DOI: 10.17122/ntj-oil-2018-1-86-96

УДК 534.113

А.Г. Хакимов, А.А. Юлмухаметов (Институт механики им. Р.Р. Мавлютова
Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук,
г. Уфа, Российская Федерация)

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДА

A.G. Khakimov, A.A. Yulmukhametov (Mavlutov Institute of Mechanics, Federal
Research Centre, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation)

THE INVERSE PROBLEM OF BENDING VIBRATIONS OF A PIPELINE

Введение

При строительстве и эксплуатации трубопроводных систем возникают сложности прокладки трубопроводов через реки с грунтовыми берегами, овраги и другие препятствия. Моделирование подобных систем является сложной задачей, так как необходимо учитывать множество факторов влияющих на динамику трубопровода, таких как внутреннее давление, скорость транспортируемой жидкости, температура и вязкость окружающей среды, различные погодные условия и т.п.

Цели и задачи

Определить внутреннее давление, жёсткость грунта и присоединенную массу грунта по собственным частотам изгибных колебаний трубопровода.

Методы

Используется уравнение изгибных колебаний трубопровода по модели Кирхгофа. Частотное уравнение определяется классическим способом с помощью граничных условий и условий сопряжения.

Результаты

Результаты исследований показывают, что по двум известным низшим частотам можно определить жесткость грунта основания трубопровода и присоединенную массу грунта, а по одной известной частоте определяется давление жидкости внутри трубопровода.

Background

During the construction and operation of pipeline systems, it is difficult to lay pipelines through rivers with priming coasts, ravines and other obstacles. In modeling such problems, many factors that affect pipeline dynamics, such as internal pressure, fluid velocity, temperature and viscosity of the transported fields, various weather conditions, and the like, need to be taken into account.

Aims and Objectives

To determine the internal pressure, stiffness of the soil and the associated ground mass by the natural frequencies of the flexural vibrations of the pipeline.

Methods

The Kirchhoff model equation of flexural oscillations of the pipeline is used. The frequency equation is determined by the classical method with the help of boundary conditions and conjugation conditions.

Results

It is shown that the rigidity of the ground and the associated ground mass are determined by two known lower frequencies. The fluid pressure inside the pipeline is determined by only known frequency.

Получены аналитические выражения в явном виде для определения параметра жесткости грунта и присоединенной массы грунта. Приведены графики зависимостей исследуемых параметров (жесткости грунта, присоединенной массы грунта, внутреннего давления) от частоты изгибных колебаний трубопровода.

Analytic expressions in explicit form were obtained for the stiffness parameters of the soil and the attached ground mass. The graphs of the dependences of the investigated parameters (internal pressure, soil stiffness, adjoining ground mass) on the frequency of bending vibrations of the pipeline are given.

Ключевые слова: трубопровод, изгибные колебания, собственные частоты, обратная задача, жесткость грунта, внутреннее давление, присоединенная масса грунта

Key words: pipeline, bending vibrations, natural frequencies, inverse problem, soil stiffness, internal pressure, adjoining ground mass

Диагностике трубопроводов по собственным частотам их колебаний посвящено множество трудов. Современные исследования в данном направлении отражены в работах [1-6].

В [1, 2] исследуются поперечные колебания протяженного прямолинейного участка трубопровода с равномерно движущейся жидкостью. В [1] построены частотные кривые для первых двух мод колебаний в зависимости от безразмерных скоростного и инерционного параметров. Показано, что при фиксированном значении инерционного параметра и возрастающем скоростном параметре собственные частоты убывают. В работе [2] для первых трех мод построены зависимости собственных значений от величины скорости течения жидкости (от нуля до скорости выпучивания), изучены их свойства в зависимости от инерционного параметра. Показано, что уменьшение инерционного параметра при фиксированном значении скоростного параметра приводит к увеличению собственных частот поперечных колебаний трубопровода. В указанных трудах, как и в работе [3], собственные частоты определяются с помощью формул Феррари.

В [4] рассматриваются свободные и гармонические колебания трубопровода, возникающие при транспортировке газосодержащей жидкости. Колебания происходят за счет неравномерного распределения по длине трубы скопления газа. Сам трубопровод рассматривается как балка на упругом основании, описываемая моделью Винклера, подверженная действию пульсационной

A lot of works have been devoted to the diagnosis of pipelines according to the natural frequencies of their oscillations. Modern research in this direction is reflected in [1-6].

In [1, 2], transverse vibrations of an extended straight pipeline section with a uniformly moving liquid are investigated. In [1], the frequency curves for the first two modes of oscillations are constructed, depending on the dimensionless velocity and inertial parameters. It is shown that for a fixed value of the inertial parameter and an increasing velocity parameter, the natural frequencies decrease. In [2], the dependences of the eigenvalues on the magnitude of the fluid flow velocity (from zero to the rate of buckling) are constructed for the first three modes, their properties are studied depending on the inertial parameter. It is shown that a decrease in the inertial parameter at the fixed velocity value leads to an increase in the natural frequencies of the transverse oscillations of the pipeline. In the mentioned works, as well as in [3], the natural frequencies are determined using the Ferrari formulas.

In [4], free and harmonic oscillations of the pipeline arising during the transportation of a gas-containing liquid are considered. Oscillations occur due to the uneven distribution along the length of the tube of gas accumulation. The pipeline itself is considered as a beam on an elastic base, described by the Winkler model, subjected to the action of a pulsating load. The frequency spectrum of the oscillations is deter-

нагрузки. Определяется спектр частот колебаний. Приведенное решение может быть использовано для прогноза долговечности трубы.

Работа [5] посвящена исследованию отложений парафина в трубопроводах, подвергаемых сезонной чистке. Здесь разработана полуэмпирическая модель накопления отложений парафина, позволяющая рассчитывать распределение отложений по длине трубопровода, а также находить толщину отложений на стенке перед проведением операции очистки.

В [6] исследуются частоты и формы собственных колебаний шарнирно-опертых по концам криволинейных участков стальных трубопроводов, содержащих стационарный поток жидкостей. Здесь определено, что с увеличением рабочего внутреннего давления растут и частоты свободных колебаний. Приведена численная оценка влияния внутреннего гидростатического давления на свободные колебания в зависимости от различных значений кривизны и толщины стенок трубопровода.

Постановка задачи

Исследуются свободные изгибные колебания трубопровода, имеющего свободно провисающий участок длиной L ($-L/2 \leq x \leq L/2$) и участки ($-\infty < x < -L/2$, $L/2 < x < \infty$) в грунте. Изгибные колебания, являющиеся основными, сопровождаются осесимметричными и продольными волнами. Грунт считается изотропным и моделируется системой упругих пружин с определенными жесткостями в продольном и поперечном направлениях.

Линейное уравнение свободных изгибных колебаний имеет вид [7-9]:

mined. The above solution can be used for a pipe life forecast.

Work [5] is devoted to the investigation of paraffin deposits in pipelines subjected to seasonal cleaning. A semiempirical model of accumulation of paraffin deposits has been developed, which allows calculating the distribution of deposits along the length of the pipeline, and also to find the thickness of deposits on the pipe wall before performing the cleaning operation.

In [6], the frequencies and forms of natural oscillations of the simply-supported curved sections of steel pipelines containing a stationary flow of liquids are investigated. Here it is determined that with increasing working internal pressure, the frequencies of free oscillations also increase. Numerical estimation of the influence of internal hydrostatic pressure on free oscillations depending on different values of curvature and wall thickness of the pipeline is given.

Problem definition

Free bending oscillations of a pipeline having a freely sagging section of length L ($-L/2 \leq x \leq L/2$) and sections ($-\infty < x < -L/2$, $L/2 < x < \infty$) in the ground are investigated. Flexible oscillations, which are basic, are accompanied by axisymmetric and longitudinal waves. The soil is considered isotropic and is modeled by a system of elastic springs with certain stiffnesses in the longitudinal and transverse directions.

The linear equation of free bending oscillations has the form [7-9]:

$$EJ \frac{\partial^4 w_*}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial w_*}{\partial x} \right) + M \frac{\partial^2 w_*}{\partial t^2} = Mg, J = \frac{\pi}{4} \left((R+h)^4 - R^4 \right), \quad (1)$$

$$M = \pi \left(\rho \left((R+h)^2 - R^2 \right) + \rho_f R^2 \right).$$

Здесь E , ρ , J , h - модуль упругости, плотность, осевой момент инерции и толщина стенки трубопровода;

ρ_f , M - плотность продукта в трубопроводе, масса единицы длины трубопровода с продуктом;

g - ускорение свободного падения;

w_* - прогиб трубопровода.

Функция общего прогиба имеет статическую и динамическую составляющие $w_*(x, t) = w_0(x) + w(x, t)$. Подставляя его в (1) и учитывая выражение для P , приведенное в статье [10], получим

Here E , ρ , J , h are the modulus of elasticity, density, axial moment of inertia and the wall thickness of the pipeline;

ρ_f , M - product density in the pipeline, the mass of the unit length of the pipeline with the product;

g - acceleration of gravity;

w_* - deflection of the pipeline.

The function of the general deflection has the static and dynamic components $w_*(x, t) = w_0(x) + w(x, t)$. Substituting it into (1) and taking into account the expression for P given in [10], we obtain

$$\begin{aligned}
 EJ \frac{d^4 w_0}{dx^4} + \pi R^2 (1 - 2\nu) \left[p + \frac{2p_s}{2 - \alpha L} \right] \frac{d^2 w_0}{dx^2} &= q \left(-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \right), \\
 EJ \frac{d^4 w_0}{dx^4} + \pi R^2 (1 - 2\nu) \frac{d}{dx} \left[\left[p - p_s + \frac{p_s \alpha L}{2 - \alpha L} e^{-\alpha x_1} \right] \frac{dw_0}{dx} \right] + q_s w_0 &= q \\
 \left(-\infty < x < -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} < x < \infty \right), & \\
 EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \pi R^2 (1 - 2\nu) \left[p + \frac{2p_s}{2 - \alpha L} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \left(-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \right), \\
 EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \pi R^2 (1 - 2\nu) \frac{\partial}{\partial x} \left[\left[p - p_s + \frac{p_s \alpha L}{2 - \alpha L} e^{-\alpha x_1} \right] \frac{\partial w}{\partial x} \right] + (M + M_s) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_s w & \\
 \left(-\infty < x < -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} < x < \infty \right). &
 \end{aligned} \tag{2}$$

Статический изгиб трубопровода по первым двум уравнениям (2) рассмотрен в статье [10]. При этом предполагалось, что внутреннее давление в трубопроводе высокое, а давление грунта на него относительно мало, что реализуется в случае неглубокого залегания трубопровода. Это же предположение примем и в динамической задаче. Тогда во вторых членах уравнений (2) могут быть опущены слагаемые, содержащие p_s . Таким образом, получаем следующую систему:

The static bending of the pipeline along the first two equations (2) is considered in [10]. It was assumed that the internal pressure in the pipeline is high, and the ground pressure on it is relatively small, which is realized in the case of a shallow bedding of the pipeline. We assume the same assumption in the dynamic problem. Then the terms containing p_s can be omitted in the second terms of equations (2). Thus, we obtain the following system:

$$\begin{aligned}
 EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \pi R^2 p (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \left(-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \right), \\
 EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \pi R^2 p (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (M + M_s) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_s w &= 0 \\
 \left(-\infty < x < -\frac{L}{2}, \frac{L}{2} < x < \infty \right).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Введем следующие обозначения

We introduce the following notation

$$\begin{aligned}
 \xi = \frac{x}{L}, W = \frac{w}{L}, \mu^2 = \frac{\pi R^2 (1 - 2\nu) p L^2}{2EJ}, \beta = \frac{q_s L^4}{EJ}, \\
 \lambda^4 = \frac{ML^4 \omega^2}{EJ} = \Omega^2, \gamma = \frac{M_s}{M}, \lambda_*^4 = (1 + \gamma) \Omega^2 - \beta
 \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда система (3) примет вид

Then the system (3) takes the form

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^4 W_1}{\partial \xi^4} + 2\mu^2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} - \lambda^4 W_1 &= 0 \left(-\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2} \right), \\
 \frac{\partial^4 W_2}{\partial \xi^4} + 2\mu^2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi^2} - \lambda_*^4 W_2 &= 0 \left(|\xi| > \frac{1}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь M_s , ν - присоединенная масса грунта, коэффициент Пуассона;

p - давление транспортируемой жидкости внутри трубопровода;

ω - круговая частота изгибных колебаний трубопровода;

индексы 1, 2 относятся к безразмерному прогибу трубопровода на участках $(-1/2 \leq \xi \leq 1/2)$ и $(-\infty < \xi < -1/2, 1/2 < \xi < \infty)$ соответственно;

t - время;

q_s - жесткость грунта.

Математическая модель поставленной задачи принимает следующие дополнительные условия - граничные условия или условия затухания на бесконечности

Here M_s , ν are the adjoined ground mass, Poisson's ratio;

p - pressure of the transported liquid inside the pipeline;

ω is the circular frequency of the flexural oscillations of the pipeline;

indices 1, 2 refer to the dimensionless deflection of the pipeline in sections $(-1/2 \leq \xi \leq 1/2)$ и $(-\infty < \xi < -1/2, 1/2 < \xi < \infty)$ respectively;

t is the time;

q_s is the rigidity of the soil.

The mathematical model of the problem posed assumes the following additional conditions - boundary conditions or damping conditions at infinity

$$W_2 = 0, \frac{\partial W_2}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi \rightarrow \pm\infty)$$

и условия сопряжения [10], которые определяются равенством прогибов, углов поворота, изгибающих моментов, перерезывающих сил в месте перехода от провисающей части ($|\xi| \leq 1/2$) трубы к участкам в грунте ($|\xi| > 1/2$):

$$W_1 = W_2, \frac{\partial W_1}{\partial \xi} = \frac{\partial W_2}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^3 W_1}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^3 W_2}{\partial \xi^3}, \quad \left(\xi = \pm \frac{1}{2} \right). \quad (6)$$

Прямая задача в симметричном случае была рассмотрена в [11]. В работе был определен спектр частот изгибных колебаний трубопровода в зависимости от влияния параметров жесткости грунта, присоединенной массы грунта и давления транспортируемой жидкости. Было показано, что с увеличением жесткости грунта частота колебаний трубопровода возрастает, а с увеличением давления жидкости внутри трубы или присоединенной массы грунта частота падает.

В данной работе рассматривается обратная задача в общем случае для идентификации параметров внутреннего давления, присоединенной массы грунта и жесткости грунта по известным собственным частотам колебаний трубопровода.

Решение системы уравнений (5) имеет вид

and the conjugation conditions [10], which are determined by the equality of deflections, angles of rotation, bending moments, shearing forces at the junction from the sagging part ($|\xi| \leq 1/2$) of the pipe to the sections in the ground ($|\xi| > 1/2$):

A direct problem in the symmetric case was considered in [11]. In this work, the frequency spectrum of bending vibrations of the pipeline was determined, depending on the influence of parameters of the rigidity of the soil, the connected mass of the soil and the pressure of the transported liquid. It has been shown that as the rigidity of the soil increases, the frequency of the pipeline oscillations increases, and with increasing pressure of the liquid inside the pipe or the attached soil mass, the frequency decreases.

In this paper, we consider the inverse problem in the general case for the identification of the parameters of internal pressure, the associated ground mass and the stiffness of the soil from the known natural oscillation frequencies of the pipeline.

The solution of the system of equations (5) has the form

$$\begin{aligned} W_1(\xi) &= C_1 \cos \lambda_1 \xi + C_2 \sin \lambda_1 \xi + C_3 \operatorname{ch} \lambda_2 \xi + C_4 \operatorname{sh} \lambda_2 \xi & \left(|\xi| \leq \frac{1}{2} \right), \\ W_2(\xi) &= C_5 \cos \lambda_3 \xi + C_6 \sin \lambda_3 \xi + C_7 \operatorname{ch} \lambda_4 \xi + C_8 \operatorname{sh} \lambda_4 \xi & \left(\xi > \frac{1}{2} \right), \\ W_3(\xi) &= C_9 \cos \lambda_3 \xi + C_{10} \sin \lambda_3 \xi + C_{11} \operatorname{ch} \lambda_4 \xi + C_{12} \operatorname{sh} \lambda_4 \xi & \left(\xi < -\frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

где

where

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\sqrt{\mu^4 + \lambda^4} + \mu^2}, & \lambda_2 &= \sqrt{\sqrt{\mu^4 + \lambda^4} - \mu^2}, & \lambda_3 &= \sqrt{\sqrt{\mu^4 + \lambda_*^4} + \mu^2}, \\ \lambda_4 &= \sqrt{\sqrt{\mu^4 + \lambda_*^4} - \mu^2}. \end{aligned}$$

Удовлетворяя (7) условиям сопряжения (6) и условиям затухания на бесконечности $W_2 = 0, \frac{\partial W_2}{\partial \xi} = 0$ ($\xi \rightarrow \pm\infty$), получим однородную систему уравнений, определитель которой дает частотное уравнение

Satisfying (7) with the conjugation conditions (6) and the damping conditions at infinity $W_2 = 0, \frac{\partial W_2}{\partial \xi} = 0$ ($\xi \rightarrow \pm\infty$), we obtain a homogeneous system of equations which determinant gives the frequency equation

$$\lambda_3^2 (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2 (\lambda_1^2 - \lambda_3^2)^2 [(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_2 - 2 \lambda_1 \lambda_2 (1 - \cos \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_2)] = 0. \quad (8)$$

Уравнение (7) имеет решение, если хотя бы один из множителей равен нулю, т.е. либо $\lambda_3^2 = 0$, либо $\lambda_1^2 - \lambda_3^2 = 0$, либо

Equation (7) has a solution if at least one of the factors is zero, i.e. either $\lambda_3^2 = 0$, either $\lambda_1^2 - \lambda_3^2 = 0$, or

$$(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_2 - 2 \lambda_1 \lambda_2 (1 - \cos \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_2) = 0.$$

Решения уравнений $\lambda_3^2 = 0$ и $\lambda_1^2 - \lambda_3^2 = 0$ с учетом введенных обозначений имеют вид $\Omega_1 = \sqrt{\beta/(1+\gamma)}$, $\Omega_2 = \sqrt{\beta/\gamma}$ соответственно.

The solutions of the equations $\lambda_3^2 = 0$ and $\lambda_1^2 - \lambda_3^2 = 0$ taking into account the introduced notations have the form $\Omega_1 = \sqrt{\beta/(1+\gamma)}$, $\Omega_2 = \sqrt{\beta/\gamma}$ respectively.

Пусть Ω_1 и Ω_2 известные частоты. Тогда решение системы из последних двух уравнений определяет параметры жесткости грунта и присоединенной массы грунта в явном аналитическом виде:

Let Ω_1 and Ω_2 be known frequencies. Then the solution of the system from the last two equations determines the parameters of the stiffness of the soil and the attached mass of the soil in an explicit analytical form:

$$\beta = \frac{\Omega_1^2 \Omega_2^2}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}, \quad \gamma = \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2}. \quad (9)$$

Пример

Example

Для входных данных $\mu = 0$, $\beta = 30$, $\gamma = 0.7$ из характеристического уравнения (8) определяются следующие две низшие частоты: $\Omega_1 \approx 4.201$, $\Omega_2 \approx 6.547$. В обратной задаче, подставляя полученные значения безразмерных частот в (9), получим, что $\beta \approx 30$, $\gamma \approx 0.7$. Приведенный численный расчет доказывает справедливость полученных выражений.

For the input data $\mu = 0$, $\beta = 30$, $\gamma = 0.7$, the following two lower frequencies are determined from the characteristic equation (8): $\Omega_1 \approx 4.201$, $\Omega_2 \approx 6.547$. In the inverse problem, substituting the obtained values of the non-dimensional frequencies into (9), we obtain $\beta \approx 30$, $\gamma \approx 0.7$. The above numerical calculation proves the validity of the obtained expressions.

На рисунке 1 представлены зависимости коэффициентов относительной жестко-

Figure 1 shows the dependences of the coefficients of the relative rigidity of the soil β

сти грунта β (рисунок 1, а) и присоединенной массы грунта γ (рисунок 1, б) от безразмерной круговой частоты Ω_1 колебаний трубопровода при разных значениях Ω_2 (кривая 1 - $\Omega_2 = 5$; кривая 2 - $\Omega_2 = 6$; кривая 3 - $\Omega_2 = 7$, кривая 4 - $\Omega_2 = 8$).

(Figure 1, a) and the attached mass of the soil γ (Figure 1, b) on the dimensionless circular frequency Ω_1 of the pipeline vibrations for different values of Ω_2 (curve 1 - $\Omega_2 = 5$; curve 2 - $\Omega_2 = 6$; curve 3 - $\Omega_2 = 7$, curve 4 - $\Omega_2 = 8$).

Рисунок 1. Зависимости коэффициентов относительной жесткости грунта β (а) и присоединенной массы грунта γ (б) от безразмерной круговой частоты Ω_1 колебаний трубопровода для разных Ω_2

Figure 1. Dependences of the coefficients of relative rigidity of the soil β (a) and the attached ground mass γ (b) from the dimensionless circular frequency Ω_1 of the pipeline vibrations for different values of Ω_2

Для нахождения давления жидкости в трубопроводе достаточно решить уравнение

To find the pressure in the pipeline, it is sufficient to solve the equation

$$(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_2 - 2\lambda_1 \lambda_2 (1 - \cos \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_2) = 0$$

относительно параметра μ . В явном виде этот параметр не выражается.

with respect to the parameter μ . This parameter is not explicitly expressed.

На рисунке 2 представлена зависимость давления в трубопроводе μ^2 от безразмерной круговой частоты Ω колебаний.

Figure 2 shows the dependence of the pressure in the pipeline μ^2 on the dimensionless circular frequency Ω of the oscillations.

Рисунок 2. Зависимость давления в трубопроводе μ^2 от безразмерной круговой частоты Ω колебаний

Figure 2. Dependence of pressure in the pipeline μ^2 on the dimensionless circular frequency Ω oscillations

По рисунку 2 видно, что с увеличением собственных частот изгибных колебаний уменьшается давление жидкости внутри трубопровода.

Выводы

Результаты исследований показывают, что по двум известным низшим частотам можно определить жесткость грунта основания трубопровода и присоединенную массу грунта, а по одной известной частоте определяется давление жидкости внутри трубопровода.

Получены аналитические выражения в явном виде для определения параметра жесткости грунта и присоединенной массы грунта.

Приведены графики зависимостей исследуемых параметров (жесткости грунта, присоединенной массы грунта, внутреннего давления) от частоты изгибных колебаний трубопровода. Например, график на рисунке 2 показывает обратную зависимость давления внутри трубы и собственных частот колебаний. Этот факт подтверждает результа-

Figure 2 shows that with increasing natural frequencies of bending vibrations, the fluid pressure inside the pipeline decreases.

Conclusions

The results of the research show that, at two known lower frequencies, it is possible to determine the rigidity of the pipeline foundation soil and the associated soil mass, and for one known frequency, the pressure of the liquid inside the pipeline is determined.

Analytic expressions are obtained in explicit form for determining the rigidity parameter of the soil and the attached soil mass.

Graphs of the dependences of the investigated parameters (rigidity of soil, attached soil mass, internal pressure) on the frequency of bending vibrations of the pipeline are given. For example, the graph in Figure 2 shows the inverse relationship of the pressure inside the pipe and the natural oscillation frequencies. This fact confirms the results of the direct prob-

ты прямой задачи, полученные в работе [11], о том, что с увеличением внутреннего давления растёт и частоты изгибных колебаний трубопровода.

Полученные результаты способствуют развитию диагностических методов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №17-41-020400 p_a).

lem obtained in [11] that the frequencies of the flexural vibrations of the pipeline increase with increasing internal pressure.

The obtained results contribute to the development of diagnostic methods.

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 17-41-020400 p_a).

Список литературы

1. Акуленко Л.Д., Коровина Л.И., Нестеров С.В. Собственные колебания участка трубопровода // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2011. № 1. С. 172-187. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=15624284>.
2. Акуленко Л.Д., Иванов М.И., Коровина Л.И., Нестеров С.В. Основные свойства собственных колебаний протяженного участка трубопровода // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2013. № 4. С. 119-134. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=20194647>.
3. Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Нестеров С.В. Спектр поперечных колебаний участка движущегося стержня при воздействии продольной нагрузки // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2015. № 2. С. 139-144. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23286558>.
4. Бондаренко В.М., Травуш В.И. Колебания трубопроводов при транспортировании газосодержащих жидкостей // Academia. Архитектура и строительство. 2017. № 1. С. 101-103. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29093256>.
5. Ван Вэньда, Хуан Цийу, Хуан Цзунь, Пан Цуань, Фу Цзунь, Ван Фенхуи. Исследование отложений парафина в трубопроводах, подвергаемых сезонной чистке // Химия и технология топлив и масел. 2014. № 1 (581). С. 27-33. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22458712>.
6. Березнев А.В. Влияние внутреннего гидростатического давления на частоты свободных колебаний криволинейного участка трубопровода // Известия вузов. Нефть и газ. 2011. № 3. С. 77-80. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=16453669>.
7. Светлицкий В.А. Механика стержней. М.: Высшая школа, 1987. Т. 2. 304 с.
8. Ilgamov M.A. Static Problems of Hydroelasticity. M.: Nauka, Fizmatlit, 1998. 208 p.
9. Ильгамов М.А. Колебание упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 182 с.
10. Ильгамов М.А., Юлмухаметов А.А. Прямая и обратная задачи изгиба трубопровода // Вестник ПНИПУ. Механика. 2017. № 3. С. 100-112. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=30159856>.

References

1. Akulenko L.D., Nesterov S.V., Korovina L.I. Sobstvennye kolebaniya uchastka truboprovoda [Natural Vibrations of a Pipeline Segment]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela - Mechanics of Solids*, 2011, No. 1. pp. 172-187. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=15624284>. (in Russ.).
2. Akulenko L.D., Ivanov M.I., Nesterov S.V., Korovina L.I. Osnovnye svoistva sobstvennykh kolebaniy protyazhennogo uchastka truboprovoda [Basic Properties of Natural Vibrations of an Extended Segment of a Pipeline]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela - Mechanics of Solids*, 2013, No. 4. pp. 119-134. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=20194647>. (in Russ.).
3. Akulenko L.D., Nesterov S.V., Georgievskii D.V. Spektr poperechnykh kolebaniy uchastka dvizhushchegosya stержnya pri vozdeistvii prodol'noi nagruzki [Transverse Vibration Spectrum of a Part of a Moving Rod under a Longitudinal Load]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela - Mechanics of Solids*, 2015, no. 2. pp. 139-144. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23286558>. (in Russ.).
4. Bondarenko V.M., Travush V.I. Kolebaniya truboprovodov pri transportirovani gazosoderzhashchikh zhidkostei [Oscillations of Pipelines during Transportation of Gas-Containing Liquids]. *Academia. Arkhitektura i stroitel'stvo - Academia. Architecture and construction*, 2017, No. 1. pp. 101-103. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29093256>. (in Russ.).
5. Wang Wenda, Huang Qiyu, Huang Jun, Pang Quan, Fu Jun, Wang Fenghui. Issledovanie otlozhenii parafina v truboprovodakh, podvergaemykh sezonnoi chistke [Study on Wax Deposition in Seasonally Pigged Pipelines]. *Khimiya i tekhnologiya topliv i masel - Chemistry and Technology of Fuels and Oils*, 2014, No. 1, pp. 27-33. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22458712>. (in Russ.).
6. Bereznev A.V. Vliyanie vnutrennego gidrostaticheskogo davleniya na chastoty svobodnykh kolebaniy krivolineinogo uchastka truboprovoda [Influence of Internal Hydrostatic Pressure on the Frequency of Free Vibrations of the Pipe-

11. Хакимов А.Г., Юлмухаметов А.А. Спектр частот изгибных колебаний трубопровода // Известия УНЦ РАН. Механика. 2017. № 3. С. 10-14. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29924723>.

line Curvilinear Site. Izvestiya vuzov. Neft' i gaz - Higher Educational Institutions News. Oil and Gas, 2011, No. 3, pp. 77-80. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=16453669>. (in Russ.).

7. Svetlitskii V.A. *Mekhanika sterzhnei* [Mechanics of Rods]. Moscow, Vysshaya shkola, 1987. 304 p. (in Russ.).

8. Ilgamov M.A. *Static Problems of Hydroelasticity*. Moscow, Nauka, Fizmatlit, 1998. 208 p. (in Russ.).

9. Ilgamov M.A. *Kolebanie uprugikh obolochek, sodержashchikh zhidkost' i gaz* [Vibrations of Elastic Shells Containing Liquid and Gas]. Moscow, Nauka, 1969. 182 p. (in Russ.).

10. Ilgamov M.A., Yulmukhametov A.A. Pryamaya i obratnaya zadachi izgiba truboprovoda [Direct and Inverse Problems of Pipeline Bending]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika - PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, No. 3, pp. 100-112. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=30159856>. (in Russ.).

11. Khakimov A.G., Yulmukhametov A.A. Spektr chastot izgibnykh kolebaniy truboprovoda [The Range of Frequencies for Flexural Vibrations of a Pipeline]. *Izvestiya UNTs RAN. Mekhanika - Proceedings of the RAS USC*, 2017, No. 3, pp. 10-14. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29924723>. (in Russ.).

Авторы

• Хакимов Аким Гайфуллинович, канд. физ.-мат. наук, доцент
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова
Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук
Ведущий научный сотрудник
Российская Федерация, 450054, г. Уфа, пр. Октября, 71
тел. (347) 292-14-06
e-mail: hakimov@anrb.ru

The Authors

• Khakimov Akim G., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Mavlyutov Institute of Mechanics, Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences
Leading Researcher
71, October ave., Ufa, 450054, Russian Federation
tel: (347) 292-14-06
e-mail: hakimov@anrb.ru

• Юлмухаметов Артур Ахмарович
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова
Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук
Аспирант
Российская Федерация, 450054, г. Уфа, пр. Октября, 71
e-mail: artyr_yulmuhametov@mail.ru

• Yulmukhametov Artur A.
Mavlyutov Institute of Mechanics, Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences
Post-graduate Student
71, October ave., Ufa, 450054, Russian Federation
e-mail: artyr_yulmuhametov@mail.ru