theta(\rho) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_\theta(\tilde{x}, \tilde{y}) \exp \left[-j 2\pi \rho \tilde{x} \right] d\tilde{x} d\tilde{y} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_\theta(\tilde{x}, \tilde{y}) \exp \left[-2\pi \rho \tilde{x} + 0 \tilde{y} \right] d\tilde{x} d\tilde{y}, \end{aligned}$$

и, учитывая (3.43), получаем

$$P_\theta(\rho) = \tilde{\Phi}_\theta(\rho, 0) = \Phi(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta). \quad (3.45)$$

Этот результат принято называть теоремой о проекции [53, 54]. Преобразование Фурье от проекции представляет собой центральное сечение двумерного преобразования Фурье от изображения (рис. 3.21, б). Эта теорема лежит в основе большинства современных томографических систем.

Искомое распределение яркости $f(x, y)$ восстанавливается простым обратным преобразованием Фурье от $\Phi(K_x, K_y)$:

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(K_x, K_y) \exp[j(K_x x + K_y y)] dK_x dK_y.$$

В полярной системе координат выражение для $f(x, y)$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \Phi(K, \theta) \exp[jK(x \cos \theta + y \sin \theta)] K dK d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} P_0(K) |K| \exp[jKr \cos(\theta - \psi)] dK, \end{aligned} \quad (3.46)$$

где

$$\begin{aligned} x &= r \cos \psi; & K_x &= K \cos \theta; & K &= \operatorname{sgn} K_y \sqrt{K_x^2 + K_y^2}; \\ y &= r \sin \psi; & K_y &= K \sin \theta; & \theta &= \operatorname{arctg}(K_y/K_x) \bmod \pi, \end{aligned}$$

$$0 < r < \infty; \quad -\infty < K < \infty; \quad 0 < \psi < 2\pi; \quad 0 < \theta < \pi; \quad dK_x dK_y = K dK d\theta$$

и

$$\Phi(K \cos \theta, K \sin \theta) = P_0(K).$$

Внутренний интеграл в (3.46) представляет собой обратное преобразование Фурье произведения двух членов, первый из которых является фурье-образом томографической проекции $p_0(r)$, полученной под углом θ , а второй равен $|K|$, который соответствует передаточной функции пространственного ρ -фильтра [53–55].

Пусть восстанавливаемая функция $q(x, y)$ является взаимной корреляционной функцией распознаваемого и эталонного изображений $\tau(x, y)$ и $\mu(x, y)$. Тогда

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x', y') \mu(x' + x, y' + y) dx' dy' = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T(K_x, K_y) M^*(K_x, K_y) \exp[j(K_x x + K_y y)] dK_x dK_y = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{\theta}(K) B_0^*(K) |K| \exp[jKr \cos(\theta - \psi)] dK = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{\theta}(K) B_0^*(K) (jK) [-j \operatorname{sgn}(K)] \times \\ &\quad \times \exp[jKr \cos(\theta - \psi)] dK, \end{aligned} \quad (3.47)$$

где $T(K_x, K_y)$ и $M(K_x, K_y)$ – двумерные фурье-образы функций $\tau(x, y)$ и $\mu(x, y)$, описывающих распознаваемое и эталонное изображения, $\Gamma_{\theta}(K)$ и $B_0(K)$ – одномерные фурье-образы томографических проекций $\gamma_{\theta}(r)$ и $\beta_0(r)$ распознаваемого и эталонного изображений соответственно.

Как известно [10, 12], фурье-преобразование произведения двух или нескольких функций представляет собой свертку (или двойную свертку) фурье-образов этих функций, и поэтому мы вправе записать внутренний интеграл в соотношении (3.47), выражающий обратное преобразование Фурье от произведения (jK) , $[-j \operatorname{sgn}(K)]$, $\Gamma_{\theta}(K)$ и $B_0(K)$ в виде

$$g_{\theta}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} q_{\theta}(r') h(r - r') dr' = \frac{\partial}{\partial r} G[q_{\theta}(r)], \quad (3.48)$$

где

$$q_{\theta}(r') = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\theta}(r) \beta_{\theta}(r-r') dr \quad (3.49)$$

– корреляционная функция томографических проекций распознаваемого и эталонного изображений; $h(r)$ – обратное преобразование Фурье от $|K|$, т.е. от передаточной функции p -фильтра. Внешний интеграл в соотношении (3.47), известный как обратная проекция, представляет собой интегральный вклад всех проекций $g_{\theta}(r)$ в каждую точку с координатами (x, y) (или (r, ψ)). Уравнение (3.47), с учетом, что $\tilde{x} = r \cos(\theta - \psi)$, принимает вид

$$q(x, y) = \int_0^{\pi} g_{\theta}[r \cos(\theta - \psi)] d\theta = \int_0^{\pi} g_{\theta}(\tilde{x}) d\theta = \int_0^{\pi} g_{\theta}(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta. \quad (3.50)$$

Уравнения (3.48), (3.49) и (3.50) относительно легко аппроксимировать с помощью ЭВМ в виде одномерных конечных сумм. В случае дискретных выборок проекций на сетке с шагом a свертка выражений (3.49) представляется конечной суммой

$$q_{\theta}(na) = a \sum_l^N \gamma_{\theta}(la) \beta_{\theta}[(n+l)a]. \quad (3.51)$$

В выражении (3.48) свертка с ядром может быть заменена последовательностью операций вычисления гильберт-образа корреляционной функции $q_{\theta}(r')$ с помощью алгоритма дискретного преобразования Гильберта [1]

$$G[q_{\theta}(na)] = G(na) = \sum_{m=0}^{2N} q_{\theta}(na) \left\{ \frac{1 - \cos \pi(n-m)}{\pi(n-m)} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left[\frac{(n-m) \left[1 - (-1)^l \cos \pi(n-m) \right]}{(n-m)^2 - l^2(2N+1)^2} \right] \right\} \quad (3.52)$$

и нахождения первой производной гильберт-образа по формуле численного дифференцирования [68]

$$g_{\theta}(na) = \frac{1}{12a} \{ G[(n-2)a] - 8G[(n-1)a] + 8G[(n+1)a] - G[(n+2)a] \}. \quad (3.53)$$

Поскольку проекции $\gamma_\theta(r)$ и $\beta_\theta(r)$ вычисляются при дискретных значениях углов $\theta_k = \pi/M$, интеграл от обратных проекций в выражении (3.50) можно заменить суммированием всех обратных проекций:

$$q(x, y) = \frac{\pi}{M} \sum_{k=1}^M g_{\theta_k}(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k). \quad (3.54)$$

Кроме того, здесь требуется интерполяция значений проекции g_θ , поскольку корреляционная проекция вычисляется в точках сетки, в общем случае не совпадающих с точками и координатами $(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k)$.

Оценка результатов численного эксперимента по восстановлению корреляционной функции изображений томографическими методами [25]. С помощью разработанного пакета прикладных программ были проведены последовательно вычислительные эксперименты:

- задание «фантомов» эталонного и распознаваемого изображений;
- вычисление их томографических проекций на прямой $\tilde{x}$ (см. рис. 3.21, *a*) посредством интегрирования функции изображения вдоль прямой L , перпендикулярной $\tilde{x}$;
- реконструкция двумерной корреляционной функции эталонного и распознаваемого изображений. Она выполнялась двумя томографическими способами.

Первый способ основан на последовательном вычислении по соответствующим формулам (3.51) и (3.52) гильберт-образа корреляционной функции томографических проекций сравниваемых изображений, ее первой производной (3.53) и результатов суммирования «обратных» проекций (3.54), полученных размытием значений производной вдоль прямых линий L , совпадающих с направлением вычисления линейного интеграла, т.е. томографических проекций.

Рис. 3.22

Второй способ состоит в последовательном выполнении следующих операций: вычислении одномерных корреляционных функций томографических проекций по формуле (3.51), восстановлении «линейного» томографического изображения (ЛТИ) суммированием «обратных» проекций, описываемых функциями взаимной корреляции томографических проекций сравниваемых изображений, вычислении методом конечных разностей лапласиана от ЛТИ с помощью семиэлементного оператора и последующим получением двумерной корреляционной функции (ДКФ) сравниваемых изображений «традиционным» способом, т.е. посредством реализации двумерной свертки изображений по формуле (3.47). Эталонные изображения задавались на фрагменте в виде одиночных геометрических фигур на гексагональном растре [25, 78] (квадрата, прямоугольного треугольника, правильного шестиугольника (см. рис. 3.22), описываемых парой взаимодополняющих матриц $TP(i, j)$ и $PT(k, l)$ форматом 33×57 и 32×56 элементов соответственно). Распознаваемое изображение, состоящее из девяти фрагментов с теми же геометрическими фигурами, представлялось матрицами $TE(i, j)$ и $PE(k, l)$ размером 113×197 и 112×96 элементов соответственно. Ширина контурных линий геометрических фигур на фрагментах изображения определяется тремя элементами матриц. Данные томографических проекций $F1, F2, F3$ эталонов вычислялись в 65 узловых точках равномерной сетки с шагом $\Delta x/2$; а данные проекций $F4, F5$ и $F6$ – в 309 узловых точках с шагом $\frac{\sqrt{3}}{4} \Delta x$. Данные томографических проекций сравниваемого изображения вычислялись соответственно: $F11$ – в 225 узловых точках с шагом $\Delta x/2$; $F12$ и $F13$ – в 309 узловых точках с шагом $\Delta x/2$; $F14$ – в 393 узловых точках с шагом $\frac{\sqrt{3}}{4} \Delta x$; $F15$ и $F16$ – в 533 узловых точках с шагом $\frac{\sqrt{3}}{4} \Delta x$. Оценка томографического изображения корреляционного поля при использовании 6, 12, 18, 30, 60, 90 проекций вычислялась в тех же узловых точках гексагонального растра, на которых задавалось сравниваемое модельное изображение девяти фрагментов с геометрическими фигурами с произвольной ориентацией.

Ниже приводятся результаты численного эксперимента по восстановлению корреляционной функции томографическим способом. Чис-

ленные значения нормированных корреляционных моментов, полученные при сравнении распознаваемого изображения с разными эталонами, заданы в виде табл. 3.3 – 3.5.

Таблица 3.3

<div><div>I. 1.00</div><div>II. 0.987 - 1,3 %</div><div>III. 1.04 - 4,0 %</div><div> </div><div>IV. 1.29 - 29,0 %</div><div>V. 1.06 - 6,2 %</div></div>	<div><div>I. 0.518</div><div>II. 0.512 - 0,6 %</div><div>III. 0.620 - 10,2 %</div><div> </div><div>IV. 0.846 - 32,8 %</div><div>V. 0.322 - 19,0 %</div></div>	<div><div>I. 0.518</div><div>II. 0.526 - 0,8 %</div><div>III. 0.642 - 12,8 %</div><div> </div><div>IV. 1.01 - 50,0 %</div><div>V. 0.391 - 12,5 %</div></div>
<div><div>I. 0.420</div><div>II. 0.389 - 3,1 %</div><div>III. 0.472 - 5,2 %</div><div> </div><div>IV. 0.809 - 38,9 %</div><div>V. 0.455 - 3,5 %</div></div>	<div><div>I. 0.686</div><div>II. 0.726 - 4,0 %</div><div>III. 0.689 - 0,3 %</div><div> </div><div>IV. 0.816 - 13,0 %</div><div>V. 0.593 - 9,3 %</div></div>	<div><div>I. 0.231</div><div>II. 0.202 - 2,9 %</div><div>III. 0.299 - 6,8 %</div><div> </div><div>IV. 0.643 - 41,2 %</div><div>V. 0.175 - 5,6 %</div></div>
<div><div>I. 0.518</div><div>II. 0.526 - 0,6 %</div><div>III. 0.642 - 13,2 %</div><div> </div><div>IV. 1.01 - 64,0 %</div><div>V. 0.391 - 7,5 %</div></div>	<div><div>I. 0.231</div><div>II. 0.200 - 3,1 %</div><div>III. 0.326 - 9,7 %</div><div> </div><div>IV. 0.531 - 30,2 %</div><div>V. 0.188 - 4,1 %</div></div>	<div><div>I. 1.00</div><div>II. 0.976 - 2,4 %</div><div>III. 1.01 - 1,0 %</div><div> </div><div>IV. 1.14 - 14,0 %</div><div>V. 1.02 - 2,0 %</div></div>
<div><div> </div><div> </div><div>Эталонный фрагмент</div></div>	<div><div> </div><div>Сопоставляемое изображение</div></div>	

Таблица 3.4

I. 0.767 II. 0.868 – 10,1 % III. 0.804 – 3,7 % IV. 0.809 – 4,2 % V. 0.550 – 21,7 % VI. 0.857 – 3,0 %	I. 0.767 II. 0.811 – 4,4 % III. 0.828 – 6,1 % IV. 0.802 – 3,5 % V. 0.582 – 18,5 % VI. 0.841 – 7,4 %	I. 0.767 II. 0.844 – 7,7 % III. 0.825 – 5,8 % IV. 0.800 – 3,3 % V. 0.613 – 15,4 % VI. 0.839 – 7,2 %
I. 0.384 II. 0.429 – 4,5 % III. 0.436 – 5,2 % IV. 0.386 – 0,2 % V. 0.236 – 14,8 % VI. 0.411 – 2,7 %	I. 1.00 II. 1.04 – 4,0 % III. 1.05 – 5,0 % IV. 1.03 – 3,0 % V. 1.16 – 16,0 % VI. 1.02 – 2,0 %	I. 0.384 II. 0.432 – 4,8 % III. 0.429 – 4,5 % IV. 0.399 – 1,5 % V. 0.255 – 12,9 % VI. 0.424 – 4,0 %
I. 0.767 II. 0.785 – 1,5 % III. 0.833 – 6,6 % IV. 0.822 – 5,5 % V. 0.623 – 14,4 % VI. 0.854 – 3,0 %	I. 0.384 II. 0.378 – 0,6 % III. 0.422 – 3,8 % IV. 0.383 – 0,1 % V. 0.255 – 12,9 % VI. 0.404 – 2,0 %	I. 0.767 II. 0.825 – 5,8 % III. 0.793 – 2,6 % IV. 0.805 – 3,8 % V. 0.535 – 23,2 % VI. 0.846 – 7,9 %
Эталонный фрагмент	Сопоставляемое изображение	

Таблица 3.5

I. 0.835 II. 0.794 – 4,1 % III. 0.791 – 4,4 %	I. 0.455 II. 0.461 – 0,6 % III. 0.226 – 22,9 %	I. 0.459 II. 0.504 – 4,5 % III. 0.284 – 17,5 %
I. 1.000 II. 1.02 – 2,0 % III. 0.936 – 6,4 %	I. 0.628 II. 0.617 – 1,1 % III. 0.480 – 14,8 %	I. 0.128 II. 0.160 – 3,2 % III. 0.191 – 6,3 %
I. 0.459 II. 0.398 – 3,9 % III. 0.546 – 8,7 %	I. 0.338 II. 0.363 – 2,5 % III. 0.202 – 13,6 %	I. 0.835 II. 0.798 – 3,7 % III. 0.753 – 8,2 %
<div> </div> <div> Эталонный фрагмент Сопоставляемое изображение </div>		

В II–VI рядах таблиц показаны нормированные корреляционные моменты и их погрешности (в процентах), вычисленные относительно максимального значения автокорреляционной функции. Далее приведены точностные характеристики описанных алгоритмов реконструкции томограмм при использовании одномерных проекций в отсутствии

шумов измерений. Нормированная среднеквадратическая ошибка восстановления δ_Σ определяется по формуле

$$\delta_\Sigma = \left(\sum_{i,j} \left(q_{ij}^{(M)} - q_{ij}^{(D)} \right)^2 / \sum_{i,j} \left(q_{ij}^{(D)} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (3.55)$$

где M – число используемых томографических проекций; $q_{ij}^{(D)}$ – результат двумерного интеграла свертки.

В табл. 3.3 приведены значения корреляционных моментов, восстановленные при свертке с эталоном – квадратом: I ряд – с помощью двумерного интеграла свертки эталонного и сравниваемого с ним изображений; II – IV ряды вычислялись по первому алгоритму восстановления томографической корреляционной функции с использованием 60, 30 и 12 томографических проекций; нижний V ряд – по второму томографическому алгоритму с применением операции вычисления лапласиана с использованием 60 проекций.

В табл. 3.4 приводятся результаты численного эксперимента по вычислению корреляционных моментов по первому алгоритму восстановления томографического изображения, являющегося результатом свертки эталона – шестиугольника с распознаваемым изображением с использованием 90 (IV ряд), 60 (III ряд) и 30 (II ряд) томографических проекций, а для сравнения (верхний – I ряд) приведены нормированные значения корреляционных моментов, вычисленные традиционным способом, т.е. посредством вычисления двумерного «интеграла» свертки изображений, и в V ряду – по второму томографическому алгоритму с применением операции вычисления лапласиана при использовании 60 проекций.

В VI ряду приведены результаты сравнения эталонного изображения – масштаб 1:2, вычисленные по первому томографическому алгоритму на основе шестидесяти подвергнутых масштабному преобразованию по оси координат одномерных томографических проекций от эталона и последующей свертки с томографическими проекциями распознаваемого изображения.

В табл. 3.5 аналогично показаны значения корреляционных моментов, восстановленные при свертке с эталоном – треугольником с использованием 60 проекций по первому (ряд II) и второму (ряд III) томографическим алгоритмам.

В табл. 3.6 (приложение к табл. 3.4) приведены результаты вычисления нормированной среднеквадратичной ошибки δ_{Σ} (3.55) и максимальной ошибки $-\delta_m$, используемые для оценки качества реконструкции двумерных корреляционных функций (ДКФ) в томографическом корреляторе при сопоставлении эталонного фрагмента (шестигранника) с девятифрагментным изображением.

Таблица 3.6

Номер ряда	II	III	IV	V	VI
Число проекций	30	60	90	60	60
$\delta_{\Sigma} \cdot 100 \%$	9,43 %	2,94 %	2,47 %	9,45 %	5,5 %
$\delta_m \cdot 100 \%$	19,1 %	10,9 %	9,72 %	19,1 %	14,5 %

Оптико-электронные системы корреляции изображений в томографических технологиях [77, 78]. Исследование корреляционного алгоритма сравнения изображений было реализовано на оптико-электронном стенде, который позволял выполнять:

- формирование томографических проекций распознаваемого и эталонного изображений-транспарантов с помощью оптико-механического блока;
- последовательное считывание проекций с помощью фотодиодной линейки с последующим вводом в ЭВМ в оцифрованном виде;
- цифровую корреляционную обработку томографических проекций с последующим документированием результатов, полученных после высокочастотной фильтрации функции корреляции томографических проекций;
- восстановление двумерной корреляционной функции сравниваемых изображений томографическим методом;
- отображение результирующих изображений, описываемых двумерной корреляционной функцией, на экране цветного монитора.

Фотография общего вида оптико-механического блока формирования томографических проекций приведена на рис. 3.23, структурная схема гибридного оптико-электронного стенда – на рис. 3.24.

Оптико-электронный стенд корреляционной обработки изображений содержит: осветитель 1, выполненный на базе диапроектора; механический узел 2 для установки транспарантов с распознаваемым и эталонными

Рис. 3.23

изображениями, позволяющий вращать транспарант вокруг оптической оси системы на дискретные значения углов, задаваемые приводом от шагового двигателя 3; цилиндрическую линзу 4, реализующую интегрирование светового распределения на транспаранте в направлении, перпендикулярном к оси u , совпадающей с линией расположения элементов линейного дискретного фотоприемника 5, установленного в выходной плоскости такого одномерного проектора изображений.

Рис. 3.24

Управление шаговым двигателем и фотоприемным устройством осуществляется ЭВМ. Последовательное многоракурсное считывание и документирование томографических проекций распознаваемого и эталонного изображений реализованы с помощью пакета прикладных программ, обеспечивающего комплексное управление шаговым двигателем и фотоприемным устройством, а также предобработку считываемых данных.

вающей информации и запись обработанных «целочисленных» значений 128 томографических проекций.

Корреляционная свертка томографических проекций и высокочастотная фильтрация выполняются с помощью пакета программ. Алгоритм высокочастотной фильтрации томографических проекций с помощью подпрограммы быстрого преобразования Фурье (БПФ) осуществляет последовательное вычисление: одномерных фурье-образов томографических проекций эталонного и распознаваемого изображений; произведения полученной пары фурье-образов и знаковой функции; результата свертки посредством обратного преобразования Фурье от полученного произведения; первой производной от результатов свертки томографических проекций численным методом по формуле (3.53).

Восстановление двумерной корреляционной функции (ДКФ) сопоставляемых изображений томографическим методом реализовано с помощью пакета программ, который позволяет восстанавливать изображение размерностью 128×128 элементов по 2, 4, 8, и 18 томографическим проекциям, полученным соответственно равномерно через дискретные углы $\Delta\theta_i = 90^\circ; 45^\circ; 22^\circ 30'; 12^\circ 15'$ с произвольным начальным значением угла поворота $\alpha = k \cdot \Delta\theta$ координатной системы в интервалах $(0 \dots 90^\circ); (0 \dots 45^\circ); (0 \dots 22^\circ 30'); (0 \dots 12^\circ 15')$, где $\Delta\theta = \pi/128$. Корреляционное поле, восстанавливаемое при использовании 32, 64 и 128 томографических проекций, вычисляется суммированием первых оценок двумерной корреляционной функции, полученных при использовании 16 томографических проекций с начальными значениями угла поворота $\alpha = m \cdot 4\Delta\theta; k \cdot 2\Delta\theta$ и $n \cdot \Delta\theta$, где $m = 0, 1; k = 0, 1, 2, 3; n = 0, 1, 2, \dots, 7$.

На рис. 3.25, а, б приведены фотографии девятифрагментного распознаваемого изображения и сравниваемого с ним эталонного изображения (квадрата) в виде одного из этих фрагментов. На рис. 3.26 – фотография с экрана полутонового телевизионного дисплея. На ней показаны восстановленные изображения, описываемые двумерной корреляционной функцией, полученные при использовании одной (1), двух (2), четырех (3), восьми (4), шестнадцати (5) и шестидесятичетырех (6) томографических проекций.

Таким образом, метод корреляции распознаваемых и эталонных изображений в пространстве Радона позволяет выполнять двумерную свертку изображений средствами одномерной обработки сигналов.

Рис. 3.25

Рис. 3.26

Восстановление трехмерного распределения показателя преломления. Оптическая томография [79] дает мощный инструментарий для получения трехмерного пространственного распределения показателя преломления. Методы получения проекционных данных в оптической томографии обычно являются дальнейшим развитием классических способов получения диагностической информации. В основном это трансмиссионные: интерферометрические, дефлектометрические (спекло-, шпирен- и теневые методы), корпускулярные и другие методы. Ог-

раничиваясь вначале интерферометрическими данными [80], будем предполагать, что неоднородность просвечивается плоскими волнами во всевозможных направлениях. Тогда известными величинами можно считать вносимые неоднородностью оптические разности хода l для всевозможных лучей, пересекающих возмущенную область, где $n \neq \bar{n}$. Разумеется, каждый луч связан с некоторой световой волной, однако для удобства рассуждений будем рассматривать отдельные лучи независимо от того, к какой совокупности они принадлежат.

В параксиальном приближении траектории лучей представляют собой прямые линии, поэтому всевозможные лучи, пересекающие трехмерную неоднородность, образуют четырехпараметрическое семейство. В качестве параметров удобно выбрать координаты α и β , характеризующие направление просвечивания, и две линейные координаты p и q в плоскости, перпендикулярной этому направлению и проходящей через начало связанного с неоднородностью координатного измерительного базиса (рис. 3.27). Величины p и q являются координатами точки пересечения луча с данной плоскостью. Введенные параметры однозначно определяют прямую в трехмерном пространстве. Лучи, имеющие одинаковые значения параметров α и β , можно считать нормальными к волновому фронту одной и той же плоской волны.

Рис. 3.27

Таким образом, интерферометрические измерения дают величину l , равную интегралу от функции $f(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r}) - \bar{n}$ вдоль прямой линии, как функцию четырех параметров, определяющих данную прямую. Требуется определить неизвестную функцию $f(\mathbf{r})$ по значениям ее интегралов вдоль всевозможных прямых, пересекающих область определения $f(\mathbf{r})$. Так как известная функция l зависит от четырех переменных, а искомая – от трех, то следует ожидать, что исходная информация при такой постановке обратной томографической задачи является избыточной. Поэтому можно использовать экспериментальные данные, полученные

при фиксированном значении одного из параметров, например β . Этот случай соответствует просвечиванию неоднородности системой плоских волн, волновые векторы которых лежат в одной плоскости. Система координат, связанная с неоднородностью, выбрана произвольно, поэтому без ограничения общности можно положить $\beta = 0$.

При $\beta = 0$ все лучи с одинаковым значением α и β будут принадлежать одному и тому же плоскому сечению неоднородности. В связи с этим обратную задачу можно независимым образом сформулировать для каждого такого сечения в отдельности, а величину q рассматривать как параметр сечения (рис. 3.27). В такой формулировке экспериментальные данные $l(\alpha, p)$, относящиеся к сечению $q = \text{const}$, выражаются только через значения функции $f(\mathbf{r})$ в плоскости этого сечения и число переменных у искомой функции f и известной l оказывается одинаковым.

Можно считать, что исходные данные получены с ракурсных интерферограмм. Для каждой интерферограммы α имеет постоянное значение, а разность хода зависит от p и q . Выделяя на каждой интерферограмме полосу, соответствующую $q = \text{const}$, получим набор зависимостей $l(p)$ для дискретных значений α . Таким образом, с комплекта ракурсных интерферограмм можно получить исходные данные для расчета любого сечения $q = \text{const}$. Если неоднородность стационарная, то ракурсные интерферограммы можно получить, поворачивая неоднородность в поле зрения интерферометра. Задача нахождения неизвестной функции, зависящей от N переменных, по значениям ее интегралов на всевозможных гиперплоскостях, известна в математике как проблема Радона [50].

Решение для двумерного случая имеет следующий вид:

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\alpha \int_{-\infty}^\infty \frac{l(\alpha, p) dp}{(p - p_0)^2}. \quad (3.56)$$

Для данного α параметр p_0 относится к лучу, проходящему через пространство, для которого вычисляется $f(x, y)$. Здесь $p_0 = x \cos \alpha + y \sin \alpha$. Геометрический смысл величины p_0 поясняет рис. 3.28.

Внутренний интеграл в формуле (3.56) содержит функцию

$\frac{1}{(p-p_0)^2}$, имеющую неинтегрируемую особенность в точке

$p = p_0$. Эта функция рассматривается как обобщенная, т.е. она задается не своими локальными значениями, а указанием способа интегрирования этой функции в произведении с любой другой,

достаточно гладкой и быстро убывающей на бесконечности функцией l . Для функций l , равных нулю в окрестности особой точки, результат интегрирования обобщенной функции должен совпадать с интегрированием в обычном смысле, поскольку особенность отсутствует.

Формула, придающая определенный смысл расходящемуся интегралу, называется его регуляризацией. Процедура нахождения регуляризации рассматривается в теории обобщенных функций. В данном случае имеет место следующая формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{l(p)dp}{(p-p_0)^2} = \int_{p_0}^{\infty} \frac{l(p) + l(2p_0 - p) - 2l(p_0)}{(p-p_0)^2} dp. \quad (3.57)$$

Формулы (3.56) и (3.57) в параксиальном приближении дают полное решение обратной задачи для трехмерных неоднородностей. Внутренние интегралы (3.57) вычисляются с помощью любого подходящего численного метода, а интегрирование по углу α заменяется усреднением по дискретным направлениям просвечивания.

Прежде чем использовать составленную программу обработки экспериментальных данных, необходимо проверить ее на численном примере. Для этого удобно взять некоторую аналитически заданную функцию, имеющую такой же вид, как и ожидаемые в эксперименте распределения показателя преломления. Желательно, чтобы интегралы от этой функции вдоль всевозможных прямых можно было вычислить аналитически. Значения этих интегралов $l(\alpha, p)$ берутся в качестве исходных данных, и по формулам (3.56) и (3.57) приближенно нахо-

Рис. 3.28

Рис. 3.29

дится $f(x, y)$. Таким образом, можно выявить зависимость точности восстановления f от числа направлений просвечивания и количества экспериментальных точек на каждой ракурсной интерферограмме.

На рис. 3.29 [80, 81] приведен пример восстановления функции, состоящей из пяти функций Гаусса, при использовании данных, соответствующих десяти направлениям просвечивания. Угол α изменялся от 0 до π через 18° . Так как $l(0, p) = l(\pi, p)$, то получается только десять различных вариантов. Внутренние интегралы вычислялись по формуле Симпсона. Точность восстановления исходной функции 3%. При уменьшении числа направлений до двух возникают искажения в виде ложных максимумов и минимумов.

Формулы (3.56) и (3.57) можно использовать и для обработки результатов теневых измерений, если вначале по известным значениям $\frac{\partial l}{\partial p}$ посредством интегрирования по p найти l . Однако проще преобразовать формулу (3.56) к такому виду, когда в подынтегральное выражение будет входить непосредственно $\frac{\partial l}{\partial p}$. Выполним интегрирование по частям в формуле (3.56):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{l(p) dp}{(p - p_0)^2} = - \frac{l(p)}{p - p_0} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial l}{\partial p} \frac{dp}{p - p_0}. \quad (3.58)$$

Так как $l(p)$ равно нулю при $p \rightarrow \pm\infty$, то первый член в (3.58) исчезает. Подставляя (3.58) в (3.56), имеем

$$f(x, y) = - \frac{\bar{n}}{2\pi^2} \int_0^\pi d\alpha \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\alpha, p) dp}{p - p_0} \right\}. \quad (3.59)$$

Здесь $\varepsilon(\alpha, p) = \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial l}{\partial p}$, т.е. ε — угол между проекцией луча на плоскость (x, y) и направлением просвечивания.

Внутренний интеграл соответствует одномерному преобразованию Гильберта от распределения $\varepsilon(p)$, и его формула регуляризации в данном случае [80] имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(p) dp}{p - p_0} = \int_{p_0}^{\infty} \frac{\varepsilon(p) - \varepsilon(2p_0 - p)}{p - p_0} dp. \quad (3.60)$$

На рис. 3.30 [80, 81] приведен пример обработки результатов теневых измерений по формулам (3.59) и (3.60). Исходные данные для расчета были получены в результате обработки десяти ракурсных теневых фотографий оптической неоднородности в жидкости. Неоднородность была вызвана температурным полем при естественной конвекции над нагретым телом, которое в плане имело форму латинской буквы *R*. На рисунке показан рельеф температурного поля в некотором горизонтальном сечении, расположенном над нагревателем. Схема опыта приведена на рис. 3.31.

Рис. 3.30

Рис. 3.31

Экспериментальные результаты вводились в ЭВМ в виде таблицы значений ε_{ij} , α_i , p_{ij} . Индексом i нумеровались направления просвечивания, а индексом j – координаты точек, в которых измерялись значения угловых отклонений ε для данного направления просвечивания. При обработке теневых фотографий точки выбирались неравномерно, чтобы учесть характерные особенности функций $l(p)$.

Расчет неоднородности начинался с вычисления внутренних интегралов (3.54) для дискретных равноотстоящих значений параметра p_0 . При этом использовалась формула Симпсона, а значения функции $\varepsilon(p)$ вычислялись посредством квадратичной интерполяции по трем

ближайшим экспериментальным точкам. Таблица значений этих интегралов J_{ik} записывалась в память машин. Индексом k нумеровались значения параметра p_0 . Затем вычислялись значения функции $f(x, y)$ в узлах равномерной сетки. Для заданной точки (x, y) параметр $p_{0i} = x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i$ в общем случае не совпадает с каким-либо из значений, для которых вычислено J_i , поэтому для нужного значения p_{0i} величина $J_{i(p)}$ находится из таблицы J_{ik} путем интерполяции. При этом одни и те же значения J используются многократно, чем достигается значительная экономия машинного времени по сравнению с тем, когда в каждой точке (x, y) функция f вычисляется независимо.

Моделирование малоракурсной томографической интерферометрии на ЭВМ. Анализ томографической интерферометрии как метода исследования внутренней структуры объектов и процессов проводился не только экспериментально [79], но и с использованием методов математического моделирования [82]. ЭВМ для изучения свойств и особенностей работы оптических приборов и устройств используется в последние годы достаточно широко. Неслучайно в настоящее время выделилось целое направление в оптических исследованиях, получившее название цифровой оптики.

Основными преимуществами использования методов математического моделирования для анализа оптических измерительных систем являются: возможность исследования каждой характеристики прибора независимо, широкий диапазон изменения его параметров, варьирование входных объектов, сравнение результатов измерения с точностными зависимостями и т. д.

Для анализа томографической интерферометрии была разработана модель томографического интерферометра, которая базировалась на комплексе программ обработки томографической информации TOPAS [82]. В модели предполагалось, что число отсчетов в каждой проекции равно 100; суммарное изображение (томограмма) вычислялось на матрице 51×51 отсчетов. Было предусмотрено варьирование некоторых параметров прибора: число проекции M изменялось от 2 до 37; направление зондирования выбиралось произвольно.

В комплексе TOPAS программа моделирования томографической интерферометрии получила название RO и работала следующим обра-

зом: выбиралась некоторая модель объекта, по которой аналитически вычислялись значения различных проекций. По ним согласно алгоритму обратного проецирования формировалось суммарное изображение. Полученное распределение рассматривалось как результат работы прибора. В дальнейшем после аддитивной и мультипликативной нормировки результаты вычисления сравнивались с моделью объекта.

Моделирование позволило отметить некоторые особенности аналогового вычисления суммарного изображения. Это, прежде всего, отсутствие регистрации проекций, которое позволяет избежать погрешностей их съема и ввода в ЭВМ, т. е. в этом случае восстановление искомого распределения осуществляется в отсутствие шумов. При моделировании указанная особенность томографической интерферометрии учитывалась. Однако при реализации некоторых математических операций в оптических системах с преобразованием волнового фронта возможно их неточное выполнение из-за аберраций оптических элементов и погрешности юстировки. В томографическом интерферометре искажения, обусловленные аберрациями, устранялись голографической регистрацией волнового фронта. Возможная ошибка ($\sim 30'$) из-за неточности согласования углов зондирования и поворота волнового фронта была равна погрешности из-за дискретизации проекции при цифровом вычислении суммарного изображения на сетке 51×51 отсчетов.

Применение математического моделирования позволило определить потенциальные возможности метода томографической интерферометрии [83]. Для решения данной задачи проводилось сравнение модельных результатов измерения распределения показателя преломления, полученных методом томографической интерферометрии, с аналогичными исследованиями на модели малоракурсного компьютерного томографа. Параметры объекта и технические характеристики моделируемых приборов выбирались одинаковыми. Восстановление томограмм по проекциям модельных объектов осуществлялось по алгоритмам RICSS1 и RICSS2, реализованным в комплексе TOPAS. В [82] показано, что указанные алгоритмы дают минимальную погрешность при малом числе проекций.

Необходимо отметить, что в оптическом томографе с цифровым восстановлением томограмм погрешность восстановления существенно зависит от шума в проекционных данных. Как правило, уровень шума выбирается равным 2 ... 10 %. Подробно зависимость Δ_1 и Δ_2 от

числа ракурсов для различных значений шума исследовалась в [82]. Для итерационных алгоритмов аналогичные оценки приведены в следующем разделе.

Малоракурсная модель томографического интерферометра использовалась для анализа его работы при различных тест-объектах. В качестве одного из тест-объектов была выбрана сумма двух смещенных гауссиан, каждая из которых описывается выражением

$$f(x, y) = c \exp[-a^2(x^2 + y^2)].$$

В этой модели $c_1 = c_2 = 1$, $a_1 = a_2 = 4,5$. На рис. 3.32, *а* приведено изображение модели. На рис. 3.32, *б-г* даны результаты восстановления при различном числе направлений зондирования (*б, в, г* – суммарное (восстановленное) изображение тест-объекта при числе ракурсов $M = 3$ (*б*), $M = 4$ (*в*), $M = 6$ (*г*)).

Можно отметить, что геометрия изображения восстанавливается достаточно хорошо. Так, например, координаты максимумов совпадают. При трех и четырех ракурсах артефакты существенны, при шести

Рис. 3.32

практически незаметны. Для сравнения на рис. 3.33 приведена томограмма, полученная с помощью алгоритма RICSS1 по трем проекциям. Моделирование позволило проиллюстрировать зависимость восстановленного изображения при малом числе проекций от ориентации объекта относительно направлений зондирования.

Рис. 3.33

Точностные характеристики томографического интерферометра. Математическая модель томографического интерферометра, описанная выше, была использована для оценки точности измерения распределения показателя преломления в томографическом интерферометре [79, 82].

Прежде всего определим те характеристики восстановленного изображения, которые применяются для оценки качества томограмм. В комплексе TOPAS применяются два критерия:

$$\Delta_1 = \left[\sum (f_v - f)^2 / \sum f^2 \right]^{1/2}; \quad (3.61)$$

$$\Delta_2 = (f_{v \max} - f_{\max}) / f_{\max}. \quad (3.62)$$

Здесь f_v – восстановленная функция; f – истинное распределение. Суммирование ведется по всей области задания. Для оценки качества изображений, формируемых оптическими приборами, используются следующие критерии:

$$F = 1 - \sum (f_v - f)^2 / \sum f^2, \quad (3.63)$$

дефект верности и четкость по Стрелю D [см. выражение (3.62)]; среднеквадратичная погрешность

$$S = \sum (f_v - f)^2 / K, \quad (3.64)$$

где K – общее число точек измерения. Учитывая, что дефект верности легко определяется по Δ_1 , в дальнейшем будем рассчитывать точностные характеристики томографического интерферометра по формулам (3.61) и (3.62).

Точность определения показателя преломления в томографическом интерферометре обуславливается систематической погрешностью, которая вызвана отсутствием операции фильтрации проекций, а также малым числом проекций. Было показано, что оценку указанной погрешности удобно вести по критерию Δ_1 в центральной области, где она описывается выражением для ошибки

$$\delta_m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y) - f_N(x, y)|^2 dx dy, \quad (3.65)$$

где f_N – функция с ограниченным спектром.

Для исследования систематической погрешности в качестве модели был выбран объект, описываемый функцией Гаусса $n(r) = ce^{-a^2 r^2}$, параметры c и a которой варьировались. Диапазон изменения параметров определялся из физической реализуемости объектов. Так, их нижняя граница выбиралась из пределов чувствительности многопроходовой схемы [79] томографического интерферометра: $\tilde{n}_{\min} = \lambda/20 p_0 M$. Учитывая, что минимум изменения показателя преломления находится на границе объектов, т. е. при $r = p_0$, получаем

$$ce^{-a^2 p_0^2} = \lambda/20 p_0 M. \quad (3.66)$$

Верхняя граница параметров определялась из условия пренебрежения криволинейностью траектории распространения лучей в среде, которое было получено в [84] для данного класса объектов, и может быть представлена в виде

$$ca = 0,2 \sqrt{n\lambda / p_0^3}. \quad (3.67)$$

Уравнения (3.66) и (3.67) определяют значения c и a при различных размерах исследуемого объекта $2p_0$.

В модельных расчетах выбирались $M = 3$, $\lambda = 0,6 \cdot 10^{-3}$ мм, $n = 1$. В табл. 3.7 [79] сведены результаты расчетов для предложенной модели объекта.

Отсюда следует, что основная погрешность измерения томографическим интерферометром обусловлена главным образом малым числом ракурсов и может быть оценена теоретически по размеру спектра пространственных частот объекта.

Т а б л и ц а 3.7

p_0 , мм	a , мм ⁻¹	c	$\tilde{n}_{\min}$	$ \tilde{n}' _{\max}$, мм	$\frac{M}{\sqrt{\ln \frac{\Phi_{\max}}{\Phi_{\min}}}}$	Томографическая интерферометрия		RICSS 1	
						Δ_1 , %	Δ_2 , %	Δ_1 , %	Δ_2 , %
0,1	21	$7 \cdot 10^{-3}$	10^{-4}	0,15	1,34	11,7	0,23	18,9	-12,2
1	2,3	$2 \cdot 10^{-3}$	10^{-5}	$4,7 \cdot 10^{-2}$	1,46	11,95	0,73	19	-12,3
10	0,25	$0,6 \cdot 10^{-3}$	10^{-6}	$0,15 \cdot 10^{-2}$	1,59	11,95	0,73	19	-12,3
100	0,027	$0,2 \cdot 10^{-3}$	10^{-7}	$0,06 \cdot 10^{-3}$	1,72	12,08	0,98	19,04	-12,29

Восстановление томограмм итерационными методами. В [79] развит подход к процессу восстановления томограмм, полученных при ограниченном числе проекций. Он основан на представлении его аналогом процессу формирования изображения некоторой линейной отображающей системой. Такой подход позволил использовать для восстановления томограмм высокого качества различные алгоритмы восстановления изображения, в частности методы пространственной фильтрации. Однако использовать эти алгоритмы в оптических томографах практически трудно, поскольку требуется создавать сложный инверсный фильтр либо не менее сложный его фурье-образ.

Для решения задачи реконструкции изображения в [85, 86] было предложено использовать итерационные алгоритмы.

Итерационный метод привлекателен в первую очередь следующими особенностями: 1) при выводе итерационного уравнения можно использовать известные свойства искомого решения; 2) нет необходимости в определении обратного оператора искажений; 3) при реализации этого метода возможна работа в интерактивном режиме, что позволяет практически решить вопрос о приемлемой степени приближения k -го итерационного решения к искомому решению.

Этот метод особенно полезен при решении задач восстановления изображений, так как кроме перечисленных особенностей он имеет еще и то преимущество, что может быть реализован в оптических системах с обратной связью.

Одним из частных случаев итерационной схемы является задача обратной свертки. При отсутствии оператора ограничений она сводится к итерационной схеме Ван-Циттерта [86], при этом определенный способ варьирования ее параметров превращает эту схему в итераци-

онную процедуру Джансона–Ван-Циттерта. Возможность применения итерационных алгоритмов для восстановления томограмм, полученных при ограниченном числе проекций, исследуется в [87].

В задачах томографии [79] спектр томограммы $\Phi(K_x, K_y)$ связан со спектром измеряемого (восстановленного) суммарного изображения $S_M(K_x, K_y)$ соотношением

$$S_M(K_x, K_y) = \Phi(K_x, K_y)H_M(K_x, K_y), \quad (3.68)$$

где $H_M(K_x, K_y)$ – передаточная функция пространственного частотного фильтра с бинарным амплитудным пропусканием, так как спектр томограммы $\Phi(K_x, K_y)$ задан на конечном числе прямых, проходящих через начало координат частотной плоскости K_x, K_y (см. рис. 3.22, б). Уравнение этого фильтра для M проекций можно представить в виде

$$H_M(K_x, K_y) = \begin{cases} 1 & \text{при } K_x = K_y \operatorname{tg} \theta_j, \\ 0 & \text{при } K_x \neq K_y \operatorname{tg} \theta_j. \end{cases} \quad (3.69)$$

В рассматриваемом нами случае ограниченного числа проекций оператор искажений описывается выражением (3.69).

Кроме информации об операторе, искажающем спектр, имеется некоторая априорная информация об исходном изображении $f(x, y)$. Это может быть информация о протяженности, положительности, форме, а также о других параметрах изображения. Такую информацию об изображении можно вводить посредством оператора априорной информации $C(f = Cf)$ тогда и только тогда, когда f удовлетворяет данному ограничению.

Для восстановления томограмм в качестве априорной информации выбираются положительность и конечный размер исходного изображения. Это условие заведомо выполняется при исследовании ограниченных объектов, не обладающих нелинейными эффектами взаимодействия зондирующего излучения с веществом. Тогда оператор ограничения имеет вид $C = PT$, где

$$P|f| = \begin{cases} |f|, & |f| \leq a, \\ a, & |f| > a. \end{cases} \quad (3.70)$$

$$T|f| = \begin{cases} f(x, y), & x_a \leq x \leq x_b, \quad y_a \leq y \leq y_b; \\ 0 & \text{при других значениях,} \end{cases} \quad (3.71)$$

где x_a, x_b, y_a, y_b – ограничение размера в плоскости изображения.

Используя априорные представления об изображении, можно записать уравнение, которое связывает суммарное изображение, полученное при ограниченном числе проекций, и истинную томограмму $f(x, y)$ в виде

$$s_M(x, y) = h_M(x, y) \otimes \otimes C f(x, y), \quad (3.72)$$

где s_M, h_M, f – фурье-образы соответственно S_M, H_M, Φ ; $\otimes \otimes$ – значок двумерной свертки. Из (3.72) при известных s_M, h_M и C можно восстановить томограмму при ограниченном числе проекций.

Исследование итерационных методов восстановления томограмм на ЭВМ. Для исследования возможностей итерационного алгоритма восстановления томограмм он был реализован на ЭВМ [79] и была проведена серия расчетов. Конкретная реализация данного алгоритма для различных видов задания исходных данных, операторов искажения и априорной информации может быть различна. В случае томографии исходную информацию получают, либо используя алгоритм суммирования нефильтрованных обратных проекций (суммарное изображение s_M), либо накапливая одномерные сечения спектра $\Phi(K_x, K_y)$ (алгоритм фурье-синтеза). В обоих случаях спектр искаженного изображения можно считать точно заданным в тех областях частотной плоскости, которые соответствуют $H_M = 1$. При наличии также априорной информации о томограмме $f(x, y)$, (операторы T и P) наиболее целесообразно использовать итерационную схему Гершберга, предложенную для обработки рентгеновских изображений. Для случая восстановления томограмм этот алгоритм удобнее представить в виде

$$\Phi^0 = S_M, \quad \Phi^{k+1} = S_M + F^{+1} [C f^k] (1 - H_M), \quad f^{k+1} = F^{-1} [\Phi^{k+1}], \quad (3.73)$$

где F^{+1}, F^{-1} – операторы прямого и обратного преобразования Фурье соответственно.

Схематично алгоритм Гершберга можно представить как итерационные переходы от оценки объекта в спектральной плоскости к его

оценке в пространственной области с внесением в процессе их выполнения априорной информации о каждой из областей. Эти переходы осуществляются с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Согласно выражению (3.73) для получения изображения необходимо выполнить следующие операции.

Шаг 1. По известному набору проекций получается набор одномерных фурье-образов, которые по теореме о центральном сечении дают в частотной плоскости значения фурье-образов искомого решения на лучах, выходящих из начала координат под углами, совпадающими с углами наблюдения проекции. На этом этапе значения спектральных амплитуд зануляются вне данных лучей, а также вне граничной частоты.

Шаг 2. Выполняется обратное двумерное БПФ для получения оценки томограммы $f(x, y)$.

Шаг 3. Вносится априорная информация о положительности функции $f(x, y)$, ограниченности ее области определения кругом радиуса R , вне которого томограмма зануляется (оператор C).

Шаг 4. Проводится прямое двумерное БПФ от оценки томограммы с предыдущего шага, и значения спектра на лучах, определенных на шаге 1, заменяются величинами, определенными ранее непосредственно по проекциям. Вносится априорная информация о спектре объекта.

Шаг 5. Проверяются критерии окончания итерационного процесса. Если они не выполняются, то осуществляется переход на шаг 2. Критериями останова могут быть: а) малость нормы отклонения полученной томограммы от ее оценки на предыдущем шаге; б) равенство нормы отклонения одномерных и двумерных оценок фурье-спектров объекта на лучах норме шума в проекциях (критерий невязки).

Отметим, что регуляризация решения исходной некорректной задачи в данном итерационном процессе осуществляется как в ходе высокочастотной фильтрации (шаг 1), так и непосредственно на стадии выполнения обратного фурье-преобразования (шаг 2), когда выполняется суммирование рядов Фурье с неточно заданными коэффициентами.

В результате многократного выполнения операций 2–5 спектр будет известен на всей частотной плоскости, и восстанавливаемая томограмма будет высокого качества.

Далее [79] кратко описаны результаты, полученные при реализации алгоритма. В основу данной разработки положена регуляризованная версия алгоритма фурье-синтеза.

На рис. 3.34, *а* приведена точная томограмма, для которой выполнялась реконструкция. Модель состояла из двух гауссиан, параметры которых задавались следующим выражением:

$$f(x, y) = \exp \left\{ -9 \left[(x + 0,5)^2 + y^2 \right] \right\} + \exp \left\{ -9 \left[(x - 0,5)^2 + y^2 \right] \right\}.$$

Растр томограммы выбирался размером 33×33 , с числом отсчетов на проекции $N = 33$, числом проекций $M = 4, 6$ и 9 (при этом последняя проекция для $\varphi = 180^\circ$ формируется из первой так, что реально «измеряется» число проекций $3, 5$ и 8).

Рис. 3.34

На рис. 3.34, *б* показан результат 1-й итерации алгоритма для реконструкции по трем проекциям ($M = 4$) в отсутствие шумов измерений. Полная ошибка восстановления Δ_1 , определяемая по формуле

$$\Delta_1 = \left(\sum_{i,j} (f_{ij}^n - f_{ij})^2 / \sum_{i,j} (f_{ij})^2 \right)^{1/2},$$

оказалась равной $70,3\%$, погрешность восстановления максимальной амплитуды $\Delta_2 = -66,6\%$.

На рис. 3.34, *в* дан пример реконструкции той же модели после 199-й итерации. Высокое качество алгоритма характеризуется достигнутой точностью восстановления: $\Delta_1 = 8,6\%$, $\Delta_2 = -11\%$. Устойчивость алгоритма к шумам измерений проиллюстрирована на рис. 3.35, где исходные три проекции содержали шум в 10% , а после реконструкции получено $\Delta_1 = -14\%$,

Рис. 3.35

$\Delta_2 = -13,8\%$ (сглаживание проекций до основной обработки, как это обычно делается в пакете TOPAS [82], здесь не проводилось).

В целом результаты моделирования подтвердили перспективность применения итерационного алгоритма последовательной свертки по схеме Гершберга для восстановления томограмм при малом числе проекций.

Необходимо также отметить, что аналогичные исследования в последние годы по анализу применения алгоритма Гершберга для восстановления томограмм по данным, полученным в ограниченном угле обзора, были проведены рядом авторов [88, 89]. В качестве общего вывода можно сказать, что полученные ими результаты также демонстрируют перспективность рассмотренных алгоритмов.

Как указывалось выше, оптическая томография дает возможность получать трехмерные пространственные и временные характеристики газовых потоков. Методы получения проекционных данных в оптической томографии обычно являются развитием классических способов получения диагностической информации. В основном это трансмиссионные, интерферометрические, дефлектометрические теневые, дифракционные, корпускулярные и другие методы. Оптические технологии в сочетании с гильберт-фильтрацией сигналов позволяют осуществлять трехракурсную томографию полей фазовой оптической плотности.

Соответствующая оптическая система позволяет выполнять трехракурсное просвечивание исследуемого фазового объекта и одновременно регистрировать на отдельных участках ПЗС-матрицы CCD-камеры все три томографические проекции в виде гильберт-тенегрмм или в виде сдвиговых интерференционных картин исследуемого нестационарного процесса. На рис. 3.36 приведены общий вид оптической части рабочего участка теневого прибора с лабораторным макетом трехракурсного томографического блока (а) и его упрощенная оптическая схема (б).

Оптико-механический блок томографа выполнен на базе четырех плоских оптических зеркал, габаритные размеры которых $113 \times 20 \times 430$ мм. Каждое зеркало имеет автономную юстировку. Выбор такого технического решения обусловлен возможностью использования большого поля зрения (400 мм) теневого прибора ИАБ-463М для организации одновременного трехракурсного просвечивания исследуемой среды под углами: 0° , -45° и $+45^\circ$. На рис. 3.37, а приведена

На рис. 3.34, *а* приведена точная томограмма, для которой выполнялась реконструкция. Модель состояла из двух гауссиан, параметры которых задавались следующим выражением:

$$f(x, y) = \exp \left\{ -9 \left[(x + 0,5)^2 + y^2 \right] \right\} + \exp \left\{ -9 \left[(x - 0,5)^2 + y^2 \right] \right\}.$$

Растр томограммы выбирался размером 33×33 , с числом отсчетов на проекции $N = 33$, числом проекций $M = 4, 6$ и 9 (при этом последняя проекция для $\varphi = 180^\circ$ формируется из первой так, что реально «измеряется» число проекций $3, 5$ и 8).

Рис. 3.34

На рис. 3.34, *б* показан результат 1-й итерации алгоритма для реконструкции по трем проекциям ($M = 4$) в отсутствие шумов измерений. Полная ошибка восстановления Δ_1 , определяемая по формуле

$$\Delta_1 = \left(\sum_{i,j} (f_{ij}^n - f_{ij})^2 / \sum_{i,j} (f_{ij})^2 \right)^{1/2},$$

оказалась равной $70,3\%$, погрешность восстановления максимальной амплитуды $\Delta_2 = -66,6\%$.

На рис. 3.34, *в* дан пример реконструкции той же модели после 199-й итерации. Высокое качество алгоритма характеризуется достигнутой точностью восстановления: $\Delta_1 = 8,6\%$, $\Delta_2 = -11\%$. Устойчивость алгоритма к шумам измерений проиллюстрирована на рис. 3.35, где исходные три проекции содержали шум в 10% , а после реконструкции получено $\Delta_1 = -14\%$,

Рис. 3.35

$\Delta_2 = -13,8\%$ (сглаживание проекций до основной обработки, как это обычно делается в пакете TOPAS [82], здесь не проводилось).

В целом результаты моделирования подтвердили перспективность применения итерационного алгоритма последовательной свертки по схеме Гершберга для восстановления томограмм при малом числе проекций.

Необходимо также отметить, что аналогичные исследования в последние годы по анализу применения алгоритма Гершберга для восстановления томограмм по данным, полученным в ограниченном угле обзора, были проведены рядом авторов [88, 89]. В качестве общего вывода можно сказать, что полученные ими результаты также демонстрируют перспективность рассмотренных алгоритмов.

Как указывалось выше, оптическая томография дает возможность получать трехмерные пространственные и временные характеристики газовых потоков. Методы получения проекционных данных в оптической томографии обычно являются развитием классических способов получения диагностической информации. В основном это трансмиссионные, интерферометрические, дефлектометрические теневые, дифракционные, корпускулярные и другие методы. Оптические технологии в сочетании с гильберт-фильтрацией сигналов позволяют осуществлять трехракурсную томографию полей фазовой оптической плотности.

Соответствующая оптическая система позволяет выполнять трехракурсное просвечивание исследуемого фазового объекта и одновременно регистрировать на отдельных участках ПЗС-матрицы CCD-камеры все три томографические проекции в виде гильберт-тенеграмм или в виде сдвиговых интерференционных картин исследуемого нестационарного процесса. На рис. 3.36 приведены общий вид оптической части рабочего участка теневого прибора с лабораторным макетом трехракурсного томографического блока (а) и его упрощенная оптическая схема (б).

Оптико-механический блок томографа выполнен на базе четырех плоских оптических зеркал, габаритные размеры которых $113 \times 20 \times 430$ мм. Каждое зеркало имеет автономную юстировку. Выбор такого технического решения обусловлен возможностью использования большого поля зрения (400 мм) теневого прибора ИАБ-463М для организации одновременного трехракурсного просвечивания исследуемой среды под углами: 0° , -45° и $+45^\circ$. На рис. 3.37, а приведена

а

б

Рис. 3.36

упрощенная оптическая схема эксперимента по исследованию распределения температуры в пламени трех свечей, расположенных в вершинах равностороннего треугольника, а на рис. 3.37, б показаны результаты эксперимента по визуализации полей оптической плотности динамических возмущений воздушной среды, а именно сдвиговая интерференционная картина тепловых потоков от трех свечей.

а

б

Рис. 3.37

Глава 4

ПРИМЕНЕНИЕ ГИЛЬБЕРТ-ФИЛЬТРАЦИИ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

4.1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДЕННЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

Исследование параметрических колебаний имеет большое научное и прикладное значение. В настоящее время изучены как теоретически, так и экспериментально многие явления, происходящие при параметрическом возбуждении волн в различных средах [90]: в плазме, ферромагнетиках, в твердом теле и т.д.

Впервые об исследованиях методами гильберт-оптики параметрического возбуждения волн на поверхности тяжелой жидкости переменным электрическим полем сообщалось в [91].

Для проведения этих исследований был создан экспериментальный стенд, внешний вид которого показан на рис. 4.1, *а* – без применения виброзащитного устройства для ванны; *б* – с использованием системы амортизаторов. Стенд содержит оптический визуализатор поверхностных волн и электронные измерительные устройства.

Рис. 4.1

Объектом исследования являются волновые структуры на поверхности жидкости (воды), помещенной в плоскую кювету квадратной формы размером $900 \times 900 \text{ мм}^2$ и глубиной $h = 100 \text{ мм}$ (рис. 4.2). Над поверхностью воды помещался плоский электрод 2 ($90 \times 90 \text{ см}^2$), представляющий собой массивную металлическую плиту. Зазор между поверхностью воды и электродом составлял $\sim 10 \text{ мм}$. Для визуализации волн в проходящем свете в верхний электрод 2 и в дно кюветы вставлены стеклянные плоскопараллельные пластины 5 и 6. На нижнюю поверхность пластины 6, обращенную к воде, нанесено полупрозрачное проводящее покрытие. В области исследуемых частот ($2 \dots 14 \text{ Гц}$) влияние сопротивления этого покрытия на однородность электрического поля пренебрежимо мало и поэтому поверхность стекла 6 можно считать эквипотенциальной с поверхностью электрода 2. Между водой и электродом прикладывалось переменное электрическое напряжение с амплитудой $\sim 10 \text{ кВ}$. Электрическое поле создавалось источником

Рис. 4.2

высокого напряжения 4, который представлял собой мощный двухканальный усилитель с амплитудной модуляцией. Источник имел следующие параметры: амплитуда напряжения от 0 до 13 кВ в диапазоне частот от 2 до 14 Гц, нелинейность по амплитуде менее 0,1 %, стабильность амплитуды 0,3 %, коэффициент гармоник $< 0,1$ %, частота модуляции 2 кГц, амплитуда гармоник модуляции < 1 %. Такой источник позволял создавать электрическое поле напряженностью до 13 кВ/см, способное возбудить поверхностные волны при отсутствии электрического пробоя между водой и электродом. Здесь 7, 8 и 9 – элементы виброзащиты. В полосе частот 2...14 Гц воду можно считать жидким проводником, поскольку постоянная электрической цепи удовлетворяет условию $RC \ll \tau_k$, где τ_k – характерный период колебаний. Действительно, для воды (удельное сопротивление 10^6 Ом·см) сопротивление между поверхностью и нижним электродом 3 равно $R \approx 10^3$ Ом. Емкость цепи между электродами, включающей слой воды и воздушный промежуток над ее поверхностью, $C \approx 3 \cdot 10^{-8}$ Ф. Тогда $RC \approx 3 \cdot 10^{-5}$ с $\ll \tau_k$, так как частота колебаний выбрана не превышающей 14 Гц. Таким образом, поверхность воды является эквипотенциальной.

Однородность электрического поля в зазоре достигалась соответствующей обработкой рабочей (нижней) поверхности электрода 2. Для устранения искажений поля, которые могут быть вызваны изгибом электрода, он выполнен в виде массивной металлической плиты с ребрами жесткости. Эти ребра служат одновременно для крепления верхнего электрода и регулировки зазора между ним и поверхностью жидкости. Обычно зазор составлял 5...10 мм.

Для визуализации возбужденных поверхностных волн использовалась оптическая система, действующая на принципах гильберт-оптики. Этот прибор собран на основе оптической скамьи ОСК-2, а его оптическая схема приведена на рис. 4.3: 1 – лазер; 2 – микрообъектив; 3 – поляризационный светоделительный кубик; 4, 5 – поляризационные четвертьволновые фазовые пластинки; 6, 7 – цилиндрические зеркала; 8, 8' – коллективные линзы; 9 – движущееся матовое стекло; 10 – проекционный объектив; 11 – крестовидная диафрагма; 12 – коллимирующий объектив; 13 и 13' – поворотные зеркала; 16 – объектив прямого фурье-преобразования; 17 – квадрантный амплитудно-фазовый фильтр; 18 – видеокамера с объективом обратного фурье-преобразова-

ния. Совокупность элементов 1–11 в оптической системе в целом образует монохроматический крестовидный источник некогерентного света. Свет от крестовидного монохроматического источника собирается коллиматором 12 в параллельный пучок. При помощи поворотного зеркала 13 этот широкий пучок направляется на исследуемый объект – жидкость, налитую в ванну 14. Диаметр светового поля (изучаемой области) – 110 мм. Следует отметить, что поворотные зеркала 13 и 13' не должны искажать фронт световой волны. Поэтому эти элементы подвергались специальному отбору. В фокусе объектива 16 находится фильтр 17 в виде квадрантного фазового ножа. Изображение восстанавливается объективом камеры 18, и результат изотропного преобразования Гильберта регистрируется либо фотоаппаратом, либо на кинокамеру или видеокамеру.

Теневой прибор осуществляет изотропную гильберт-визуализацию формы поверхности жидкости. При этом каждое изменение набега фаз в исследуемом объекте на 2π приводит к появлению на выходном «теневом» изображении соответствующей темной полосы. Пример теневого

Рис. 4.3

изображения стоячей волны, полученного таким способом, показан на рис. 4.4. На рис. 4.5 приведен пример тенеграммы, полученной при одномерной визуализации (щелевой источник света).

Рис. 4.4

Рис. 4.5

Как показал эксперимент, вибрации здания и прочие помехи порождают «шумовые волны» на поверхности «чистой» воды, зачастую превышающие амплитуду изучаемых волновых процессов. Однако применение фотоэлектронного метода считывания тенеграммы (визуализированной, например, с помощью одномерного преобразования Гильберта от формы поверхности) и использование узкополосных электронных фильтров позволило выполнять измерения даже при больших шумах. Оптическая схема такого устройства соответствует рис. 4.3 за исключением выходной части, показанной на рис. 4.6.

Здесь 1 – описанный выше квадрантный фазовый фильтр. Тенеграмма проектировалась на подвижную диафрагму 2, с помощью которой выбиралась определенная точка изображения. Смещением диафрагмы можно добиться максимума сигнала фотоприемника 3, что соответствует настройке на край темной полосы (см. рис. 4.5). Для улучшения отношения сигнал/шум на выходе фотоприемника помещен активный

Рис. 4.6

РС-фильтр. Таким образом, для «чистой» воды получена зависимость порогового поля от его частоты (рис. 4.7).

Экспериментальная зависимость порога от параметрического резонанса частоты показана на рис. 4.7 сплошной линией, теоретическая – пунктиром: наблюдается достаточно хорошее согласие с теорией во всей области частот. Измерения значений порога параметрического резонанса позволяют вычислять затухание поверхностных волн в зависимости от волнового вектора. Результаты согласуются с предполагаемой дисперсией затухания $\gamma_k = 2\nu k^2$, где ν – кинематическая вязкость.

Рис. 4.7

В работе [92] показано, что колебания идеально проводящей жидкости во внешнем электрическом поле $E = E_m \cos \omega_0 t$ описывается дифференциальным уравнением Матье для параметрически возбуждаемых поверхностных волн

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \left(\tilde{\omega}_k^2 - \frac{k^2 E_m^2 \cos 2\omega_0 t}{8\pi\rho} \frac{\text{th}(kh)}{\text{th}(kH)} \right) \eta = 0, \quad (4.1)$$

где $\tilde{\omega}_k^2 = \omega_k^2 - \frac{k^2 E_m^2}{8\pi\rho} \frac{\text{th}(kh)}{\text{th}(kH)}$; $\omega_k^2 = (gk + \alpha_n k^3 / \rho) \text{th}(kh)$ – дисперсионное уравнение в отсутствие электрического поля; H – величина зазора между обкладками конденсатора, т. е. между поверхностью жидкости

и электрода (плиты); h – глубина кюветы; η – форма поверхности жидкости; ρ – плотность жидкости; α_n – коэффициент поверхностного натяжения.

Из решения уравнения (4.1) следует, что амплитуда волны экспоненциально изменяется с инкрементом

$$\Gamma = -\gamma_k \pm \left((h\nu_k)^2 - (\omega_k - \omega_0)^2 \right)^{1/2}, \quad (4.2)$$

где $h\nu_k = \frac{k^2 E_m^2}{64\pi\rho\omega_k} \frac{\text{th}(kh)}{\text{th}(kH)}$; γ_k – параметр затухания.

Минимальный инкремент имеют волны с $\omega_k = \omega_0$, что соответствует параметрическому резонансу. Граница неустойчивости определяется из условия $h\nu_k = \gamma_k$, которое дает зависимость порогового поля от частоты

$$E_c = \sqrt{\frac{32\pi\rho\omega_k\gamma_k}{k^2} \frac{\text{th}(kh)}{\text{th}(kH)}}.$$

При $\gamma_k = 2\nu k^2$ и $kh \ll 1$ эта зависимость совпадает с оценкой E_c в работе [92]:

$$E_c = 8\sqrt{\pi\nu\omega_0\rho},$$

где ν – параметр вязкости.

Из результатов работы [92] следует выражение, описывающее зависимость амплитуды колебаний от надкритичности, определяемой отношением амплитуды поля к пороговой амплитуде:

$$\eta = \eta_0 \sqrt[4]{\left(\frac{E}{E_c}\right)^4 - 1}, \quad \eta_0 = \text{const}. \quad (4.3)$$

Экспериментально установлено, что под действием переменного электрического поля на поверхности жидкости возникает волновая структура с прямоугольными ячейками параметрического происхождения с частотой, равной частоте возбуждаемого поля (ω_0). Это подтверждают гильберт-тенеграммы поверхностных волн (рис. 4.8), генерируемых при частоте $\omega_0/(2\pi) = 3$ Гц и следующих значениях напряженности электрического поля E : $a - 1,7$ кВ/см; $b - 4,2$ кВ/см.

Рис. 4.8

На частотах $\omega_0/(2\pi)$ электрического поля E меньше 6 Гц возникают особенности: при малых значениях напряженности поля E на «чистой» поверхности жидкости наблюдаются волны двойной частоты $2\omega_0$, т. е. непараметрические. При увеличении напряженности электрического поля в зазоре появляются параметрические волны, которые с дальнейшим ростом E достигают амплитуды нескольких миллиметров (до 5 мм) за время примерно 10 мин. Волновая структура, представляющая вначале правильную квадратную решетку, становится неустойчивой, наблюдается перемещение видимого гильберт-изображения волн (дрейф), полосы на тенеграмме начинают искажаться и затем полностью разрушаются (рис. 4.9, a – $в$, при $\omega_0/(2\pi) = 4,1$ Гц).

Как удалось выявить из тенеграмм волн, снятых на кинолентку скоростной кинокамерой (СКС–1), в стадии разрушения колебаний в течение малых промежутков времени, несмотря на довольно сложную теневую картину, фиксируемую за малые временные интервалы, наблюдается повторяемость изображения.

Рис. 4.9

Графики, показывающие зависимость амплитуды параметрических волн от напряженности электрического поля при некоторых выборочных частотах ω_0 , приведены на рис. 4.10. Из них видно, что экспериментальные точки хорошо ложатся на теоретическую кривую, рассчитанную по формуле (4.3) при надкритичностях $\frac{E}{E_c} > 1,5$. Вблизи порогового поля E_c из-за большого уровня шумов имеется лишь качественное согласие.

Рис. 4.10

В изученной области частот и значений напряженности поля на поверхности «идеально чистой» воды действительно наблюдается параметрическое возбуждение колебаний, предсказываемое теоретически. Однако на низких частотах исследованного диапазона наблюдаются, как было указано, волны на двойной частоте. Это, по-видимому, связано с неоднородностью поля на краях зазора. Влияние краевой неоднородности приводит к непараметрическому механизму возникновения колебаний. От непараметрических гармоник можно отстроиться по частоте. При этом колебания на двойной частоте не влияют на порог параметрической неустойчивости. Однако в нелинейном (надпороговом) режиме их влияние может быть существенно.

Экспериментально обнаружено, что амплитуда вынужденных колебаний на двойной частоте с ростом частоты уменьшается и в области частот 6 Гц становится сравнима с шумами. Поэтому с уверенностью можно сказать, что зависимость амплитуды колебаний от надкритич-

ности на частотах $\omega_0/(2\pi) \geq 6$ Гц определяется нелинейным взаимодействием лишь параметрических волн, для которого справедливо выражение (4.2). Для волн с частотой 6,7 Гц (рис. 4.11, а) и 8,0 Гц (рис. 4.11, б) имеется качественное согласие с предсказаниями теории.

Рис. 4.11

Рис. 4.12

В интервале исследуемых частот $\omega_0/(2\pi)$ (2...12 Гц) и при разных значениях напряженности электрического поля E установлена зависимость длины волны поверхностных волн от частоты $\omega_0/(2\pi)$. Кривая 1 на рис. 4.12 – параметрические волны; кривая 2 – вынужденные колебания на частоте $2\omega_0/(2\pi)$.

Для жидкости без поверхностной пленки исследовалась связь амплитуды параметрически возбужденных волн с напряженностью поля. В области частот $\omega_0/2\pi \geq 6$ Гц эта зависимость качественно согласуется с предсказаниями теории.

4.2. ИЗМЕРИТЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ РАЗМЕРОВ И ОПТИЧЕСКОГО КАЧЕСТВА

В качестве примера использования методов гильберт-оптики для измерения линейных размеров можно привести оптическую систему, описанную в [93, 94]. Эта система предназначена для автоматического бесконтактного контроля линейных размеров и формы изделий с цилиндрической симметрией в условиях крупносерийного и массового производства. Принцип действия основан на фотоэлектрической трансформации свертки изображения изделия, оконтуренного методами гильберт-фильтрации, с эталонной щелевой маской. Прибор позволяет контролировать одновременно до трех характерных линейных размеров изделия. В модифицированных измерителях линейных размеров лазер заменен источником белого света, а оконтуривание изображения производится с применением амплитудно-фазового фильтра Кастлера, реализующего управляемое функциональное преобразование Фуко–Гильберта [95]. При этом выполняется свертка оконтуренного изображения с изображением эталона. Определение искомого размера в этом случае сводится к измерению и сравнению временных интервалов между максимумами корреляционной функции, представленной в виде последовательности импульсов на выходе фотоприемного устройства.

Блок-схема системы, реализующей этот метод измерений, приведена на рис. 4.13. Она содержит: осветитель ОС; блок оптического оконтуривания (БОО) исходного теневого изображения изделия; блок световодов СВ, передняя площадка которого представляет собой маску точечного вида; фотоприемники ФП1, ФП2, ..., ФП N (N – количество фотоприемников, определяется числом измеряемых сечений контро-

лируемой детали); блок электронной обработки информации (БЭОИ); блок индикации (БИ).

Рис. 4.13

Рассмотрим преобразование сигналов в такой схеме. Ограничимся для простоты случаем цилиндрического изделия с диаметром D (рис. 4.14, а). Теневое изображение движущегося со скоростью v изделия можно описать функцией (рис. 4.14, б)

$$s(x - vt) = 1 - \text{rect}\left(\frac{x - vt}{D}\right).$$

Блоком БОО изображение оконтуривается, при этом распределение его интенсивности $I(x - vt)$ (при идеальном дифференцировании и единичном увеличении) имеет вид (рис. 4.14, в)

$$I(x - vt) = |s'_x(x - vt)|^2. \quad (4.4)$$

Это изображение далее умножается на коэффициент пропускания эталонного транспаранта T_3 . Его пропускание можно описать функцией (рис. 4.14, з)

$$h(x) = \delta(x - d/2) + \delta(x + d/2). \quad (4.5)$$

Световой поток, прошедший транспарант, интегрируется фотоприемником. На выходе фотоприемника сигнал $g(t)$ пропорционален пространственной корреляционной функции (рис. 4.14, д):

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} I(x - vt) h(x) dx.$$

С учетом (4.4) и (4.5) получаем, что сигнал $g(t)$ представляет собой последовательность четырех импульсов, расстояние между которыми определяется параметрами D , d и v :

$$g(t) = \delta\left(t + \frac{D+d}{2v}\right) + \delta\left(t + \frac{D-d}{2v}\right) + \delta\left(t - \frac{D-d}{2v}\right) + \delta\left(t - \frac{D+d}{2v}\right).$$

Рис. 4.14

Измеряя с помощью блока электронной обработки информации (БЭОИ) временные интервалы T_1 и T_2 (рис. 4.14, д), можно определить контролируемый размер изделия D . Действительно, так как $T_1 = d/v$, а $T_2 = D/v$, то

$$D = d \frac{T_2}{T_1}. \quad (4.6)$$

Измерение интервалов T_1 и T_2 осуществляется путем заполнения их опорной последовательностью импульсов с частотой повторения ν и последующим подсчетом их числа N_1 и N_2 (рис. 4.14, е). Так как $N_1 = T_1 \nu$, а $N_2 = T_2 \nu$, то выражение (4.6) можно представить в виде

$$D = d \frac{N_2}{N_1}. \quad (4.7)$$

Вычисление размера согласно (4.7) происходит в БЗОИ, результат измерения отображается блоком индикации БИ.

Очевидно, что за время измерения при постоянных параметрах v и v , конечный результат не зависит от их абсолютных величин. Влияние же этих параметров на точность измерения несущественно, благодаря наличию эталонного размера d .

Задача многомерного контроля решается параллельной организацией процесса измерений, при которой для каждого сечения изделия используются отдельный приемник и устройство обработки сигналов. «Разводка» пучков, соответствующих различным сечениям изделия, производится с помощью волоконно-оптического блока (СВ).

Рис. 4.15

Конструкция блока СВ показана на рис. 4.15. Передняя площадка этого оптического узла представляет собой маску, на которую попарно выведены торцы световодов. Каждая пара световодов соответствует определенному сечению измеряемого изделия. Расстояние между центрами торцов характеризует минимально допустимый размер детали в данном сечении.

Процесс оконтуривания в БОО эквивалентен получению в реальном масштабе времени нечетных пространственных производных от изображения. Для этого необходимы амплитудные фильтры пространственных частот с достаточно широким изменением оптической плотности. Реализовать такую систему довольно трудно, к тому же это связано с большими энергетическими потерями вследствие экранирования амплитудной маской низкочастотных компонент пространственного частотного спектра изображения, где сосредоточена основная световая энергия. Чтобы ослабить указанные недостатки, необходимо воспользоваться фазовыми фильтрами. В качестве БОО используются оптические функциональные преобразователи, реализующие одномерное гильберт-преобразование.

Оптическая схема корреляционного одноканального измерительно-го устройства, использующего в качестве источника света лампу накаливания, приведена на рис. 4.16. Световой поток от лампы 1 собирается конденсором 2 на диафрагму 3. Перед коллиматором 4 установлен светофильтр, выделяющий из всего потока излучения лишь полосу частот, соответствующую красной области спектра. Полученный таким

Рис. 4.16

образом коллимированный пучок света соизмерим с габаритными размерами контролируемых деталей. Коллимированный свет зеркалами 5 и 6 после прохождения защитного стекла 7 направляется на контролируемое изделие 8. Дифрагированные световые пучки через иллюминатор 9 направляются в оптический процессор, состоящий из фурье-объектива 10, фильтра пространственных частот 11, расположенного в плоскости изображения щелевой диафрагмы 3 и объектива 12, выполняющего обратное фурье-преобразование.

Оптическая система предназначена для получения оконтуренного изображения контролируемой детали. Фазовый фильтр 11 представляет собой модернизированную пластинку Кастлера. Оконтуренное изображение изделия формируется в плоскости точечного транспаранта, роль которого выполняет волоконно-оптический блок световодов 13. Выход каждой пары световодов, соответствующих определенному сечению детали, связан с одним из фотоприемников. При движении контролируемого изделия перпендикулярно оптической оси системы контурное изображение детали пересекает входные торцы световодов и сигналы с фотоприемников поступают на входное устройство электронного блока БЭОИ.

В целом БЭОИ состоит из формирователя сигналов и блока обработки информации. Формирователь сигналов преобразует оптические сигналы в электрические, осуществляет предварительную аналоговую обработку и формирует синхросигнал и информационный сигнал

в логических уровнях напряжений. Блок обработки информации вычисляет размер контролируемого изделия, сравнивает полученное значение с предельно допустимым, осуществляет индикацию полученного результата на цифровом табло и управляет цифropечатающим устройством.

На рис. 4.17 приведена блок-схема макета блока обработки информации (БОИ). Синхросигнал и информационный сигнал поступают на устройство управления. Приход синхросигнала подготавливает устройство управления к работе. Из информационного сигнала формируются короткие импульсы, что позволяет сформировать соответствующие измерительные интервалы (для определения длительности интервалов между центрами импульсов 1–2 и 1–3). При этом длительности импульсов заполняются измерительными метками с частотой $\nu/2$ (400 кГц), а интервалы между ними – с частотой ν (800 кГц). Сформированные пакеты измерительных меток N_1 и N_2 подаются на счетчики, где последовательные числоимпульсные коды преобразуются в параллельные двоично-десятичные коды и хранятся для вывода их на устройство деления в требуемом виде по командам устройства управления.

Рис. 4.17

По командам устройства управления последовательный код N_2 и параллельные двоично-десятичные коды чисел N_1 и K поступают в устройство деления. Величина числа K устанавливается на переключателе K при калибровке БОИ. Размер контролируемой детали вычисляется устройством деления в два последовательных этапа: $N_2/N_1 = A$ и $A/K = D$.

С устройства деления результат вычисления размера в обратном параллельном десятично-двоичном коде поступает на устройство управления индикацией. Устройство сравнения последовательно сравнивает полученное значение размера с предельно допустимыми значениями по формулам $D < D_{\max}$ и $D > D_{\min}$. Если эти условия не выполняются, то формируется сигнал о браке, который поступает в устройство управления индикацией для счета и индикации количества бракованных деталей.

Код размера поступает также через устройство управления индикацией на цифровое устройство индикации, расположенное на передней панели БОИ. Так как скорость прохождения деталей может быть высокой, то устройство управления индикацией организует выборочную индикацию на табло и регистрацию на ЦПУ размеров. Время индикации регулируется потенциометром «Время индикации». С приходом следующего синхросигнала цикл обработки повторяется и вычисляется размер следующей детали. Как вариант, алгоритм обработки информации реализуется на программном уровне в компьютере.

Для того чтобы модифицированная система могла определять диаметры деталей одновременно в 5 (из 20 доступных) сечениях, в описанном блоке число входных каналов увеличивается до пяти, вводятся буферные регистры для хранения информации и коммутатор. Последний должен последовательно подключать выходы буферных регистров на вход блока обработки информации.

В комплект измерителя входит оптико-механический блок, выполненный в одноканальном варианте с осветительной лампой К-10, блок электронной обработки информации и подающий механизм (карусельный транспортер). Контроль изделий осуществляется в процессе непрерывного движения изделия в рабочей зоне измерения со скоростью 0,1...1,0 м/с. Максимальной скорости соответствует производительность контроля 1200 изд/мин. Режим работы измерителя автоматический. Начало цикла контроля каждого изделия задается синхроимпульсом, формируемым по окончании перемещения изделия на измери-

тельную позицию. Результаты измерения диаметров выдаются в десятичном коде. Испытания проводились при 7 значениях параметра расфокусировки детали δZ , а именно: +5,25 мм; +3,5 мм; +1,75 мм; 0 мм; -1,75 мм; -3,5 мм; -5,25 мм с использованием образцовой детали диаметром $D_3 = \varnothing 6966$ мкм. Пример результатов испытаний по 20 измерениям приведен в табл. 4.1.

Т а б л и ц а 4.1

№ п/п	δZ , мм	$\bar{D}$, мкм	$\ \bar{D} - D_3\ _{\infty}$, мкм	$\ \bar{D} - D_3\ _2$, мкм	$\bar{D}_0 = \frac{2\bar{D}_- \bar{D}_+}{\bar{D}_- + \bar{D}_+}$, мкм
1	0	6966	12	6,4	6966
2	+1,75	6943	9	6,7	6970
3	-1,75	6998	12	7,4	
4	+3,50	6929	12	6,6	6964
5	-3,50	7005	6	2,8	
6	+5,25	6918	12	6,8	6963
7	-5,25	7020	11	7,6	

Погрешность измерения диаметра детали, полученная на данном приборе, составила: средний модуль отклонения $\|\bar{D} - D_3\|_{\infty} - 12$ мкм (что соответствует 0,2 %); средняя квадратическая ошибка измерения $\|\bar{D} - D_3\|_2 - 8$ мкм (0,12 %). В последнем столбце табл. 4.1 приведены значения диаметров, полученные с учетом параметра расфокусировки по алгоритму, который реализуется с помощью двухканального оптического устройства, выполняющего измерения свободно падающих изделий. Свободное падение изделия позволяет исключить вибрацию и существенно упростить конструкцию механизма, подающего изделие в зону оптического контроля.

На рис. 4.18 показана принципиальная оптическая схема двухканальной системы измерения. Световой поток от лампы накаливания I направляется по двум идентичным каналам. Оптические оси обоих каналов параллельны друг другу. Введение в обычную систему дополнительного канала дает возможность компенсировать погрешности, связанные как с неточностью установки изделия в предметной плоско-

сти, так и с отклонением самой предметной плоскости от ее номинального положения (т.е. погрешность визирования или расфокусировки).

Рис. 4.18

Рассмотрим подробнее принцип действия данного устройства. Часть светового потока от лампы накаливания 1 направляется в измерительный канал. Полученный квазимонохроматический пучок света преобразуется первым коллимирующим объективом 2 конденсорной системы 2–6 в плоскую волну, падающую на светофильтр 3, выделяющий из общего спектра излучения определенную полосу частот (550...600 нм). Свет, прошедший далее поляризатор 4, становится линейно поляризованным и полностью отражается от светоделительной грани поляризационного светоделительного кубика 5. Встречный коллимирующий объектив 6 конденсорной системы 2–6 фокусирует световой поток в плоскости диафрагмы 7. Диафрагмой в данном случае служит оконтуривающий амплитудно-фазовый фильтр Кастлера с небольшим зазором (200 мкм) между двулучепреломляющими слюдяными пластинками, который и выполняет роль щелевой диафрагмы. С помощью объектива 8 и поворотного зеркала 9 формируется параллельный световой пучок, освещающий контролируемое изделие. Объектив 8' выполняет прямое фурье-преобразование светового поля. В задней фокальной плоскости этого объектива расположена фазовая пластинка Кастлера 7' с зазором, осуществляющая фазовую модуля-

цию. Объектив b' в данном случае служит для восстановления оконтуренного изображения контролируемой детали. Поляризационный кубик $5'$ и анализатор $10'$ ориентированы таким образом, что на входную плоскость блока световодов $11'$ попадает только вертикально поляризованное излучение.

Освещаемая поверхность волоконно-оптического блока световодов представляет собой транспарант точечного типа. Торцы световодов располагаются вдоль одной линии. Каждая пара световодов соответствует определенному сечению и сопряжена с определенным фотоприемником. Как уже отмечалось ранее, такая конструкция позволяет осуществлять многомерный контроль.

Принцип действия второго, встречного оконтуривающего канала оптической системы аналогичен принципу действия первого. И в этом случае световой поток, несущий информацию о контуре детали, имеет также вертикальную поляризацию, так как светоделительный кубик 5 и анализатор 10 ориентированы соответствующим образом. Освещаемая поверхность волоконно-оптического блока 11 во втором канале согласована с первым каналом. Каждая пара световодов в обоих каналах сканирует определенное сечение контролируемой детали.

При идеальной установке детали на измерительной позиции расстояния между максимумами видеосигнала, полученного в результате корреляции оконтуренного изображения движущейся детали с двумя точечными диафрагмами, размер которых определяется диаметром торца одиночного световода, идентичны в обоих каналах.

Если же деталь расфокусирована, то расстояния между максимумами при постоянной скорости движения детали изменяются согласно формуле

$$D_{+,-} = \frac{D_0}{1 \pm \delta Z},$$

где D_0 – номинальное расстояние между первым и третьим максимумами «видеосигналов»; δZ – нормированная величина расфокусировки. Причем в одном канале расстояние между максимумами увеличивается, а во втором – уменьшается (в зависимости от знака «+» или «-» параметра расфокусировки δZ).

Для исключения влияния расфокусировки δZ на результат измерения диаметр детали определяется по формуле

$$\bar{D}_0 = 2 \frac{D_- D_+}{D_- + D_+}.$$

Оптическая двухканальная схема позволяет осуществлять многомерные измерения с приемлемой погрешностью и в условиях неточного позиционирования детали.

Рассмотрим компенсацию погрешности измерений при наклоне детали. В общем случае погрешность, вызванная поперечной составляющей наклона детали, в данной системе компенсируется учетом поправочного коэффициента $K_\alpha = \cos \alpha$, где α – поперечная составляющая угла наклона детали. Для вычисления этого поправочного коэффициента в первом канале одна из пар световодов дополняется третьим световодом. Взаимное расположение световодов показано на рис. 4.19, а).

При таком наклоне расстояние между максимумами видеосигнала меняется согласно рис. 4.19, б. Вводя численные значения расстояний T_1 и T_2 в буферную память БЭОИ, можно реализовать алгоритм вычисления поправочного коэффициента по формуле

$$K_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (4\Delta T/T)^2}} = \frac{T}{\sqrt{T^2 + 16(\Delta T)^2}},$$

Рис. 4.19

где $T = T_1 + T_2$; $\Delta T = (T - 2T_1)/2$. Следует заметить, что для вычисления нормированного значения диаметра детали в данном сечении используется расстояние T по аналогии с парными световодами.

При равноускоренном движении детали [96], например при свободном падении, алгоритм нормировки усложняется и в соответствии с рис. 4.20 описывается формулой

$$D_{1,2} = d \frac{T_0 - T_1}{T_1} + 0,5 g (T_0 - T_1) T_0,$$

где g – ускорение свободного падения; d – расстояние между торцами световодов. Истинный размер вычисляется по формулам

$$D_0 = 2 \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 \left[\frac{T - 2T_1}{T} + \frac{g T_1}{d} (T - T_1) \right].$$

В реальной системе при измерении диаметра образцовой детали цилиндрической формы (диаметр $D_s = 6966$ мкм) средняя квадратическая ошибка измерения составила 6 мкм. Применение двухканальных систем позволяет допускать ошибку в позиционировании детали в пределах ± 6 мм. Производительность системы ~ 1000 деталей/мин.

Рис. 4.20

При контроле фазовых искажений в изделиях, имеющих значительную пространственную кривизну во всех трех измерениях, трудно обнаружить дефекты, вызывающие оптические нарушения обзора. Искажение изображения – это вытягивание или сужение наблюдаемого предмета по одному или нескольким направлениям. По технологическим причинам любой элемент из прозрачного материала является в той или иной степени призмой, приводящей к возникновению оптических искажений, называемых «игрой изображения».

Субъективный контроль оптических свойств плоского стекла позволяет обнаруживать некоторые дефекты, приводящие к деформации изображений. Метод контроля основан на сравнении изображения «креста», спроецированного на экран через контролируемое стекло и без него. Результат зависит от оценки качества контролером, находящимся с одной стороны объекта и рассматривающим сквозь объект из органического стекла предметы, удаленные от него на 10 и более метров.

Проблемы получения данных углового отклонения лучей света по всему полю зрения решены созданной в НИИ технологии и организации производства установке КОИ-4 для контроля оптических искажений и локальных дефектов изделий из прозрачных термопластичных материалов в производственных условиях [97]. Метод контроля позволяет измерять полярный угол преломления лучей света при их прохождении через контролируемый объект, представляющий собой изделие из органического стекла, ограниченное плоскими или криволинейными поверхностями.

Оптическая схема установки для контроля и измерения оптических искажений в криволинейных деталях из прозрачных термопластичных материалов показана на рис. 4.21. По существу, это цветной теневой прибор, схема и конструкция которого учитывают специфику работы в производственных условиях. Световой поток от источника света через тепловой фильтр 2 собирается объективом 3 на угловом зеркале 4, расположенном в центре сферического зеркала 5. Расходящийся конус световых лучей проходит контролируемый объект, отражается от сферического зеркала, проходит вторично контролируемый объект. Лучи света, угол преломления которых меньше заданного, попадают в плоскость зеркала 4 и рассеиваются. Остальные лучи проходят через полихроматический пространственно-частотный фильтр, представляющий собой

Рис. 4.21

концентрическую конфигурацию цветных фильтров 6, наклеенных на плоскопараллельную пластину 7. В результате лучи из белых превращаются в цветные. Их цвет показывает, что лучи отклонены контролируемым объектом в пределах, определяемых конструктивными параметрами установки. Объектив 8 собирает эти лучи и строит на выходном экране цветное изображение контролируемого объекта. Фактически фильтры в совокупности с зеркалом 4 образуют полихроматический фильтр Фуко–Гильберта в осесимметричной конфигурации. В описанной установке все поле зрения представляет собой массу светящихся точек и полученная на экране окраска соответствует полярному углу преломления каждой светящейся точки. При этом нет необходимости проводить повторные измерения.

В схеме контроля применялось сферическое зеркало 5 с диаметром 500 мм и фокусом 1000 мм. Конструкция предусматривала возможность юстировки системы. Источником света 1 служила кварцевая малогабаритная лампа. В качестве теплового фильтра использовалась вода (слой 20 мм), налитая в кювету, а в качестве конденсорной системы – ахроматический объектив $\varnothing 50$ мм. Угловое зеркало имело диаметр $\varnothing 3$ мм. Полихроматический пространственно-частотный фильтр состоял из набора колец зеленого, желтого и красного цвета. Угол зрения системы 5° , что соответствует углу острого зрения человека. Пространственное разрешение 1 мм. Цветное кодирование углов отклонения тестирующих лучей: серый цвет экрана ($0 \leq \alpha \leq 1 \cdot 10^{-3}$ рад); зеленый ($1 \cdot 10^{-3} \leq \alpha \leq 3 \cdot 10^{-3}$ рад); желтый ($3 \cdot 10^{-3} \leq \alpha \leq 8 \cdot 10^{-3}$ рад); красный ($8 \cdot 10^{-3} \leq \alpha \leq 12 \cdot 10^{-3}$ рад). Экспериментально было установлено, что

продольные перемещения контролируемого изделия на результаты измерения не влияют. Поэтому манипулятор в установке (рис. 4.22), перемещающий изделие в поле зрения, может быть достаточно простым. Цветное изображение участка контролируемого объекта диаметром 500 мм воспринимается на выходном экране в масштабе 2 : 1. Процесс контроля сводится к слежению за цветом выходного изображения. По цвету дефектной зоны на экране оценивается величина углового отклонения лучей, прошедших через контролируемый объект. При наличии на контролируемой детали локальных дефектов в виде царапин, трещин или включений на экране наблюдаются черные полосы и точки, размер которых определяется по шкале экрана.

Рис. 4.22

Описанную установку можно прокалибровать, используя два автоколлиматора. Контролируемый объект помещают между автоколлиматорами и делают отсчеты смещений двух визируемых крестов относительно друг друга. Просканировав таким образом весь контролируемый объект, можно получить очень подробное метрологическое описание оптических искажений. С использованием данной методики установка КОИ-4 была проверена на соответствие цвета сформированного ею изображения граничным значениям углов преломления. Описанная система при использовании высококачественных зеркал отличает-

ся тем, что одновременно исследуется большая площадь контролируемого объекта, что уменьшает время и трудоемкость контроля.

Установка представляет собой основание (рис. 4.22), на котором размещены стойки. На одной стойке закреплено сферическое зеркало. На второй стойке размещены источник света, объективы, угловое зеркало, светофильтры, плоскопараллельная пластинка, матовый экран. Для охлаждения источника света предусмотрен вентилятор. Контролируемая деталь помещается между стойками и закрепляется в рамке на столе, имеющем перемещение вдоль оптической оси установки. Для обеспечения полного осмотра детали необходимо последовательно диагностировать всю поверхность контролируемой детали. Система эксплуатируется в авиационной промышленности.

4.3. ГИЛЬБЕРТ-ДИАГНОСТИКА ПОТОКОВ В ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕПЛОФИЗИКИ

Визуализация полей оптической плотности является одним из эффективных способов изучения структурных характеристик потоков жидкостей и газов. Наиболее широко применяются теневые методы [98–101]. Результат визуализации обычно представляется в виде черно-белой тенеграммы.

Методы гильберт-оптики [1] могут обеспечивать более высокую чувствительность. В структуре гильберт-тенеграммы содержатся признаки, позволяющие получать численные характеристики оптического поля плотности без привлечения для этих целей средств интерферометрии.

Визуализация внутренних волн, индуцированных движением цилиндрического тела [47]. Методы бихроматической гильберт-фильтрации использовались для визуализации внутренних волн, генерируемых в стратифицированной среде при движении цилиндра. Упрощенная схема экспериментальной установки показана на рис. 3.18. Стратифицированная жидкость помещалась в кювету, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда с окнами оптического качества. В жидкости (воде) создавался вертикальный градиент фазовой оптической плотности. Цилиндрическое тело, помещенное в стратифицированную среду, могло ориентироваться вертикально или горизонтально в плоскости, ортогональной оптической оси системы из последова-

тельно расположенных коллиматорного и фурие-объективов. Фокусное расстояние фурие-объектива 9 – 600 мм, линейная апертура – 60 мм. Диаметр цилиндра – 6 мм. Цилиндр мог двигаться поступательно с постоянной скоростью в горизонтальном или вертикальном направлениях в плоскости, ортогональной оптической оси. Кроме того, цилиндр мог совершать колебательные движения по горизонтальной оси в этой же плоскости с заданной амплитудой и частотой. Оптическая система выполняла в реальном времени бихроматическую гильберт-визуализацию динамических возмущений оптической фазовой плотности, возникающих при движении цилиндра в стратифицированной жидкости [102–105].

Разработанная система [47] была использована для цветной визуализации в реальном времени внутренних волн, генерируемых при движении цилиндрической модели.

На рис. II (цветная вклейка) приведены видеокadres, отображающие бихроматическую гильберт-визуализацию динамических возмущений оптической фазовой плотности с выборкой через интервал 80 мс (начало движения цилиндрического тела в стратифицированной жидкости).

Выборка видеокadres на рис. III (цветная вклейка) иллюстрирует бихроматическую гильберт-визуализацию динамических возмущений оптической фазовой плотности, индуцированных горизонтальным движением справа налево цилиндрического тела в стратифицированной жидкости по горизонтальной оси со скоростью 5 мм/с (интервалы между кадрами: 1–10 – 2 с; 10–15 – 8 с).

На цветных гильберт-тенеграммах хорошо видна система полос, определяемая разностями фаз в пространственном распределении выходного оптического сигнала.

Бихроматическая гильберт-визуализация динамических возмущений оптической фазовой плотности, индуцированных колебательным движением цилиндрического тела в стратифицированной жидкости по горизонтальной оси (амплитуда скорости – 15 мм/с), показана на рис. IV (цветная вклейка).

Примером бихроматической гильберт-визуализации динамических возмущений оптической фазовой плотности, индуцированных вертикальным движением цилиндрического тела в стратифицированной жидкости со скоростью 12 мм / с, является выборка видеокadres, приведенная на рис. V (цветная вклейка).

Гильберт-визуализация течения в щелевом канале. На рис. VI (цветная вклейка) показаны примеры бихроматических тенеграм Фуко–Гильберта, отображающие динамические возмущения оптической фазовой плотности при обтекании цилиндра жидкостью (водой) в щелевом канале типа ячейки Хил–Шоу [106–108] при разных скоростях потоков. Визуализация выполнялась в оптической системе, показанной на рис. 3.18. Цилиндр диаметром 30 мм и толщиной $h = 0,93$ мм (толщина щелевого канала) устанавливался на расстоянии 200 мм от входного коллектора. Стенки рабочего канала изготовлены из органического стекла. Картина течения жидкости наблюдалась через иллюминаторы диаметром 110 мм из оптического стекла, установленные заподлицо в стенках канала в окрестности цилиндра. Для введения тепловых меток между входным коллектором и цилиндром в поток вводились струйки подогретой жидкости. Расход подогретой воды составлял 10 % расхода через канал. Опыты проведены при скорости жидкости в канале 0,5...1,0 м/с, что соответствует $Re = 1000...2000$, подсчитанному по удвоенной толщине зазора.

Видеокадры, иллюстрирующие бихроматическую визуализацию Фуко–Гильберта полей фазовой оптической плотности в конвекционных потоках, возникающих вблизи кожного покрова руки из-за температурных градиентов, показаны на рис. VII (цветная вклейка). Фотографии получены на теневом приборе ИАБ-451 с модифицированным узлом фильтрации.

На рис. VIII (цветная вклейка) показаны примеры полихроматической гильберт-визуализации конвективного потока от нагретой никромовой спирали в воде. Фотографии получены с применением цветного гильберт-визуализатора полей фазовой оптической плотности, выполненного по оптической схеме (см. рис. 3.19). Размер гильберт-тенеграммы по диагонали составляет 39 мм. Кадры видеофильма хорошо отображают в реальном времени процессы зарождения, роста и колебаний пузырьков, а также динамическую структуру конвекционного теплового поля. Используемый прибор представляет собой оптическую систему, функциональные возможности которой расширены на полихроматическую гильберт-фильтрацию микромасштабных полей фазовой оптической плотности исследуемой среды.

Гильберт-визуализация конвективных ячеек Бенара. Для исследования эволюции пространственной структуры конвективного течения разработан и создан автоколлимационный бихроматический

визуализатор, упрощенная оптическая схема которого приведена на рис. 4.23.

Рис. 4.23

В приборе используются бихроматический источник света и квадрантный фильтр Фуко–Гильберта. Линейный бихроматический источник, состоящий из элементов 1–4, служит для формирования некогерентного источника, ориентированного параллельно оси u в плоскости, проходящей через ось u и оптическую ось системы. Хроматические компоненты источника, параллельные осям $\pm u$, излучают свет в синей и красной областях спектра соответственно. Они формируются выходным торцом световолоконных преобразователей 4 и 4'. На входные торцы этих волоконных преобразователей через синий 3 (СС–5) и красный 3' (КС–13) светофильтры конденсорами 2 и 2' переносятся изображения излучающего элемента галогенной лампы 1.

Изображения хроматических компонент линейного бихроматического источника проецируются в оптически сопряженной плоскости автоколлиматора на вертикальную кромку квадрантного фильтра Фуко–Гильберта 9 вдоль положительной и отрицательной полуосей u . Объектив 10 (объектив видеокамеры) выполняет обратное фурье-преобразование пространственно-частотного сигнала и восстанавливает фильтрованный сигнал на фотоматрице камеры.

Свет от бихроматического линейного источника светоделительным кубиком 5, фурие-объективом 6 и зеркалом 7 направляется в ванну с исследуемой жидкостью. Отраженное от поверхности исследуемой жидкости световое поле является оптическим сигналом, амплитуда и фаза которого несут информацию о динамических возмущениях поверхности. Объектив 6 формирует фурие-спектр этого сигнала в частотной плоскости, где помещен квадрантный фильтр Фуко–Гильберта. Фильтрованный сигнал восстанавливается и фиксируется CCD-камерой. Видеосигнал вводится в компьютерную систему обработки. В компьютере отображается цветная гильберт-тенеграмма с хроматическим кодированием знака градиента фазовой плотности, а величина градиента – градациями цветовой насыщенности между основными цветами.

Частотная плоскость прибора с изображениями хроматических компонент щелевых источников показана на рис. 4.24. Исследовалось явление конвективной неустойчивости в горизонтальных слоях свободной жидкости, заключающееся в следующем [109, 110]. Пусть имеется горизонтальный слой жидкости. Нижняя граница слоя контактирует с плоским нагревателем. Верхняя поверхность слоя жидкости граничит с воздухом. При включении нагревателя возникает и поддерживается температурный градиент. Пока градиент не слишком велик, тепло переносится от нижней границы слоя к верхней за счет теплопроводности, а жидкость остается спокойной. Когда же величина градиента превосходит некоторый порог, в жидкости внезапно возникает структурированное конвективное движение. При этом образующиеся конвективные структуры имеют упорядоченный вид и представляют собой цилиндрические либо гексогональные конфигурации, получившие название ячеек Бенара. В конвективных структурах Бенара жидкость поднимается в центре ячейки и опускается у ее границ либо наоборот. В ячеистой структуре конвективный теплообмен между нижней и верхней поверхностями слоя жидкости интенсифицируется. Формирование и эволюция ячеек Бенара

Рис. 4.24

является примером самоорганизации упорядоченных структур в открытых системах. В эксперименте изучалась возможность визуализации этих процессов методами автоколлимационной бихроматической фильтрации Фуко–Гильберта.

Вначале были выполнены исследования по бихроматической визуализации рельефной структуры слоя подсолнечного масла диаметром 250 мм, толщиной 5 мм. Масло помещалось в круглой ванне из серого чугуна, поставленной на нагреватель. Толщина дна ванны 5 мм. В качестве нагревателя использовалась электроплитка. На рис. IX (цветная вклейка) приведены кадры, полученные из видеофильмов и иллюстрирующие динамические изменения структуры свободной поверхности горизонтального слоя подсолнечного масла (*а*) и слоя жидкости ПЭС-5, толщиной 9 мм (*б*). Хорошо видны ячейки Бенара в виде упорядоченных структур. Пятна в структуре ячеек указывают на локальную кривизну поверхности.

Выборка хронофотографий из видеофильмов на рис. X показывает эволюцию структур ячеек Бенара при нагревании (рис. X, *а*) и остывании (рис. X, *б*). В эксперименте использовалась полиэтилсилоксановая жидкость ПЭС-5 с коэффициентом вязкости $\nu = 250 \text{ мм}^2/\text{с}$. Размеры слоя жидкости: $\varnothing 250 \text{ мм}$, толщина 5 мм. Исследовался горизонтальный слой жидкости ПЭС-5 со свободной верхней поверхностью (толщина слоя 5 мм). Время указано с момента включения нагревателя. Нагреватель работал в течение 10 минут. Между нагревателем и дном ванны помешалась алюминиевая пластина толщиной 6 мм.

Для сравнения приведены фотографии на рис. 4.25, полученные в работе [111] с применением в экспериментах тепловизора, позво-

Рис. 4.25

ляющего получить качественно новую информацию о поле температуры поверхности жидкости (этиловый спирт). Кадры из тепловизионных фильмов показаны для различных толщин слоя жидкости (светлые области соответствуют более высокой температуре): *а* – толщина слоя жидкости 3,8 мм; *б* – 4,8 мм.

4.4. МЕТОДЫ ГИЛЬБЕРТ-ОПТИКИ В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ГАЗОДИНАМИКЕ

Наблюдение крупномасштабных гидродинамических структур в вихревой трубке и эффект Ранка. Визуализация полей оптической плотности является одним из эффективных способов изучения структурных характеристик потоков газовых и конденсированных сред. Методы гильберт-оптики обеспечивают более высокую чувствительность при визуализации фазовых структур [1, 2]. Цветная гильберт-визуализация полей фазовой оптической плотности применялась для исследования гидродинамических структур в вихревой трубке Ранка [112–114]. Эффект Ранка заключается в явлении энергоразделения в закрученном потоке и до сих пор не имеет адекватного физического обоснования. Общепринятым является предположение о принципиальном влиянии крупномасштабных вихревых структур на эффект Ранка [115, 116]. Для выяснения этого предпринята попытка экспериментального наблюдения гидродинамических структур в вихревой трубке Ранка. Для этого использован метод цветной гильберт-визуализации фазовых полей оптической плотности закрученных потоков, предусматривающий компенсацию оптических искажений от стационарных температурных градиентов [112]. Создан действующий образец визуализатора с полем наблюдения $\varnothing 100$ мм. Оптический сигнал регистрируется скоростной видеокамерой и вводится в систему обработки на базе персонального компьютера для выявления структурных и кинематических параметров исследуемого процесса.

Схема эксперимента показана на рис. 4.26. В качестве объекта исследования выбран вихревой канал с квадратным сечением и прозрачными стенками, в котором организован закрученный поток, подобный течению в трубке Ранка. На «холодном» конце воздух закручивается в щелевом завихрителе. «Горячий» конец выполнен в виде радиального диффузора. Общий вид вихревой трубки Ранка приведен на рис. 4.27. На рис. 4.28 схематически показана структура вихревых потоков в трубке Ранка–Хилша.

С применением бихроматической фильтрации Фуко–Гильберта выполнялась визуализация в реальном времени градиента фазового поля оптической плотности в поперечном и продольном направлениях вихревого канала с минимальным временем экспозиции 250 мкс при разных

Рис. 4.26

динамических режимах. Характеристики вихревой трубы, соответствующие режиму визуализации, следующие: P , МПа – 0,6; G , кг/с – $4,5 \cdot 10^{-2}$; ΔT_x , К – 33,9; ΔT_p , К – 11,6; μ – 0,26; η – 0,3 (P – давление на входе в канал; G – полный расход воздуха; ΔT_x , ΔT_p – изменение температуры на «холодном» и «горячем» выходах; μ – отношение расхода на «холодном» выходе к полному; η – адиабатический КПД охлаждения).

Рис. 4.27

Рис. 4.28

Установлено существование крупномасштабных структур, время жизни которых превышает время экспозиции. Пример визуализиро-

ванного течения показан на рис. XI (цветная вклейка). Впервые обнаружена двойная вихревая спираль [112–114], которая зарождается на плоской торцевой поверхности около периферийного выхода горячего воздуха, а затем распространяется вдоль продольной оси, многократно перезаменяясь и разрушаясь. В середине трубки можно выявить только отдельные ее фрагменты. Зафиксировано вращательное движение вихревой спирали. Наличие спиральной структуры свидетельствует об интенсивном обратном токе вдоль оси течения. Существование обнаруженных биспиральных вихревых структур подтверждено [2, 117] методом лазерной доплеровской визуализации полей скоростей в этой же трубке при аналогичных режимах течения. Пример-реконструированного поля скоростей показан на рис. XII (цветная вклейка).

Исследование ударных волн и динамических возмущений в газовых средах. Модифицированные методы гильберт-фильтрации и сдвиговой интерферометрии оказываются полезными при визуализации тонкой структуры ударных волн и динамических возмущений, индуцированных в среде распространения.

Исследования ударных волн выполнялись на экспериментально-измерительном стенде, состоящем из визуализатора полей оптической фазовой плотности, в качестве которого использовался теневой прибор ИАБ-463М с модифицированной системой оптической фильтрации. Поле зрения системы ИАБ-463М имеет диаметр 400 мм, регистрация выполняется CCD-камерой (экспозиция видеокадра 10 мкс). Ударная труба, предоставленная ВНИИЭФ для выполнения экспериментов, содержит цилиндрический канал с внутренним диаметром 51 мм и камеру давления, разделенные диафрагмой. Камера заполняется сжатым воздухом. Управляемое разрушение диафрагмы при заданном давлении инициирует формирование ударной волны на выходе канала. Исследовались динамические структуры ударных волн и индуцированных ими возмущений при распространении в воздухе. Модифицированная система оптической фильтрации позволяла использовать двумерный и квадрантный фильтры Гильберта, что обеспечивало выполнение чистого гильберт-преобразования световых полей, исключение фона и существенное повышение чувствительности по сравнению с амплитудным фильтром Фуко–Гильберта. Эти отличительные особенности гильберт-фильтрации в полной мере подтвердились на практике и позволили выявить тонкие динамические структуры ударных волн.

Экспериментальные исследования динамических структур, индуцированных ударными волнами, проводились также на портативной ударной трубе, созданной на основе спортивного пневматического ружья, переделанного для стрельбы алюминиевой фольгой [118]. На рис. 4.29, б, в, г, д приведены гильберт-тенеграммы фазовой структуры ударной волны и индуцированных ею возмущений в среде распространения (воздух). На рис. 4.29, а для сравнения показана аналогичная визуализированная структура ударной волны и индуцированных ею возмущений в воздушной среде, полученная с использованием фильтрации Фуко–Гильберта.

Рис. 4.29

Из сравнения рис. 4.29, б–д и 4.29, а видно, что гильберт-фильтрация позволяет выявить более тонкую фазовую структуру, чем фильтрация Фуко–Гильберта.

На рис. 4.30, а приведен характерный пример визуализации ударной волны и сопутствующих динамических возмущений, полученный на ударной трубе ВНИИЭФ при использовании амплитудного квадрантного фильтра Фуко–Гильберта. Для сравнения на рис. 4.30, б показана визуализация с применением оптической гильберт-фильтрации на основе квадрантного «фазового ножа», сопряженного с изображением вертикального щелевого источника света. На рис. 4.30, г показаны динамические возмущения, индуцированные ударной волной, визуализированные с использованием фильтра Фуко–Гильберта. На рис. 4.30, в показан одномерный гильберт-образ динамической структуры возмущений при тех же условиях, что и на рис. 4.30, г. Применялся квадрантный оптический гильберт-фильтр, такой же, как при получении тенеграммы на рис. 4.30, б (время экспозиции 10 мкс). Ударная волна формировалась при давлении в камере сжатия 3 атм.

Рис. 4.30

Сравнение рис. 4.30, б и 4.30, в с 4.30, а и 4.30, г иллюстрирует качественно новые возможности оптической гильберт-фильтрации по разрешению в сравнении с использованием амплитудных одномерного и квадрантного фильтров Фуко–Гильберта в традиционных теневых и шлирен-системах. Повышенная чувствительность при гильберт-фильтрации, как видно из рис. 4.30, б и 4.30, в, позволяет выявить тонкую динамическую структуру ударной волны и индуцированных ею возмущений в среде распространения.

На рис. 4.31, а' – в' представлены сдвиговые интерференционные картины ударной волны, полученные с помощью модифицированной интерференционной приставки к теневому прибору ИАБ–463М при настройке ее на полосы, перпендикулярные вертикальному сдвигу на величину 3 мм. Картины динамических возмущений примерно соответствуют показанным на рис. 4.31, а – в структурам ударных волн и индуцированным ими возмущений, визуализированных с применением

Рис. 4.31

оптической гильберт-фильтрации. Ударная волна формировалась при давлении в камере сжатия 3 атм (рис. 4.31, *а* и 4.31, *б*) и при давлении – 5 атм (рис. 4.31, *в*). Структура возмущений представляет собой кольцевой вихрь, направление распространения которого совпадает с направлением движения УВ.

Методы гильберт-фильтрации использовались при исследовании ударных волн в гиперзвуковой трубе АТ-303 [119]. Гиперзвуковая аэродинамическая труба АТ-303 создана в ИТПМ СО РАН для экспериментов при натурных числах Рейнольдса, реализуемых при полете воздушно-космических летательных аппаратов [120].

По совокупности таких параметров, как числа Маха и Рейнольдса, качество рабочего газа, длительность импульсного режима при постоянном давлении, она не имеет аналогов.

На рис. 4.32 [121] представлены структурная схема аэродинамической трубы адиабатического сжатия АТ-303 и ее основные характеристики. Предварительно сжатый и нагретый газ в форкамере аэродинамической трубы адиабатически дожимается до высоких параметров торможения с помощью симметрично расположенных мультипликаторов давления. Движение поршней обеспечивается двухступенчатым пневмогидравлическим приводом. После открытий соплового затвора

Технические характеристики

Диаметр сопла, D , мм,	300–600	Число Маха, M ,	8–20
Объем форкамеры, дм^3 ,	6	Число Рейнольдса, Re_p ,	10^6 – 10^7
Давление в форкамере, атм,	3000	Время рабочего режима t , с,	0,04–0,2
Температура в форкамере, К,	до 2500	Рабочий газ.	азот, воздух

Рис. 4.32

газ через сопло истекает в рабочую часть, где формируется квазистационарный рабочий поток. Эксперименты проводились с использованием воздуха в качестве рабочего газа при диаметре среза сопла 300 мм. Для увеличения продолжительности режима при моделировании низких чисел Re использовалась двойная форкамера.

Важную роль в измерительном комплексе АТ-303 играет система оптической визуализации течений и оптических измерений характеристик потока. Эта система включает два оптических устройства: хорошо известный теневой прибор ИАБ-451 с диаметром поля зрения 230 мм и уникальный голографический интерферометр ИЗК-462 с диаметром поля зрения 400 мм. Оба этих прибора подвешены на общей плавающей раме, которая может легко перемещаться вдоль окон рабочей части аэродинамической трубы АТ-303.

Для регистрации тенеграмм используется высокоскоростная цифровая видеокамера, которая позволяет производить до 2500 снимков в секунду с записью их в собственную цифровую память с емкостью 512 Мбайт. Общий вид гиперзвуковой аэродинамической трубы АТ-303 с оптическим измерительным комплексом представлен на рис. 4.33.

На рис. 4.34 приведены примеры оптической визуализации – тенеграммы Фуко–Гильберта [121] обтекания различных моделей при $M_\infty = 15$: *а* – с короткой «юбкой»; *б* – с длинной «юбкой» (*1* – головная

Рис. 4.33

Рис. 4.34

ударная волна (УВ); 2 – УВ от излома поверхности модели; 3 – отрывной скачок уплотнения; 4 – контактный разрыв; 5 – волна разрежения).

Реализация широкого диапазона чисел Рейнольдса в АТ-303 (вплоть до натурных условий) позволила выявить важные особенности в формировании тепловой нагрузки на поверхность модели.

На рис. 4.35 [122] приведены примеры тенегрмм Фуко–Гильберта фазовой структуры ударной волны, возникающей при обтекании модели НВ-2 гиперзвуковым потоком с параметрами: $M_\infty = 9,7$ (а, б, в), $\alpha = 0$ (а), 8° (б), 12° (в), $Re = 1,35 \cdot 10^6$; $M_\infty = 10$ (з), $\alpha = 10^\circ$ (з), $Re = 0,12 \cdot 10^6$.

Визуализация картины обтекания моделей в аэродинамической трубе АТ-303 реализована с помощью оптических теневых приборов ИАБ-451 и ИЗК-462 с размером поля зрения 230 и 400 мм соответственно. Первый обеспечивает более высокое качество получаемой картины, однако для моделей длиной более 0,23 м возможна лишь фрагментарная съемка. Пример такой визуализации обтекания носовой части модели НВ-2 показан на рис. 4.35, а. Картина обтекания модели НВ-2 при $\alpha = 4^\circ$, полученная с помощью прибора ИЗК-462 в отдельном пуске, свидетельствует о безотрывном характере обтекания стабилизирующего конуса. При $\alpha = 8^\circ$ (рис. 4.35, б) наблюдается наличие оптической неоднородности вблизи стабилизирующего конуса с наветренной стороны, а при $\alpha = 12^\circ$ (рис. 4.35, в) – наличие скачка уплотнения как результата отрыва течения в области перехода от цилиндрической поверхности к конической.

Рис. 4.35

О влиянии числа Рейнольдса на картину обтекания модели можно судить из рис. 4.35, *г* ($M_\infty = 10$, $Re = 0,12 \cdot 10^6$). Видно, что даже при $\alpha = 10^\circ$ сохраняется безотрывное обтекание модели на всей ее длине.

Методами оптической диагностики, основанной на лазерных измерительных технологиях и гильберт-оптике, выявлено существование динамических структур в ударной волне. Эти динамические структуры возникают, по-видимому, из гидродинамической («гофрированной», по терминологии Ландау) неустойчивости, развивающейся на волновом фронте, и имеют сходство с колебательными модами. Возмущение на фронте УВ хорошо видно на рис. 4.36, *а*, *б*, на котором показаны примеры визуализации полей плотности потока при обтекании тестовой модели при гиперзвуковом потоке ($M_\infty = 10$). Фотографии получены при выполнении интеграционного проекта СО РАН № 28.

Рис. 4.36

Исследование динамики тороидальных вихревых структур. Интерес к исследованию вихревых колец, обусловлен важностью понимания процессов вихреобразования в фундаментальных и прикладных задачах гидро- и газодинамики [123]. Обзор работ, посвященных изучению свойств вихревых колец приведен в [124–128]. Однако адекватных физических и теоретических моделей, описывающих формирование и структуру вихревых колец, до сих пор не создано. В работе [123] приводятся результаты экспериментального исследования вихревых колец в зависимости от изменения параметров генератора, определяющих их свойства. Генератор состоял из баллона со сжатым воздухом, управляющего клапана, цилиндрической камеры с соплом, диаметр выходного отверстия которого 0,075 м. В зависимости от числа Рейнольдса в эксперименте формировались два типа вихревых колец. При $Re \leq (1-2) 10^4$ образовывались вихри со слоеной спиральной структурой, которая не изменяется при дальнейшем движении. Структура вихревых колец при больших числах Рейнольдса не является слоистой. Она турбулентна. Тем не менее при визуализации таких колец дымом хорошо просматривается в сечении, выделенном световой плоскостью, тороидальное ядро. На рис. 4.37 показаны оба типа вихря, визуализированных дымом. Поскольку вихри освещены тонкой световой плоскостью, фотографии показывают только меридиональные сечения. На правой фотографии, представленной на рис. 4.37, показан вид турбулентного вихря в анфас. Отмечено, что по тороидальному вихрю дым распределяется в форме пятнистой структуры, а ядро состоит из подобия отдельных ячеек, ограниченных поверхностью тора и меридиональными плоскостями.

Рис. 4.37

Интерес к исследованию вихревых колец у авторов был вызван не только желанием расширить область применения гильберт-диагностики на задачи такого рода. Дело в том, что возникла проблема экспериментальной проверки некоторых результатов численного моделирования, выполненного д.т.н. Н.А. Дворниковым в Институте теплофизики СО РАН. Моделировался процесс зарождения тороидальных вихрей при внезапной разгерметизации цилиндрической плоскости с повышенным давлением газа. Использовалось уравнение Навье–Стокса для ламинарного, сжимаемого осесимметричного течения. В модели рассматривалось устройство для генерации тороидальных вихрей, представлявшее собой цилиндрическую камеру диаметром 200 мм, разделенную перегородкой с отверстием, радиус которого 10 мм. Перегородка разделяет камеру на секцию с повышенным давлением $P + \Delta P$ и секцию с атмосферным давлением. Длина первой секции – 100 мм. Вторая секция имела длину 200 мм. Секция с атмосферным давлением открыта в атмосферу. Секция с повышенным давлением закрыта с торца стенкой. Рассматривалась нестационарная задача образования вихрей разгерметизации стенки отверстием, диаметр которого 200 мм. В результате численного моделирования показано, что в этих условиях формируются кольцевые вихри, движущиеся вдоль оси отверстия в противоположных направлениях от разгерметизированной стенки.

На рис. 4.38–4.40 показаны линии тока и плотность газа в развивающихся вихрях как в прямом, так и в обратном направлениях при перепаде давления в 101 Па, на рис. 4.41, 4.42 – аналогичные данные при перепаде давления в 1010 Па. Видно, что при увеличении перепада давления вихрь в обратном направлении больше запаздывает в своем развитии, чем при более низком перепаде давления.

Рис. 4.38

Рис. 4.39

Если построить продольные координаты центра кольцевого вихря в зависимости от времени, то они лягутся на прямые линии, по которым можно определить, что при перепаде 101 Па время запаздывания прямого вихря 0,002 с, обратного 0,036 с, скорость прямого вихря 2,15 м/с, обратного 1,67 м/с.

0.0136 с 101 Па

Рис. 4.40

Аналогично, при перепаде давления 1010 Па время запаздывания прямого вихря 0,0009 с, обратного 0,0087 с, скорость прямого вихря 15,2 м/с, обратного 1,62 м/с.

Экспериментальное обоснование результатов численного моделирования выполнялось методами оптической гильберт-диагностики. Для этого использовался серийный теневой прибор ИАБ-463М, с модифицированной системой оптической фильтрации и с «точечным» и щелевым источниками освещения. Поле зрения оптической системы ИАБ-463М имеет диаметр $\varnothing$ 400 мм. Регистрация выполнялась CCD-камерой.

Рис. 4.41

Рис. 4.42

На рис. 4.43 приведена оптическая схема экспериментальной установки на базе теневого прибора ИАБ-463М: 1 – осветительный узел; 2 – регулируемая щелевая диафрагма; 3, 3' – диагональные зеркала; 4, 5 и 4', 5' – элементы афокальных компенсаторов; 6, 6' – сферические коллиматорные зеркала; 7, 7' – защитные плоскопараллельные стекла коллиматоров; 8 – полуволновый квадрантный фазовый фильтр Гильберта; 9 – CCD-камера; 10 – генератор вихревых колец; 11 – электродинамический генератор акустических сигналов; 12 – персональный

компьютер. В качестве акустического генератора 11 использовался электродинамический громкоговоритель мощностью до 15 Вт.

Рис. 4.43

Общий вид генератора вихревых колец показан на рис. 4.44. Генератор вихревых колец состоит из камеры, размеры которой $190 \times 190 \times 380$ мм. В передней стенке камеры имеется отверстие диаметром 20 мм, толщина стенки 5 мм. Задняя стенка камеры образована диффузором электродинамического громкоговорителя. В боковые стенки вставлены высококачественные оптические окна для наблюдения вихревых структур внутри камеры.

Рис. 4.44

Электродинамический генератор управлялся электрическими импульсами прямоугольной формы, полярность, амплитуда и скважность которых могли изменяться. Импульсный сигнал снимался с выхода звуковой платы компьютера и через усилитель поступал на вход электродинамического генератора.

В эксперименте с помощью CCD-камеры регистрировались гильберт-тенеграммы вихревых структур, формирующихся вне и внутри камеры генератора. На рис. 4.45 и 4.46 показаны примеры гильберт-тенеграмм вихревых структур в натуральном виде (слева) и с подавлением низкочастотного шума (справа). Тороидальные вихревые структуры, представленные на этих рисунках, образованы при положитель-

ном скачке давления в камере. Хорошо видны вихри, возникающие вне и внутри камеры и распространяющиеся в противоположных направлениях, что подтверждают результаты численного моделирования.

Рис. 4.45

В этих реализациях скорость распространения тороидальных вихрей вне камеры 2,06 м/с, скорость вихрей, распространяющихся в противоположном направлении от отверстия внутри камеры, 1,58 м/с. Эти данные находятся в удовлетворительном согласии с численными оценками.

Рис. 4.46

На рис. 4.47 показаны гильберт-тенеграммы, отображающие процесс формирования и распространения в противоположных направлениях торoidalных вихревых структур, возникающих при отрицательном скачке давления внутри камеры. Оценка скоростей распространения дает 2,42 м/с – вне камеры и 2,92 м/с – внутри камеры.

Рис. 4.47

Визуализация вихревых структур осуществлялась с применением биквадрантной гильберт-фильтрации и щелевого источника света, что обеспечивало одномерное гильберт-преобразование оптического сигнала. В целом эксперимент подтверждает результаты численного моделирования.

Образование вихревых структур в рассмотренной задаче можно описывать как дифракцию ударной волны на отверстии в стенке. В результате вне и внутри камеры образуются дифрагированные поля давления со структурой, описываемой функцией типа $\sim p \frac{J_1(ax)}{ax}$.

Здесь $J_1(ax)$ – функция Бесселя.

Знаки главного и боковых дифракционных максимумов этой функции чередуются, в результате чего дифракционное поле давления индуцирует вихревые структуры тороидального типа, распространяющиеся в противоположных направлениях от стенки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сороко Л. М. Гильберт–оптика / Л. М. Сороко. – М. : Наука, 1981. – 160 с.
2. Оптические методы исследования потоков / Ю. Н. Дубнищев, В. А. Арбузов, П. П. Белоусов, П. Я. Белоусов. – Новосибирск : Сиб. универ. изд-во, 2003. – 418 с.
3. Sakai H. Hilbert transform in Fourier spectroscopy / H. Sakai, G.A. Vannasse // J. Opt. Soc. Amer. – 1966, – Vol. 56, № 1. – P. 131–132.
4. Lowenthal S. Reconnaissance des formes par filtrage des frequences spatiales / S. Lowenthal, Y. Belvaux // Opt. Acta. – 1967. – Vol. 14, № 3. – P. 245–258.
5. Lowenthal S. White light Hilbert transform / S. Lowenthal, Y. Belvaux // Appl. Opt. – 1971. – Vol. 10, № 3. – P. 676–677.
6. Сороко Л. М. Сообщение ОИЯИ / Л. М. Сороко, В. А. Суетин. – Дубна, 1972. – С. 13–6565.
7. Сороко Л. М. Сообщение ОИЯИ / Л. М. Сороко, В. А. Суетин. – Дубна, 1973. Б–1–13–7541.
8. Eu J.K.T. Isotropic Hilbert spatial filtering / J.K.T. Eu, A.W. Lohmann // Opt. Communications. – 1973. – Vol. 9, № 3. – P. 257–262.
9. Арбузов В. А. Оптическая реализация изотропного преобразования Гильберта / В. А. Арбузов, В. А. Федоров // Автометрия. – 1975. – № 5. – С. 27–37.
10. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике / А. Папулис. – М. : Мир, 1971. – 495 с.
11. Смоктий О. И. Методы теории систем и преобразований в оптике / О. И. Смоктий, В. А. Фабриков. – Л. : Наука, 1989. – 311 с.

12. *Сороко Л. М.* Основы голографии и когерентной оптики / Л. М. Сороко. – М. : Наука, 1971. – 616 с.
13. *Баскаков С. И.* Радиотехнические цепи и сигналы / С. И. Баскаков. – М. : Высш. шк., 1981. – 536 с.
14. *Гудмен Дж.* Введение в фурье-оптику / Дж. Гудмен. – М. : Мир, 1978. – 341 с.
15. *Информационная оптика* / Н. И. Евтихеев [и др.]; под ред. Н. И. Евтихеева. – М. : Изд-во МЭИ, 2000. – 611 с.
16. *Василенко Г. И.* Голографические распознающие устройства / Г. И. Василенко, Л. М. Цибулькин. – М. : Радио и связь, 1985. – 310 с.
17. *Дубнищев Ю. Н.* Теория и преобразование сигналов в оптических системах / Ю. Н. Дубнищев. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2006. – 276 с.
18. *Дубнищев Ю. Н.* Колебания и волны / Ю. Н. Дубнищев. – Новосибирск : Сиб. универ. изд-во, 2004. – 220 с.
19. *Кольер Р.* Оптическая голография / Р. Кольер, К. Берхард, Л. Лип. – М. : Мир, 1973. – 686 с.
20. *Градштейн И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Гл. ред. физико-математ. лит., 1971. – 1108 с.
21. *Lohmann A.W.* Computer generated spatial filters for coherent optical data processing / A.W. Lohmann, D.P. Paris // Appl. Opt. – 1968. – Vol. 7, № 4. – P. 651–655.
22. *А. с. № 522482 СССР, МКИ4 G02B 27/38.* Устройство для визуализации оптических неоднородностей / В. А. Арбузов, А. Г. Полещук. – № 2081064/25; заявл. 22.11.74; опубл. 25.07.76, Бюл. № 27.
23. *Грехем Д. Н.* Передача изображений посредством кодирования двумерных контуров / Д. Н. Грехем // ТИИЭР. – 1967. – Т. 55, № 3. – С. 102–113.
24. *Eguchi R.G.* Linear vector operations in coherent optical data processing systems / R.G. Eguchi, F.P. Carlson // Appl. Opt. – 1970. – Vol. 9, № 3. – P. 687–694.
25. *Арбузов В. А.* Оптические методы гильберт-преобразований световых сигналов : автореф. дис. д-ра техн. наук / В. А. Арбузов. – Новосибирск, 2003. – 33 с.
26. *А. с. 412582 СССР, МКИ4 G02B 5/20.* Оптический способ увеличения контраста изображений / В. А. Арбузов, В. А. Федоров. – № 1729883/18-10; заявл. 27.12.71; опубл. 25.01.74, Бюл. № 3.
27. *А. с. 617226 СССР, МКИ4 G 02 B 27/38.* Теневой прибор / В. А. Арбузов, В. А. Федоров. – № 1983419/25; заявл. 27.12.73; регистрация 13.02.76.
28. *Arbuzov V.A.* Optical realization of Foucault-Hilbert transform / V.A. Arbuzov, Fedorov V.A. // Optical Information Processing Plenum / eds. Yu.E. Nesterikhin, G.W. Stroke, W.E. Kock. – New York, 1976. – P. 1–10.

29. *Haagen W.* Edge enhancement of photographic image – a mathematical representation and optical implementation / W. Haagen // *Wescon Technical Papers*. – 1968. – Part 3, Session 25/2. – P. 1–10.
30. *Zernike F.* Phase contrast / F. Zernike // *Z. Techn. Physik*. – 1935. – Vol. 16. – P. 454.
31. *Белтраме Ф.* Восстановление фазы по изображениям, полученным в оптическом микроскопе методом фазового контраста / Ф. Белтраме, Б. Бианко, А. Кьябрера // *ТИИЭР*. – 1983. – Т. 71, № 2. – С. 90–92.
32. *Hoppe W.* Complementary half-plane apertures and its application in electron microscopy / W. Hoppe, R. Langer, F. Thon // *Optik*. – 1970. – Vol. 30, № 5. – P. 538–545.
33. *Misell D.L.* Phase determination from image intensity measurements in bright-field optics / D.L. Misell, R.E. Burge, A.H. Greenaway // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 1974. – Vol. 7, № 2. – L27–L30.
34. *Арбузов В.А.* Обработка пары фукограмм произвольных амплитудно-фазовых объектов / В. А. Арбузов // *Физические методы исследования прозрачных неоднородностей*. – М., 1977. – С. 54–55.
35. *Арбузов В.А.* Итерационный алгоритм определения искажений волнового фронта по двум тенеграммам амплитудно-фазовых объектов / В. А. Арбузов // *Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук*. – 1990. – Вып. 4. – С. 88–91.
36. *Arbuzov V.A.* The System of color visualization and reconstruction of the phase structure of optical density fields / V.A. Arbuzov, Y.N. Dubnishchev // *Visualization: Proc. 3d Intern. Conf.*, May 23–27, 1994. – Chiba, Japan, 1994.
37. *Arbuzov V.A.* The System of color visualization and reconstruction of the phase structure of optical density fields / V.A. Arbuzov, Y.N. Dubnishchev // *Fluid Dynamic Measurement and its Applications: Proc. Second Intern. Conf.*, October 19–22, 1994. – Beijing, Pergamon Press, 1994. – P. 158–163.
38. *Гилл Ф.* Практическая оптимизация: пер. с англ. / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт; под ред. А.А. Петрова. – М.: Мир, 1985. – 509 с. – (Practical optimization / P.E. Gill, W. Murray, M.H. Wright).
39. *А.с. 510648 СССР, МКН4 G02B 27/38.* Фотоэлектрический теневой прибор / В.А. Арбузов, А.Г. Полещук. – № 2069431/25; заявл. 16.10.74; опубл. 15.04.76, Бюл. № 14.
40. *Arbuzov V.A.* Optical simulation of Hilbert-images of a phase object / V.A. Arbuzov, A.G. Poleshchuk, V.A. Fedorov // *Optical and Quantum Electronics*. – 1977. – Vol. 8, № 2. – P. 455–458.
41. *Settles G.S.* Color schlieren optics / G.S. Settles // *Flow Visualization II* (Ed. W. Werzkirch). – Washington: Hemisphere, 1982. – P. 749–759.
42. *Michael W.S.* Color schlieren photographic system / W. S. Michael, M.S. Donald, W. S. Beric // *Optical. Engineering*, 1994. – Vol. 33, № 9. – P. 2907–2910.

43. А.с. 509130 СССР, МКИ4 G01N 21/46. Цветной теневой прибор / В. А. Арбузов, А. Г. Полешук, В. А. Федоров. – № 1990248/26–25; заявл. 28.01.74; регистрация 08.12.75.
44. Арбузов В.А. Лазерная цветовая диагностика оптических сред / В.А. Арбузов, А.Г. Полешук, В.А. Федоров // Автоматизации научных экспериментов на основе применения ЭВМ: тез. докл. всесоюз. конф. – Новосибирск, 1974. – Ч. 2. – С. 35–36.
45. Арбузов В.А. Цветная визуализация фазовых потоков в реальном времени теневым методом / В.А. Арбузов, Ю.Н. Дубнищев // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. – 1990. – Вып. 4. – С. 92–94.
46. Arbuzov V.A. Real-Time coloured visualization of phase flows by schlieren method / V.A. Arbuzov, Y.N. Dubnishchev. – Новосибирск, 1990. – 9 с. – (Препр. / ИТ СО АН СССР; № 234).
47. Arbuzov V.A. Real-Time coloured visualization of phase flows by schlieren method / V.A. Arbuzov, Y.N. Dubnishchev // Optics and Laser Technology. – 1991. – Vol. 23, № 2. – P. 118–120.
48. Арбузов В.А. Полихроматическое гильберт-преобразование оптических сигналов / В.А. Арбузов, Г.В. Бакакин, Ю.Н. Дубнищев // Автотометрия. – 1996. – № 3. – С. 89–96.
49. Пат. 2101744 РФ, МКИ4 G02B 27/54. Цветная визуализация полей оптической плотности / В.А. Арбузов, Ю.Н. Дубнищев. – № 95108833/28; приор. от 30.05.95; действует с 10.01.98, Бюл. № 1.
50. Radon J. On the determination of functions from their integrals along certain manifolds / J. Radon // Ber. Saechs. Akad. Wiss. Leipzig, Math, Physics Kl. – 1917. – Vol. 69. – P. 262–277.
51. Bracewell R.N. Strip integration in radio astronomy / R.N. Bracewell // Aust. J. Phys. – 1956. – Vol. 19. – P. 198–217.
52. Bracewell R.N. Inversion of fan-beam scans in radio astronomy / R.N. Bracewell, A.C. Riddle // Astrophys. J. – 1967. – Vol. 150. – P. 427–434.
53. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии: пер. с англ. / Г. Хермен; под ред. Л.М. Сороко. – М.: Мир, 1983. – 349 с.
54. Скаддер Г.Дж. Введение в машинную томографию / Г.Дж. Скаддер // ТИИЭР. – 1978. – Т. 66, № 6. – С. 5–16.
55. Бейтс Р. Восстановление и реконструкция изображений: пер. с англ. / Р. Бейтс, М. Мак-Доннел; под ред. Л. П. Ярославского. – М.: Мир, 1989. – 336 с.
56. Бахшиев И.И. Анализ и распознавание изображений в пространстве Радона / И.И. Бахшиев, П.А. Петросян // Исследование Земли из космоса. – 1988. – № 3. – С. 95–100.

57. Barrett H.H. The Radon transform and its applications / H.H. Barrett // Progress in Optics / Ed. E. Wolf. Amsterdam: Elsevier Science Publishers. – 1984. – Vol. 21. – P. 217–286.
58. Barrett H.H., Swindell W. Analog reconstruction methods for transaxial tomography / H.H. Barrett, W. Swindell // Proc. IEEE. – 1977. – Vol. 65, № 1. – P. 89–107.
59. Barrett H.H. Optical processing in Radon space / H.H. Barrett // Opt. Letters. – 1982. – Vol. 7, № 6. – P. 248–250.
60. Клейманов С.А. Спецпроцессоры обработки изображений на основе преобразования Радона / С.А. Клейманов, В.М. Уткин // Обработка изображений и дистанционные исследования: тез. докл. регион. конф. – Новосибирск : Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1987. – С. 122–123.
61. Swith W.E. Radon transform and band width compression / W.E. Swith, H.H. Barrett // Opt. Letters. – 1983. – Vol. 8, № 7. – P. 395–397.
62. Fraser D. Principles of tomography in image data compression / D. Fraser, B.R. Hunt, Su // Optical Engineering. – 1985. – Vol. 24, № 2. – P. 298–306.
63. Мельникова Т.С. Инверсия Радона в эмиссионной томографии неоднородной плазмы / Т.С. Мельникова, В.В. Пикалов. – Новосибирск, 1982. – 51 с. – (Препр. / ИТ СО АН СССР; № 80–82).
64. Пикалов В.В. Пакет прикладных программ, ориентированных на задачи вычислительной томографии / В.В. Пикалов // Вопросы реконструктивной томографии. – Новосибирск : Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1985. – С. 132–135.
65. Пикалов В.В. Вычислительная томография и физический эксперимент / В.В. Пикалов, Н.Г. Преображенский // Успехи физ. наук. – 1983. – Т. 141, № 3. – С. 469–498.
66. Ауслендер А.Л. О восстановлении изображений поперечных сечений объектов по их проекциям / А.Л. Ауслендер, Г.Н. Вишняков, Г.Г. Левин // Оптика и спектроскопия. – 1980. – Т. 50, № 2. – С. 402–412.
67. Ауслендер А.Л. Решение интегрального уравнения Радона в оптическом процессоре / А.Л. Ауслендер, Г.Н. Вишняков, Г.Г. Левин // Оптика и спектроскопия. – 1980. – Т. 49, № 5. – С. 946–951.
68. Пикалов В.В. Фильтрация суммарного изображения в томографии / В.В. Пикалов, Н.В. Шарапова // Обработка изображений и дистанционные исследования : тез. докл. регион. конф. – Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1987. – С. 161–162.
69. Пикалов В.В. Низкотемпературная плазма / В.В. Пикалов, Т.С. Мельникова. – Новосибирск : Наука, 1995. – Т. 13. Томография плазмы. – 228 с.
70. Hazou I.A. Inversion of the exponential x-ray transform. I: Analysis / I.A. Hazou, D.C. Solmon // Mathematical Methods in the Applied Science. – 1988. – Vol. 10. – P. 561–574.

71. Лихачев А.В. Об одной постановке задачи хрономатографии / А.В. Лихачев, В.В. Пикалов // Оптика и спектроскопия. – 1996. – Т. 80, № 4. – С. 581–589.
72. Levin G. G. On the possibilities of chronotomography of high speed processes / G. G. Levin, G. N. Vishnyakov // Opt. Communications. – 1985. – Vol. 56, № 4. – P. 231–234.
73. Chang S. Invariant optical pattern recognition using calculus descriptors / S. Chang, H. H. Arsenault // Optical Engineering. – 1994. – Vol. 33, № 12. – P. 4045–4050.
74. Sweeny D.W. Reconstruction of a three-dimensional refractive index field from multi-direction interferometric data / D. W. Sweeny, C. M. Vest // Appl. Opt. – 1973. – Vol. 12, № 11. – P. 2649–2664.
75. Sweeny D.W. Measurement of three-dimensional temperature fields above heated surfaces by holographic interferometry / D.W. Sweeny, C.M. Vest // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 1974. – Vol. 17, № 12. – P. 1443–1454.
76. Wu D. Measurement of three-dimensional temperature fields with interferometric tomography / D. Wu, A. He // Appl. Opt. – 1999. – Vol. 38, № 16. – P. 3468–3473.
77. Арбузов В.А. Корреляционная обработка изображений на основе преобразований Радона / В.А. Арбузов // IV Всесоюз. симпоз. по вычислительной томографии : тез. докл. – Новосибирск : Изд-во ИМ СО АН СССР, 1989. – Ч. 1. – С. 64–65.
78. Разработка лабораторного образца устройства обработки изображений, получаемых с полупроводниковых приемных устройств : отчет о НИР / Сиб. НИИ оптич. систем ; В.А. Арбузов [и др.]. – Новосибирск, 1989. – 191 с. – № ГР Ф 32998; Инв. № Е 68784.
79. Левин Г.Г. Оптическая томография / Г.Г. Левин, Г.Н. Вишняков. – М. : Радио и связь, 1989. – 224 с.
80. Зимин В.Д. Оптические методы исследования прозрачных неоднородностей : учеб. пособие по спецкурсу / В.Д. Зимин. – Пермь : Изд-во Перм. гос. ун-та, 1976. – 92 с.
81. Зимин В.Д. Теневой метод исследования трехмерных неоднородностей / В.Д. Зимин, П.Г. Фрик // Оптика и спектроскопия. – 1976. – Т. 40, вып. 6. – С. 1060–1063.
82. Мельникова Т. С. Исследование параметров электрической дуги с помощью плазменного томографа / Т. С. Мельникова, В. В. Пикалов. – Новосибирск, 1983. – 48 с. – (Препр. / ИТ СО АН СССР; № 99-83).
83. Вишняков Г.Н. Методы нормировки данных при количественной интерпретации томографических интерферограмм / Г.Н. Вишняков, Г.Г. Левин, В.В. Пикалов // Оптика и спектроскопия. – 1987. – Т. 62, вып. 6. – С. 1361–1366.

84. Вест Ч. Голографическая интерферометрия / Ч. Вест. – М. : Мир, 1982. – 504 с.
85. Василенко Г. И. Восстановление изображений / Г. И. Василенко, А. М. Тараторкин. – М. : Сов. радио, 1986. – 304 с.
86. Шафер Р. У. Итерационные алгоритмы восстановления сигналов при наличии ограничений / Р. У. Шафер, Р. М. Мерсеро, М. А. Ричардс // ТИИЭР. – 1981. – Т. 69, № 4. – С. 34–55.
87. Вишняков Г. Н. Восстановление томограмм при ограниченном числе проекций. Итерационные методы / Г. Н. Вишняков, Г. А. Гильман, Г. Г. Левин // Оптика и спектроскопия. – 1985. – Т. 58, вып. 2. – С. 406–413.
88. Ross G. Iterative methods in information processing for object restoration / G. Ross // Opt. Acta. – 1982. – Vol. 29, № 11. – P. 1523–1542.
89. Cheng L. M. Use of a priori knowledge in image reconstruction / L. M. Cheng, F. S. Ho, R. E. Burge // J. Opt. Soc. Amer. – 1984. – Vol. 1, № 4. – P. 386–391.
90. Захаров В. Е. Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения / В. Е. Захаров, В. С. Львов, С. С. Старобинец // Успехи физ. наук. – 1974. – Т. 114, № 4. – С. 609–654.
91. О параметрическом возбуждении волн на поверхности жидкости / В. А. Арбузов [и др.]. – Новосибирск, 1977. – 13 с. – (Препр. / ИАиЭ СО АН СССР; № 57).
92. Брискман В. А. Параметрическая неустойчивость поверхности жидкости в переменном электрическом поле / В. А. Брискман, Г. Ф. Шайдуров // Докл. АН СССР. – 1968. – Т. 180, № 6. – С. 1315–1318.
93. Лазерный контрольно-измерительный автомат ЛКА / В. А. Арбузов [и др.] // Методы и средства контроля формы поверхности : тез. докл. шк.-семинара, 26–30 мая 1986 г. – М. : Изд-во ВДНХ СССР. – 1986. – С. 25–27.
94. Автомат лазерный контрольно-измерительный / В. А. Арбузов [и др.] // Техническое условие / Сиб. НИИ оптич. систем. – АЛ2.787.076 ТУ. – Новосибирск, 1984. – 87 с.
95. Создание автоматов для массового контроля геометрических параметров деталей : отчет о НИР / Сиб. НИИ оптич. систем ; В. А. Арбузов [и др.]. – Новосибирск, 1985. – 78 с. – № ГР Ф21503, Инв. № Г 60176.
96. А.с. 1224579 СССР, МКИ4 G01B 21/12. Фотоимпульсный измеритель диаметра / В. А. Арбузов, Г. В. Мякин. – № 3647324/24-28 ; заявл. 23.09.83; опубл. 15.04.86, Бюл. № 14.
97. Установка модели КОИ-4 для количественной оценки оптических искажений в криволинейных деталях из прозрачных термопластичных материалов / В. А. Арбузов [и др.]. – Новосибирск, 1980. – 10 с. – (Препр. / ИАиЭ СО АН СССР; № 137).

98. Холдер Д. Теневые методы в аэродинамике : пер. с англ. / Д. Холдер, Р. Норт ; под ред. С. Г. Попова. – М. : Мир, 1966. – 179 с.
99. Аbruков С.А. Теневые и интерференционные методы исследования оптических неоднородностей / С.А. Аbruков. – Казань, 1962. – 83 с.
100. Васильев Л.А. Теневые методы / Л.А. Васильев. – М. : Наука, 1968. – 400 с.
101. Хауф В. Оптические методы в теплопередаче : пер. с англ. / В. Хауф, У. Григуль ; под ред. В. Я. Лихушина. – М. : Мир, 1973. – 240 с.
102. Mowbray D.E. The use of schlieren and shadowgraph techniques in the study of flow pattern in density stratified liquids / D.E. Mowbray // J. Fluid. Mech. – 1967. – Vol. 27, part 3. – P. 595–608.
103. Чашечкин Ю.Д. Структура свободного конвективного течения над нагретым цилиндром в стратифицированной жидкости / Ю.Д. Чашечкин, В. А. Попов // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 248, № 4. – С. 822–825.
104. Чашечкин Ю.Д. Методы лабораторного моделирования конвективных процессов в неоднородных системах в условиях нормальной и пониженной гравитации / Ю.Д. Чашечкин, В. А. Попов // Гидромеханика и тепло-массообмен в невесомости : – М. : Наука, 1982. – С. 119–146.
105. Onu K. Schlieren measurement of axisymmetric internal wave amplitudes / K. Onu, M. R. Flynn, B. R Sutherland // Experiments in Fluids. – 2003. – Vol. 35, № 1. – P. 24–31.
106. Арбузов В.А. Использование тепловых меток для цветной визуализации течения жидкости в окрестности цилиндра, зажатого в щелевом канале / В. А. Арбузов, В. Д. Жак // Оптические методы исследования потоков : материалы 2-й Межресп. конф. – Новосибирск, 1993. – С. 78.
107. Накоряков В.Е. Обтекание цилиндра в узком зазоре в ламинированном и переходном режимах / В. Е. Накоряков, В. Д. Жак, С. А. Сафонов // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. – 1988. – Т. 7, вып. 2. – С. 39–43.
108. Nakoryakov V.E. Flow in a Hele-Shaw cell at large velocities / V.E. Nakoryakov, S.A. Safonov // Russian J. of Engineering Thermophysics. – 1991. – Vol. 1, № 1. – P. 1–23.
109. Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Хаос и структуры / Д. И. Трубецков ; предисл. Г. Г. Малинецкого. – 2-е изд. испр. и доп. – М., 2004. – 240 с.
110. Дубнищева Т. Я. Концепции естествознания : учеб. пособие для вузов / Т. Я. Дубнищева. – 6-е изд. испр. и доп. – М. : Академия, 2006. – 608 с.
111. Бердников В. С. Ламинарно-турбулентный переход в Рэлеи-Бенаровской конвекции / В. С. Бердников, В. А. Марков // Свободная конвекция. Тепло-массообмен при химических превращениях : тр. IV Российской нац. конф. при химических превращениях. – М. : Изд-во МЭИ, 2006. – Т.3. – С. 59–62.

112. *Наблюдение крупномасштабных гидродинамических структур в вихревой трубке и эффект Ранка* / В. А. Арбузов [и др.] // Письма в журн. техн. физики. – 1997. – Т. 23, вып. 23. – С. 84–90.
113. *Observation of large-scale structure in vortex tube by coloured Foucault-Hilbert visualization method* / Arbuzov V.A. [et. al.] // Fluid Dynamic Measurement and its Applications : Proc. 3-d Intern. Conf., October 14–17, 1997. – Beijing; China: Intern. Acad. Publishers. – P. 141–143.
114. *Arbuzov V.A Hilbert-optic methods for visualization of optical phase flow density* / V.A. Arbuzov, Yu.N Dubnishchev // Optical Technology and Image Processing in Fluid, Thermal, and Combustion Flow – VS-SPIE '98 : Proc. Intern. Conf., Dec. 7–9, 1998. – Yokohama, Japan, 1998. – AB–148.
115. *Меркулов А.П.* Вихревой эффект и его применение в технике / А. П. Меркулов. – М. : Машиностроение, 1969. – 183 с.
116. *Лукачев С.В.* Образование вихревых когерентных структур в вихревой трубке Ранка / С.В. Лукачев // Инженерно-физ. журн. – 1981. – Т. 41, № 5. – С. 784–790.
117. *Дубнищев Ю.Н.* Лазерная доплеровская визуализация поля скоростей в закрученном потоке Ранка / Ю. Н. Дубнищев, П. П. Белоусов, П. Я. Белоусов // Письма в журн. техн. физики. – 2002. – Т. 28, вып. 16. – С. 6–11.
118. *Research of kinematic parameters of moving medium in experimental hydrodynamics, gas dynamics and geodynamics* / Yu.N. Dubnishchev, V.A. Arbuzov, P.P. Belousov, P.Ya. Belousov // Optical Methods of Flow Investigation. Proc. of SPIE. – 2006. – Vol. 6262. – P. OD1–OD8.
119. *Оптические исследования газодинамических процессов в гиперзвуковой аэродинамической трубе* / В.А. Арбузов, Ю.Н. Дубнищев, В.И. Звегинцев, А.М. Харитонов // Оптические методы исследования потоков : тр. VI-й Междунар. научно-техн. конф. – М., 2001. – С. 488–489.
120. *Топчиян М. Е.* Аэродинамическая труба для гиперзвуковых исследований (достижения, проблемы, перспективы) / М. Е. Топчиян, А. М. Харитонов // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1994. – Т. 35, № 3. – С. 66–79.
121. *Характеристики гиперболоида вращения с юбкой при больших числах Рейнольдса* / В. И. Звегинцев, А. М. Харитонов, В. Ф. Чиркашенко, С. В. Чибисов, Д. Флетчер, С. Парис // Теплофизика и аэромеханика. – 2006. – Т. 13, № 4. – С. 513–539.
122. *Исследование характеристик гиперзвуковой аэродинамической трубы АТ–303. Ч. 2. Аэродинамика эталонной модели НВ–2* / Н. П. Адамов [и др.] // Теплофизика и аэромеханика. – 2006. – Т. 13, № 2. – С. 173–188.
123. *Ахметов В. К.* Формирование и основные параметры вихревых колец / В. К. Ахметов // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 2001. – Т. 42, № 5. – С. 70–73.
124. *Shariff K. Vortex rings* / K. Shariff, A. Leonard // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1992. – Vol. 24. – P. 235–279.

125. *Akhmetov D.G.* Extinguishing gas and oil well fires by means of vortex rings / D.G. Akhmetov, B.A. Lugovtsov, V.F. Tarasov // *Phiz. Goreniya Vzryva*. – 1980. – № 5. – P. 8–14.

126. *Akhmetov D.G.* Extinguishing fire of a powerful gas fountain / D.G. Akhmetov, V.F. Tarasov // *Dynamics of Continuous Media* (collected scientific papers) [in Russian]. – Novosibirsk, 1983. – № 62. – P. 3–10.

127. *Akhmetov D.G.* Vortex powder method for extinguishing fire on spouting gas-oil wells / D.G. Akhmetov, B.A. Lugovtsov, V.A. Maletin // *Prevention of Hazardous Fires and Explosions*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, etc. – 1999. – P. 319–328.

128. *Копьев В. Ф.* Колебания вихревого кольца, возникновение в нем турбулентности и генерации звука / В. Ф. Копьев, С. А. Чернышев // *Успехи физ. наук*. – 2000. – Т. 170, № 7. – С. 713–742.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ОПТИКЕ	5
1.1. Основные понятия и способы описания сигналов	5
1.1.1. Представление сигналов в координатном пространстве	5
1.1.2. Преобразование Фурье	14
1.1.3. Энергетические и корреляционные характеристики сигналов	27
1.2. Понятие о линейных системах и их воздействии на сигналы	34
1.3. Пространство как линейная система, преобразующая оптический сигнал	41
1.4. Линза как квадратичный фазовый фильтр	51
1.5. Оптическое преобразование Фурье	59
1.6. Оптическое преобразование Фурье с переменным масштабом	65
1.7. Оптическое преобразование Фурье с линейным источником	73
1.8. Преобразование Фурье–Бесселя (преобразование Ганкеля)	85
1.9. Оптическое преобразование Фурье с кольцевым источником	100
1.10. Оптическая фильтрация	103
Глава 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА В ОПТИКЕ	109
2.1. Одномерное преобразование Гильберта	109
2.2. Аналитический сигнал	120
2.3. Преобразование Гильберта двумерных оптических сигналов	124
2.4. Изотропное когерентное преобразование Гильберта	129
2.5. Изотропное преобразование Гильберта с кольцевым источником	145
2.6. Изотропное преобразование Фуко–Гильберта с кольцевым источником	150
2.7. Гильберт-фильтрация на основе дифракционной решетки	154

2.8. Гильберт-фильтрация на основе дифракционной решетки со сбоем в схеме с кольцевым источником	158
2.9. Визуализация фазовых полей оптической плотности при дефокусировке изображений	160
2.10. Визуализация оптических полей при смещении фильтра относительно фурье-плоскости (расфокусированная диафрагма)	164
Глава 3. ГИЛЬБЕРТ-МЕТОДЫ В ОПТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКЕ	176
3.1. Изотропное некогерентное преобразование Гильберта	176
3.2. Реализация оптических процессоров, выполняющих изотропное и одномерное преобразование Гильберта и Фуко–Гильберта с крестовидными источниками света	194
3.3. Реконструкция функции прозрачности амплитудно-фазовых объектов по двум комплементарным тенеграммам Фуко–Гильберта	202
3.4. Полихроматическая гильберт-визуализация полей оптической фазовой плотности	213
3.5. 3D-технологии в исследовании гильберт-диагностики	223
Глава 4. ПРИМЕНЕНИЕ ГИЛЬБЕРТ-ФИЛЬТРАЦИИ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ	256
4.1. Экспериментальное исследование параметрически возбужденных волн на поверхности тяжелой жидкости	256
4.2. Измерители линейных размеров и оптического качества	266
4.3. Гильберт-диагностика потоков в задачах гидродинамики и теплофизики	281
4.4. Методы гильберт-оптики в экспериментальной газодинамике	287
Библиографический список	303

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

**Виталий Анисифорович Арбузов
Юрий Николаевич Дубнищев**

**МЕТОДЫ ГИЛЬБЕРТ-ОПТИКИ
В ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ**

Монография

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Технический редактор *Н.В. Гаврилова*
Корректор *Л.Н. Ветчакова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *В.Ф. Ноздрева*

Лицензия ИД № 04303 от 20.03.01

Подписано в печать 29.11.2007

Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная

Уч.-изд. л. 19,75. Печ. л. 19,75

Тираж 400 экз. Изд. № 300. Заказ № 1564

Издательство Новосибирского государственного
технического университета

630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20

Тел. (383) 346-31-87

E-mail: office@publish.nstu.ru

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20

ВЫШЛИ В СВЕТ

Дубнищев Ю.Н. Теория и преобразование сигналов в оптических системах : учебник

Дубнищев Ю.Н.

Издательство: Изд-во НГТУ

Год издания: 2006

Страниц: 276

ISBN: 5-7782-0473-6

Тип обложки: переплет

Излагаются сведения по теории сигналов и их спектральным представлениям с физическим обоснованием применения к линейным оптическим системам. Описываются распространение и трансформация оптических сигналов в свободном пространстве, даются основы фурье-оптики, свойства гауссовых пучков, понятие о дуальности оптических систем.

Рассматриваются преобразование Ганкеля, преобразования сигналов с ограниченным спектром, случайных сигналов, дискретные преобразования оптических сигналов, теорема Котельникова в координатном и частотном пространствах, принцип неопределенности. Случайные сигналы описываются в рамках корреляционной теории. Вводятся понятия функции когерентности, оптической передаточной функции и некогерентного импульсного отклика. Рассматриваются акустооптическое преобразование световых полей, методы оптической фильтрации сигналов.

Настоящее издание, исправленное и дополненное, предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов соответствующих специальностей.