ОБ ОДНОМ ОБОЗНАЧЕНИИ СУММЫ РЯДА

В. И. Фомин

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов, Россия

Рецензент д-р техн. наук, профессор Е. И. Глинкин

Ключевые слова: абсолютная сходимость; показательная функция; равномерная сходимость; ряд; сумма ряда; почленное дифференцирование; функциональный ряд.

Аннотация: Предложено при изучении некоторых вопросов учебной дисциплины «Математика» ввести специальное обозначение для суммы ряда, что может способствовать лучшему усвоению студентами соответствующего учебного материала.

В учебных пособиях числовой ряд и его сумму (в случае сходимости этого ряда) обозначают одним и тем же выражением

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

подразумевая, что смысл данного выражения ясен из контекста. Однако, при изложении некоторых вопросов удобно для ряда и суммы ряда применять различные обозначения: для ряда – обозначение (1), для суммы ряда – обозначение вида

$$(s) \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Пусть, например, требуется ввести понятие показательной функции комплексного переменного и доказать ее основное свойство. Это можно сделать следующим образом.

1. С помощью признака Даламбера доказывается, что при каждом $z \in \mathbb{C}$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

сходится абсолютно (случай $z = 0$ рассматривается отдельно).

Фомин Василий Ильич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Техническая механика и детали машин», e-mail: kulikov@apmath.tstu.ru, ТамбГТУ, г. Тамбов, Россия.

2. Полагают, по определению,

$$e^z = (s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

3. Доказывают, что

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad (3)$$

следующим образом. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$; z_1, z_2 фиксированы. В силу пункта 1 ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \quad (4)$$

сходятся абсолютно. Запишем произведение рядов (4) в форме Коши:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l+k=n} \frac{z_1^l}{l!} \frac{z_2^k}{k!} \right). \quad (5)$$

Используя бином Ньютона для комплексных чисел и формулу для биномиальных коэффициентов, получаем

$$\sum_{l+k=n} \frac{z_1^l}{l!} \frac{z_2^k}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} z_1^{n-k} z_2^k = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k z_1^{n-k} z_2^k = \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}. \quad (6)$$

В силу равенств (5), (6)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}. \quad (7)$$

Известно, что сумма ряда, являющегося произведением двух абсолютно сходящихся рядов, равна произведению сумм перемножаемых рядов [1, с. 130]. В нашем случае

$$(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = \left((s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \right) \left((s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \right). \quad (8)$$

В силу определения (2)

$$(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}, \quad (s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} = e^{z_1}, \quad (s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = e^{z_2}. \quad (9)$$

Из равенств (8), (9) следует, в силу произвольности выбора z_1, z_2 , формула (3).

Если в данном доказательстве убрать символ (s) в обозначении суммы ряда, то, например, запись (8) совпадет с записью (7) (лишь правая и левая части равенства поменяются местами). В этом случае для того, чтобы учащиеся понимали различное смысловое содержание одинаковых по виду записей (7) и (8), потребуются дополнительные разъяснения.

Введенное обозначение суммы ряда может оказаться полезным при изложении свойств равномерно сходящихся функциональных рядов для студентов, изучающих общий курс математики. Например, утверждения теорем о почленном интегрировании и почленном дифференцировании функционального ряда:

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx, \quad (10)$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \quad (11)$$

будут более понятными для указанной категории обучающихся, если их записать в виде:

$$\int_a^b \left[(s) \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] dx = (s) \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx, \quad (12)$$

$$\left[(s) \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right]' = (s) \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \quad (13)$$

При таком подходе студенты будут четко различать понятия ряда и суммы ряда и, глядя, например, на записи (12), (13), без ошибок сформулируют утверждения теорем о почленном интегрировании и почленном дифференцировании функционального ряда. Читая же левые части равенств (10), (11), студенты часто допускают ошибки, говоря «интеграл от ряда» или «производная ряда».

Естественно, что во всех случаях, когда из контекста действительно видно, о чем идет речь (о ряде или сумме ряда), какие-либо дополнительные значки для идентификации суммы ряда не нужны.

Список литературы

1. Маркушевич, А. И. Краткий курс теории аналитических функций / А. И. Маркушевич. – М. : Наука, 1978. – 416 с.

References

1. Markushevich A.I. *Kratkii kurs teorii analiticheskikh funktsii* [A short course in the theory of analytic functions], Moscow: Nauka, 1978, 416 p. (In Russ.)

About One Designation of Series Sum

V. I. Fomin

Tambov State Technical University, Tambov, Russia

Keywords: absolute convergence; exponential function; series; series of functions; series sum; termwise differentiation; uniform convergence.

Abstract: The author proposes to introduce a special designation for the series sum that can foster learning students the appropriate educational material in the course “Mathematics”.

© В. И. Фомин, 2017