О ПРЕПОДАВАНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА В ВУЗОВСКОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

В. И. Фомин

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов, Россия

Рецензент д-р техн. наук, профессор Е. И. Глинкин

Ключевые слова: аксиомы линейного пространства; замкнутое множество; линейный оператор; линейный функционал; метрическое пространство; нормированное пространство; объединение множеств.

Аннотация: Приведен ряд методических рекомендаций по преподаванию элементов функционального анализа студентам первого курса технических вузов, в частности, предложено вести изложение элементов функционального анализа параллельно и в увязке с изучением других разделов общего курса математики.

Известны многочисленные плодотворные применения понятий, фактов и методов функционального анализа (ФА) в различных областях знания, например, при решении краевых задач математической физики [1 – 3], в вариационном исчислении и теории оптимального управления [4 – 6], поэтому ФА имеет важное значение в современном математическом образовании студентов.

В связи с включением элементов функционального анализа (ЭФА) в общий курс математики (ОКМ) для некоторых специальностей технических вузов и отсутствием учебников по ФА для данной категории студентов возникает необходимость преподавания основ ФА на уровне, доступном бывшим выпускникам обычных средних общеобразовательных школ, в том числе студентам-договорникам, процент которых из года в год растет, но чья подготовка, как правило, не отвечает требуемому уровню знаний. Кроме того, несмотря на расширение программы ОКМ, количество учебных часов на ее изучение остается прежним или даже сокращается.

Фомин Василий Ильич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Техническая механика и детали машин», e-mail: vasilijfomin@bk.ru, ТамбГТУ, г.Тамбов, Россия.

В связи с этим, приходится ужимать изложение традиционных тем. Однако такая «экономия времени» не должна вредить реализации принципа научности в обучении, а именно, обеспечению высокого научного уровня изложения учебного материала и выработке у студентов учебно-исследовательских навыков и умений. В итоге у преподавателя остается недостаточное количество часов на изложение новых разделов и возникает вопрос: какой именно материал изучать в эти часы.

Предлагается:

- включать в раздел ЭФА те понятия и факты ФА, которые можно использовать при изложении других разделов ОКМ;
- вести изложение ЭФА параллельно и в увязке с изучением других разделов ОКМ.

Такой подход позволит:

- охватить основополагающие понятия и теоремы ФА;
- показать практическую приложимость основных результатов ФА в различных областях математики и, тем самым, сформировать у студентов представление о ФА как о мощном и достаточно универсальном аппарате изучения математических дисциплин;
- изложить на языке ФА некоторые вопросы традиционных тем ОКМ в более компактной и современной форме.

Все это будет способствовать превращению ФА в традиционный раздел ОКМ.

При реализации поставленных задач необходимо также помнить о принципе доступности обучения.

Ниже приведены несколько конкретных методических рекомендаций, которые могут оказаться полезными при изучении ЭФА в вузовском курсе математики.

1. При изложении теоремы о замкнутости объединения конечного числа замкнутых множеств предлагается в целях экономии времени после доказательства свойства $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cap \overline{M_2}$ [7, с. 58] распространить его методом математической индукции на конечное число множеств

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n M_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{M_i}. \quad (1)$$

Тогда теорема о замкнутости объединения $M = \bigcup_{i=1}^n M_i$ замкнутых множеств M_i ($i = \overline{1; n}$) превращается в простое следствие свойства (1)

$$\overline{M} = \overline{\bigcup_{i=1}^n M_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{M_i} = \bigcap_{i=1}^n M_i = M,$$

следовательно, множество M замкнуто. Тем самым, отпадает необходимость проводить отдельное доказательство данной теоремы, которое изложено, например, в [7, с. 61]. Доказательство свойства (1) можно предложить в качестве упражнения для домашнего задания, ибо к моменту

изучения элементов функционального анализа студенты уже ознакомлены с применением метода математической индукции в школьном курсе математики или в других разделах вузовского курса математики, например, в математическом анализе.

2. При определении линейного пространства E можно указывать восемь аксиом [8, с. 528], а можно ограничиться семью аксиомами [9, с. 71], заменяя аксиомы

$$\text{а) } \exists \Theta \in E \mid x + \Theta = x, \forall x \in E;$$

$$\text{б) } \forall x \in E \exists (-x) \in E \mid x + (-x) = \Theta$$

равносильной им аксиомой

$$\text{в) } \exists \Theta \in E \mid 0 \cdot x = \Theta, \forall x \in E.$$

При этом при первом определении показывается при наличии остальных аксиом линейного пространства, что аксиома в) является следствием аксиом а) и б) [8, с. 529], но не оговаривается, что из в) следуют а) и б); при втором определении аксиомы а) и б) выводятся из аксиомы в) [9, с. 72], но не упоминается о справедливости обратного утверждения.

Предлагается при определении линейного пространства с помощью восьми аксиом показать, что а), б) $\Leftrightarrow$ в) и указать, что в силу доказанной равносильности аксиомы а) и б) в данном определении можно заменить аксиомой в). Если линейное пространство определяется с помощью семи аксиом, то нужно показать, что в) $\Leftrightarrow$ а), б) и отметить, что в данном определении вместо аксиомы в) можно указать аксиомы а) и б).

Если линейное пространство E определено с помощью восьми аксиом, то необходимо строго обосновать следующие свойства, присущие линейному пространству.

1) В линейном пространстве E существует единственный нулевой элемент Θ .

Действительно, предположим противное: $\exists \Theta_* \in E, \Theta_* \neq \Theta \mid x + \Theta_* = x, \forall x \in E$. Тогда, беря в качестве x элемент Θ и используя свойство коммутативности, получаем: $\Theta = \Theta + \Theta_* = \Theta_* + \Theta = \Theta_*$, то есть $\Theta_* = \Theta$. Противоречие: предположение противного неверно.

2) В линейном пространстве E для каждого элемента x существует единственный противоположный элемент $-x$.

Действительно, предположим противное: для некоторого $x \in E$ $\exists -x_* \in E, -x_* \neq -x \mid x + (-x_*) = \Theta$. Тогда, используя свойства ассоциативности и коммутативности, получаем:

$$\begin{aligned} -x_* &= -x_* + \Theta = -x_* + [x + (-x)] = [-x_* + x] + (-x) = [x + (-x_*)] + (-x) = \\ &= \Theta + (-x) = -x + \Theta = -x, \end{aligned}$$

то есть $-x_* = -x$. Противоречие: предположение противного неверно.

3) $0 \cdot x = \Theta, \forall x \in E$.

Действительно, используя свойство ассоциативности и аксиомы $1 \cdot x = x$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, получаем для $\forall x \in E$ $0 \cdot x = 0 \cdot x + \Theta = 0 \cdot x + [x + (-x)] = [0 \cdot x + x] + (-x) = [0 \cdot x + 1 \cdot x] + (-x) = (0 + 1)x + (-x) = 1 \cdot x + (-x) = x + (-x) = \Theta$, то есть $0 \cdot x = \Theta$.

4) $(-1) \cdot x = -x, \forall x \in E$.

Действительно, используя аксиомы $1 \cdot x = x$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ и доказанное свойство 3), получаем для $\forall x \in E$ $x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = [1 + (-1)]x = 0 \cdot x = \Theta$, то есть $x + (-1) \cdot x = \Theta$, а это означает, по определению, что $(-1) \cdot x$ является противоположным элементов для x , следовательно, в силу свойства 2) $(-1) \cdot x = -x$.

5) $\alpha \Theta = \Theta, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Действительно, при $\alpha = 0$ утверждение 5) следует из свойства 3). Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда, используя аксиомы $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ и доказанное свойство 4), получаем: $\alpha \Theta = \alpha[x + (-x)] = \alpha x + \alpha(-x) = \alpha x + \alpha((-1) \cdot x) = \alpha x + (\alpha(-1))x = \alpha x + ((-1)\alpha)x = \alpha x + (-1)(\alpha x) = \alpha x + (-\alpha x) = \Theta$, то есть $\alpha \Theta = \Theta$.

После доказательств свойств 1) – 5) надо ввести в линейном пространстве E операцию вычитания, как обратную по отношению к операции сложения: если $x, y \in E$, то

$$x - y = z \mid z + y = x. \quad (2)$$

Далее нужно показать корректность определения (2): для данных $x, y \in E$ $\exists$ единственный элемент $z \in E$, удовлетворяющий условию (2). Для этого положим $z = x + (-y)$. Тогда, используя свойства ассоциативности и коммутативности, получаем: $z + y = [x + (-y)] + y = x + [(-y) + y] = x + [y + (-y)] = x + \Theta = x$, то есть $z + y = x$. Таким образом, элемент $z = x + (-y)$ удовлетворяет условию (2). Покажем, что такой элемент единственен: предположим противное: $\exists z_* \in E, z_* \neq z \mid z_* + y = x$. Тогда $z_* = z_* + \Theta = z_* + [y + (-y)] = (z_* + y) + (-y) = x + (-y) = z$, то есть $z_* = z$. Противоречие: предположение противного неверно.

В силу свойства 4) элемент $z = x + (-y)$ можно записать в виде $z = x + (-1) \cdot y$.

После введения операции вычитания нужно обосновать следующий факт:

6) $x = y \Leftrightarrow x - y = \Theta$.

Действительно, пусть $x = y$, тогда $\Theta + y = \Theta + x = x + \Theta = x$, то есть $\Theta + y = x$, а это означает, по определению, что $x - y = \Theta$. Пусть $x - y = \Theta$, тогда $\Theta + y = x$, но $\Theta + y = y + \Theta = y$, следовательно $x = y$.

3. Понятия линейного [7, с. 119], нормированного [10, с. 19], метрического пространств [10, с. 20] целесообразно ввести после доказательства

теоремы о том, что арифметические операции над непрерывными функциями приводят к непрерывным функциям [11, с. 112]. В результате получим линейное нормированное пространство $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $u = u(x)$ с нормой $\|u\| = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|$ [7, с. 140], кото-

рое можно рассматривать как метрическое пространство с метрикой $\rho(u, v) = \|u - v\|$, ибо любое нормированное пространство E с нормой $\|x\|$ превращается в метрическое пространство, если ввести в нем расстояние по формуле $\rho(x, y) = \|x - y\|$ [13, с. 134]. Затем эти понятия можно закрепить при изучении раздела «Функции нескольких переменных» на примере n -мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}; i = \overline{1, n}\}$ [11, с. 479] с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

и порождаемой этой нормой евклидовой метрикой

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

при этом нужно указать, что в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ вместо нормы (3) можно ввести более простые нормы [7, с. 140]

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{или} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

4. Понятие линейного функционала [7, с. 124] можно ввести после доказательства основных свойств определенных интегралов [11, с. 344]. В результате получим линейный функционал $f: C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, определяемый формулой [7, с. 125]

$$f(u) = \int_a^b u(x) dx$$

В дальнейшем понятие линейного функционала можно закрепить при изучении кратных [12, с. 57], криволинейных [12, с. 118] и поверхностных [12, с. 127] интегралов, ибо каждый из этих интегралов можно рассматривать как линейный функционал, определенный на соответствующем классе функций.

5. Понятие линейного оператора [7, с. 218] целесообразно ввести после доказательства основных правил дифференцирования функций одной переменной [11, с. 166]. В результате получим линейный непрерывный дифференциальный оператор $A: C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$, определяемый форму-

лой $Au(t) = u'(t)$ [7, с. 221]. Здесь $C^1[a, b]$ – линейное нормированное пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций $u = u(x)$ с нормой

$$\|u\| = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |u'(x)|.$$

Затем понятие линейного оператора можно закрепить при изучении линейного однородного дифференциального уравнения [14, с. 76]

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \quad (4)$$

где $y = y(x)$ – искомая функция независимой переменной $x \in [a, b]$; $a_i(x) \in C[a, b]$, $i = \overline{1, n}$. В результате получим линейный дифференциальный оператор $L : C^n[a, b] \rightarrow C[a, b]$, порожденный уравнением (4) [10, с. 136]:

$$Lu = u^{(n)} + a_1(x)u^{(n-1)} + a_2(x)u^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)u' + a_n(x)u,$$

где $C^n[a, b]$ – линейное пространство n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций $u = u(x)$. Данный оператор позволяет записать уравнение (4) в виде $Lu = 0$. Из его линейности следует, что множество решений Ω_0 уравнения (4) является линейным пространством.

Отметим, что при изложении элементов функционального анализа в общем курсе математики неоценимую помощь окажет справочное пособие [15].

Список литературы

1. Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас ; пер. с нем. В. Г. Задорожного, А. И. Перова ; под ред. В. И. Соболева. – М. : Мир, 1978. – 336 с.
2. Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М. : Наука, 1973. – 408 с.
3. Рудин, У. Функциональный анализ / У. Рудин ; пер. с англ. В. Я. Лина ; под ред. Е. А. Горина. – Изд. 2-е, испр. и доп. – СПб. : Лань, 2005. – 448 с.
4. Алексеев, В. М. Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. – 2-е изд. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.
5. Андреева, Е. А. Вариационное исчисление и методы оптимизации / Е. А. Андреева, В. М. Цирулева. – М. : Высшая школа, 2006. – 584 с.
6. Мышкис, А. Д. Прикладная математика для инженеров / А. Д. Мышкис. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 688 с.
7. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1976. – 544 с.
8. Шилов, Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного / Г. Е. Шилов. – 2-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2002. – 880 с.
9. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Изд. 2-е. – М. : Наука, 1977. – 744 с.

10. Треногин, В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Наука, 1980. – 496 с.
11. Ильин, В. А. Основы математического анализа : в 2-х ч. Часть I / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – 4-е изд. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 468 с.
12. Ильин, В. А. Основы математического анализа : в 2-х ч. Часть II / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – 4-е изд. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 464 с.
13. Вулих, Б. З. Введение в функциональный анализ / Б. З. Вулих. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1967. – 416 с.
14. Тихонов А.Н. Дифференциальные уравнения / А. Н. Тихонов А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1985. – 232 с.
15. Функциональный анализ / Под общей редакцией С. Г. Крейна. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1972. – 544 с.

References

1. Gayevskiy Kh., Greger K., Zakharias K., Sobolev V. I. [Ed.] *Nelineynyye operatornyye uravneniya i operatornyye differentsial'nyye uravneniya* [Nonlinear operator equations and operator differential equations], Moscow: Mir, 1978, 336 p. (In Russ.)
2. Ladyzhenskaya O.A. *Krayevyye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary-value problems of mathematical physics], Moscow: Nauka, 1973, 408 p. (In Russ.)
3. Rudin U., Gorin Ye.A. [Ed.] *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis], St. Petersburg: Lan', 2005, 448 p. (In Russ.)
4. Alekseyev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal'noye upravleniye* [Optimal control], Moscow: FIZMATLIT, 2005, 384 p. (In Russ.)
5. Andreyeva Ye.A., Tsiruleva V.M. *Variatsionnoye ischisleniye i metody optimizatsii* [Variational calculus and optimization methods], Moscow: Vysshaya shkola, 2006, 584 p. (In Russ.)
6. Myshkis A.D. *Prikladnaya matematika dlya inzhenerov* [Applied mathematics for engineers], Moscow: FIZMATLIT, 2007, 688 p. (In Russ.)
7. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis], Moscow: Nauka, 1976, 544 p. (In Russ.)
8. Shilov G.Ye. *Matematicheskii analiz. Funktsii odnogo peremennogo* [Mathematical analysis. Functions of a single variable], St. Petersburg: Lan', 2002, 880 p. (In Russ.)
9. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis], Moscow: Nauka, 1977, 744 p. (In Russ.)
10. Trenogin V.A. *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis], Moscow: Nauka, 1980, 496 p. (In Russ.)
11. Il'in V.A., Poznyak E.G. *Osnovy matematicheskogo analiza: v 2-kh ch. Chast' I* [Fundamentals of Mathematical Analysis: in 2 hours. Part I], Moscow: FIZMATLIT, 2002, 468 p. (In Russ.)
12. Il'in V.A., Poznyak E.G. *Osnovy matematicheskogo analiza: v 2-kh ch. Chast' II* [Fundamentals of mathematical analysis: in 2 hours. Part II], Moscow: FIZMATLIT, 2002, 464 p. (In Russ.)
13. Vulikh B.Z. *Vvedeniye v funktsional'nyy analiz* [Introduction to functional analysis], Moscow: Nauka, 1967, 416 p. (In Russ.)
14. Tikhonov A.N., Vasil'yeva A.B., Sveshnikov A.G. *Differentsial'nyye uravneniya* [Differential equations], Moscow: Nauka, 1985, 232 p. (In Russ.)
15. Kreyn S.G. [Ed.] *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis], Moscow: Nauka, 1972, 544 p. (In Russ.)

On Teaching Elements of Functional Analysis in the University Course of Mathematics

V. I. Fomin

Tambov State Technical University, Tambov, Russia

Keywords: axioms of linear space; closed set; linear operator; linear functionality; metric space; normalized space; union of sets.

Abstract: A number of methodological recommendations on the presentation of elements of functional analysis to first-year students of technical universities are given; in particular, it is proposed to present the elements of functional analysis in parallel and in conjunction with the study of other sections of the general course of mathematics.

© В. И. Фомин, 2019