КОНЦЕНТАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ V-ОБРАЗНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

CONCENTRATION OF STRESSES NEAR V-SHAPED ELEMENTS

А. К. Гумеров

Aidar K. Gumerov

Уфимский государственный
нефтяной технический университет,
г. Уфа, Российская Федерация

Ufa State Petroleum
Technological University,
Ufa, Russian Federation

Изучение концентраторов напряжений, особенно таких, которые вызывают образование сингулярностей вида $\sigma \rightarrow \infty$, имеет важное научное и прикладное значение. Наиболее известным представителем таких концентраторов напряжений является трещина, которая является предметом изучения механики разрушения. Трещины могут быть обычные, расположенные в однородном материале, межфазные, пересекающие фазовую плоскость между двумя разными материалами. В зависимости от этого формируются поля напряжений с разными особенностями.

Другой класс аналогичных концентраторов напряжений — V-образные элементы, образующие двугранный угол с углом раскрытия больше нуля. V-образные элементы могут образоваться как в однородных, так и разнородных материалах. Особенности сингулярности зависят от механических свойств материалов и углов, занятых этими материалами. Если угол раскрытия равен нулю, то соответствующие формулы переходят в известные формулы для трещин.

Следующий класс концентраторов напряжений, образующих сингулярность, — внутренние элементы с V-образными границами материалов. Такие элементы образуются вокруг неметаллических включений с острыми углами, в волокнистых композиционных материалах на концах волокон. В отличие от предыдущего класса, в данном случае нет пустых секторов. Тем не менее, получаемые формулы переходят в известные выражения, если механические свойства одного из материалов устремить к нулю.

Таким образом, все классы задач, связанных с образованием сингулярности вида $\sigma \rightarrow \infty$, можно рассматривать как одну общую задачу с увеличенным количеством параметров. Такая работа и проделана в настоящей статье. Это позволило получить новые закономерности о напряженном состоянии и определить направления дальнейшего развития механики разрушения.

В качестве примера методом комплексных потенциалов с применением уравнений Колосова-Мусхелишвили проведён теоретический анализ напряжённого состояния в вершине V-образной границы, разделяющей два однородных материала с отличающимися модулями нормальной упругости E_1 и E_2 . Расчёт показал, что в локальной зоне около вершины угла напряжённое состояние приобретает сингулярный характер, распределение напряжений описывается слагаемыми вида $\sigma \approx K/r^{\lambda}$, а параметры особенности $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ зависят от соотношения упругих характеристик материалов. Изучены соответствующие закономерности.

Ключевые слова

трещина; дефект; двугранный угол;
V-образный элемент;
сингулярность; напряжения;
критерий прочности;
композиционный материал;
граница раздела;
комплексные потенциалы

The study of stress concentrators, especially those that cause the formation of singularities of $\sigma \rightarrow \infty$ form, is of great scientific and applied importance. The most famous representative of such stress concentrators is the crack, which is the subject of study of fracture mechanics. Cracks can be normal, located in a homogeneous material, interfacial, intersecting the phase plane between two different materials. Depending on this, stress fields are formed with different features.

Another class of similar stress concentrators is V-shaped elements that form a dihedral angle with a disclosure angle greater than zero. V-shaped elements can be formed in both homogeneous and dissimilar materials. The singularity features depend on the mechanical properties of the materials and the angles occupied by these materials. If the opening angle is zero, then the corresponding formulas are transferred to the well-known formulas for cracks.

The next class of stress concentrators forming the singularity is the internal elements with V-shaped material boundaries. Such elements are formed around non-metallic inclusions with sharp corners, in fibrous composite materials at the ends of the fibers. Unlike the previous class, in this case there are no empty sectors. However, the resulting formulas transfer into the well-known expressions, if the mechanical properties of one of the materials tend to zero.

Thus, all classes of tasks related to the formation of a singularity of a $\sigma \rightarrow \infty$ form can be considered as one common task with an increased number of parameters. Such work is done in this article. This made it possible to obtain new patterns of stress state and to determine the directions for the further development of mechanics destruction.

As an example, using the complex potentials method with the application of the Kolosov-Muskhelishvili equations, a theoretical analysis of the stress state at the top of the V-shaped boundary separating two homogeneous materials with different normal elastic moduli E_1 and E_2 was carried out. The calculation showed that in the local zone near the top of the angle, the straightened state acquires a singular character, the stress distribution is described by terms of the form $\sigma \approx K/r\lambda$, and the parameters of the singularity $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ depend on the ratio of the elastic characteristics of the materials. Relevant patterns are studied.

Введение

Разрушение трубопроводов, как и всех других конструкций, происходит путём зарождения и развития трещин. Поэтому последнее столетие было отмечено бурным развитием механики разрушения [1, 2], которая изучает особенности напряженного состояния вокруг трещин, предлагает критерии разрушения элементов конструкций с трещинами. Трещины отличаются от других дефектов тем, что при любой нагрузке в окрестности вершины трещины образуется сингулярное поле напряжений с особенностью вида $\sigma \rightarrow \infty$ (чем ближе к вершине трещины, тем выше напряжения). Отсюда по классическим представлениям [3, 4] следует, что любой конструктивный элемент с любой трещиной должен разрушиться при любой нагрузке, так как в вершине трещины напряжение превысит предел прочности для любого материала. В реальности картина иная: конструкции с трещинами работают, некоторые очень долго. Это говорит о том, что классические теории прочности не работают в случае трещин из-за наличия син-

Key words

crack; defect; dihedral angle; V-shaped element; singularity; voltage; strength criterion; composite material; boundary of the section; complex potentials

гулярности вида $\sigma \rightarrow \infty$. Для таких случаев механика разрушения предлагает специальные критерии прочности: силовые, основанные на коэффициентах интенсивности напряжений; энергетические на основе баланса энергий при продвижении трещины; деформационные, использующие раскрытие трещины при деформировании элемента конструкции.

Далее оказалось, что существуют и другие дефекты, похожие по внешнему виду на трещины, например непровары (дефекты сварки) и расслоения металла (металлургические дефекты). Такие дефекты называют трещиноподобными (по форме), и к ним также применяют критерии, предложенные механикой разрушения.

С расширением круга конструкционных материалов, особенно с внедрением композиционных материалов, выяснилось, что трещины ведут себя по-разному в зависимости от того, где они находятся. Появились как предметы отдельного изучения «межфазные трещины», находящиеся на границе между двумя материалами (непровары, непропои,

несклейки в соединениях разнородных материалов, расслоения в биметаллах и слоистых композиционных материалах). Следует отметить, что особенности межфазных трещин и критерии разрушения для них не до конца изучены и в настоящее время.

Далее интерес исследователей прочности сосредоточился на трещинах, пересекающих границу между двумя разными материалами (в композиционных материалах). Обнаружили, что трещины одну и ту же границу между разными материалами в одном направлении пересекают легко, в обратном направлении — значительно труднее. На этом свойстве, в частности, основана высокая прочность композиционных материалов. В них границы фаз блокируют развитие трещин. Особенности таких «пересекающих трещин» и критерии разрушения для них также не до конца изучены.

По мере развития теории прочности и механики разрушения стали известны и другие случаи появления сингулярных полей напряжений, особенно в связи с широким применением сварочных технологий. Это — элементы V-образной формы — царапины и сварные соединения с угловыми швами [5–7]. С широким применением разнообразных ремонтных технологий при обслуживании магистральных трубопроводов проблема оценки влияния таких сингулярностей обострилась. Циклические нагрузки и температуры способны ускорить зарождение и рост трещин на всякого рода концентраторах, особенно заметно на таких сингулярностях. Если в таких зонах изоляционное покрытие повреждено и одновременно действует электрохимическая защита, то будут ускоренно протекать процессы локальной стресс-коррозии [8–10].

С расширением конструкционных материалов, особенно с применением композитных материалов, стали известны другие виды сингулярных элементов внутри материалов [11, 12].

Как видим, количество и разновидности сингулярных элементов значительно выросли, и появилась возможность рассмотреть все виды сингулярностей с единой позиции, тем самым, во-первых, расширить границы механики разрушения и теории прочности материалов и конструкций, во-вторых, определить общие закономерности и более эффективно решать практические задачи. Данная статья в определенной степени является шагом в этом направлении.

Анализ известных видов концентраторов напряжений показывает, что сингулярность вида $\sigma \rightarrow \infty$ появляется в случаях, когда имеется неоднородность по геометрическим и (или) механическим свойствам. На рисунке 1 показан ряд элементов, создающих сингулярные поля напряжений вокруг особой точки О. Каждый предыдущий элемент в определенной мере является частным случаем последующего. Например, случай а) получается из случая б), если угол раскрытия уменьшить до нуля; случай г) переходит в а), если свойства материалов 1 и 2 принять одинаковыми; из случая л) можно перейти к случаю б), если материал 2 сделать пустым (модуль упругости приравнять нулю), материалы 1 и 3 взять одинаковыми. Поэтому все случаи на рисунке 1 можно рассматривать как частные случаи более сложного случая. А простая трещина в однородном материале, которая является предметом изучения в механике разрушения, является всего лишь самым простым частным случаем более общей задачи о сингулярностях.

Рисунок 1. Схемы элементов, создающих сингулярное поле напряжений вокруг точки О; 1, 2, 3 — материалы, отличающиеся механическими свойствами; трещина в однородном материале (а); двугранный угол в однородном материале (б, в); межфазная трещина (г); пересекающая трещина (д); составной двугранный угол (е, ж); краевая точка стыка (и); внутренние V-образные элементы в гетерогенных материалах (к, л)

Далее рассмотрим случай κ), который удобен в методическом плане, также имеет самостоятельное практическое значение.

В последние годы в разработке находятся структурированные материалы из разнородных материалов. В них один материал представляет матрицу, в которой находятся включения из другого материала. При этом включения представляют многогранники неправильных форм с острыми углами. В за-

висимости от соотношения механических свойств матрицы и включений эти угловые точки могут стать сингулярными концентраторами напряжений.

На рисунке 2 показан другой пример, взятый из волокнистых композиционных материалов. На концах упругих жестких волокон образуются элементы с особыми точками. В увеличенном виде они представляют составные V-образные элементы (зона А).

Рисунок 2. Появление V-образных элементов с особыми точками O_1 и O_2 в композиционном материале

Постановка задачи и её решение

Итак, поставим задачу изучить особенности напряженного состояния в окрестности особых точек в виде составного двугранного угла (рисунок 3).

Рисунок 3. Расчётная схема элемента с V-образной границей раздела между материалами (а) и принятая система координат (б)

Допустим, что поле упругих смещений и деформаций не зависит от одной из декартовых координат, например от z . При этом получаем так называемую плоскую задачу. В этом весьма важном случае все смещения и напряжения можно представить через функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ и $f(z)$, являющиеся аналитическими функциями комплексного переменного $z = x + iy$ в области, занятой телом (одинаковое обозначение z для декартовой координаты и комплексного переменного не должно приводить к путанице).

Функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ называются потенциалами Колосова-Мусхелишвили, или комплексными потенциалами [13]. Основные уравнения метода комплексных потенциалов (МКП) имеют вид:

$$\sigma_t + \sigma_n = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]; \quad (1)$$

$$\sigma_n - \sigma_t + 2i\tau_{tn} = 2\ell^{2i\alpha} [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]; \quad (2)$$

$$2\mu(u + iv) = \chi\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \quad (3)$$

Здесь u , v , w — смещения вдоль осей x , y , z соответственно;

μ , ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала;

$\chi = 3 - 4\nu$ (при $\varepsilon_z = 0$); $\chi = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ (при $\sigma_z = 0$); $\phi'(z) = \dot{O}(z)$; $\psi'(z) = \Psi(z)$;

σ_t , σ_n , σ_{tn} — компоненты тензора напряжений в системе координат t_n ;

α — угол между осями x и t (направление отсчёта от x к t).

Если принять $\alpha = \theta$, то напряжения $\sigma_t, \sigma_n, \sigma_{tn}$ переходят в $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$.

Из формул (1), (2) вытекает, что плоское поле напряжений распадается на два независимых поля, одно из которых соответствует сложному (антиплоскому) сдвигу

$$w \neq 0; \tau_{tz} \neq 0; \tau_{nz} \neq 0; \\ u = v = 0; \sigma_n = \sigma_t = \tau_{tn} = 0;$$

а другое — плоской деформации

$$u \neq 0; v \neq 0; \sigma_n \neq 0; \sigma_t \neq 0; \tau_{tn} \neq 0; \\ \sigma_z \neq 0; dw/dz = 0; \tau_{tz} = \tau_{nz} = 0;$$

или плоскому напряжённому состоянию

$$u \neq 0; v \neq 0; \sigma_n \neq 0; \sigma_t \neq 0; \\ \tau_{tn} \neq 0; \sigma_z = \tau_{tz} = \tau_{nz} = 0.$$

Пусть в полярных координатах тело 1 занимает область $-\beta < \theta < +\beta$; тело 2 занимает область ω (рисунок 3, а).

Напряжения σ_θ и $\tau_{r\theta}$ при помощи потенциалов Колосова-Мусхелишвили можно представить в следующем виде (получаем сложением (1) и (2) и подстановкой $\alpha = \theta$):

$$\sigma_\theta + i\tau_{r\theta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})} + \ell^{2i\theta} [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]; \\ (z = r e^{i\theta}). \quad (4)$$

Нас интересует малая область вокруг особой точки O , поскольку там может появиться сингулярность. Поэтому, для облегчения задачи, применим «принцип микроскопа», который впервые сформулирован С.М. Белоносовым и развит Г.П. Черепановым [14]. Суть данного принципа состоит в том, что если при увеличении (или уменьшении) масштаба конфигурация модели не изменяется, то комплексные потенциалы являются степенными функциями. Для обоснования данного утверждения приведем следующие рассуждения и выкладки.

Согласно (4), если функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ удовлетворяют некоторым граничным условиям (например, на плоскостях $\theta = \pm\beta$ нормальные и касательные напряжения с одной и другой стороны равны друг другу согласно III закону Ньютона), то функции $\Phi(C_1 z)$ и $\Psi(C_1 z)$ также удовлетворяют этим условиям (C_1 — произвольное действительное число). Поскольку задача линейная, а каждое из тел 1 и 2 — однородное, то функции $C_2 \Phi(z)$ и $C_2 \Psi(z)$ также будут решениями (C_2 — произвольный действительный параметр). Следовательно, общее решение, порожденное функциями $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, имеет вид $C_2 \Phi(C_1 z)$ и $C_2 \Psi(C_1 z)$.

Иначе говоря, множество искомым решений допускает группу подобия (автомодельное решение). Согласно определению группового свойства, функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ должны удовлетворять функциональному уравнению

$$C_2 f(C_1 z) = f(z). \quad (5)$$

Физический смысл выражения (5) означает, что общий вид поля напряжений качественно сохранится, если изменим (уменьшим или увеличим) масштаб области в окрестности сингулярной точки. Например, если изменить масштаб в C_1 раз (рассмотреть картину в микроскоп с увеличением C_1), то «увидим», что напряжения во всех точках увеличились ровно в C_2 раз. При этом качественная картина не изменится. Условно такое свойство называют принципом микроскопа.

Допустим, решением является некоторая дифференцируемая функция. Подставляя её в уравнение (5), найдём, что C_2 будет функцией C_1 и, вообще говоря, некоторых постоянных, входящих в решение. Если подставить эту функцию $C_2 = C_2(C_1)$ в уравнение (5), оно превратится в тождество, которое можно дифференцировать по C_1 . В результате дифференцирования получим

$$\frac{dC_2}{dC_1} f(C_1 z) + C_2 \frac{df(C_1 z)}{d(C_1 z)} z = 0.$$

После несложных преобразований получаем:

$$\frac{d \ln(f(C_1 z))}{d \ln(C_1 z)} = -\frac{d \ln C_2}{d \ln C_1}.$$

Обозначим $\lambda = \frac{d \ln C_2}{d \ln C_1}$ и получаем

$$\frac{d \ln(f(C_1 z))}{d \ln(C_1 z)} = -\lambda.$$

Произведя замены переменных, получаем далее:

$$\frac{d \ln(f(C_1 z))}{d \ln(C_1 z)} = -\lambda; \quad \frac{d \ln(f(z^*))}{d \ln(z^*)} = -\lambda.$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$f(z^*) = C_3 \cdot (z^*)^{-\lambda}, \quad (6)$$

где C_3 — произвольная постоянная.

В выражении (6) величина z^* является независимым комплексным аргументом, который может быть обозначен как угодно. Обозначая его z , получаем

$$f(z) = C_3 \cdot z^{-\lambda}. \quad (7)$$

Отсюда можно сделать вывод, что комплексные потенциалы для данной граничной

задачи, допускающей группу подобия (5), имеют вид:

$$\Phi(z) = A \cdot z^{-\lambda}; \quad \Psi(z) = B \cdot z^{-\lambda}, \quad (8)$$

где A, B, λ — некоторые постоянные, которые могут быть действительными или комплексными.

В справедливости выражений (8) для данной задачи можно убедиться прямым методом, подставляя их в исходные выражения (1), (2) и проверяя граничные условия на плоскостях $\theta = \pm\beta$.

Далее, используя функции (8) и исходные формулы (1)–(3), были получены выражения для напряжений и смещений:

$$\sigma_{\theta} = r^{-\lambda} \left\{ \begin{aligned} &[A_R(2-\lambda)\cos\lambda\theta + \\ &+ A_J(2-\lambda)\sin\lambda\theta] + \\ &+ [B_R\cos(2-\lambda)\theta - \\ &- B_J\sin(2-\lambda)\theta] \end{aligned} \right\}; \quad (9)$$

$$\sigma_r = r^{-\lambda} \left\{ \begin{aligned} &A_R(2+\lambda)\cos(\lambda\theta) + \\ &+ A_J(2+\lambda)\sin(\lambda\theta) - \\ &- B_R\cos(2-\lambda)\theta + \\ &+ B_J\sin(2-\lambda)\theta \end{aligned} \right\}; \quad (10)$$

$$\tau_{r\theta} = r^{-\lambda} \left\{ \begin{aligned} &\lambda(A_R\sin\lambda\theta - A_J\cos\lambda\theta) + \\ &+ [B_R\sin(2-\lambda)\theta + \\ &+ B_J\cos(2-\lambda)\theta] \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

$$u = r^{1-\lambda} \cdot \frac{1}{2\mu(1-\lambda)} \left\{ \begin{aligned} &(\chi A_R - B_R) \cdot \cos(1-\lambda)\theta + \\ &+ (-\chi A_J + B_J) \cdot \sin(1-\lambda)\theta - \\ &- A_R(1-\lambda) \cdot \cos(\lambda+1)\theta - \\ &- A_J(1-\lambda) \cdot \sin(\lambda+1)\theta \end{aligned} \right\}; \quad (12)$$

$$v = r^{1-\lambda} \cdot \frac{1}{2\mu(1-\lambda)} \left\{ \begin{aligned} &(\chi A_R + B_R) \cdot \sin(1-\lambda)\theta + \\ &+ (\chi A_J + B_J) \cdot \cos(1-\lambda)\theta - \\ &- A_R(1-\lambda) \cdot \sin(\lambda+1)\theta + \\ &+ A_J(1-\lambda) \cdot \cos(\lambda+1)\theta \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

где A_R, A_J, B_R, B_J — действительные и мнимые части коэффициентов A, B .

Для определения неизвестных параметров $\lambda, A_R, A_J, B_R, B_J$ использованы следующие граничные условия (соответствуют III закону Ньютона на границах):

на границе $\theta_1 = \beta$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta(1)}(\theta_1) &= \sigma_{\theta(2)}(\theta_1); \\ \tau_{r\theta(1)}(\theta_1) &= \tau_{r\theta(2)}(\theta_1); \\ u_{(1)}(\theta_1) &= u_{(2)}(\theta_1); \\ v_{(1)}(\theta_1) &= v_{(2)}(\theta_1); \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

на границах $\theta_2 = \beta + \omega; \theta_3 = -\beta$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta(1)}(\theta_3) &= \sigma_{\theta(2)}(\theta_2); \\ \tau_{r\theta(1)}(\theta_3) &= \tau_{r\theta(2)}(\theta_2); \\ u_{(1)}(\theta_3) &= u_{(2)}(\theta_2); \\ v_{(1)}(\theta_3) &= v_{(2)}(\theta_2). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Отсюда получена система уравнений (16)–(23)

$$\begin{aligned} &[A_{R(1)}(2-\lambda)\cos\lambda\beta + A_{J(1)}(2-\lambda)\sin\lambda\beta] + \\ &+ [B_{R(1)}\cos(2-\lambda)\beta - B_{J(1)}\sin(2-\lambda)\beta] = \\ &= [A_{R(2)}(2-\lambda)\cos\lambda\beta + A_{J(2)}(2-\lambda)\sin\lambda\beta] + \\ &+ [B_{R(2)}\cos(2-\lambda)\beta - B_{J(2)}\sin(2-\lambda)\beta]; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &\lambda(A_{R(1)}\sin\lambda\beta - A_{J(1)}\cos\lambda\beta) + \\ &+ [B_{R(1)}\sin(2-\lambda)\beta + B_{J(1)}\cos(2-\lambda)\beta] = \\ &= \lambda(A_{R(2)}\sin\lambda\beta - A_{J(2)}\cos\lambda\beta) + \\ &+ [B_{R(2)}\sin(2-\lambda)\beta + B_{J(2)}\cos(2-\lambda)\beta]; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mu_{(1)}} \left\{ \begin{aligned} &(\chi_{(1)}A_{R(1)} - B_{R(1)}) \cdot \cos(1-\lambda)\beta + \\ &+ (-\chi_{(1)}A_{J(1)} + B_{J(1)}) \cdot \sin(1-\lambda)\beta - \\ &- A_{R(1)}(1-\lambda) \cdot \cos(\lambda+1)\beta - \\ &- A_{J(1)}(1-\lambda) \cdot \sin(\lambda+1)\beta \end{aligned} \right\} = \\ &= \frac{1}{\mu_{(2)}} \left\{ \begin{aligned} &(\chi_{(2)}A_{R(2)} - B_{R(2)}) \cdot \cos(1-\lambda)\beta + \\ &+ (-\chi_{(2)}A_{J(2)} + B_{J(2)}) \cdot \sin(1-\lambda)\beta - \\ &- A_{R(2)}(1-\lambda) \cdot \cos(\lambda+1)\beta - \\ &- A_{J(2)}(1-\lambda) \cdot \sin(\lambda+1)\beta \end{aligned} \right\}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mu_{(1)}} \left\{ \begin{aligned} &(\chi_{(1)}A_{R(1)} + B_{R(1)}) \cdot \sin(1-\lambda)\beta + \\ &+ (\chi_{(1)}A_{J(1)} + B_{J(1)}) \cdot \cos(1-\lambda)\beta - \\ &- A_{R(1)}(1-\lambda) \cdot \sin(\lambda+1)\beta + \\ &+ A_{J(1)}(1-\lambda) \cdot \cos(\lambda+1)\beta \end{aligned} \right\} = \\ &= \frac{1}{\mu_{(2)}} \left\{ \begin{aligned} &(\chi_{(2)}A_{R(2)} + B_{R(2)}) \cdot \sin(1-\lambda)\beta + \\ &+ (\chi_{(2)}A_{J(2)} + B_{J(2)}) \cdot \cos(1-\lambda)\beta - \\ &- A_{R(2)}(1-\lambda) \cdot \sin(\lambda+1)\beta + \\ &+ A_{J(2)}(1-\lambda) \cdot \cos(\lambda+1)\beta \end{aligned} \right\}; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &[A_{R(1)}(2-\lambda)\cos\lambda\beta - A_{J(1)}(2-\lambda)\sin\lambda\beta] + \\ &+ [B_{R(1)}\cos(2-\lambda)\beta + B_{J(1)}\sin(2-\lambda)\beta] = \\ &= [A_{R(2)}(2-\lambda)\cos\lambda(\beta+\omega) + \\ &+ A_{J(2)}(2-\lambda)\sin\lambda(\beta+\omega)] + \\ &+ [B_{R(2)}\cos(2-\lambda)(\beta+\omega) - \\ &- B_{J(2)}\sin(2-\lambda)(\beta+\omega)]; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \lambda(-A_{R(1)} \sin \lambda \beta - A_{J(1)} \cos \lambda \beta) + \\ & + [-B_{R(1)} \sin(2 - \lambda)\beta + B_{J(1)} \cos(2 - \lambda)\beta] = \\ & = \lambda(A_{R(2)} \sin \lambda(\beta + \omega) - A_{J(2)} \cos \lambda(\beta + \omega)) + (21) \\ & + [B_{R(2)} \sin(2 - \lambda)(\beta + \omega) + \\ & + B_{J(2)} \cos(2 - \lambda)(\beta + \omega)]; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\mu_{(1)}} \left\{ \begin{aligned} & (\chi_{(1)} A_{R(1)} - B_{R(1)}) \cdot \cos(1 - \lambda)\beta - \\ & - (-\chi_{(1)} A_{J(1)} + B_{J(1)}) \cdot \sin(1 - \lambda)\beta - \\ & - A_{R(1)}(1 - \lambda) \cdot \cos(\lambda + 1)\beta + \\ & + A_{J(1)}(1 - \lambda) \cdot \sin(\lambda + 1)\beta \end{aligned} \right\} = \quad (22)$$

$$= \frac{1}{\mu_{(2)}} \left\{ \begin{aligned} & (\chi_{(2)} A_{R(2)} - B_{R(2)}) \cdot \cos(1 - \lambda)(\beta + \omega) + \\ & + (-\chi_{(2)} A_{J(2)} + B_{J(2)}) \cdot \sin(1 - \lambda)(\beta + \omega) - \\ & - A_{R(2)}(1 - \lambda) \cdot \cos(\lambda + 1)(\beta + \omega) - \\ & - A_{J(2)}(1 - \lambda) \cdot \sin(\lambda + 1)(\beta + \omega) \end{aligned} \right\};$$

$$\frac{1}{\mu_{(1)}} \left\{ \begin{aligned} & -(\chi_{(1)} A_{R(1)} + B_{R(1)}) \cdot \sin(1 - \lambda)\beta + \\ & + (\chi_{(1)} A_{J(1)} + B_{J(1)}) \cdot \cos(1 - \lambda)\beta + \\ & + A_{R(1)}(1 - \lambda) \cdot \sin(\lambda + 1)\beta + \\ & + A_{J(1)}(1 - \lambda) \cdot \cos(\lambda + 1)\beta \end{aligned} \right\} = \quad (23)$$

$$= \frac{1}{\mu_{(2)}} \left\{ \begin{aligned} & (\chi_{(2)} A_{R(2)} + B_{R(2)}) \cdot \sin(1 - \lambda)(\beta + \omega) + \\ & + (\chi_{(2)} A_{J(2)} + B_{J(2)}) \cdot \cos(1 - \lambda)(\beta + \omega) - \\ & - A_{R(2)}(1 - \lambda) \cdot \sin(\lambda + 1)(\beta + \omega) + \\ & + A_{J(2)}(1 - \lambda) \cdot \cos(\lambda + 1)(\beta + \omega) \end{aligned} \right\}.$$

Итак, получилась система уравнений, состоящая из 8 линейных уравнений с 8 неизвестными (искомыми) коэффициентами $A_{R(1)}$, $A_{J(1)}$, $B_{R(1)}$, $B_{J(1)}$, $A_{R(2)}$, $A_{J(2)}$, $B_{R(2)}$, $B_{J(2)}$. Если эти уравнения переписать так, чтобы все члены с неизвестными коэффициентами были слева, остальные члены — справа, то увидим, что справа равенств окажутся только нули. То есть, система уравнений однородная (с нулевыми правыми частями).

Система уравнений (16)–(23) кроме 8 неизвестных коэффициентов $A_{R(1)}$, $A_{J(1)}$, $B_{R(1)}$, $B_{J(1)}$, $A_{R(2)}$, $A_{J(2)}$, $B_{R(2)}$, $B_{J(2)}$, содержит также неизвестный параметр λ , который можно определить из дополнительного условия. В качестве такого условия может быть выбрано условие существования нетривиального (не нулевого) решения системы однородных уравнений. Условие состоит в том, что определитель си-

стемы уравнений должен быть равен нулю [15]. Иначе все искомые коэффициенты будут равны нулю, а отсюда последуют нулевые напряжения (состояние без нагрузок и напряжений). Если определитель системы обозначить Δ , то условие существования нетривиального решения имеет вид

$$\Delta = 0. \quad (24)$$

Для решения уравнения (24) необходимо записать определитель Δ в явном виде, затем решить полученное уравнение относительно параметра λ . Такое решение невозможно получить аналитически, поэтому использовали численный метод решения.

Результаты решения для некоторых сочетаний исходных характеристик представлены в виде графиков на рисунке 4.

Из полученных графиков следует, что уровень напряжений, в первую очередь, зависит от соотношения модулей упругости компонентов E_1/E_2 , в то время как влияние коэффициентов Пуассона оказывается слабым.

Для каждого сочетания параметров ω , E_1/E_2 существует ряд значений λ_1 , λ_2 , λ_3 , из которых только два одновременно оказываются больше нуля (только при положительных значениях параметра λ создается концентрация напряжений с сингулярностью вида $\sigma \rightarrow \infty$).

Для выявления принципиального отличия полей напряжений и смещений, соответствующих параметрам λ_1 , λ_2 , λ_3 , были построены соответствующие графики. С этой целью для каждого случая были найдены коэффициенты A_R , A_J , B_R , B_J , которые затем были подставлены в выражения (9)–(13).

Коэффициенты $A_{R(1)}$, $A_{J(1)}$, $B_{R(1)}$, $B_{J(1)}$, $A_{R(2)}$, $A_{J(2)}$, $B_{R(2)}$, $B_{J(2)}$ были найдены из систем уравнений (16)–(23) отдельно для каждого из найденных значений λ_1 , λ_2 и λ_3 . Поскольку при этом система уравнений оказывается линейно зависимой, было задано произвольное значение одного из искоемых коэффициентов (например, $B_{J(2)} = 1$), через который определяли все остальные коэффициенты.

На рисунках 5 и 6 показаны распределения напряжений и смещений в окрестности особой точки О с углом $\omega = 90^\circ$ при $E_1/E_2 = 5$ и $E_1/E_2 = 0,2$ соответственно. В нижней части графиков указаны зоны принадлежности точек компонентам 1 и 2 соответственно.

Рисунок 4. Графики зависимости параметра λ от угла ω для разных соотношений упругих свойств компонентов 1 и 2

Рисунок 5. Распределение напряжений и смещений в окрестности особой точки О (рисунок 3, а) для $\omega = 90^\circ$; $E_1/E_2 = 5$; $\sigma = \sigma_\theta$; $\tau = \tau_{r\theta}$

Рисунок 5. Распределение напряжений и смещений в окрестности особой точки О (рисунок 3, а) для $\omega = 90^\circ$; $E_1/E_2 = 0.2$; $\sigma = \sigma_\theta$; $\tau = \tau_{r\theta}$

Полученные результаты позволяют сделать ряд интересных выводов.

Значениям λ_1 и λ_3 во всех случаях соответствуют такие напряженно-деформированные состояния, когда нормальные напряжения σ_0 и смещения u в направлении оси симметрии (x) распределены симметрично относительно этой оси (биссектрисы), и поэтому на этой оси принимают максимальные или минимальные значения. Касательные напряжения τ_{r0} и смещения v в направлении, перпендикулярном оси x , несимметричны, поэтому на этой оси проходят через ноль.

Частные решения, соответствующие значениям λ_2 , имеют обратные свойства: касательные напряжения τ_{r0} и смещения v симметричны, нормальные напряжения σ_0 и смещения u несимметричны.

Отличие частных решений, соответствующих параметрам λ_1 и λ_3 , состоит в том, что в первом случае (λ_1) максимальные напряжения σ_0 получаются на биссектрисе, во втором случае (λ_3) на биссектрисе напряжения σ_0 минимальны.

Симметричное поле, соответствующее параметру λ_1 , появляется при условии, когда больший сектор занят более жестким материалом ($E_1/E_2 > 1$; $\omega < 180^\circ$ или $E_1/E_2 < 1$; $\omega > 180^\circ$). В случае, когда более жесткий материал занимает меньший сектор ($E_1/E_2 > 1$; $\omega < 180^\circ$ или $E_1/E_2 < 1$; $\omega > 180^\circ$), симметричное поле описывается параметром λ_3 .

Вклад каждого из частных решений определяется коэффициентами K_1 , K_2 или K_1 , K_3 . Графики, приведенные на рисунках 5 и 6, соответствуют случаям $K_1 = 1$; $K_2 = 1$; $K_3 = 1$; $r = 1$.

Отметим, что полученные решения при соответствующих условиях ($E_2 \rightarrow 0$; $\omega \rightarrow 0$) переходят в известные решения для трещины в однородном материале. Случай, соответствующий параметру λ_3 вокруг трещины, не реализуется и не может реализоваться по своему физическому смыслу (трещина пустая, т.е. $E_2 = 0$).

Для описания интенсивности каждого из составляющих полей напряжений требуется введение некоторых коэффициентов K_1 и K_2 , которые определяются действующими нагрузками. В механике разрушения эти коэффициенты называются коэффициентами интенсивности напряжений [1, 2, 13]. Но в данных задачах есть существенное отличие, которое вытекает из их размерности. В случае трещины размерность всех коэффициентов ин-

тенсивности напряжений (КИН) одинаковая и постоянная, определяется соотношением

$$\sigma \sim \frac{K}{\sqrt{r}} \text{ или } [K] = \text{Па} \cdot \text{м}^{0,5} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^{1,5}} = \text{Н} \cdot \text{м}^{-1,5}. \quad (25)$$

В случае сингулярной точки, изучаемой в данной работе (рисунок 3), размерность коэффициентов определяется, исходя из формул (9)–(11), из которых вытекает соотношение

$$\sigma \sim \frac{K}{r^\lambda} \text{ или } [K] = \text{Па} \cdot \text{м}^\lambda = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^\lambda = \text{Н} \cdot \text{м}^{(\lambda-2)}. \quad (26)$$

Поскольку значение параметра λ в данной задаче зависит от многих характеристик, в том числе от упругих свойств материалов E_1 и E_2 , а также от угла ω , то получается, что коэффициент интенсивности напряжений в данном случае не имеет постоянной размерности. Более того, отдельные слагаемые (частные решения) поля напряжений в одном и том же случае отличаются, так как параметры λ_1 и λ_2 принимают разные значения.

Данное свойство коэффициентов интенсивности напряжений создает некоторые трудности при их использовании на практике [6]. В механике разрушения используют такое понятие, как вязкость разрушения K_{IC} , физический смысл которой состоит в том, что считается, что разрушение наступает в тот момент, когда коэффициент интенсивности напряжений K_I достигает своего предельного значения, равного значению K_{IC} . В задачах с острым включением (рисунок 3) невозможно так просто выразить условие разрушения, так как величины K_1 , K_2 , K_{IC} являются величинами несопоставимыми, имеют разные размерности. Поэтому возникает проблема – как определить условия прочности элементов конструкций с такими сингулярными точками. Этому вопросу, а также методам определения коэффициентов K_1 , K_2 , K_3 посвятим одну из следующих статей.

В заключение отметим, что приведенные выше математические выкладки имеют вполне реальные физические воплощения. В качестве примера на рисунке 7 показана картина изохром, полученная методом фотоупругости, соответствующая соединению с угловым сварным швом. Наблюдается концентрация линий (полос) в двух точках: в вершине конструктивного непровара (точка K_1) и на переходе от углового шва к основному металлу (точка K_2). Видно, что в этих точках концентрация напряжений имеет сингулярный вид ($\sigma \rightarrow \infty$).

На рисунке 8 показан другой случай — стыковое соединение двух различных материалов. Видно, что в этом случае появляется концентрация напряжений сингулярного типа в окрестности краевой точки стыка.

Рисунок 7. Модель сварного соединения с угловым швом (а) и картина изохром, полученная методом фотоупругости (б)

Рисунок 8. Модель соединения разнородных материалов (а), зависимость параметра λ от угла наклона стыка (б), фотоупругая картина изохром в соединении полиуретана с алюминием (в)

Выводы

1. Решена общая задача о напряженном состоянии неоднородных элементов с V-образными границами. Известные решения для трещин являются частным случаем полученного общего решения.

2. В окрестности угловой точки неметаллического и интерметаллического включения образуется сингулярное поле напряжений с особенностью вида $\sigma \rightarrow \infty$, которое при эксплуатации изделия становится потенциальным источником зарождения и развития трещин.

3. Степень опасности инородных острых включений определяется параметрами λ_1 и λ_2 и коэффициентами K_1 , K_2 .

4. Параметры λ_1 и λ_2 зависят от угла ω и отношения модулей упругости матрицы и

включения. Коэффициенты K_1 и K_2 определяются размерами включений (по аналогии с трещинами) и действующими нагрузками. Чем меньше размеры включений, тем меньше значения коэффициентов K_1 и K_2 .

5. Отсюда получаем ещё одно объяснение некоторым известным фактам:

- мелкозернистые стали более прочны, чем крупнозернистые;
- мелкие инородные включения менее опасны, чем крупные.

6. В расчётах напряжений и прочности тел с инородными включениями можно использовать подходы механики разрушения, усовершенствовав их с учётом выявленных особенностей.

СПИСОК ИСПОЛЪЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 502 с.
2. Механика разрушения и прочность материалов. Киев: Наук. Думка, 1988. Т. 1. 488 с.
3. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
4. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1968. 512 с.
5. Гумеров К.М., Колесов А.В., Гиндин А.В. Напряженно-деформированное состояние в окрестности концентраторов типа двугранного угла // Вопросы сварочного производства. Челябинск: ЧПИ, 1987. С. 3–8.
6. Гумеров К.М., Колесов А.В., Гиндин В.А. и др. К-подход к оценке сопротивляемости хрупкому разрушению элемента конструкции с концентраторами напряжений типа двугранного угла // Исследования по строительной механике и строительным конструкциям. Челябинск: ЧПИ, 1987. С. 63–66.
7. Аксентян О.К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // Прикладная математика и механика. 1967. Вып. 1. С. 178–186.
8. Гумеров К.М. Механизмы изменения механических свойств металла труб и оборудования в водородосодержащих средах // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. 2016. № 3 (23). С. 84–89.
9. Лисин Ю.В., Неганов Д.А., Суриков В.И., Гумеров К.М. Исследование изменений свойств металла трубопроводов в процессе эксплуатации: обобщение результатов и перспективные разработки Уфимской научной школы // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. 2017. Т. 7. №2. С. 22–30.
10. Сильвестров С.А., Гумеров А.К. Инкубационный период развития коррозионного растрескивания под напряжением на магистральных трубопроводах // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2018. Вып. 3 (113). С. 95–113.
11. Михайлов С.Е. Сингулярность напряжений в окрестности ребра в составном неоднородном анизотропном теле и некоторые приложения к композитам // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1979. № 5. С. 103–111.
12. Аксентян О.К., Лущик О.Н. Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. №5. С. 102–108.
13. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
14. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
15. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Физматгиз. 1962. 432 с.

REFERENCES

1. Parton V.Z., Morozov E.M. *Mekhanika uprugoplasticheskogo razrusheniya* [Elastic-Plastic Fracture

Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 502 p. [in Russian].

2. *Mekhanika razrusheniya i prochnost' materialov* [Fracture Mechanics and Strength of Materials]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1988, Vol. 1, 488 p. [in Russian].

3. Timoshenko S.P., Gud'er Dzh. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 576 p. [in Russian].

4. Bezukhov N.I. *Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti* [Fundamentals of the Theory of Elasticity, Plasticity and Creep]. Moscow, Higher School Publ., 1968. 512 p. [in Russian].

5. Gumerov K.M., Kolesov A.V., Gindin A.V. *Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie v okrestnosti konsentratrov tipa dvugrannogo ugla* [Stress-Strain State in the Vicinity of Concentrators such as a Dihedral Angle]. *Voprosy svarochnogo proizvodstva — Matters of the Welding Practice*. Chelyabinsk, ChPI, 1987, pp. 3–8. [in Russian].

6. Gumerov K.M., Kolesov A.V., Gindin V.A. e.a. *K-podkhod k otsenke soprotivlyaemosti khrupkomu razrusheniyu elementa konstruktssii s konsentratormi napryazhenii tipa dvugrannogo ugla* [K-Approach to Assessing the Resistance to Brittle Fracture of Structural Member with Stress Concentrators such as a Dihedral Angle]. *Issledovaniya po stroitel'noi mekhanike i stroitel'nyim konstruktssiyam — Research into Structural Mechanics and Building Structures*. Chelyabinsk, ChPI, 1987, pp. 63–66. [in Russian].

7. Aksentyan O.K. *Osobennosti napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya plity v okrestnosti rebra* [Features of Stress-Strain State of the Plate in the Neighborhood of the Arris]. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Applied Mathematics and Mechanics*, 1967, Issue 1, pp. 178–186. [in Russian].

8. Gumerov K.M. *Mekhanizmy izmeneniya mekhanicheskikh svoystv metalla trub i oborudovaniya v vodorodosoderzhashchikh sredakh* [Variation Mechanisms of Pipe and Equipment Metal Mechanical Features in Hydrogen-Containing Environment]. *Nauka i tekhnologii truboprovodnogo transporta nefiti i nefteproduktov — Science & Technologies: Oil and Oil Products Pipeline Transportation*, 2016, No. 3 (23), pp. 84–89. [in Russian].

9. Lisin Yu.V., Neganov D.A., Surikov V.I., Gumerov K.M. *Issledovanie izmenenii svoystv metalla truboprovodov v protsesse ekspluatatsii: obobshchenie rezul'tatov i perspektivnye razrabotki Ufimskoi nauchnoi shkoly* [Study of Changes in the Properties of the Metal Pipe Work in the Process of Exploitation: a Summary of Results and Future Developments of the Ufa Scientific School]. *Nauka i tekhnologii truboprovodnogo transporta nefiti i nefteproduktov — Science & Technologies: Oil and Oil Products Pipeline Transportation*, 2017, Vol. 7, No. 2, pp. 22–30. [in Russian].

10. Sil'vestrov S.A., Gumerov A.K. *Inkubatsionnyi period razvitiya korrozionnogo rastreskivaniya pod napryazheniem na magistral'nykh truboprovodakh* [Latent Period of Stress Corrosion Cracking Development at the Main Pipelines]. *Problemy sbora, podgotovki i transporta nefiti i nefteproduktov — Problems of Gathering, Treatment and Transportation of Oil and Oil Products*, 2018, Issue 3 (113), pp. 95–113. [in Russian].

11. Mikhailov S.E. *Singulyarnost' napryazhenii v okrestnosti rebra v sostavnom neodnorodnom anizotropnom*

tele i nekotorye prilozheniya k kompozitam [The Singularity of Stresses in the Vicinity of Edge in the Composite Heterogeneous Anisotropic Body, and Some Applications to Composites] *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela — Herald of AS SSSR. Mechanics of Solids*, 1979, No. 5, pp. 103–111. [in Russian].

12. Aksentyan O.K., Lushchik O.N. Ob usloviyakh ogranichennosti napryazhenii u rebra sostavnogo klina [On the Conditions of Stress Limitation near the Edge of the Composite Wedge]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela — Herald of AS SSSR. Mechanics of Solids*, 1978, No. 5, pp. 102–108. [in Russian].

13. Muskhelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti [Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 707 p. [in Russian].

14. Cherepanov G.P. *Mekhanika khrupkogo razrusheniya* [Sharp-Crack Fracture Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 640 p. [in Russian].

15. Kurosh A.G. *Kurs vysshei algebry* [Course of Higher Algebra]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 432 p. [in Russian].

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ABOUT THE AUTHOR

Гумеров Айдар Кабирович, канд. техн. наук, доцент кафедры «Транспорт и хранение нефти и газа», УГНТУ, г. Уфа, Российская Федерация

Aidar K. Gumerov, Candidate of Engineering Sciences, Assistant Professor of Oil and Gas Transport and Storage Department, USPTU, Ufa, Russian Federation

e-mail: gumerov@list.ru